ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

М. В. Садовский
Институт Электрофизики УрО РАН,
Екатеринбург, 620016, Россия,
E-mail: sadovski@iep.uran.ru

Предисловие

Излагаемый ниже материал представляет собой существенно расширенный конспект лекций, читаемых автором на физическом факультете Уральского Государственного Университета, начиная с 1991 года. Основная задача курса — познакомить студентов – теоретиков с основами современной квантовой теории поля и физики элементарных частиц. Поскольку специализация студентов в УрГУ связана, главным образом, с физикой конденсированного состояния, перед автором стояла непростая задача изложения материала в достаточно компактном и элементарном виде. В то же время, задачей курса является изложение набора сведений, которые в настоящее время необходимо знать каждому грамотному теоретику, даже не работающему в данной области. В известном смысле, данный курс завершает общий цикл преподавания теоретической физики.

Квантовая теория поля является, на сегодняшний день, наиболее фундаментальной теорией материи. В последние десятилетия в этой области достигнут впечатляющий прогресс, который связан с построением того, что называется “стандартной моделью” частиц и их взаимодействий. В то же время, соответствующий материал еще не очень широко известен за пределами сообщества людей, непосредственно работающих в физике частиц. С другой стороны, идеи и методы квантовой теории поля нашли очень широкое применение в теории конденсированного состояния, и без знания соответствующих принципов трудно эффективно работать в этой области, казалось бы достаточно далекой от круга интересов теории элементарных частиц.

Имеется достаточно большое количество стандартных учебников квантовой теории поля разного уровня [1–12]. Особенностью большинства из них (кроме, пожалуй, довольно старых книг [5,6]) является последовательное дедуктивное изложение предмета в рамках идеологии, наиболее близкой авторам. Отличие данного курса состоит в том, что здесь принят скорее индуктивный метод, когда одни и те же вопросы зачастую излагаются различными способами. Это ведет к неизбежным повторам, некоторому разнобою в обозначениях и т.п. Однако автору представляется, что такой, достаточно неформальный, подход более полезен с точки зрения знакомства с разнообразием идей и методов, используемых при решениии реальных задач. Для понимания большей части курса требуется знание основ квантовой механики и статистической физики. Некоторые нужные подходы, не излагающиеся в традиционных курсах квантовой механики и статистической физики, будут обсуждены по ходу дела.

При написании данных лекций автор в наибольшей степени опирался на книги [1,8], но довольно много материала взято и из других источников, которые будут цитироваться по ходу изложения. В ряде случаев, мы стараемся проводить аналогии с известными задачами теории конденсированного состояния или приводить примеры решения конкретных задач из этой области, более близкой слушателям. При этом следует иметь в виду, что и современная теория элементарных частиц заимствовала многие идеи и методы теории конденсированного состояния, и одной из задач данного курса является демонстрация этого единства теоретической физики.

Некоторой необычностью курса, связанной с отмеченными выше его особенностями, является довольно большое число литературных ссылок. При этом имелось в виду, что наличие ссылок позволяет читателю, при желании, перейти к более углубленному рассмотрению тех или иных вопросов, тем более что чтение данных лекций не может, конечно, заменить изучения более фундаментальных учебников.

Центральной идеей курса является изложение основ калибровочных теорий взаимодействия элементарных частиц и основ "стандартной модели". В методическом плане достаточно подробно излагается диаграммная техника Фейнмана, значение которой выходит далеко за пределы теории элементарных частиц [13], а также формализм функционального (континуального) интегрирования, который также широко используется в настоящее время в других областях теоретической физики [14,15]. Мы сознательно ограничиваемся этим уже достаточно традиционным материалом, составляющим основу современного понимания взаимодействий элементарных частиц. В этом смысле, излагаемый материал не нов, все эти результаты были получены примерно к середине 70-х годов. Мы сознательно оставляем за рамками изложения более современные, но и более спекулятивные вопросы, такие, скажем, как суперсимметрия. Тем более не излагаются вещи, выходящие за рамки собственно квантовой теории поля, такие как струны и суперструны. Собственно физике частиц также уделяется довольно мало места, приводятся лишь отдельные примеры расчета тех или иных простейших эффектов, с целью иллюстрации применения общих принципов теории. Хорошее изложение конкретных вопросов современной физики частиц можно найти в [16, 17].

Работа над текстом лекций частично поддержана грантом CRDF No. REC-005.

М.В. Садовский, Екатеринбург, 2002 г.

.

У нас нет лучшего средства для описания элементарных частиц, чем квантовая теория поля. Квантовое поле — это ансамбль бесконечного числа взаимодействующих гармонических осцилляторов. Возбуждения этих осцилляторов отождествляются с частицами... Все это очень в духе XIX столетия, когда люди пытались строить механические модели всех явлений. Я не вижу в этом ничего плохого, поскольку любая нетривиальная идея в определенном смысле верна. Мусор прошлого часто оказывается сокровищем настоящего (и наоборот). Поэтому мы будем смело прибегать к различным аналогиям при обсуждении наших основных проблем.

А.М. Поляков. "Калибровочные поля и струны", *1987,* [24]

Оглавление

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О СТРУКТУРЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

1.1 Фундаментальные частицы.

Прежде чем переходить к систематическому изложению материала, целесообразно провести краткий обзор мира элементарных частиц, принципы описания которого и составляют нашу главную задачу. При этом будет введена основная терминология физики элементарных частиц, кратко описана их классификация и отмечены некоторые центральные идеи, которые используются при описании их взаимодействий. Здесь же уместно затронуть ряд вопросов, которые в дальнейшем вообще не будут обсуждаться. Более подробно с этими вопросами можно ознакомиться (на вполне элементарном уровне) в очень хорошо написанных книге [16] и обзоре [21]. Крайне полезно прочитать эти работы *до* чтения основной части излагаемых лекций! Аналогичной по духу и стилю изложения является и книга [17]. На менее элементарном уровне с основными результатами современной экспериментальной физики частиц, также, как и с главными идеями, используемыми при их классификации и описании их взаимодействий, можно познакомиться в [18–20].

В течение многих лет (особенно в 50–60–х годах, а в популярной литературе и гораздо позже) было принято говорить о "кризисе" в физике элементарных частиц, который связывался как с огромным (сотни!) числом экспериментально открытых субъядерных частиц, так и с трудностями теоретического описания их взаимодействий. Одним из наиболее значительных достижений современной физики явилось чрезвычайное упрощение этой запутанной картины, которое и выражается в стандартной модели. В настоящее время *экспериментально* установлено, что мир истинно элементарных частиц [1] устроен достаточно просто, а основы строения материи надежно описываются *теоретически* в рамках также твердо установленных принципов современной квантовой теории поля.

Наиболее фундаментальным, согласно релятивистской квантовой теории, является деление элементарных частиц на *фермионы* и *бозоны*. Экспериментально открыты всего 12 элементарных фермионов (со спином $s = 1/2$) и 4 бозона (со спином $s = 1$). Это, разумеется, не считая соответствующих античастиц. В этом смысле мир устроен достаточно просто!

1.1.1 Фермионы.

Все известные фундаментальные фермионы ($s = 1/2$) перечислены в Таблице I. Из их свойств в этой же таблице указан лишь электрический заряд. Эти 12 фермионов делятся на три "поколения" [2], в каждом из которых имеется по два лептона и два кварка [3]. У каждого заряженного фермиона есть своя античастица с другим знаком электрического заряда. Есть ли античастицы у нейтрино сейчас неизвестно, возможно, что они являются так называемыми истинно нейтральными частицами.

Таблица I. Фундаментальные фермионы.

Поколения	1	2	3	Q
Кварки	u	c	t	$+2/3$
("верхние" и "нижние")	d	s	b	$-1/3$
Лептоны	ν_e	ν_μ	ν_τ	0
(нейтрино и заряженные)	e	μ	τ	-1

Все остальные субъядерные частицы являются составными и строятся из кварков. Как это делается, достаточно хорошо и подробно описано в [18, 19] [4] и мы не будем уделять этому внимания в дальнейшем. Заметим только, что из троек кварков строятся *барионы*, т.е. фермионы типа протона, нейтрона и разнообразных гиперонов, тогда как из пар кварк–антикварк строятся *мезоны*, т.е. бозоны типа π-мезонов, K-мезонов и т.п. Барионы и мезоны объединяются в класс частиц, именуемых *адронами* — эти частицы участвуют во всех типах взаимодействий, известных в природе: сильном, электромагнитном и слабом. Лептоны участвуют только в электромагнитных и слабых взаимодействиях. Аналогичные частицы из разных поколений отличаются только по массе, все остальные квантовые числа у них просто совпадают. Например, мюон μ во всех отношениях аналогичен электрону, но примерно в 200

[1] Естественно, что под истинно элементарными понимаются частицы, которые на современном уровне знания и экспериментальной техники не состоят из более элементарных составляющих.

[2] В теории частиц существует устоявшаяся терминология, в дальнейшем, при употреблении соответствующих терминов мы не будем использовать кавычки. При этом, все же, нужно подчеркнуть, что все эти понятия конечно же не имеют никакого отношения к обыденному смыслу тех слов, которыми они, за неимением лучшего, обозначаются.

[3] Лептоны, такие как электрон и электронное нейтрино, известны уже давно. В популярной и общефизической литературе, как правило, кварки именуются гипотетическими частицами. Это неверно, они давно изучаются экспериментально, а некие сомнения в их реальности являются наследием их теоретического "происхождения" и связаны с невозможностью их наблюдения в свободной состоянии. (конфайнмент). Нужно подчеркнуть, что кварки абсолютно реальны, они четко наблюдаются внутри адронов в многочисленных экспериментах при высоких энергиях.

[4] В историческом плане возникновение кварковой модели хорошо проследить, читая старые обзоры [22, 23].

раз тяжелее, природа этой разницы не известна. В Таблице II приведены экспериментальные значения масс всех фундаментальных фермионов (в энергетических единицах), а также времена жизни (или соответствующие ширины резонансов) в случае нестабильных частиц. Там же указан год открытия соответствующей частицы [5]. Значения масс кваркой (также как и их времена жизни) не следует понимать слишком буквально, поскольку кварки не наблюдаются в свободном виде. Эти значения характеризуют кварки, находящиеся глубоко внутри адронов.

Таблица II. Массы и времена жизни фундаментальных фермионов.

$\nu_e < 10\,\mathrm{eV}$ (1956)	$\nu_\mu < 170\,\mathrm{KeV}$ (1962)	$\nu_\tau < 24\,\mathrm{MeV}$ (1975)
$e = 0.5\,\mathrm{MeV}$ (1897)	$\mu = 105.7\,\mathrm{MeV}$, $2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$ (1937)	$\tau = 1777\,\mathrm{MeV}$, $3 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}$ (1975)
$u = 5\,\mathrm{MeV}$ (1964)	$c = 1300\,\mathrm{MeV}$, $10^{-12}\,\mathrm{s}$ (1974)	$t = 176\,\mathrm{GeV}$, $\Gamma = 2\,\mathrm{GeV}$ (1994)
$d = 10\,\mathrm{MeV}$ (1964)	$s = 150\,\mathrm{MeV}$ (1964)	$b = 4.3\,\mathrm{GeV}$, $10^{-12}\,\mathrm{s}$ (1977)

Занятно, что для построения всего окружающего нас мира, состоящего реально из атомов, т.е. ядер и электронов, а соответственно из таких стабильных (или относительно стабильных) частиц, как электрон, протон, нейтрон и нейтрино, достаточно частиц только из первого поколения! Зачем “нужны” еще два поколения — неизвестно, достаточная уверенность существует только в том отношении, что других поколений в природе нет.

1.1.2 Векторные бозоны.

Помимо фундаментальных фермионов, являющихся основными “кирпичиками” материи, известны из опыта еще 4 векторных ($s = 1$) бозона, являющиеся переносчиками основных взаимодействий: всем известный фотон γ, глюон g, нейтральный слабый бозон Z^0 и заряженные слабые бозоны $W^\pm$ (являющиеся античастицами друг по отношению к другу). Основные свойства этих частиц приведены в Таблице III.

Таблица III. Фундаментальные бозоны, их массы и ширины.

Бозон	γ (1900)	g (1973)	Z (1983)	W (1983)
Масса	0	0	91.2 GeV	80.4 GeV
Ширина	0	0	2.5 GeV	2.1 GeV

Лучше всего изучены, естественно, фотоны. Это радиоволны, свет, рентгеновские и γ-лучи. Масса фотона равна нулю, так что энергетический спектр свободного фотона (закон дисперсии) имеет вид [6]: $E = \hbar c|\mathbf{k}|$. Фотоны с $E \neq \hbar c|\mathbf{k}|$ называются виртуальными, например кулоновское поле в атоме водорода создают виртуальные

[5] Год открытия, конечно, определен иногда достаточно условно. В некоторых случаях указан год теоретического предсказания.

[6] Пока мы выписываем в явном виде $\hbar$ и c, но в дальнейшем мы быстро перейдем на естественную для квантовой теории поля систему единиц $\hbar = c = 1$. Свойства и правила работы в такой системе прекрасно описаны в книжке [16]. Когда это нужно, $\hbar$ и c легко восстановить.

фотоны с $\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 \gg E^2$. Источником фотонов является электрический заряд. Соответствующая безразмерная константа взаимодействия — известная постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. Все электромагнитные взаимодействия обусловлены обменом фотонами. Теория, описывающая электромагнитные взаимодействия, называется *квантовой электродинамикой* (КЭД).

Массивные векторные бозоны Z и $W^{\pm}$ являются переносчиками короткодействующего слабого взаимодействия. Вместе с фотоном они входят в единую группу *электрослабого* взаимодействия. Соответствующие безразмерные константы взаимодействия $\alpha_W = g_W^2/\hbar c \sim \alpha_Z = g_Z^2/\hbar c \sim \alpha$, т.е. порядка электромагнитной константы.

Глюоны являются переносчикми сильного взаимодействия. Источниками глюонов являются специфические "цветовые" заряды. Каждый из 6 сортов кварков (или, как говорят "ароматов") u, d, c, s, t, b существует в трех цветовых разновидностях: красной r, зеленой g, синей b. Антикварки обладают соответствующими антицветами: $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$. Цвета кварков не зависят от их ароматов. Адроны состоят из симметричных или противоположных по цвету комбинаций кварков — они "белые", их цвет равен нулю. С учетом античастиц, кварков 12, а с учетом цвета — 36. Но для каждого аромата речь идет просто о разных по цвету состояниях одной частицы. Цветовая симметрия является точной.

Цветовые состояния глюонов сложнее. Глюон имеет не один цветовой индекс, а два. Всего имеется 8 цветных глюонов: $3 \times \bar{3} = 8 + 1$, одна комбинация $r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}$ является белой и не несет цветового заряда. В отличие от электродинамики, где фотоны электрически нейтральны, глюоны, как носители цветовых зарядов, взаимодействуют и с кварками и между собой, т.е. излучают и поглощают новые глюоны ("светящийся свет"). Эта особенность является одной из причин конфайнмента: при попытке развести кварки и глюоны их энергия возрастает, что и приводит к невылетанию кварков. Теория взаимодействия кварков называется *квантовой хромодинамикой* (КХД).

1.2 Фундаментальные взаимодействия.

В физике элементарных частиц рассматривается три вида взаимодействий: сильные, электромагнитные и слабые. Теория сильных взаимодействий основана на квантовой хромодинамике и описывает взаимодействия кварков внутри адронов. Электромагнитные и слабые вазимодействия объединяются в единую схему электрослабой теории. Эти взаимодействия характеризуются безразмерными константами взаимодействия: $\alpha = e^2/\hbar c$, $\alpha_s = g^2/\hbar c$, $\alpha_W = g_W^2/\hbar c$, $\alpha_Z = g_Z^2/\hbar c$. Фактически еще в 50-х годах было осознано, что $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ является константой лишь при нулевом (точнее очень малом) квадрате передаваемого в рассматриваемом процессе взаимодействия (реакции) импульса q^2. Фактически, из-за явления *поляризации вакуума* величина α растет с ростом q^2 и при больших, но конечных q^2, может даже обратиться в бесконечность (полюс Ландау – Померанчука). Тогда это рассматривалось как внутренняя противоречивость КЭД. После создания КХД выяснилось, что $\alpha_s(q^2)$, в противоположность $\alpha(q^2)$, стремится к нулю при $q^2 \to \infty$, что составляет суть явления так называемой *асимптотической свободы.* Асимптотическая свобода приводит к тому, что процессы взаимодействия глюонов и кварков на малых расстояниях (большие q^2!), хорошо описываются теорией возмущений, как и электромагнитные взаимодействия. Оборотной стороной асимпотической свободы является конфайнмент, т.е. рост взаимодействия кварков и глюонов на больших расстояниях.

Трудности теоретического описания конфайнмента (удержания кварков) связаны именно с неприменимостью теории возмущений на больших (порядка размеров адронов) расстояниях. Константы слабого взаимодействия α_W, α_Z также меняются с передаваемым импульсом — при росте q^2 от нуля до $q^2 \sim 100\,\mathrm{GeV}^2$, они возрастают (экспериментально!) на 1%. Таким образом, современная теория имеет дело с так называемыми "бегущими" константами связи. В этом смысле, старый вопрос о величине электрического заряда, как фундаментальной константы Природы, фактически, утратил смысл — заряд не константа, а функция характерного расстояния, на котором рассматривается взаимодействие частиц. Если теоретически проэкстраполировать движение всех констант связи в сторону больших q^2, то оказывается, что имеется тенденция к пересечению соответствующих зависимостей в одной точке при $q^2 \sim 10^{15} - 10^{16}\,\mathrm{GeV}^2$, где $\alpha \sim \alpha_s \sim \alpha_W \sim \frac{8}{3}\frac{1}{137} \approx \frac{1}{40}$. Это приводит к надеждам на то, что при таких больших q^2 существует единая теория электрослабого и сильного взаимодействия.

1.3 Стандартная модель и перспективы.

В основе *стандартной модели* элементарных частиц лежит принцип относительности (эквивалентность инерциальных систем отсчета). Соответственно, все процессы считаются разыгрывающимися в четырехмерном пространстве-времени Минковского: $(x, y, z, t) = (\mathbf{r}, t)$. Расстояние между двумя точками (событиями) A и B в этом пространстве определяется четырехмерным интервалом: $s_{AB}^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2$. Интервал $s_{AB}^2 \geq 0$ для причинно связанных событий (времениподобный интервал), если же точки разделены пространственно подобным интервалом $s_{AB}^2 < 0$, то они не могут быть причинно связаны.

В основе теории лежит концепция *локального* квантового поля — коммутаторы полей в точках, разделенных пространственно подобным интервалом всегда равны нулю: $[\psi(x_A), \psi(x_B)] = 0$ при $s_{AB}^2 < 0$, что означает независимость соответствующих полей. Частицы (античастицы) рассматриваются как кванты (возбуждения) соответствующих полей. Из самых общих принципов релятивистской инвариантности и устойчивости основного состояния системы полей следует фундаментальная теорема о связи спина и статистики: частицы с полуцелым спином представляют собой фермионы, а частицы с целым спином — бозоны. В принципе, бозоны всегда можно мыслить "составленными" из фермионов, в этом смысле фермионные поля "более фундаментальны".

Основополагающую роль в теории играют *принципы симметрии.* Помимо уже упомянутой релятивистской инвариантности, в современной теории рассматривается целый ряд точных и приближенных симметрий (групп симметрии), которые следуют из обширного экспериментального материала по классификации частиц и их взаимодействиям. Симметрии тесно связаны с соответствующими *законами сохранения* (теорема Нетер), такими как законы сохранения энергии-импульса, момента, различных зарядов. Принцип *локальной калибровочной симметрии* является ключевым при построении теории взаимодействия элементарных частиц. Наконец, явление спонтанного нарушения симметрии (фазовый переход в вакууме) ведет к механизму генерации масс для исходно безмассовых частиц (механизм Хиггса)[7].

[7]Механизм Хиггса в квантовой теории поля является прямым аналогом эффекта Мейсснера в теории сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау.

Большая часть лекций посвящена подробной расшифровке этих, и ряда последующих, заявлений.

В основе стандартной модели лежит *экспериментально* установленная локальная калибровочная симметрия, описываемая группой $SU(3)_c \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$. Здесь $SU(3)_c$ — симметрия сильного цветового взаимодействия кварков и глюонов, а $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ описывает электрослабые взаимодействия. В *ненарушенной* симметрии все фермионы и векторные калибровочные бозоны безмассовы. В результате спонтанного нарушения симметрии $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$, бозоны — переносчики слабого взаимодействия становятся массивными, а фотон остается безмассовым. Получают массы и лептоны (кроме нейтрино?)[8]. Электрически нейтральное хиггсово поле обладает ненулевым вакуумным средним (вакуумный бозе-конденсат). Кванты этого поля ("хиггсы") — скалярные частицы со спином $s = 0$, пока что не обнаружены эспериментально. Задача их обнаружения стоит на повестке дня экспериментов на новом поколении строящихся ускорителей. Практически нет сомнений, что "хиггсы" будут открыты, но дело осложняется весьма неопределенными оценками их масс. Большинство оценок дает лишь грубые неравенства типа: $m_Z < m_h < 2m_Z$ [9]. Существует интересный вариант, когда "хиггсы" могут оказаться составленными из фермионов стандартной модели, но он остается довольно плохо разработанным. В целом проблема обнаружения хиггсовских частиц остается проблемой номер один современной экспериментальной физики элементарных частиц. Ее решение завершит экспериментальное подтверждение стандартной модели.

Выше уже отмечалось, что стандартной модели (даже с учетом только первого поколения фундаментальных фермионов) уже достаточно для полного понимания того, как "устроен" окружающий нас мир, состоящий из атомов и ядер. Выходы за рамки стандартной модели носят до сих пор достаточно спекулятивный характер. Существует целый ряд моделей *великого объединения*, в которых в рамках единой группы симметрии описываются мультиплеты кварков и лептонов. Эта симметрия, предположительно, является точной в области передаваемых импульсов (расстояний) порядка $q^2 \sim 10^{15} - 10^{16}\,\mathrm{GeV}^2$, где, как отмечено выше, примерно сравниваются константы всех взаимодействий. Экспериментальная проверка моделей великого объединения весьма затруднительна, поскольку прямые эсперименты в указанной области энергий вряд ли когда-либо будут доступны человечеству. Единственным проверяемым, в принципе, предсказанием этих моделей является распад протона, но, несмотря на интенсивные эксперименты, ведущиеся уже около 20 лет, он так и не был обнаружен, что заведомо позволяет отбросить простейшие схемы великого объединения. Проверка же более хитрых моделей, где время жизни протона оказывается на порядок или два больше, чем в простейшем случае, также становится очень проблематичной.

Другое актуальное направление: поиски *суперсимметрии* (SUSY), объединяющей в единые мультиплеты фермионы и бозоны. Есть следующие основания для веры в существование SUSY:

- сокращение неких расходимостей в хиггсовском секторе стандартной модели,
- объединение всех взаимодействий, включая гравитацию (?),

[8] Вопрос о массе нейтрино остается открытым, возможно, что она не нулевая, но очень маленькая (существенно меньше массы электрона).

[9] В августе 2000 года появились предварительные данные из CERN о наблюдении хиггсовской частицы с массой порядка 115 GeV.

- математическая привлекательность и красота.

В простейшем варианте SUSY — теории у каждой из известных нам частиц имеется соответствующий "суперпартнер", отличающийся (в случае точной SUSY) лишь спином: фотону с $s = 1$ соответствует фотино с $s = 1/2$, электрону с $s = 1/2$ соответствует электрино с $s = 0$, кваркам с $s = 1/2$ — скварки с $s = 0$ и т.д. Суперсимметрия заведомо сильно нарушена (по массе), в настоящее время экспериментальные указания на существование суперпартнеров обычных частиц практически отсутствуют. В наших лекциях мы не будем заниматься изложением идеологии суперсимметрии.

Наконец, должна быть еще одна частица, в существовании которой практически никто не сомневается. Это гравитон, т.е. квант переносчик гравитационного взаимодействия ($s = 2$). Но гравитация заведомо находится за пределами экспериментальной физики частиц. Дело в том, что гравитационное взаимодействие является, с точки зрения физики элементарных частиц, очень слабым. Его роль может стать заметной при изучении микропроцессов лишь при фантастических, так называемых *планковских* энергиях порядка $E \sim m_P c^2 = (\hbar c/G)^{1/2} c^2 = 1.22 \cdot 10^{19}\,\mathrm{GeV}$. Здесь G — ньютоновская константа гравитационного взаимодействия, а m_P — так называемая планковская масса ($\sim 10^{-5}$ грамм!), которая определяет и характерную планковскую длину: $\Lambda_P \sim \hbar/m_P c \sim \sqrt{\hbar G/c^3} \sim 10^{-33}\,\mathrm{cm}$. Естественно, что эксперименты при таких энергиях и расстояниях также вряд ли когда-либо будут доступны человечеству. Однако же, квантовые гравитационные процессы, несомненно играли ключевую роль в момент Большого Взрыва и, таким образом, определили будущую эволюцию Вселенной. Поэтому, квантовая гравитация представляет принципиальный интерес для релятивистской космологии. Многие теоретики считают, что без понимания квантовой гравитации невозможно решить целый ряд принципиальных вопросов теории элементарных частиц. К сожалению, квантовая теория гравитации до сих пор не построена, и тому имеется целый ряд серьезных причин. Попытки квантования релятивистской теории гравитации Эйнштейна (общей теории относительности) неизбежно наталкиваются на практически непреодолимые трудности, связанные со сложным нелинейным характером этой теории. Кроме того, во всех вариантах такого квантования получается существенно *неперенормируемая* теория, к которой, практически, неприменимы методы современной квантовой теории поля. Разумеется, активные исследования в этой области ведутся уже много лет. Есть много красивых подходов и обобщений обычной теории гравитации, таких, например, как супергравитация. Есть красивые идеи "индуцированной" гравитации, когда теория Эйнштейна рассматривается как низкоэнергетический (феноменологический) предел, возникающий при рассмотрении квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени.

Наконец, есть еще более фантастические возможности. Существует идея, что квантовая теория поля и стандартная модель являются эффективными феноменологическими теориями, построенными на новой основе фундаментальной теории *струн*. В этом подходе, в основе всего лежат не точечные частицы, а струны с характерными размерами порядка $\Lambda_P \sim 10^{-33}\,\mathrm{cm}$. Эти струны движутся (колеблются) в многомерных пространствах и обладают бозон-фермионной симметрией (суперструны). На языке таких представлений разрабатывается "теория всего".

Но наши задачи в данном курсе являются гораздо более скромными. Существует, конечно, забавная терминология [21], согласно которой, работы, посвященные частицам, которые уже открыты или будут открыты в обозримом будущем, называются "феноменологическими", тогда как работы, посвященные частицам, которые *никогда* не будут открыты экспериментально, следует называть “теоретическими”. В этом смысле мы вообще не будем заниматься фундаментальной теорией, однако и на материале, достающемся нам из реального эксперимента, хватает пока интересных вещей.

Глава 2

ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ. СИММЕТРИИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

2.1 Лагранжева механика частицы.

Вспомним сначала основные принципы классической механики. Рассмотрим частицу (материальную точку) с массой m, движущуюся в некотором потенциале $V(x)$. Для простоты рассматриваем одномерное движение. В момент времени t частица находится в точке $x(t)$ своей траектории, которая связывает начальную $x(t_1)$ и конечную $x(t_2)$ точки, как это показано на Рис. 2.1(а). Эта траектория, как известно, определяется из решения уравнения движения Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{2.1}$$

с соответствующими начальными условиями. Это уравнение можно "вывести" из принципа наименьшего действия. Для этого вводится функция Лагранжа, представляющая собой разность кинетической и потенциальной энергий:

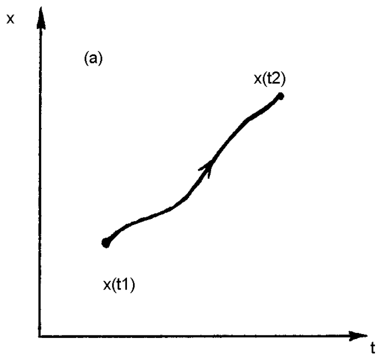
$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \tag{2.2}$$

и интеграл действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, \dot{x})\,, \tag{2.3}$$

где, как обычно, $\dot{x}$ обозначает скорость $\dot{x} = dx/dt$. Истинная траектория частицы определяется минимумом (в общем случае – экстремумом) действия на множестве всех мыслимых траекторий, связывающих точки $x(t_1)$ и $x(t_2)$, как это показано на Рис. 2.1(б). Из этого утверждения сразу следуют классические уравнения движения. В самом деле, рассмотрим малую вариацию $a(t)$ траектории вблизи той самой истинной траектории $x(t)$:

$$x(t) \to x'(t) = x(t) + a(t)\,. \tag{2.4}$$



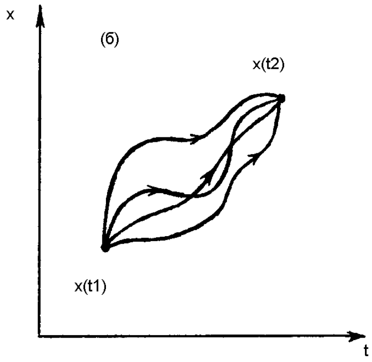


Рис. 2.1: (а) Траектория частицы, удовлетворяющая принципу наименьшего действия. (б) Набор возможных траекторий частицы.

В начальной и конечной точках вариация, естественно, полагается равной нулю (закрепленные концы):

$$a(t_1) = a(t_2) = 0\,. \tag{2.5}$$

При подстановке (2.4) в действие (2.3) получаем его вариацию в виде:

$$\begin{aligned} S \to S' &= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{x}+\dot{a})^2 - V(x+a) \right] = \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{a} - V(x) - aV'(x) \right] + O(a^2) = \\ &= S + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt [m\dot{x}\dot{a} - aV'(x)] \equiv S + \delta S\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $V' = dV/dx$, так что

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt [m\dot{x}\dot{a} - aV'(x)]\,. \tag{2.7}$$

Требование экстремальности действия сводится к условию $\delta S = 0$. Интегрируя первое слагаемое в (2.7) по частям, получим:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{x}\dot{a} = \dot{x}a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, a\ddot{x} = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, a\ddot{x}\,, \tag{2.8}$$

поскольку вариации траектории на концах закреплены (2.5). Тогда имеем:

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, a[m\ddot{x} + V'(x)] = 0\,, \tag{2.9}$$

что, ввиду произвольности вариации a, сводится к закону движения Ньютона (2.1):

$$m\ddot{x} = -V'(x)\,,$$

определяющему единственную траекторию движения классической частицы.

2.2 Действительное скалярное поле. Уравнения Лагранжа.

Переход от классической механики частицы к классической теории поля сводится к переходу от рассмотрения траектории частицы к анализу пространственно- временных конфигураций поля, определенного в каждой точке пространства- времени. Аналогом координаты частицы как функции времени $x(t)$ становится полевая функция $\varphi(x^\mu) = \varphi(x, y, z, t)$.

Отступление о релятивистских обозначениях:

В дальнейшем используются следующие стандартные обозначения. Две мировых точки (события) (x, y, z, t) и $x + dx, y + dy, z + dz, t + dt$ разделены интервалом:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,.$$

Интервал $ds^2 > 0$ называется *времениподобным*, соответствующие точки (события) могут быть причинно связаны. Интервал $ds^2 < 0$ называется *пространственноподобным*, соответствующие точки (события) не могут быть причинно связаны.

Набор величин

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

задает *контрвариантные* компоненты 4-радиус-вектора, а

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z)$$

представляет его *ковариантные* компоненты. Тогда интервал записывается в виде:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu \equiv dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\,.$$

Имеет место очевидная связь:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3\,,$$

где ввели метрический тензор в пространстве-времени Минковского:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\;; \qquad g_{\mu\nu} g^{\nu\delta} = \delta_\mu^\delta\,.$$

Для дифференциальных операторов будем использовать сокращенную запись:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)\,,$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)\,,$$

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\,.$$

Для вектора энергии-импульса частицы с массой покоя m имеем:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)\,, \qquad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right)\,,$$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2\,.$$

Для типичной комбинации, стоящей в интегралах Фурье:

$$px = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\,.$$

В дальнейшем, почти всегда, используется естественная система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Преимущества такой системы, кроме очевидного сокращения формул, и ее связь с традиционными системами единиц хорошо описаны в книге [16].

Рассмотрим простейший пример свободного *скалярного* поля $\varphi(x^\mu) = \varphi(x,y,z,t)$, которое сопоставляется частицам со спином 0. Это поле удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона:

$$(\Box + m^2)\varphi = 0\,. \tag{2.10}$$

Исторически это уравнение было получено как релятивистское обобщение уравнения Шредингера. Действительно, считая $\varphi(x_\mu)$ волновой функцией частицы и учитывая, что в релятивистском случае ее закон дисперсии (спектр) определяется равенством:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2\,, \tag{2.11}$$

можно провести стандартную шредингеровскую замену динамических переменных на операторы по правилу:

$$\mathbf{p} \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,, \qquad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{2.12}$$

что немедленно дает (2.10). Естественно, что эта процедура не есть *вывод*, более последовательная схема рассмотрения сводится к получению релятивистских полевых уравнений из *вариационного принципа*.

Введем *функционал действия* как:

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\,, \tag{2.13}$$

где $\mathcal{L}$ — *лагранжиан* (плотность функции Лагранжа) рассматриваемой системы полей. Функция Лагранжа есть $L = \int d^3\mathbf{r}\,\mathcal{L}$. Обычно полагают, что $\mathcal{L}$ зависит от поля φ и его первых производных. Уравнение Клейна – Гордона легко выводится с помощью лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 = \frac{1}{2}\left[(\partial_0\varphi)^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]\,. \tag{2.14}$$

В этом можно убедиться, если рассмотреть общий лагранжев формализм в теории поля. Однако прежде полезно сделать еще

Отступление о размерностях:

В рассматриваемой системе единиц $\hbar = c = 1$ размерности энергии, массы и обратной длины просто совпадают: [*энергия*]=[*масса*]=l^{-1}. Для понимания последнего равенства достаточно вспомнить, что комптоновская длина волны частицы с массой m определяется как $\hbar/mc$. Действие $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$ имеет размерность $\hbar$ и, таким образом, *безразмерно*! Тогда размерность лагранжиана $[\mathcal{L}] = l^{-4}$. Соответственно, из (2.14) получаем размерность скалярного поля $[\varphi] = l^{-1}$. Подобный анализ размерностей пригодится нам не однажды.

Пусть поле φ заполняет некоторую область (объем) $\mathcal{R}$ в пространстве-времени Минковского. В качестве начальной и конечной гиперповерхностей можно взять временные срезы $t = t_1$ и $t = t_2$. Рассмотрим произвольные малые вариации координат и полей:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu\,, \tag{2.15a}$$
$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x)\,. \tag{2.15b}$$

При этом полагаем, что вариации δx^μ и $\delta\varphi(x)$ обращаются в нуль на границе рассматриваемой области $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$\delta\varphi(x) = 0\,, \qquad \delta x^\mu = 0\,, \qquad x \in \tilde{\mathcal{R}}\,. \tag{2.16}$$

Рассмотрим достаточно общий случай, когда лагранжиан $\mathcal{L}$ явно зависит от координаты x^μ, что может быть в ситуации, когда имеется взаимодействие с внешними источниками. Полная вариация поля может быть записана в виде:

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x)\,, \tag{2.17}$$

где

$$\Delta\varphi = \varphi'(x') - \varphi(x') + \varphi(x') - \varphi(x) = \delta\varphi(x) + \delta x^\mu(\partial_\mu\varphi)\,. \tag{2.18}$$

Тогда вариация действия есть:

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} d^4x'\, \mathcal{L}(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'_\mu) - \int_{\mathcal{R}} d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x_\mu)\,. \tag{2.19}$$

Здесь $d^4x' = J(x/x')d^4x$, где $J(x/x')$ — якобиан перехода от x к x'. Из (2.15a) видно, что

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda + \partial_\lambda \delta x^\mu \tag{2.20}$$

и для якобиана можно написать простое выражение с точностью до членов первого порядка по δx^μ:

$$J(x/x') = \mathrm{Det}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)\,. \tag{2.21}$$

Тогда

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} d^4x \big[\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu \delta x^\mu\big]\,, \tag{2.22}$$

где

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\,. \tag{2.23}$$

Из (2.15a) ясно, что $\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu\delta\varphi$, так что из (2.22) и (2.23) немедленно следует:

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) \right\}. \tag{2.24}$$

Третье слагаемое в фигурных скобках представляет собой полную дивергенцию, так что соответствующий вклад в интеграл может быть преобразован (по теореме Гаусса) в поверхностный интеграл по границе области $\mathcal{R}$. Второе слагаемое в (2.24) также можно переписать таким образом, чтобы выделить полную дивергенцию:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) = \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right\} - \partial_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right\}\delta\varphi\,. \tag{2.25}$$

В результате переписываем вариацию действия (2.24) в виде:

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\right\}\delta\varphi + \int_{\tilde{\mathcal{R}}} d\sigma_\mu \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi + \mathcal{L}\delta x^\mu\right\}. \tag{2.26}$$

В силу условия (2.16) вариации φ и x^μ на границе области интегрирования $\mathcal{R}$ равны нулю, так что поверхностный интеграл в (2.26) обращается в нуль. Тогда условие стационарности действия $\delta S = 0$ при произвольных вариациях поля и координат дает:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right] = 0\,. \tag{2.27}$$

Это есть общий вид уравнений Лагранжа (уравнений движения) для поля φ [1].

Запишем лагранжиан скалярного поля (2.14) в виде простейшей квадратичной формы по полю и его первым производным:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\,.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = g^{\mu\nu}(\partial_\nu\varphi) = \partial^\mu\varphi \tag{2.28}$$

и уравнение Лагранжа сводится к уравнению Клейна – Гордона:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi \equiv \Box\varphi + m^2\varphi = 0\,. \tag{2.29}$$

Это уравнение линейно и отвечает свободному (невзаимодействующему) полю. Если бы мы приписали к лагранжиану (2.28) инварианты поля φ более высоких порядков (степеней), то у нас возникли бы нелинейные уравнения движения для самодействующего скалярного поля.

2.3 Теорема Нетер.

Вернемся к выражению (2.26) и перепишем поверхностный интеграл в ином виде:

$$\begin{aligned}\delta S \;=\; & \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\right\}\delta\varphi + \\ & + \int_{\tilde{\mathcal{R}}} d\sigma_\mu \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}[\delta\varphi + (\partial_\nu\varphi)\delta x^\nu] - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial_\nu\varphi) - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]\delta x^\nu\right\}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

[1] Проведенный вывод справедлив для любого поля, не обязательно для скалярного. В случае векторных, тензорных или спинорных полей этому уравнению удовлетворяют все *компоненты* поля, которые нумеруются соответствующими индексами.

где просто добавлено и вычтено одно и тоже. Выражение в первых квадратных скобках в поверхностном интеграле представляет собой полную вариацию поля, определенную в (2.18). Вторая квадратная скобка, как мы убедимся ниже, определяет *тензор энергии-импульса*:

$$\theta^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\,. \tag{2.31}$$

Теперь δS переписывается в виде:

$$\delta S = \int_{\mathcal{R}} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\right\}\delta\varphi + \int_{\tilde{\mathcal{R}}} d\sigma_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi - \theta^\mu_\nu\delta x^\nu\right\}\,. \tag{2.32}$$

Заметим, что первый интеграл здесь равен нулю (при произвольных вариациях $\delta\varphi$) в силу выполнения уравнений движения (2.27). Рассмотрим теперь второй член в (2.32). Пусть действие S инвариантно относительно некоторой *непрерывной* группы преобразований x^μ и φ (группы Ли). Тогда можно записать инфинитезимальные преобразования:

$$\delta x^\mu = X^\mu_\nu\delta\omega^\nu\,. \qquad \Delta\varphi = \Phi_\mu\delta\omega^\mu\,, \tag{2.33}$$

где $\delta\omega^\mu$ — бесконечно малые *параметры* группового преобразования (“углы поворота”), X^μ_ν — некоторая матрица, Φ_μ — некоторые числа. Заметим, что в общем случае, индексы при этих величинах могут быть двойными, тройными и т.п., в частности можно рассмотреть случай, когда имеется некоторый *мультиплет* полей φ_i, так что

$$\Delta\varphi_i = \Phi_{ij}\delta\omega_j\,, \tag{2.34}$$

где теперь и Φ представляет собой матрицу в некотором абстрактном (“изотопическом”) пространстве.

Требуя теперь инвариантности действия $\delta S = 0$ по отношению к преобразованию (2.33), из (2.32) с учетом (2.27) получаем:

$$\int_{\tilde{\mathcal{R}}} d\sigma_\mu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Phi_\nu - \theta^\mu_\kappa X^\kappa_\nu\right\}\delta\omega^\nu = 0\,, \tag{2.35}$$

что, ввиду произвольности $\delta\omega^\nu$, приводит к:

$$\int_{\tilde{\mathcal{R}}} d\sigma_\mu J^\mu_\nu = 0\,, \tag{2.36}$$

где:

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Phi_\nu - \theta^\mu_\kappa X^\kappa_\nu\,. \tag{2.37}$$

По теореме Гаусса из (2.36) получаем уравнение непрерывности:

$$\partial_\mu J^\mu_\nu = 0\,, \tag{2.38}$$

так что величина J^μ_ν представляет собой *сохраняющийся ток.* Точнее, сохраняющейся величиной является обобщенный *заряд*:

$$Q_\nu = \int_\sigma d\sigma_\mu J^\mu_\nu\,, \tag{2.39}$$

где интеграл берется по произвольной пространственноподобной гиперповерхности σ. Если взять σ в виде гиперплоскости $t = \text{const}$, то получим просто интеграл по трехмерному объему V:

$$Q_\nu = \int_V d^3\mathbf{r}\, J^0_\nu\,. \tag{2.40}$$

Обычным образом [25], интегрируя (2.38) по объему V, имеем:

$$\int_V d^3\mathbf{r}\, \partial_0 J^0_\nu + \int_V d^3\mathbf{r}\, \partial_i J^i_\nu = 0\,. \tag{2.41}$$

Второй интеграл здесь преобразуется по трехмерной теореме Гаусса в поверхностный, который определяет поток заряда через эту поверхность [25]. Для замкнутой системы (Вселенной) этот поток равен нулю и получаем:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3\mathbf{r}\, J^0_\nu = \frac{dQ_\nu}{dt} = 0\,. \tag{2.42}$$

Это и есть основное утверждение теоремы Нетер: *инвариантность действия относительно некоторой непрерывной операции (группы) симметрии приводит к соответствующему закону сохранения.*

Рассмотрим простой пример. Пусть преобразования симметрии (2.33) сводятся к простым *трансляциям* в пространстве-времени:

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu\,, \qquad \Delta\varphi = 0\,, \tag{2.43}$$

так что

$$X^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu\,, \qquad \Phi_\mu = 0\,. \tag{2.44}$$

Тогда из (2.37) немедленно получаем:

$$J^\mu_\nu = -\theta^\mu_\nu \tag{2.45}$$

и соответствующий закон сохранения имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3\mathbf{r}\, \theta^0_\nu = 0\,, \tag{2.46}$$

что представляет собой закон сохранения энергии-импульса и, кстати, подтверждает введенное выше определение тензора энергии-импульса. При этом, величина

$$P_\nu = \int_V d^3\mathbf{r}\, \theta^0_\nu \tag{2.47}$$

представляет собой 4-импульс нашего поля. Это понятно и из простой аналогии с механикой. В частности, из определения (2.31) следует:

$$\int_V d^3\mathbf{r}\, \theta^0_0 = \int_V d^3\mathbf{r}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\dot\varphi - \mathcal{L}\right\}\,, \tag{2.48}$$

что аналогично известному выражению, связывающему функцию Лагранжа с гамильтонианом в классической механике [26]:

$$H = \sum_i p_i\dot q_i - L\,, \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,, \tag{2.49}$$

так что (2.48) дает энергию поля. Аналогичным образом, величина $\int d^3\mathbf{r}\,\theta_i^0$ определяет импульс поля.

Таким образом, сохранение энергии-импульса имеет место для любой системы, лагранжиан (действие) которой не зависит явно от x^μ.

Для лагранжиана Клейна – Гордона (2.28) из (2.31) сразу получаем тензор энергии импульса в следующем виде:

$$\theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu\varphi)(\partial^\nu\varphi) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\,. \tag{2.50}$$

Это выражение явным образом симметрично по индексам $\theta^{\mu\nu} = \theta^{\nu\mu}$. Но так не всегда получается, если пользоваться определением (2.31) для произвольного лагранжиана. В тоже время к (2.31) всегда можно добавить член типа $\partial_\lambda f^{\mu\lambda\nu}$, где $f^{\mu\lambda\nu} = -f^{\lambda\mu\nu}$, так что $\partial_\mu\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \equiv 0$ и закон сохранения (2.38), (2.46) не нарушается. Такой неопределенностью можно воспользоваться и ввести

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}\,, \tag{2.51}$$

выбрав $f^{\lambda\mu\nu}$ так, чтобы выполнялось условие симметрии $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Подобранный таким образом тензор энергии- импульса называется каноническим. Естественно, что

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0\,. \tag{2.52}$$

Полный 4-импульс при этом также не меняется, поскольку имеет место:

$$\int_V d^3\mathbf{r}\,\partial_\lambda f^{\lambda 0\nu} = \int_V d^3\mathbf{r}\,\partial_i f^{i0\nu} = \int d\sigma_i f^{i0\nu} = 0\,. \tag{2.53}$$

Первое равенство в (2.53) следует из $f^{00\nu} = 0$, а второе из теоремы Гаусса. Нуль в правой части возникает при отнесении поверхности σ на бесконечность, где поля считаются отсутствующими.

Таким образом, энергия и импульс поля оказываются определенными однозначно, несмотря на некоторую неоднозначность в определении тензора энергии-импульса.

Имеется ряд соображений физического характера, по которым тензор энергии-импульса следует всегда выбирать симметричным [8,25]. Особенно изящный аргумент основан на привлечении общей теории относительности. Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля (метрики пространства $g_{\mu\nu}$) имеют вид [25]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}\,, \tag{2.54}$$

где $R_{\mu\nu}$ — свернутый тензор кривизны Римана (тензор Риччи), R — скалярная кривизна пространства, G — ньютоновская константа тяготения. Левая часть (2.54) строится из метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его производных, являясь чисто геометрическим объектом. При этом она всегда симметрична по μ,ν [25]. Поэтому и тензор энергии-импульса материи, стоящий в правой части и являющийся источником гравитационного поля, должен быть симметричным.

2.4 Комплексное скалярное и электромагнитное поле.

Рассмотрим теперь скалярное комплексное поле, которое удобно записать в виде:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)\,, \tag{2.55a}$$

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)\,. \tag{2.55b}$$

Фактически здесь рассматривается уже *два* независимых скалярных поля φ_1, φ_2, которые можно рассматривать, например, как проекции некоторого двумерного вектора на оси 1 и 2 в некотором *изотопическом* [2]пространстве, ассоциируемом с нашим полем. С учетом требования вещественности действия, лагранжиан такого поля, аналогичный (2.28) можно записать как:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - m^2 \varphi^* \varphi\,. \tag{2.56}$$

Рассматривая теперь поля φ и φ^* как независимые переменные, из уравнений Лагранжа (2.27) получаем два уравнения Клейна – Гордона:

$$(\Box + m^2)\varphi = 0\,, \tag{2.57a}$$

$$(\Box + m^2)\varphi^* = 0\,. \tag{2.57b}$$

Лагранжиан (2.56) очевидным образом инвариантен относительно так называемых глобальных[3] калибровочных преобразований вида:

$$\varphi \to e^{-i\Lambda}\varphi\,, \qquad \varphi^* \to e^{i\Lambda}\varphi^*\,, \tag{2.58}$$

где Λ — произвольная действительная константа. В (2.58) мы имеем дело с типичным преобразованием группы Ли (в данном случае — группы $U(1)$ двумерных вращений), соответственно, для малых Λ всегда можно написать:

$$\delta\varphi = -i\Lambda\varphi\,, \qquad \delta\varphi^* = i\Lambda\varphi^* \tag{2.59}$$

— инфинитезимальные калибровочные преобразования. Ввиду независимости Λ от пространственно-временных координат, инфинитезимальные преобразования производных поля имеют такой же вид:

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = -i\Lambda\partial_\mu\varphi\,, \qquad \delta(\partial_\mu\varphi^*) = i\Lambda\partial_\mu\varphi^*\,. \tag{2.60}$$

В обозначениях (2.33) имеем:

$$\Phi = -i\varphi\,, \qquad \Phi^* = i\varphi\,, \qquad X = 0\,, \tag{2.61}$$

[2]Термин изотопическое используется нами в большинстве случаев вне всякой связи, но по аналогии с изотопической симметрией в ядерной физике и теории адронов [27]. Речь здесь идет о некотором пространстве внутренних квантовых чисел поля (частицы), сохранению которых соответствует надлежащая симметрия в этом пространстве.

[3]Термин глобальные означает здесь то, что произвольная фаза Λ здесь одинакова для полей, взятых в различных точках пространства-времени.

так что сохраняющийся нетеровский ток (2.37) имеет в данном случае вид:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(-i\varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}(i\varphi^*)\,. \tag{2.62}$$

С учетом (2.56) получаем:

$$J^\mu = i(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) \tag{2.63}$$

— явный вид тока, удовлетворяющего уравнению:

$$\partial_\mu J^\mu = 0\,. \tag{2.64}$$

В выполнимости этого условия можно убедиться и непосредственно, используя уравнения движения (2.57). Соответственно, в рассматриваемой теории возникает сохраняющийся заряд:

$$Q = \int dV J^0 = i \int dV \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right)\,. \tag{2.65}$$

Если поле действительно, то $\varphi = \varphi^*$ и, очевидно, имеем $Q = 0$, так что понятие сохраняющегося заряда $dQ/dt = 0$ можно ввести только для комплексного поля. При этом определяющее значение имеет $U(1)$ симметрия лагранжиана (2.56), (2.58). Заметим, что все рассмотрение пока что остается чисто классическим, соответственно Q может принимать любые (нецелочисленные) значения.

Перепишем (2.56) с помощью (2.55) в виде аддитивной суммы лагранжианов полей φ_1, φ_2:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \varphi_1)(\partial^\mu \varphi_1) + (\partial_\mu \varphi_2)(\partial^\mu \varphi_2)\right] - \frac{1}{2} m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,. \tag{2.66}$$

Тогда, вводя запись поля φ в виде вектора $\vec{\varphi}$ в двумерном изотопическом пространстве:

$$\vec{\varphi} = \varphi_1 \vec{i} + \varphi_2 \vec{j}\,, \tag{2.67}$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ — единичные орты в этом пространстве, можно записать (2.66) как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi})(\partial^\mu \vec{\varphi}) - \frac{1}{2} m^2 \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}\,, \tag{2.68}$$

откуда ясно виден геометрический смысл рассматриваемой симметрии теории (лагранжиана). Калибровочные преобразования (2.58) можно записать и так:

$$\varphi_1' + i\varphi_2' = e^{-i\Lambda}(\varphi_1 + i\varphi_2)\,, \qquad \varphi_1' - i\varphi_2' = e^{i\Lambda}(\varphi_1 - i\varphi_2)\,,$$

или

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 \cos\Lambda + \varphi_2 \sin\Lambda\,, \\ \varphi_2' &= -\varphi_1 \sin\Lambda + \varphi_2 \cos\Lambda\,, \end{aligned} \tag{2.69}$$

что описывает поворот вектора $\vec{\varphi}$ на угол Λ в плоскости $1, 2$. Лагранжиан, очевидно, инвариантен относительно таких поворотов, т.е. относительно группы двумерных вращений $O(2)$ или изоморфной ей группы $U(1)$. Преобразование (2.58) очевидно унитарно: $e^{i\Lambda}(e^{i\Lambda})^* = 1$. Групповое пространство определяется множеством всех возможных углов (фаз) Λ, определенных с точностью до $2\pi n$ (n — целое, поворот на Λ тождествен повороту на $\Lambda + 2\pi n$), и топологически эквивалентно окружности единичного радиуса.

И вот теперь можно попытаться сделать решающий шаг! Можно задаться достаточно формальным вопросом — нельзя ли сделать нашу теорию инвариантной относительно *локальных* калибровочных преобразований типа (2.58), но с фазой (углом), являющейся произвольной *функцией* пространственно-временной точки, в которой определено наше поле:

$$\varphi(x) \to e^{-i\Lambda(x)}\varphi(x)\,, \qquad \varphi^*(x) \to e^{i\Lambda(x)}\varphi^*(x)\,. \tag{2.70}$$

Особых поводов для такого желания, в общем-то, нет. Ну разве что можно сказать, что глобальное преобразование (2.58) неважно смотрится с точки зрения общей идеологии релятивистской теории — мы "вращаем" наше поле на один и тот же угол (в изотопическом пространстве) во всех точках пространства-времени, в том числе и в тех, которые разделены пространственноподобным интервалом, т.е. не могут быть причинно связаны. Но ведь и изотопическое пространство никак пока не связано с пространством- временем. Но мы увидим, что требование инвариантности теории относительно (2.70) почти немедленно приводит к совершенно замечательным результатам.

На первый взгляд инвариантность теории относительно (2.70) невозможна. Рассмотрим опять случай бесконечно малых преобразований с $\Lambda(x) \ll 1$. Тогда (2.70) сводится к:

$$\varphi \to \varphi - i\Lambda\varphi\,, \qquad \delta\varphi = -i\Lambda\varphi\,, \tag{2.71}$$

что идентично с (2.59). Однако для производных поля все сложнее в силу явной зависимости $\Lambda(x)$ от координаты:

$$\partial_\mu\varphi \to \partial_\mu\varphi - i(\partial_\mu\Lambda)\varphi - i\Lambda(\partial_\mu\varphi)\,, \qquad \delta(\partial_\mu\varphi) = -i\Lambda(\partial_\mu\varphi) - i(\partial_\mu\Lambda)\varphi\,, \tag{2.72}$$

что, естественно, не совпадает с (2.60). Для комплексно сопряженного поля все аналогично:

$$\varphi^* \to \varphi^* + i\Lambda\varphi^*\,, \qquad \delta\varphi^* = i\Lambda\varphi^*\,, \tag{2.73}$$

$$\partial_\mu\varphi^* \to \partial_\mu\varphi^* + i(\partial_\mu\Lambda)\varphi^* + i\Lambda(\partial_\mu\varphi^*)\,, \qquad \delta(\partial_\mu\varphi^*) = i\Lambda(\partial_\mu\varphi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\varphi^*\,. \tag{2.74}$$

Эту ситуацию обычно характеризуют словами о том, что производные поля φ преобразуются теперь (в отличие от самого поля) нековариантно, т.е. не пропорционально самим себе. Все портит слагаемое с производной Λ! Никакой инвариантности лагранжиана (2.56) относительно таких преобразований просто нет. Посмотрим, однако, нельзя ли ее обеспечить?

Изменение лагранжиана при произвольных вариациях полей и их производных имеет вид:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta(\partial_\mu\varphi) + (\varphi \to \varphi^*)\,. \tag{2.75}$$

Переписывая первое слагаемое с помощью уравнений Лагранжа (2.27) и подставляя

(2.71) и (2.72), получим:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right](-i\Lambda\varphi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(-i\Lambda\partial_\mu\varphi - i\varphi\partial_\mu\Lambda) - (\varphi\to\varphi^*) =$$

$$= -i\Lambda\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\varphi\right] - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial_\mu\Lambda)\varphi - (\varphi\to\varphi^*)\,. \tag{2.76}$$

Первый член здесь пропорционален дивергенции от сохраняющегося тока (2.62) и равен, таким образом, нулю. Второе же слагаемое, с использованием явного вида лагранжиана, приобретает вид:

$$\delta\mathcal{L} = i(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)\partial_\mu\Lambda = J^\mu\partial_\mu\Lambda\,, \tag{2.77}$$

где J^μ все тот же сохраняющийся ток (2.63).

Итак, действие неинвариантно по отношению к локальным калибровочным преобразованиям. Оказывается, однако, что инвариантность действия можно обеспечить путем введения нового *векторного* поля A_μ, непосредственно *взаимодействующего* с током J^μ, добавив к нашему лагранжиану следующий член взаимодействия:

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu = -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu\,, \tag{2.78}$$

где e — безразмерная константа связи. Потребуем теперь, чтобы одновременно с локальными калибровочными преобразованиями поля φ (2.70) поле A_μ подвергалось бы *градиентному* преобразованию вида:

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda\,. \tag{2.79}$$

Тогда получим:

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) = -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu\partial_\mu\Lambda\,. \tag{2.80}$$

Видим, что второе слагаемое в (2.80) как раз точно сокращает (2.77). Но нужно теперь еще избавиться от первого слагаемого в (2.80). С помощью (2.71), (2.73) можно получить:

$$\delta J^\mu = i\delta(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) = 2\varphi^*\varphi\partial^\mu\Lambda\,, \tag{2.81}$$

так что

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\varphi^*\varphi\,. \tag{2.82}$$

Но добавим к $\mathcal{L}$ еще один член:

$$\mathcal{L}_2 = e^2A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi\,. \tag{2.83}$$

Тогда под воздействием (2.79) имеем:

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2A_\mu\delta A^\mu\varphi^*\varphi = 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\varphi^*\varphi\,. \tag{2.84}$$

Теперь легко видеть, что

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0\,, \tag{2.85}$$

так что инвариантность действия относительно локальных калибровочных преобразований обеспечена!

Учтем теперь, что введенное нами векторное поле A_μ должно обладать и соответствующим "свободным" вкладом в лагранжиан. Этот вклад должен быть инвариантен относительно градиентных преобразований (2.79). Понятно, как тут надо поступить. Введем 4-мерный ротор поля A_μ:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,, \tag{2.86}$$

который, очевидно, инвариантен относительно (2.79). Тогда можно принять:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \,. \tag{2.87}$$

Собирая теперь все члены нового лагранжиана, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tot} \; &= \; \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - m^2 \varphi^* \varphi - \\ &- \; ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu \varphi^* \varphi - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \end{aligned} \tag{2.88}$$

что переписывается в стандартном виде как:

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^* - m^2 \varphi^* \varphi \,. \tag{2.89}$$

Таким образом мы получили лагранжиан *электродинамики* комплексного скалярного поля φ! Он легко получается из исходного лагранжиана Клейна – Гордона (2.56) стандартной заменой [25] обычной производной $\partial_\mu \varphi$ на *ковариантную* производную [4]:

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi \tag{2.90}$$

и добавлением члена свободного электромагнитного поля (2.87).

Лагранжиан электромагнитного поля (2.87) может быть записан как $\mathcal{L} = aF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ [25], где постоянная a может быть выбрана разной, в зависимости от выбора системы единиц. В гауссовой системе единиц, принятой, в частности, в курсе Ландау и Лифшица, полагается $a = -1/16\pi$. Наряду с гауссовой, часто используется также система единиц Хевисайда (см., например, [8]), в которой $a = -1/4$, В этой системе в уравнения поля не входит множитель 4π, но зато он возникает в законе Кулона. В гауссовой системе наоборот 4π входит в уравнения Максвелла, но отсутствует в законе Кулона. В литературе по квантовой электродинамике чаще используется система Хевисайда. Мы в дальнейшем будем, в основном, пользоваться гауссовой системой, специально оговаривая переход к системе Хевисайда в отдельных случаях.

В отличие от $\partial_\mu \varphi$ величина (2.90) преобразуется при калибровочных преобразованиях ковариантным образом, т.е. как само поле φ:

$$\delta(D_\mu \varphi) = \delta(\partial_\mu \varphi) + ie(\delta A_\mu)\varphi + ieA_\mu \delta\varphi = -i\Lambda(\partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi) = -i\Lambda(D_\mu \varphi) \,. \tag{2.91}$$

Полю φ соответствует, таким образом, электрический заряд e, сопряженное поле φ^* соответствует заряду $(-e)$:

$$\left(D_\mu \varphi\right)^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi^* \,. \tag{2.92}$$

Понятно, что введенная выше величина $F_{\mu\nu}$ представляет собой тензор напряженностей электромагнитного поля [25].

[4] При этом константа e имеет смысл электрического заряда.

Уравнения Максвелла следуют из (2.89) как уравнения Лагранжа для поля A_μ:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right] = 0\,, \qquad (2.93)$$

что дает:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) + 2e^2A^\mu|\varphi|^2 = \\ &= -ie\big[\varphi^* D^\mu\varphi - \varphi(D^\mu\varphi^*)\big] \equiv -e\mathcal{J}^\mu\,, \qquad (2.94)\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{J}^\mu = i\big[\varphi^* D^\mu\varphi - \varphi(D^\mu\varphi^*)\big] \qquad (2.95)$$

— ковариантная форма тока. Из антисимметрии $F^{\mu\nu}$ сразу следует:

$$\partial_\mu\mathcal{J}^\mu = 0\,, \qquad (2.96)$$

так что в присутствие электромагнитного поля сохраняется ток $\mathcal{J}^\mu$, а не J^μ.

Отметим, что безмассовость электромагнитного поля оказывается необходимой — если бы у электромагнитного поля была бы конечная масса M, то к лагранжиану (2.87) нужно было бы приписать член типа:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{8\pi}M^2A_\mu A^\mu\,. \qquad (2.97)$$

Очевидно, что такой вклад неинвариантен относительно локальных калибровочных преобразований (2.70), (2.79).

Рассмотренный способ введения электромагнитного взаимодействия был впервые использован Вейлем при попытках построения единой теории поля в начале 20-х годов. Электродинамика соответствует абелевой калибровочной группе $U(1)$, а электромагнитное поле является простейшим примером *калибровочного* поля.

2.5 Поля Янга – Миллса.

Итак, рассмотрев инвариантность относительно локальных калибровочных преобразований группы $U(1)$, мы получили из лагранжиана свободного поля Клейна – Гордона скалярную электродинамику, т.е. теорию с весьма нетривиальным взаимодействием. Можно сказать, что симметрия “навязала” нам форму взаимодействия и привела к необходимости ввести калибровочное поле A_μ, как переносчик этого взаимодействия. Рассмотренная калибровочная группа $U(1)$ была абелевой. Обобщение приведенного анализа на случай неабелевых калибровочных групп было проведено в начале 50-х годов Янгом и Миллсом. В результате была открыта дорога к построению широкого класса весьма нетривиальных теорий (взаимодействий), которые, как оказалось, могут быть положены в основу современного понимания динамики элементарных частиц [5].

Простейшим вариантом неабелевой калибровочной группы, рассмотренным еще в первой работе Янга и Миллса, является группа изотопического спина — $SU(2)$, изоморфная группе трехмерных вращений $O(3)$. Выше рассматривалось комплексное

[5] Хорошую подборку ранних оригинальных статей по теории неабелевых калибровочных полей можно найти в сборнике [28]

скалярное поле, которое представлялось двумерным вектором $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$. Пусть теперь наше скалярное поле является трехмерным вектором в некотором "изотопическом" пространстве: $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Инвариантный относительно трехмерных вращений в этом пространстве лагранжиан клейн-гордоновского поля опять может быть записан как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi})(\partial^\mu \vec{\varphi}) - \frac{1}{2} m^2 \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}, \tag{2.98}$$

где поле $\vec{\varphi}$ входит только через скалярные произведения. Инвариантность относительно вращений здесь глобальная — поле $\vec{\varphi}$ можно повернуть на произвольный угол в изотопическом пространстве, одинаковый для полей во всех пространственно-временных точках. Например, можно рассмотреть вращения в плоскости $1-2$ на угол Λ_3 вокруг оси 3:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 \cos\Lambda_3 + \varphi_2 \sin\Lambda_3\,, \\ \varphi_2' &= -\varphi_1 \sin\Lambda_3 + \varphi_2 \cos\Lambda_3\,, \\ \varphi_3' &= \varphi_3\,. \end{aligned} \tag{2.99a}$$

Для инфинитезимального поворота $\Lambda_3 \ll 1$ и можно написать:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1 + \Lambda_3 \varphi_2\,, \\ \varphi_2' &= \varphi_2 - \Lambda_3 \varphi_1\,, \\ \varphi_3' &= \varphi_3\,. \end{aligned} \tag{2.99b}$$

В случае инфинитезимального поворота вокруг произвольно ориентированной оси:

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi}' = \vec{\varphi} - \vec{\Lambda} \times \vec{\varphi}\,, \qquad \delta\vec{\varphi} = -\vec{\Lambda} \times \vec{\varphi}\,, \tag{2.99c}$$

где вектор $\vec{\Lambda}$ по величине равен углу поворота, а направлен вдоль оси, вокруг которой производится вращение.

Рассмотрим теперь локальное преобразование, полагая $\vec{\Lambda} = \vec{\Lambda}(x_\mu)$. Тогда производная поля $\vec{\varphi}$ преобразуется нековариантно:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \vec{\varphi} \to \partial_\mu \vec{\varphi}' &= \partial_\mu \vec{\varphi} - \partial_\mu \vec{\Lambda} \times \vec{\varphi} - \vec{\Lambda} \times \partial_\mu \vec{\varphi}\,, \\ \delta(\partial_\mu \vec{\varphi}) &= -\vec{\Lambda} \times \partial_\mu \vec{\varphi} - \partial_\mu \vec{\Lambda} \times \vec{\varphi}\,. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Попытаемся снова построить ковариантную производную, записав ее в виде:

$$D_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} + g \vec{W}_\mu \times \vec{\varphi}\,. \tag{2.101}$$

где ввели калибровочное поле (поле Янга – Миллса) $\vec{W}_\mu$, являющееся вектором не только в пространстве Минковского, но и во внутреннем (изотопическом) пространстве, а также константу связи g.

Требование ковариантности имеет вид:

$$\delta(D_\mu \vec{\varphi}) = -\vec{\Lambda} \times (D_\mu \vec{\varphi})\,. \tag{2.102}$$

Как должно преобразовываться поле $\vec{W}_\mu$, чтобы это условие выполнялось? Ответ:

$$\begin{aligned} \vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu' &= \vec{W}_\mu - \vec{\Lambda} \times \vec{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \vec{\Lambda}\,, \\ \delta \vec{W}_\mu &= -\vec{\Lambda} \times \vec{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \vec{\Lambda}\,. \end{aligned} \tag{2.103}$$

В самом деле, используя (2.99c), (2.100) и (2.101), получаем:

$$
\begin{aligned}
\delta(D_\mu\vec{\varphi}) &= \delta(\partial_\mu\vec{\varphi}) + g(\delta\vec{W}_\mu)\times\vec{\varphi} + g\vec{W}_\mu\times(\delta\vec{\varphi}) = \\
&= -\vec{\Lambda}\times\partial_\mu\vec{\varphi} - \partial_\mu\vec{\Lambda}\times\vec{\varphi} - g(\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\mu)\times\vec{\varphi} + \partial_\mu\vec{\Lambda}\times\vec{\varphi} - g\vec{W}_\mu\times(\vec{\Lambda}\times\vec{\varphi}) = \\
&= -\vec{\Lambda}\times\partial_\mu\vec{\varphi} - g[(\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\mu)\times\vec{\varphi} + \vec{W}_\mu\times(\vec{\Lambda}\times\vec{\varphi})]\,. \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

Воспользуемся теперь векторным тождеством Якоби[6]:

$$
(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} + (\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A} + (\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B} = 0\,, \qquad (2.105)
$$

из которого путем циклических перестановок можно получить:

$$
(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} + \vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{C}) = \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\,. \qquad (2.106)
$$

Применяя это тождество к выражению в квадратных скобках в (2.104), получаем:

$$
\delta(D_\mu\vec{\varphi}) = -\vec{\Lambda}\times(\partial_\mu\vec{\varphi} + g\vec{W}_\mu\times\vec{\varphi}) = -\vec{\Lambda}\times D_\mu\vec{\varphi}\,, \qquad (2.107)
$$

что и требовалось!

Посмотрим теперь, как выглядит аналог тензора $F_{\mu\nu}$ электродинамики. Обозначим его $\vec{W}_{\mu\nu}$. В отличие от $F_{\mu\nu}$, являющегося скаляром по отношению к преобразованиям калибровочной группы $O(2)$ $(U(1))$, величина $\vec{W}_{\mu\nu}$ представляет собой вектор по отношению к $O(3)$ $(SU(2))$. Соответственно, правило преобразования должно быть тем же, что и у поля $\vec{\varphi}$:

$$
\delta\vec{W}_{\mu\nu} = -\vec{\Lambda}\times\vec{W}_{\mu\nu}\,. \qquad (2.108)
$$

Величина $\partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu$ так не преобразуется:

$$
\begin{aligned}
\delta(\partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu) &= \partial_\mu\left(-\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu\vec{\Lambda}\right) - \partial_\nu\left(-\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\Lambda}\right) = \\
&= -\vec{\Lambda}\times(\partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu) - (\partial_\mu\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\mu)\,. \quad (2.109)
\end{aligned}
$$

Второе слагаемое здесь “лишнее”. Заметим теперь, что

$$
\delta(g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu) = g\left(-\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\Lambda}\right)\times\vec{W}_\nu + g\vec{W}_\mu\times\left(-\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\nu + \frac{1}{g}\partial_\nu\vec{\Lambda}\right)\,, \quad (2.110)
$$

Первое и третье слагаемое здесь можно объединить с помощью (2.106), что дает:

$$
\delta(g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu) = -g\vec{\Lambda}\times(\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu) + (\partial_\mu\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{\Lambda}\times\vec{W}_\mu)\,. \qquad (2.111)
$$

Видим, что второе слагаемое здесь совпадает с “лишним” членом в (2.109). Поэтому определим тензор полей Янга – Миллса как

$$
\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{W}_\nu - \partial_\nu\vec{W}_\mu + g\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu\,, \qquad (2.112)
$$

что преобразуется нужным образом, т.е. согласно (2.108).

---

[6]Это тождество можно легко доказать, используя известное правило: $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$

Теперь можно выписать лагранжиан теории Янга – Миллса:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\vec{\varphi})(D^\mu\vec{\varphi}) - \frac{1}{2}m^2\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} - \frac{1}{16\pi}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}\,. \tag{2.113}$$

Уравнения движения выводятся обычным образом из уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(W^i_\mu)} = \partial_\nu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu W^i_\mu)}\right\}, \tag{2.114}$$

где i — векторный индекс в изотопическом пространстве. Тогда имеем:

$$\partial^\nu\vec{W}_{\mu\nu} + g\vec{W}^\nu\times\vec{W}_{\mu\nu} = 4\pi g\big[(\partial_\mu\vec{\varphi})\times\vec{\varphi} + g(\vec{W}_\mu\times\vec{\varphi})\times\vec{\varphi}\big] \tag{2.115}$$

или, с учетом (2.101),

$$D^\nu\vec{W}_{\mu\nu} = 4\pi g(D_\mu\vec{\varphi})\times\vec{\varphi} \equiv 4\pi g\vec{J}_\mu\,. \tag{2.116}$$

По внешнему виду эти уравнения похожи на уравнения Максвелла (2.94), но в отличие от них они *нелинейны* по полю $\vec{W}_\mu$. В отсутствии "материи", т.е. при $\vec{\varphi} = 0$ из (2.115), (2.116) имеем:

$$D^\nu\vec{W}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{или} \qquad \partial^\nu\vec{W}_{\mu\nu} = -g\vec{W}^\nu\times\vec{W}_{\mu\nu}\,, \tag{2.117}$$

так что янг-миллсовское (неабелево калибровочное) поле является источником самого себя[7] ("светящийся свет")! Это радикально отличается от случая абелева калибровочного (электромагнитного) поля, для которого при $\varphi = 0$ ток (источник поля) зануляется, а уравнения Максвелла имеют известный (линейный) вид [25]:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0\,, \qquad \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0\,. \tag{2.118}$$

В обычной электродинамике имеется еще и однородное уравнение Максвелла вида [25]:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0\,, \tag{2.119}$$

из которого в трехмерных обозначениях возникает вторая пара уравнений электромагнитного поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0\,. \tag{2.120}$$

В частности, первое из этих уравнений означает отсутствие магнитных зарядов (монополей). Аналогичные уравнения существуют и в теории Янга – Миллса (их вывод будет приведен несколько позже):

$$D_\lambda\vec{W}_{\mu\nu} + D_\mu\vec{W}_{\nu\lambda} + D_\nu\vec{W}_{\lambda\mu} = 0\,. \tag{2.121}$$

Тензор напряженностей поля Янга – Миллса $\vec{W}_{\mu\nu}$ может быть записан через соответствующие напряженности неабелевых "электрического" и "магнитного" полей также, как и в электродинамике [25]:

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}_x & \vec{E}_y & \vec{E}_z \\ -\vec{E}_x & 0 & -\vec{H}_z & \vec{H}_y \\ -\vec{E}_y & \vec{H}_z & 0 & -\vec{H}_x \\ -\vec{E}_z & -\vec{H}_y & \vec{H}_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.122}$$

[7] Ситуация здесь аналогична возникающей в общей теории относительности, где гравитационное поле также является источником самого себя в силу нелинейности эйнштейновских уравнений гравитационного поля [25].

Тогда из (2.121), в частности, следует:

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{H}} \neq 0\,, \tag{2.123}$$

что, конце концов, приводит к существованию в теории Янга – Миллса так называемых монополей т'Хоофта – Полякова [8]. Но эти интересные решения полевых уравнений мы рассматривать не будем.

Поле Янга – Миллса, подобно электромагнитному полю, должно быть безмассовым. Если это не так, то к лагранжиану (2.113) добавился бы член вида:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{8\pi} M^2 \vec{W}_\mu \cdot \vec{W}^\mu\,, \tag{2.124}$$

что привело бы к замене (2.116) на:

$$D^\nu \vec{W}_{\mu\nu} = 4\pi g \vec{J}_\mu + M^2 \vec{W}_\mu\,, \tag{2.125}$$

что явно не инвариантно по отношению к локальным калибровочным преобразованиям.

Безмассовость полей Янга – Миллса, в условиях точной калибровочной инвариантности, в течение довольно долгого времени являлась серьезным препятствием для физических применений основной идеи калибровочных теорий. Идея состояла в том [28], что из той или иной (экспериментально обнаруженной) внутренней симметрии элементарных частиц (например сохранения барионного заряда или изотопического спина), потребовав *локальной* инвариантности относительно соответствующих групповых преобразований, можно получить совершенно нетривиальные лагранжианы взаимодействия с соответствующими (абелевыми или неабелевыми) калибровочными полями. Калибровочный принцип введения взаимодействий предлагалось положить в основу теории взаимодействующих полей. Однако трудности тут возникают сразу же. Безмассовость поля означает наличие *дальнодействующих* сил, связанных с этим полем. Типичный пример тут — электродинамика (закон Кулона). Однако электромагнитное поле является, скорее всего, единственным дальнодействующим полем в Природе (исключая, конечно, гравитацию)! В этом можно убедиться с помощью простых оценок, которые были сделаны Ли и Янгом [28].

Рассмотрим простейший пример абелева калибровочного поля, которое можно было бы связать с законом сохранения барионного заряда. Оно приводило бы к дополнительной дальнодействующей B-силе, действующей на барионы. Сравним обычный потенциал ньютоновского тяготения с потенциальной энергией, обусловленной взаимодействием такого гипотетического поля, например, с нуклонами из которых состоит Земля. Пусть имеется пробная частица p с массой m_p, находящаяся над поверхностью Земли на расстоянии r от ее центра. Тогда:

$$V_{gr} = -\frac{G m_p M_E}{r}\,, \tag{2.126}$$

где G — ньютоновская гравитационная постоянная, а M_E — масса Земли. Пусть барионный заряд этой частицы равен N_p. Пусть масса нуклона m_N. Допустим, что плотность нуклонов в Земле постоянна (а антинуклонов там вообще нет) и равна:

$$\rho = \frac{M_E}{m_N \frac{4}{3}\pi R_E^3}\,, \tag{2.127}$$

где R_E — радиус Земли. Тогда потенциал V_B, обусловленный B-силами нуклонов, из которых состоит Земля, может быть посчитан как:

$$V_B = \frac{g_B^2 M_E N_p}{\frac{4}{3}\pi R_E^3 m_N} \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{g_B^2 M_E N_p}{m_N r}\,, \tag{2.128}$$

где интегрирование ведется по объему Земли, а g_B — константа взаимодействия с полем B-сил. По внешнему виду (2.128) совпадает с потенциалом тяготения. Поэтому, полный потенциал, действующий на пробную частицу равен:

$$V = -G\frac{m_p M_E}{r} + g_B^2 \frac{M_E N_p}{m_N r} = -G\frac{m_p M_E}{r}\left[1 - \frac{g_B^2}{G}\frac{N_p}{m_N m_p}\right]. \tag{2.129}$$

Таким образом, прежде всего, при наличии поля B-сил $V \neq \bar{V}$, где $\bar{V}$ — потенциал, действующий на античастицу $\bar{p}$, для которой барионный заряд имеет другой знак: $N_{\bar{p}} = -N_p$. В принципе, этот эффект был бы наблюдаем при:

$$\frac{g_B^2}{m_N^2} \sim G\,. \tag{2.130}$$

На деле известно, что с достаточно хорошей точностью такой эффект не наблюдается — частицы и античастицы падают в поле Земли одинаково. Отсюда сразу следует оценка $g_B^2 < 10^{-38}$, поскольку $Gm_N^2 \sim 10^{-38}$. Но даже и столь малую g_B можно исключить. Дело в том, что уравнение движения пробной частицы в поле тяготения имеет, как известно, вид:

$$m_p g = -G\frac{m_p M_E}{r^2} \tag{2.131}$$

и масса m_p здесь сокращается, так что ускорение свободного падения g от нее не зависит (равенство инертной и тяжелой масс). Если пренебречь массой электронов, то

$$m_p = m_N N_p - \epsilon\,, \tag{2.132}$$

где ϵ — энергия связи в ядрах того вещества, из которого сделана наша пробная частица. Отсюда

$$N_p = \frac{m_p}{m_N} + \frac{\epsilon}{m_N}\,. \tag{2.133}$$

При наличии B-сил уравнение Ньютона приобретает вид:

$$m_p g = -\frac{m_p M_E}{r^2}C + \frac{g_B^2}{r^2}\frac{M_E \epsilon}{m_N^2}\,, \tag{2.134}$$

где $C = G - g_B^2/m_N^2$ можно отождествить с измеряемой константой тяготения G_{exp}. Иначе говоря, (2.134) можно переписать как

$$m_p g = -\frac{m_p M_E}{r^2}G_{exp}\left[1 - \frac{g_B^2}{G_{exp}m_N^2}\frac{\epsilon}{m_p}\right]\,. \tag{2.135}$$

Второе слагаемое здесь нарушает факт совпадения инертной и тяжелой масс, который был установлен с точностью порядка 10^{-8} в классических экспериментах Этвеша для различных веществ. Типичная оценка, следующая из современного варианта этих экспериментов:

$$\frac{g_B^2}{Gm_N^2}\frac{\epsilon}{m_p} \sim 10^{-3}\frac{g_B^2}{Gm_N^2} < 10^{-12}\,, \tag{2.136}$$

где мы учли, что изменения ϵ/m_p для различных веществ порядка 10^{-3}. Соответственно

$$\frac{g_B^2}{Gm_N^2} < 10^{-9}\,. \tag{2.137}$$

Таким образом из экспериментально установленного равенства инертной и тяжелой масс возникает ограничение: $g_B^2 < 10^{-47}$! Соответственно, B-силы несравненно слабее даже гравитации. Поэтому, в любом практическом смысле, казалось бы можно исключить существование безмассовых калибровочных полей, кроме электромагнитного. Экспериментально известные векторные мезоны массивны и нарушают, таким образом, локальную калибровочную инвариантность. Поэтому сама идея введения новых калибровочных полей, казалось бы, повисает в воздухе. В дальнейшем мы увидим, как современная теория решает эту проблему.

2.6 Геометрия калибровочных полей.

Перейдем к некоторым обобщениям. Выше мы видели, что поворот *вектора* в изотопическом пространстве на малый угол $\vec{\Lambda}$ ($|\vec{\Lambda}| \ll 1$) может быть записан в виде (2.99c):

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi}' = \vec{\varphi} - \vec{\Lambda} \times \vec{\varphi}\,, \tag{2.138}$$

что является инфинитезимальным вариантом общего закона преобразования вида:

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi}' = \exp(i\vec{I} \cdot \vec{\Lambda})\vec{\varphi}\,, \tag{2.139}$$

где $\vec{I}$ — матричные *генераторы* вида:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

Соответствующие матричные элементы могут быть записаны в виде:

$$(I_i)_{mn} = -i\varepsilon_{imn}\,, \quad (2.141)$$

где ε_{imn} — антисимметричный символ Леви-Чивита. Соответственно, в покомпонентной записи (2.138) можно записать как:

$$\varphi'_m = (1 + iI_i\Lambda_i)_{mn}\varphi_n = (\delta_{mn} + \varepsilon_{imn}\Lambda_i)\varphi_n = \varphi_m - \varepsilon_{min}\Lambda_i\varphi_n = (\vec{\varphi} - \vec{\Lambda}\times\vec{\varphi})_m\,. \quad (2.142)$$

Локальные преобразования имеют вид:

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi}' = \exp\left(i\vec{I}\cdot\vec{\Lambda}(x)\right)\vec{\varphi} = S(x)\vec{\varphi}\,, \quad (2.143)$$

где через $S(x)$ обозначен оператор локального вращения. Матрицы I являются генераторами векторного представления группы вращений $O(3)$ (или $SU(2)$) и удовлетворяют известным коммутационным соотношениям момента импульса:

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k = C_{ijk}I_k\,. \quad (2.144)$$

Здесь через C_{ijk} обозначены *структурные константы* группы $SU(2)$, в данном случае $C_{ijk} = i\varepsilon_{ijk}$. Естественно, что для других групп Ли структурные константы свои, но коммутационные соотношения для генераторов всегда имеют вид (2.144).

Для произвольной группы Ли ее генераторы удовлетворяют тождеству Якоби:

$$[[I_i, I_j], I_k] + [[I_j, I_k], I_i] + [[I_k, I_i], I_j] = 0\,, \quad (2.145)$$

что для структурных констант сводится к:

$$C_{ijl}C_{lkm} + C_{jkl}C_{lim} + C_{kil}C_{ljm} = 0\,. \quad (2.146)$$

До сих пор мы рассматривали *изовекторное* поле. Более фундаментальный подход требуется для рассмотрения *изоспиноров* той же группы $SU(2)$ [8]. Вращение фундаментального двухкомпонентного спинора $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ может быть записано как:

$$\psi' = \exp\left[\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}(x)\right]\psi(x) = S(x)\psi(x)\,, \quad (2.147)$$

где $S(x)$ — матрица 2×2, а $\vec{\tau}$ — матрицы Паули в изопространстве, $\tau_i/2$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.144), и мы сразу пишем локальное преобразование. Для общего n-мерного случая:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp[iM^a\Lambda^a(x)]\psi(x) = S(x)\psi(x)\,, \quad (2.148)$$

[8] Ниже мы еще вернемся к последовательному рассмотрению спиноров, а пока достаточно вспомнить курс квантовой механики.

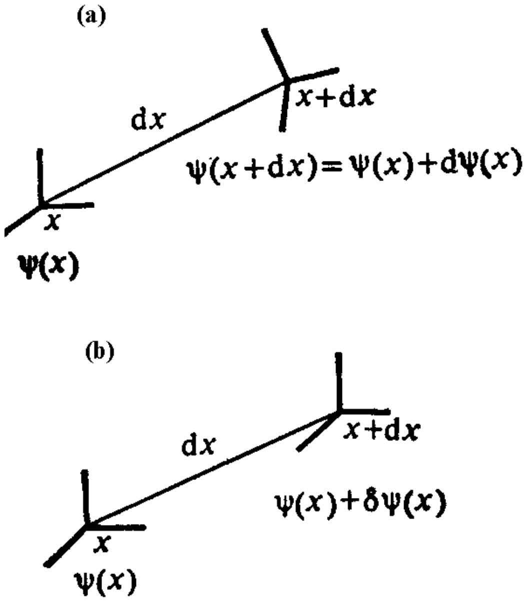


Рис. 2.2: (а) Величина $d\psi$ несет информацию как об изменении ψ, так и о преобразовании координатных осей в изопространстве при переходе от точки x к $x+dx$. (б) Величина $\delta\psi$, определяемая параллельным переносом.

где a пробегает значения $1, 2, 3$ (группа $SU(2)$!), ψ здесь уже n-компонентный спинор, а M^a — матрицы $n \times n$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям типа (2.144).

Если мы рассматриваем локальные преобразования полей, то производная $\partial_\mu\psi$, как мы видели, преобразуется нековариантно:

$$\partial_\mu\psi' = S(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu S)\psi\,. \tag{2.149}$$

Можно сказать, что причина этого имеет чисто "геометрический" характер. Дело в том, что поля $\psi(x)$ и $\psi(x+dx) = \psi(x) + d\psi$, относящиеся к бесконечно близким точкам обычного пространства, измеряются по отношению к различным (повернутым локальным калибровочным преобразованием) осям в изопространстве, как это показано на Рис. 2.2(а). Таким образом, величина $d\psi$ несет информацию не только об изменении поля с расстоянием при перемещении из x в $x+dx$, но и о соответствующем изменении за счет поворота осей в изотопическом пространстве. Чтобы построить ковариантную производную, нужно сравнить $\psi(x+dx)$ не с $\psi(x)$, а со значением, которое приняло бы поле $\psi(x)$ при перемещении из x в $x+dx$ при неподвижных осях в изопространстве и которое мы обозначим как $\psi + \delta\psi$ и будем называть полученным в результате "параллельного" переноса, как это показано на Рис. 2.2(б). Предположим, что величина $\delta\psi$ пропорциональна самому полю ψ, а также величине смещения dx_μ, и запишем ее в виде:

$$\delta\psi = igM^a A^a_\mu dx^\mu \psi\,, \tag{2.150}$$

где g — некоторая константа, а A^a_μ — калибровочное поле, которое как бы определяет в какой степени оси в изопространстве меняются при переходе от одной точки к другой. "Истинная" или ковариантная производная ψ определяется теперь разностью

$$D\psi = (\psi + d\psi) - (\psi + \delta\psi) = d\psi - \delta\psi = d\psi - igM^a A^a_\mu dx^\mu \psi \tag{2.151}$$

и равна

$$\frac{D\psi}{dx^\mu} = D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igM^a A^a_\mu \psi \,. \tag{2.152}$$

Ситуация здесь аналогична возникающей в теории гравитации [25], где ковариантная производная вектора V^μ определяется как:

$$D_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda \,, \tag{2.153}$$

где коэффициенты Кристоффеля $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ связывают компоненты вектора в данной точке с его компонентами в соседней точке, из которой вектор перемещен путем параллельного переноса в римановом пространстве.

Выражение (2.152) дает общее определение ковариантной производной теории Янга – Миллса для любого поля ψ, преобразующегося по некоторому неприводимому представлению произвольной калибровочной группы с генераторами M^a [28]. Рассмотрим простейшие примеры:

- *Группа* $U(1)$.

$$\begin{aligned} \varphi \to e^{-i\Lambda}\varphi \,, \qquad \varphi^* \to e^{i\Lambda}\varphi^* \,, \qquad M = -1 \,, \\ D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \qquad g = e \end{aligned} \tag{2.154}$$

  — электродинамика.

- *Группа* $SU(2)$.

  Векторное представление:

$$\begin{aligned} (M^a)_{mn} &= -i\varepsilon_{amn} \,, \qquad (a, m, n = 1, 2, 3) \,, \\ D_\mu \varphi_m &= \partial_\mu \varphi_m - ig(M^a)_{mn} A^a_\mu \varphi_n = \partial_\mu \varphi_m - g\varepsilon_{amn} A^a_\mu \varphi_n = \\ &= (\partial_\mu \vec{\varphi} + g\vec{A}_\mu \times \vec{\varphi})_m \,, \end{aligned} \tag{2.155}$$

  где $\vec{A}$ это то самое калибровочное поле, которое выше обозначалось как $\vec{W}$.

  Спинорное представление:

$$\begin{aligned} M^a &= \frac{1}{2}\tau^a \,, \qquad (a = 1, 2, 3) \,, \\ D_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - i\frac{g}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \psi \end{aligned} \tag{2.156}$$

  — теория Янга – Миллса.

Итак, при произвольном вращении в изопространстве поле преобразуется как:

$$\psi \to S(x_\mu)\psi \,, \tag{2.157}$$

а ковариантная производная преобразуется как поле:

$$D_\mu \psi \to D'_\mu \psi' = S(x_\mu) D_\mu \psi \,. \tag{2.158}$$

Удобно ввести матричные обозначения:

$$\hat{A}_\mu = M^a A^a_\mu \,, \tag{2.159}$$

так что (2.152) принимает вид:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu)\psi \,. \tag{2.160}$$

Переход к новой системе координат в изопространстве, с учетом (2.158), дает:

$$(\partial_\mu - ig\hat{A}'_\mu)\psi' = S(\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu)\psi \,. \tag{2.161}$$

Полагая здесь $\psi' = S\psi$, получаем:

$$\hat{A}'_\mu = S\hat{A}_\mu S^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^{-1} \,, \tag{2.162}$$

что дает общий закон калибровочного преобразования полей Янга – Миллса (обобщенное градиентное преобразование). Снова рассмотрим примеры:

- *Группа* $U(1)$.

$$\begin{aligned} S &= e^{-i\Lambda} \,, \qquad \partial_\mu S = -i(\partial_\mu \Lambda) e^{-i\Lambda} \,, \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda \quad (g = e,\ M = -1) \,, \qquad D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \,. \end{aligned} \tag{2.163}$$

- *Группа* $SU(2)$.

  Спинорное представление:

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\Lambda}\right) \,, \qquad \partial_\mu S = \frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\partial_\mu\vec{\Lambda} S \,, \tag{2.164}$$

$$\vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu - \vec{\Lambda}\times\vec{A}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\Lambda} \,, \tag{2.165}$$

  что следует из (2.162) при $|\vec{\Lambda}| \ll 1$, с учетом коммутационных соотношений $[\tau_a, \tau_b] = i2\varepsilon_{abc}\tau_c$ и совпадает с (2.103).

Рассмотрим теперь последовательно выполняемые "параллельные переносы" поля вокруг замкнутого контура $ABCD$, показанного на Рис. 2.3. Начнем с точки A, где поле считаем равным $\psi_{A,0}$, тогда его изменение при переходе в точку B определяется ковариантной производной (см. (2.158),(2.152)), что дает:

$$\psi_B = \psi_{A,0} + D_\mu\psi_{A,0}\Delta x^\mu + \frac{1}{2}D_\mu D_\nu \psi_{A,0}\Delta x^\mu \Delta x^\nu + ... = (1 + \Delta x^\mu D_\mu + ...)\psi_{A,0} \,.$$

Далее, совершая перенос в точку C, с точностью до членов первого порядка получаем:

$$\psi_C = \psi_B + \delta x^\nu D_\nu \psi_B = (1 + \delta x^\nu D_\nu)\psi_B = (1 + \delta x^\nu D_\nu)(1 + \Delta x^\mu D_\mu)\psi_{A,0} \,.$$

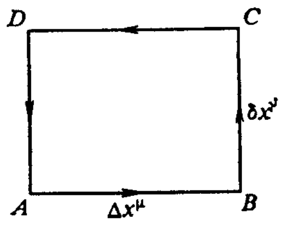


Рис. 2.3:

Последующий перенос в точку D и в исходную точку A дает:

$$\psi_D = (1 - \Delta x^\rho D_\rho)\psi_C \,, \tag{2.166}$$

$$\begin{aligned} \psi_{A,1} &= (1 - \delta x^\sigma D_\sigma)\psi_D = (1 - \delta x^\sigma D_\sigma)(1 - \Delta x^\rho D_\rho)(1 + \delta x^\nu D_\nu)(1 + \Delta x^\mu D_\mu)\psi_{A,0} = \\ &= \{1 + \delta x^\mu \Delta x^\nu [D_\mu, D_\nu]\}\, \psi_{A,0} \,, \end{aligned} \tag{2.167}$$

где возник коммутатор операторов ковариантного дифференцирования:

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - ig\hat{A}_\mu, \partial_\nu - ig\hat{A}_\nu] = -ig\left\{\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]\right\} \,. \tag{2.168}$$

Определим теперь тензор:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu] \,, \tag{2.169}$$

так что

$$[D_\mu, D_\nu] = -igG_{\mu,\nu} \,. \tag{2.170}$$

Соотношение (2.169), фактически, дает общее определение тензора напряженностей полей Янга – Миллса для произвольной калибровочной группы. Соответственно (2.167) представляется в виде:

$$\psi_{A,1} = (1 - ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu})\psi_{A,0} \,, \qquad \Delta S^{\mu\nu} = \delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{2.171}$$

и мы получаем:

$$\psi_{A,1} - \psi_{A,0} = -ig\Delta S^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \psi_{A,0} \,. \tag{2.172}$$

Таким образом, *если тензор калибровочного поля отличен от нуля, то обход по замкнутому контуру дает конечный физический эффект пропорциональный потоку калибровочного поля $G_{\mu\nu}$ через площадь контура $\Delta S^{\mu\nu}$*: поле ψ поворачивается в изопространстве. Нетрудно убедиться, что поле $G_{\mu\nu}$ инвариантно относительно калибровочных преобразований:

$$G_{\mu\nu} = SG_{\mu\nu}S^{-1} \tag{2.173}$$

и его нельзя свести к нулю путем таких преобразований. Если же поле $G_{\mu\nu}$ равно нулю в одной калибровке, то оно равно нулю и во всех остальных калибровках.

Рассмотрим опять простые примеры:

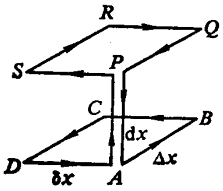


Рис. 2.4:

- *Группа* $U(1)$.
$$G_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.174}$$
— обычный тензор напряженностей полей в электродинамике.
- *Группа* $SU(2)$.
$$[M^a, M^b] = i\varepsilon_{abc}M^c\,, \qquad G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu\,, \tag{2.175}$$
что в векторных обозначениях в изопространстве
$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \tag{2.176}$$
совпадает с данным выше определением (2.112).

Здесь можно снова отметить аналогию с теорией гравитации. Тензор полей Янга – Миллса, в некоторых отношениях, аналогичен тензору кривизны Римана – Кристоффеля [25]:
$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\Gamma^\kappa_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\,. \tag{2.177}$$
При параллельном переносе произвольного вектора V^μ по замкнутому контуру в римановом пространстве разность начальных и конечных компонент вектора равна:
$$\Delta V^\mu = \frac{1}{2} R^\mu_{\rho\sigma\lambda} V^\rho \Delta S^{\sigma\lambda}\,, \tag{2.178}$$
где $\Delta S^{\sigma\lambda}$, как и выше, обозначает площадь области, ограниченной контуром. Величина ΔV^μ отлична от нуля только в том случае, когда пространство обладает внутренней кривизной. В общей теории относительности это соответствует наличию нетривиального гравитационного поля.

Анализируя обход по контуру, окружающему параллелепипед, показанному на Рис. 2.4, Фейнман дал простой вывод следующего тождества для поля $G_{\mu\nu}$:
$$D_\rho G_{\mu\nu} + D_\mu G_{\nu\rho} + D_\nu G_{\rho\mu} = 0\,, \tag{2.179}$$
которое фактически и определяет вторую пару “уравнений Максвелла” для напряженностей поля Янга – Миллса (2.121). В случае калибровочной группы $U(1)$ это тождество просто сводится к (2.119) :
$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0\,. \tag{2.180}$$
Вывод, коротко говоря, сводится к следующему рассуждению. На Рис. 2.4 изображен путь обхода $ABCDAPSRQPA$. Имеется еще два пути такого же типа, вдоль границ двух других пар противоположных граней параллелепипеда,

так что вдоль границ всех шести граней проходит контур $(ABCDAPSRQPA) + (ADSPABQRCBA) + (APQBADCRSDA)$. Этот путь проходит через каждое ребро параллелепипеда одинаковое число раз в прямом и обратном направлении. Соответственно, поле ψ при таком обходе *не меняется*, откуда и следует тождество (2.179).

В теории гравитации существует аналогичное тождество Бианки для тензора Римана – Кристоффеля:

$$D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + D_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} + D_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = 0\,. \tag{2.181}$$

Аналогия теории калибровочных полей с теорией гравитации может быть изображена следующей таблицей:

Таблица II. Аналогия теории калибровочных полей и теории гравитации.

Калибровочные теории	Общая теория относительности
Калибровочные преобразования	Преобразования координат
Калибровочная группа	Группа всех преобразований координат
Потенциал калибровочного поля A_μ	Коэффициенты связности $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$
Напряженность поля $G_{\mu\nu}$	Тензор кривизны $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}$

Эта аналогия имеет даже более глубокий смысл. Еще на раннем этапе развития теории калибровочных полей Утияма показал (см. перевод этой интересной работы в сб. [28]), что уравнения общей теории относительности Эйнштейна могут быть получены по рецепту теории калибровочных полей Янга – Миллса, если в качестве калибровочной группы взять группу Лоренца (преобразований координат в специальной теории относительности) и потребовать инвариантности теории относительно соответствующих локальных преобразований (когда параметры группы Лоренца считаются произвольными функциями точки в пространстве-времени Минковского).

2.7 Реалистический пример — хромодинамика.

В качестве примера реалистической неабелевой калибровочной теории кратко рассмотрим структуру квантовой хромодинамики. В основе хромодинамики лежит уже отмеченное во вводной главе обстоятельство (на сегодняшний день это можно рассматривать просто как экспериментальный факт!): каждый кварк данного "аромата" u, d, s, c, t, b обладает еще и дополнительным квантовым числом — "цветом", принимающим три значения $(1, 2, 3 \quad \text{или} \quad R, G, B)$ [9]. Таким образом, поле каждого кварка представляется фундаментальным спинором группы $SU(3)$[10]:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \tag{2.182}$$

Цветовая симметрия теории является *точной* и лагранжиан должен быть инвариантен относительно группы преобразований вида:

$$q \to Uq\,, \tag{2.183}$$

[9] Необходимость введения такого квантового числа была ясна с самого момента появления кварковой модели адронов для снятия некоторых противоречий с принципом Паули.

[10] Достаточно ясное и компактное изложение теории неприводимых представлений этой группы, хотя и в связи с несколько другой задачей физики элементарных частиц (приближенной симметрией адронов и их кварковой структурой), можно найти в книге [27].

где 3×3 преобразования U являются унитарными и унимодулярными:

$$U^{+}U = 1\,, \qquad \mathrm{Det}\,U = 1\,,$$
$$U = e^{iT}\,, \qquad T = T^{+}\,, \qquad \mathrm{Sp}\,T = 0\,. \tag{2.184}$$

Эти матрицы (преобразования) зависят от восьми параметров (“углов поворота”) ε_a, соответственно имеется и восемь генераторов $\lambda_i/2 \quad (i = 1, ..., 8)$:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.185}$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

представляют собой некоторое “обобщение” матриц Паули на три измерения. Эти генераторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}\,, \tag{2.186}$$

где отличные от нуля структурные константы f_{abc} равны:

$$f_{123} = 1\,, \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}\,, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \tag{2.187}$$

Смысл хромодинамики состоит в том, чтобы считать цветовую симметрию локальной калибровочной симметрией! В результате, по изложенным выше рецептам в теории возникает восемь калибровочных полей (глюонов) — переносчиков взаимодействия между кварками. Их удобно записать в виде следующей матрицы (как в (2.159)):

$$\hat{A}_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix}. \tag{2.188}$$

Явный вид тензора напряженностей глюонного поля можно получить из (2.169) или из (2.175), подставив в последнее выражение вместо ε_{abc} структурные константы f_{abc} группы $SU(3)$. В соответствии с общей идеологией теории калибровочных полей глюоны являются безмассовыми, а отсутствие в эксперименте соответствующих дальнодействующих сил объясняется явлением *конфайнмента*, которое будет рассмотрено ближе к концу нашего курса.

Глава 3

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ. СИММЕТРИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

3.1 Фотон.

3.1.1 Квантование электромагнитного поля.

Теперь наша задача состоит в переходе от классической к квантовой теории поля. Процедура канонического квантования классического поля проводится, как мы увидим, в полной аналогии с аналогичной процедурой для механической системы. Сначала мы рассмотрим квантовую теорию свободных (невзаимодействующих) полей, и начнем мы не с самого простого примера свободного электромагнитного поля, что определяется его важной ролью. Выше мы уже видели, что электромагнитное поле является примером (абелева) калибровочного поля. Поэтому здесь возникают дополнительные сложности, связанные с учетом калибровочной инвариантности. Но для электромагнитного поля эти проблемы достаточно просто решаются и в рамках процедуры канонического квантования, тогда как для неабелевых полей Янга – Миллса нужно использовать существенно более сложную схему квантования, основанную на функциональном интегрировании, и которая будет обсуждаться нами гораздо позднее. В дальнейшем, в этой Главе, мы следуем, в основном, схеме изложения принятой в [1].

С точки зрения механики, поле представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Удобно исходить из такого классического описания поля, которое имеет дело с бесконечным, но дискретным набором переменных. Будем рассматривать электромагнитное поле в так называемой кулоновской калибровке, когда его вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет условию поперечности:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0\,. \tag{3.1}$$

При этом скалярный потенциал $\varphi = 0$, а поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются как[1]:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}\,, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}\,. \tag{3.2}$$

Уравнения Максвелла сводятся, в данном случае, к волновому уравнению для вектор-потенциала $\mathbf{A}$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{3.3}$$

Как известно, шесть компонент электромагнитного поля записываются в виде антисимметричного тензора:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\,, \tag{3.4}$$

откуда сразу следуют однородные уравнения Максвелла в виде:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0\,. \tag{3.5}$$

В вакууме (в отсутствие источников) неоднородные уравнения Максвелла имеют вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3.6}$$

или

$$\Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0\,. \tag{3.7}$$

Мы знаем, что эти уравнения следуют из вариационного принципа с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\,, \tag{3.8}$$

где A^μ рассматривается как динамическое поле. Однако для заданного значения напряженностей электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ вектор A^μ не является единственным, а определен с точностью до градиентного преобразования:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)\,. \tag{3.9}$$

Налагая на $\Lambda(x)$ условие $\Box\Lambda = -\partial_\mu A^\mu$, для преобразованного по (3.9) поля легко получить $\partial_\mu A^{\mu\prime} = 0$, после чего штрих над A^μ уже можно опустить, записав *условие Лоренца*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{3.10}$$

Тогда (3.7) переходит в:

$$\Box A^\nu = 0 \tag{3.11}$$

— волновое уравнение для потенциала. Условие Лоренца (3.10) дает одно уравнение для четырех компонент потенциала, сокращая число независимых переменных поля до трех. Однако это условие еще не определяет потенциал A_μ однозначно. Очевидно, что если A_μ удовлетворяет условию Лоренца, то и $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ему тоже удовлетворяет в силу $\Box\Lambda(x) = 0$. Выберем теперь $\Lambda(x)$ так, чтобы кроме этого выполнялось равенство $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = -\varphi$, тогда получим, очевидно, $\varphi' = 0$, что в силу (3.10) дает $\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Таким образом, мы и приходим к кулоновской калибровке, в которой остается только две независимые компоненты электромагнитного поля (условие поперечности), соответствующие реальному миру.

Переход к дискретному набору полевых переменных производится путем рассмотрения поля в конечном объеме пространства V (в дальнейшем, для краткости, всюду полагаем $V = 1$) [25]. Тогда вектор-потенциал представляется в виде ряда Фурье по плоским волнам:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})\,, \tag{3.12}$$

[1] Напомним, что мы используем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$

где коэффициенты разложения $\mathbf{a_k}$ зависят от времени по закону

$$\mathbf{a_k} \sim \mathrm{e}^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}\,, \qquad \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|\,. \tag{3.13}$$

В силу условия поперечности (3.1) имеем:

$$\mathbf{a_k} \cdot \mathbf{k} = 0\,. \tag{3.14}$$

В (3.12) суммирование идет по бесконечному дискретному набору k_x, k_y, k_z. Можно, как обычно, перейти к интегрированию по k_x, k_y, k_z, введя $\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$, как число возможных значений $\mathbf{k}$, приходящихся на элемент объема $\mathbf{k}$-пространства $d^3\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$. В итоге, поле полностью определяется величинами $\mathbf{a_k}$, которые рассматриваются как набор классических полевых переменных.

Введем канонические полевые переменные как:

$$\mathbf{Q_k} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\mathbf{a_k} + \mathbf{a_k^*})\,, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{P_k} = -\frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{4\pi}}(\mathbf{a_k} - \mathbf{a_k^*}) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}\,. \tag{3.16}$$

Легко видеть, что эти переменные вещественны. Тогда разложение (3.12) можно переписать в виде:

$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}\left[\mathbf{Q_k}\cos\mathbf{kr} - \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}\mathbf{P_k}\sin\mathbf{kr}\right]\,. \tag{3.17}$$

Для нахождения гамильтониана поля H, вычислим его полную энергию:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int d^3\mathbf{r}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \tag{3.18}$$

и выразим ее через переменные $\mathbf{Q_k}$ и $\mathbf{P_k}$. Для этого найдем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с помощью (3.2) и (3.17), подставим соответствующие выражения в (3.18) и, выполнив интегрирование по координатам, получим:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{P_k^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2\mathbf{Q_k^2}\right)\,. \tag{3.19}$$

По условию поперечности, величины $\mathbf{P_k}$ и $\mathbf{Q_k}$ ортогональны вектору $\mathbf{k}$, так что, фактически, они имеют всего по две независимые компоненты. Направления этих векторов определяются направлениями поляризации соответствующей волны. Обозначим две компоненты $\mathbf{P_k}$ и $\mathbf{Q_k}$ в плоскости ортогональной $\mathbf{k}$ как $P_{\mathbf{k}\alpha}$ и $Q_{\mathbf{k}\alpha}$, где $\alpha = 1, 2$. Тогда (3.19) можно переписать как:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(P_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2\right)\,. \tag{3.20}$$

Таким образом, гамильтониан H распадается на сумму независимых слагаемых, каждое из которых имеет вид гамильтониана гармонического осциллятора (“разложение поля” на осцилляторы).

Теперь мы можем перейти к *квантованию*. Как квантовать осцилляторы хорошо известно из квантовой механики [29]. Процедура квантования состоит в замене обобщенных координат $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ и обобщенных импульсов $P_{\mathbf{k}\alpha}$ *операторами*, удовлетворяющими стандартным коммутационным соотношениям[2]:

$$Q_{\mathbf{k}\alpha}P_{\mathbf{k}\alpha} - P_{\mathbf{k}\alpha}Q_{\mathbf{k}\alpha} \equiv [Q_{\mathbf{k}\alpha}, P_{\mathbf{k}\alpha}] = i\,. \tag{3.21}$$

Для разных значений $\mathbf{k}\alpha$ соответствующие операторы коммутируют. Соответственно, поля $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ также становятся операторами.

Собственные значения гамильтониана (3.20), очевидно, имеют вид:

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \omega_{\mathbf{k}}\,, \tag{3.22}$$

где $N_{\mathbf{k}\alpha}$ — целые числа, которые представляют собой числа *фотонов* в состояниях $\mathbf{k}\alpha$. Матричные элементы оператора $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ также хорошо известны из квантовой механики [29]:

$$\langle N_{\mathbf{k}\alpha}|Q_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}-1\rangle = \langle N_{\mathbf{k}\alpha}-1|Q_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{N_{\mathbf{k}\alpha}}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\,. \tag{3.23}$$

Матричные элементы $P_{\mathbf{k}\alpha} = \dot{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ отличаются от (3.23) множителем $\pm i\omega_{\mathbf{k}}$.

Введем новые операторы:

$$c_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\omega_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}\alpha} + iP_{\mathbf{k}\alpha})\,, \qquad c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\omega_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}\alpha} - iP_{\mathbf{k}\alpha})\,. \tag{3.24}$$

Тогда из (3.23) и (3.24) получаем:

$$\langle N_{\mathbf{k}\alpha}-1|c_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = \langle N_{\mathbf{k}\alpha}|c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}-1\rangle = \sqrt{N_{\mathbf{k}\alpha}}\,. \tag{3.25}$$

Из (3.24) и (3.21) немедленно получаем коммутационные соотношения для операторов $c_{\mathbf{k}\alpha}$ и $c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$c_{\mathbf{k}\alpha}c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} - c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha} \equiv [c_{\mathbf{k}\alpha}, c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}] = 1\,. \tag{3.26}$$

Для несовпадающих $\mathbf{k}$ и α эти операторы просто коммутируют. Операторы $c_{\mathbf{k}\alpha}$ и $c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$ называются операторами уничтожения и рождения фотонов в состоянии с волновым вектором (импульсом) $\mathbf{k}$ и поляризацией α. Происхождение этого названия очевидно из (3.25). По историческим причинам формализм, основанный на использовании таких операторов, называется представлением *вторичного квантования*.

Оператор вектор-потенциала, с использованием (3.12), (3.15), (3.16) и (3.24), может теперь быть записан в виде:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(c_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} + c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}^{*}_{\mathbf{k}\alpha} \right), \tag{3.27}$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{i\mathbf{kr}}\,, \tag{3.28}$$

[2] Напомним, что у нас всегда $\hbar = 1$

где $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — единичный вектор поляризации для данного полевого осциллятора. Очевидно, что $\mathbf{e}^{(\alpha)}\cdot\mathbf{k} = 0$, так что он ортогонален импульсу фотона $\mathbf{k}$. Любому значению $\mathbf{k}$ соответствует два независимых направления поляризации $\alpha = 1, 2$.

Аналогичным образом можно выписать разложения для операторов напряженности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}(c_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} + c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}^{*}_{\mathbf{k}\alpha})\,, \tag{3.29}$$

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}(c_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} + c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}^{*}_{\mathbf{k}\alpha})\,, \tag{3.30}$$

где

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} = i\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}\,, \qquad \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}]\,, \tag{3.31}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega_{\mathbf{k}}$ представляет собой единичный вектор в направлении распространения фотона. Введенные в (3.28) вектора $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ удовлетворяют следующему условию ортонормированности:

$$\int d^3\mathbf{r}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}^{*}_{\mathbf{k}'\alpha'} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathbf{k}}}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\,, \tag{3.32}$$

где учтено, в частности, что два независимых вектора поляризации ортогональны: $\mathbf{e}^{(\alpha)}\cdot\mathbf{e}^{(\alpha')*} = 0$. Фактически, величины $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ (плоские волны) можно трактовать как волновые функции фотона с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}^{(\alpha)}$[3].

Из (3.32) и (3.31) нетрудно получить, что:

$$\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}^{*}_{\mathbf{k}'\alpha'} + \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}^{*}_{\mathbf{k}'\alpha'}) = \omega_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}\,. \tag{3.33}$$

Подставляя (3.29), (3.30) в (3.18) и используя (3.33), находим:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}(c_{\mathbf{k}\alpha}c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} + c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha})\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}^{*}_{\mathbf{k}'\alpha'} + \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}^{*}_{\mathbf{k}'\alpha'}) =$$
$$= \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}(c_{\mathbf{k}\alpha}c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} + c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha})\omega_{\mathbf{k}} \tag{3.34}$$

или, используя коммутационные соотношения (3.26),

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\omega_{\mathbf{k}} \tag{3.35}$$

— оператор Гамильтона системы фотонов в представлении вторичного квантования. Из сравнения с (3.22) ясно, что

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\alpha} = c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha} \tag{3.36}$$

представляет собой оператор числа фотонов в состоянии $\mathbf{k}\alpha$, матричные элементы которого в представлении чисел заполнения диагональны и принимают целочисленные значения. Заметим, что (3.33) представляет собой запись нормировки волновой функции “на один фотон в объеме $V = 1$”.

[3]Подчеркнем, что эти волновые функции нельзя рассматривать как амплитуды вероятности пространственной локализации фотона, поскольку понятие координаты для частицы, движущейся со скоростью света в вакууме, просто отсутствует

В классической теории электромагнитного поля, его импульс определяется как [25]:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,. \tag{3.37}$$

Заменяя $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ операторами (3.29), (3.30) получим:

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(c^+_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{k}\,, \tag{3.38}$$

что соответствует тому, что каждый фотон переносит импульс $\mathbf{k}$.

Наличие в (3.35) и (3.38) вкладов, не зависящих от чисел заполнения (связанных со слагаемым $1/2$ в скобках), означает присутствие *бесконечного* вклада вакуумных флуктуаций ("нулевых" колебаний) электромагнитного поля. Это первый пример типичной "квантовополевой" расходимости, с которым мы сталкиваемся. В большинстве случаев, в этой ситуации просто переходят к новому началу отчета энергии (импульса) и записывают:

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha} c^+_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha}\omega_{\mathbf{k}}\,, \qquad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} c^+_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k}\,. \tag{3.39}$$

При этом начало отсчета "перенормируется" бесконечными ("вакуумными") константами, не зависящими от состояния возбуждения поля. Вместе с тем, следует сразу подчеркнуть, что наличие бесконечной энергии (импульса) вакуума (нулевых колебаний) является совершенно реальным проявлением квантовой природы поля и приводит к *конечным* экспериментальным следствиям, одним из лучших примеров которых является рассматриваемый ниже эффект Казимира.

3.1.2 Замечания о градиентной инвариантности и статистике Бозе.

Выбор потенциалов в электродинамике, как хорошо известно, неоднозначен. Выше мы использовали кулоновскую калибровку (3.1). В общем случае, компоненты вектор-потенциала A_μ могут быть подвергнуты градиентному преобразованию вида:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda\,. \tag{3.40}$$

Для плоских волн, если ограничиться преобразованиями, не меняющими такого вида потенциала (т.е. его пропорциональности $\exp(-ik^\mu x_\mu)$), эта неоднозначность сводится к возможности прибавить к амплитуде волны произвольный 4-вектор, пропорциональный k^μ.

В случае произвольной калибровки, 4-потенциал поля представляется в виде, обобщающем (3.27):

$$A^\mu = \sum_{k\alpha}(c_{k\alpha}A^\mu_{k\alpha} + c^+_{k\alpha}A^{\mu*}_{k\alpha})\,, \tag{3.41}$$

где волновые функции фотона представляются в виде:

$$A^\mu_k = \sqrt{4\pi}\frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}}e^{-ik_\nu x^\nu}\,, \tag{3.42}$$

где e^μ — пространственноподобный 4-вектор поляризации, удовлетворяющий условию $e_\mu e^{\mu *} = -1$. Пространственноподобный характер 4-вектора поляризации очевиден из условия четырехмерной поперечности, поскольку волновой вектор (импульс) реального фотона всегда лежит на световом конусе. В такой записи, упомянутое выше калибровочное (градиентное) преобразование сводится к

$$e_\mu \to e_\mu + \Lambda k_\mu \,, \tag{3.43}$$

где $\Lambda = \Lambda(k^\mu)$ — произвольная скалярная функция k^μ. Поперечность поляризации означает, что всегда возможна калибровка, обеспечивающая трехмерную поперечность, в которой выбирается:

$$e^\mu = (0, \mathbf{e})\,, \qquad \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0\,. \tag{3.44}$$

Условие четырехмерной поперечности, эквивалентное условию Лоренца (3.10), записывается в инвариантном виде:

$$e_\mu k^\mu = 0\,. \tag{3.45}$$

Это условие, также как и условие $e_\mu e^{\mu *} = -1$, не нарушается преобразованием (3.43) в силу того, что для реального фотона всегда имеем $k^2 = 0$ (равенство нулю массы фотона, световой конус!). Измеримые физические величины, естественно, не должны меняться при калибровочных преобразованиях.

Фотоны подчиняются статистике Бозе. Это очевидно из того факта, что число фотонов $N_{\mathbf{k}\alpha}$ в состоянии $\mathbf{k}\alpha$ может принимать любое целочисленное значение, а также из вида коммутационных соотношений (3.26). Бозевское поле может иметь классический предел. Известно, что свойства квантовой системы приближаются к классическим, когда велики квантовые числа, определяющие состояния системы. Для электромагнитного поля это означает, что велики числа фотонов $N_{\mathbf{k}\alpha}$. В этом случае, мы можем пренебречь единицей в правой части коммутационных соотношений (3.26) (очевидно, что это соответствует и пределу $\hbar \to 0$) и записать:

$$c^+_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha} \approx c_{\mathbf{k}\alpha} c^+_{\mathbf{k}\alpha}\,, \tag{3.46}$$

так что операторы $c_{\mathbf{k}\alpha}$, $c^+_{\mathbf{k}\alpha}$ можно рассматривать как классические амплитуды поля. Однако тут требуется некоторое уточнение, поскольку при всех $N_{\mathbf{k}\alpha} \gg 1$ мы получим бесконечность при суммировании по $\mathbf{k}\alpha$ в энергии поля (3.22).

Фактически, физический смысл имеет рассмотрение значений поля, усредненных по некоторым конечным промежуткам времени Δt. В фурье-разложении усредненного поля $\mathbf{E}$ основной вклад дает область частот, удовлетворяющих условию $\omega \Delta t < 1$. Таким образом, при выводе условия квазиклассичности, нужно рассматривать лишь полевые осцилляторы с $\omega < 1/\Delta t$. Число осцилляторов с частотами от нуля до $\omega \sim 1/\Delta t$, по порядку величины, равно ($V = 1$):

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\Delta t)^3}\,. \tag{3.47}$$

Энергия поля в единице объема порядка $\mathbf{E}^2$. Поделив эту энергию на число осцилляторов и на среднюю энергию фотона $\sim \hbar\omega$, получим оценку числа фотонов:

$$N \sim \frac{\mathbf{E}^2 c^3}{\hbar \omega^4}\,. \tag{3.48}$$

Тогда из условия $N \gg 1$ и (3.47) получаем:

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}, \tag{3.49}$$

что определяет критерий квазиклассического рассмотрения поля[4]. Видим, что поле должно быть достаточно сильным, тем сильнее, чем меньше интервал времени Δt. Для переменного поля $\Delta t \sim \omega^{-1}$, так что достаточно слабое переменное поле не может быть квазиклассическим. Лишь статические поля, для которых $\Delta t \to \infty$ всегда можно считать классическими.

Об измеримости полей в квантовой электродинамике.

Существование предельной скорости распространения взаимодействий (скорости света) приводит к целому ряду дополнительных ограничений возможностей измерения различных физических величин в релятивистской квантовой теории, по сравнению с нерелятивистским случаем. Этот вопрос был проанализирован на ранних этапах развития квантовой теории поля Ландау и Пайерлсом. Качественное обсуждение этих ограничений можно найти во Введении к книге [1]. В ходе своего анализа, Ландау и Пайерлс подняли фундаментальный вопрос о возможности измерения самого электромагнитного поля. В частности, они утверждали, что поскольку измерение любой компоненты электрического (для определенности) поля требует определения импульса заряженного пробного тела, то обратное действие поля, излученного при выполнении такой операции, всегда приводит к ограничению точности измерения поля. Соответственно точное определение напряженности поля нельзя ввести в противоречии с рассмотренными выше основами квантовой электродинамики. Это, а также ряд других обстоятельств, которые мы еще рассмотрим ниже, были причиной длительного скептического отношения Ландау к квантовой теории поля.

Более детально вопрос об измеримости полей был проанализирован в работах Бора и Розенфельда (см. интересный обзор этой проблемы в статье Розенфельда в сб. [30]). Оказалось, в частности, что вопрос решается (в духе копенгагенской интерпретации квантовой механики) при использовании протяженных пробных тел. В самом деле, рассмотрим измерение компоненты электрического поля E_x, усредненной по объему V и интервалу времени T. Возьмем пробное тело, заполняющее объем V с равномерной плотностью заряда ρ, и измерим его импульсы p'_x и p''_x в начале и конце временного интервала T. Сделав пробное тело достаточно тяжелым, можно произвольно уменьшить его смещение в течение этого интервала времени, а для среднего значения $\bar{E}_x$ получить:

$$\bar{E}_x \rho V T = p''_x - p'_x\,. \tag{3.50}$$

Однако, определение импульса пробного тела неизбежно влечет за собой некоторую ошибку Δx в определении его координаты в соответствии с обычным соотношением неопределенности: $\Delta p_x \sim \hbar/\Delta x$. Тогда возникает и неточность $\Delta\bar{E}_x$ в значении поля $\bar{E}_x$, равная как нетрудно видеть:

$$\Delta\bar{E}_x \sim \frac{\hbar}{\rho V T \Delta x}\,. \tag{3.51}$$

Но это ошибку можно сделать произвольно малой, увеличивая плотность заряда пробного тела.

Аналогичным образом удается проанализировать возможность точных измерений зарядов и токов [30]. По мнению Бора и Розенфельда, таким образом демонстрируется непротиворечивость основных понятий квантовой электродинамики. Заметим, впрочем, что сама копенгагенская интерпретация квантовой теории, использующая в качестве существенного элемента чисто классические представления, в настоящее время перестала быть общепринятой (или, по крайней мере, вполне удовлетворительной с точки зрения многих исследователей). Автору неизвестны работы, в которых вопрос об измеримости полей рассматривался бы с более современных позиций.

3.1.3 Вакуумные флуктуации и эффект Казимира.

Реальность вакуумных (“нулевых”) флуктуаций электромагнитного поля прекрасно иллюстрируется рассмотрением так называемого эффекта Казимира [10]. Рассмотрим две большие идеально проводящие металлические пластины, помещенные в *вакууме*, на расстоянии a друг от друга, как это показано на Рис. 3.1. Пусть пластины представляют собой квадраты со стороной L, причем

[4] Для наглядности в этих оценках c и $\hbar$ выписаны в явном виде.

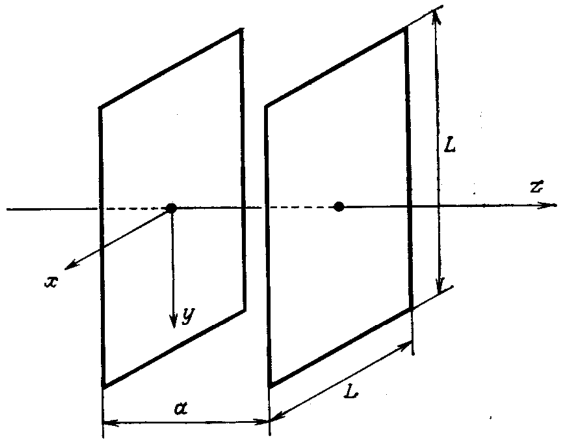


Рис. 3.1:

$L \gg a$. Рассмотрим моды колебаний электромагнитного поля в объеме $L^2 a$. Граничные условия состоят в том, что вектор электрического поля $\mathbf{E}$ перпендикулярен, а вектор магнитного поля $\mathbf{B}$ параллелен пластине на внутренней поверхности. Вклад в энергию вносят только поперечные моды. Если компонента k_z, перпендикулярная поверхности пластин, отлична от нуля, то она может принимать только дискретные значения $k_z = n\pi/a \quad (n = 1, 2, ...)$, чтобы узлы (нули) поля располагались на пластинах. При этом нужно еще учесть два состояния поляризации. Если же $k_z = 0$, то остается только одна мода (электрическая составляющая у этой моды просто равна нулю в силу отсутствия тангенциального электрического поля на поверхности идеального проводника). Тогда энергия нулевых колебаний электромагнитного поля в рассматриваемом объеме между пластинами равна:

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}\alpha} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{2}\hbar c|\mathbf{k}_\alpha| = \frac{\hbar c}{2} L^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \left[|\mathbf{k}_\parallel| + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \right] . \tag{3.52}$$

Это выражение, как легко видеть, бесконечно. Вычтем, однако, из него аналогичное выражение для энергии вакуумных флуктуаций в том же объеме, но в отсутствие металлических пластин:

$$E_0 = \frac{\hbar c}{2} L^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} 2\sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + k_z^2} = \frac{\hbar c}{2} L^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} 2\int\limits_0^{\infty} dn \sqrt{\mathbf{k}_\parallel^2 + n^2\pi^2/a^2} \, . \tag{3.53}$$

Тогда изменение энергии вакуума, вызванное введением в него металлических пластин, в расчете на единицу их поверхности равно:

$$\mathcal{E} = \frac{E - E_0}{L^2} = \frac{\hbar c}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} dk\, k \left(\frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k^2 + n^2\pi^2/a^2} - \int\limits_0^{\infty} dn \sqrt{k^2 + n^2\pi^2/a^2} \right) . \tag{3.54}$$

Это выражение, по прежнему, бесконечно из-за ультрафиолетовых (при больших k) расходимостей. Учтем, однако, что для длин волн меньших, чем размеры атома, приближение идеального проводника (рассматриваемого как сплошная среда) неприменимо. Поэтому введем в подинтегральное выражение в (3.54) некоторую гладкую функцию обрезания $f(k)$, которая равна единице при $k < k_m$ и обращается в нуль при $k \gg k_m$, где k_m порядка обратных атомных размеров. Тогда можно написать:

$$\mathcal{E} = \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3} \int\limits_0^{\infty} du \left[\frac{\sqrt{u}}{2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + n^2}\right) \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^{\infty} dn \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u + n^2}\right) \right] , \tag{3.55}$$

где введена безразмерная переменная интегрирования $u = a^2k^2/\pi^2$. Последнее выражение можно переписать как:

$$\mathcal{E} = \hbar c \frac{\pi^2}{4a^3}\left[\frac{1}{2}F(0) + F(1) + F(2) + \ldots - \int\limits_0^\infty dn\, F(n)\right], \tag{3.56}$$

где мы определили функцию:

$$F(n) = \int\limits_0^\infty du\sqrt{u+n^2}\, f\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{u+n^2}\right). \tag{3.57}$$

При $n \to \infty$ имеем $F(n) \to 0$ в силу свойств функции обрезания. Для вычисления разности между суммой и интегралом, стоящей в квадратных скобках в (3.56), можно воспользоваться формулой суммирования Эйлера – Маклорена, записав ее в виде:

$$\frac{1}{2}F(0) + F(1) + F(2) + \ldots - \int\limits_0^\infty dn\, F(n) = -\frac{1}{2!}B_2F'(0) - \frac{1}{4!}B_4F'''(0) + \ldots, \tag{3.58}$$

где фигурируют числа Бернулли B_ν, определяемые с помощью ряда:

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{\nu=0}^\infty B_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}. \tag{3.59}$$

В частности, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, ... Мы имеем:

$$F(n) = \int\limits_{n^2}^\infty du\sqrt{u}\, f\left(\frac{\pi\sqrt{u}}{a}\right), \qquad F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{a}\right). \tag{3.60}$$

Предполагая, что $f(0) = 1$ и все ее производные обращаются в нуль при нулевом значении аргумента, имеем $F'(0) = 0$, $F'''(0) = -4$, а производные F более высокого порядка равны нулю. Таким образом, в окончательный результат параметр обрезания вообще не входит, и мы получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c\pi^2}{a^3}\frac{B_4}{4!} = -\frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar c}{a^3}. \tag{3.61}$$

Тогда сила, действующая на единицу площади пластин, равна:

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}. \tag{3.62}$$

Отрицательный знак соответствует притяжению. Замечательно, что существование такой, чрезвычайно слабой, силы притяжения, целиком обусловленной вакуумными флуктуациями электромагнитного поля, было экспериментально обнаружено, а формула (3.62) была непосредственно проверена. Еще более удивительно, что существование силы Казимира, в настоящее время, приходится учитывать[5] при конструировании и обеспечении работы современных микромашин! Это доказывает, что "нулевые" колебания электромагнитного поля вполне реальны.

3.2 Бозоны.

3.2.1 Скалярные частицы.

Рассмотрим частицы со спином 0. Состояние свободной бесспиновой частицы полностью определяется заданием ее импульса $\mathbf{p}$. При этом ее энергия $\varepsilon_\mathbf{p}$ определяется из:

$$\varepsilon_\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \qquad \text{или} \qquad p^2 = m^2 \tag{3.63}$$

или, как говорят, частица лежит на "массовой поверхности". Сохранение энергии-импульса является следствием однородности пространства- времени. В квантовой

[5] A.Lambrecht. Physics World **15**, No.9, 29 (2002)

механике требование симметрии по отношению к произвольному смещению системы координат означает, что волновая функция частицы с 4-импульсом p просто умножается на фазовый множитель, равный по модулю единице. Этому требованию удовлетворяет лишь плоская волна:

$$\mathrm{const} \cdot e^{-ipx}\,, \qquad px = \varepsilon_{\mathbf{p}} t - \mathbf{pr}\,. \tag{3.64}$$

Волновое уравнение для наших частиц должно иметь (3.64) в качестве частного решения для любых p, удовлетворяющих условию (3.63). Это уравнение должно быть линейным, что выражает принцип суперпозиции: любая линейная комбинация решений также описывает возможное состояние свободной частицы. Наконец, по возможности, это уравнение должно быть достаточно низкого порядка по производным.

Спин частицы — это ее момент импульса в системе покоя, а состояние частицы в системе покоя описывается нерелятивистской квантовой механикой. Тогда, если спин частицы равен s, то в системе покоя ее волновая функция должна иметь $2s+1$ компоненту (представляться трехмерным спинором ранга $2s$) [29]. Частица со спином $s = 0$ в системе покоя описывается трехмерным скаляром. Но этот трехмерный скаляр может иметь двоякое четырехмерное "происхождение" [1]: это может быть четырехмерный скаляр φ, но это может быть и временная компонента ψ_0 времениподобного 4-вектора ψ_μ, такого, что в системе покоя только ψ_0 и отлична от нуля. тензоры более высокого ранга можно не рассматривать, поскольку они приводят к уравнениям более высоких порядков.

Для свободной частицы, единственным дифференциальным оператором, который может войти в волновое уравнение, является оператор 4-импульса p:

$$p^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right)\,. \tag{3.65}$$

Волновое уравнение должно представлять собой дифференциальную связь φ и ψ_μ с помощью оператора p^μ, удовлетворяющую условию релятивистской инвариантности. Очевидно, что простейший вариант такой связи имеет вид:

$$p_\mu \varphi = m\psi_\mu\,, \qquad p^\mu \psi_\mu = m\varphi\,, \tag{3.66}$$

где m — скаляр, характеризующий частицу[6]. Подставляя ψ_μ из первого уравнения в (3.66) во второе, получаем:

$$(p^2 - m^2)\varphi = 0\,, \tag{3.67}$$

что совпадает с рассмотренным выше уравнением Клейна – Гордона (2.10), (2.29) для *скалярного* поля φ. Подставляя $\varphi \sim e^{-ipx}$ в (3.67), имеем $p^2 = m^2$, так что (3.63) удовлетворяется, а скаляр m имеет смысл массы (покоя) частицы. Поскольку (3.63) справедливо для релятивистской частицы с любым спином, уравнению Клейна – Гордона, фактически, должны удовлетворять компоненты волновой функции свободной частицы с любым спином.

Свойства скалярного поля, удовлетворяющего уравнению Клейна – Гордона, уже довольно подробно анализировались выше. Будем, для общности, рассматривать

[6] Вводить два скаляра m_1, m_2 бессмысленно, поскольку их всегда можно сделать одинаковыми соответствующим переопределением величин φ, ψ_μ

сразу случай комплексного поля. Его тензор энергии-импульса аналогично (2.50) дается выражением:

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) + (\partial^\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi^*) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\,, \tag{3.68}$$

где лагранжиан $\mathcal{L}$ определен в (2.56). В частности:

$$T_{00} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi + m^2\varphi^*\varphi\,, \tag{3.69}$$

$$T_{i0} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,. \tag{3.70}$$

Тогда 4-импульс поля определяется интегралом:

$$P_\mu = \int d^3\mathbf{r} T_{\mu 0}\,. \tag{3.71}$$

Из (3.69) мы видим, что $T_{00} > 0$, так что энергия является положительно определенной, что, кстати, и определяет выбор знаков в лагранжиане.

Выражение (3.69) можно использовать для нормировки поля. Плоская волна, нормированная "на одну частицу в объеме $V = 1$" запишется как:

$$\psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} e^{-ipx}\,. \tag{3.72}$$

В самом деле, вычисляя (3.69) для (3.72), получим $T_{00} = \varepsilon_{\mathbf{p}}$, так что полная энергия в объеме $V = 1$ оказывается равной энергии одной частицы.

Перейдем к квантованию. Рассмотрим разложение произвольной волновой функции (поля) по собственным функциям полного набора возможных состояний свободной частицы, например, по плоским волнам ψ_p из (3.72):

$$\varphi = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}\,, \qquad \varphi^* = \sum_{\mathbf{p}} a^*_{\mathbf{p}}\psi^*_{\mathbf{p}}\,. \tag{3.73}$$

Процедура квантования сводится к замене коэффициентов $a_{\mathbf{p}}, a^*_{\mathbf{p}}$ соответствующими *операторами* уничтожения и рождения $\hat{a}_{\mathbf{p}}\,, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}$.

Принципиальным моментом релятивистской теории является, однако, существование *двух* решений уравнения (3.63), из которого для энергии частицы получаем:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,. \tag{3.74}$$

Физический смысл имеют только $\varepsilon_{\mathbf{p}} > 0$, поскольку наличие (в принципе сколь угодно больших) отрицательных энергий частицы означает неустойчивость системы (отсутствие основного состояния). Просто отбросить решения с $\varepsilon_{\mathbf{p}} < 0$ нельзя, поскольку общее решение волнового уравнения представляет собой суперпозицию всех независимых частных решений и разложение поля следует вести по полному набору собственных функций. Запишем:

$$\varphi = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} a^{(+)}_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{pr} - \varepsilon_{\mathbf{p}} t)} + \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} a^{(-)}_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{pr} + \varepsilon_{\mathbf{p}} t)}\,, \tag{3.75}$$

где в первой сумме стоят плоские волны с положительными, а во второй – с отрицательными частотами. Здесь и далее везде подразумеваем, что $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, т.е. положительно определенную энергию физической частицы.

Рецепт правильного перехода к представлению вторичного квантования может теперь быть сформулирован следующим образом:

- $a_{\mathbf{p}}^{(+)} \to \hat{a}_{\mathbf{p}}$ — оператор уничтожения частицы с импульсом $\mathbf{p}$.
- $a_{\mathbf{p}}^{(-)} \to \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{+}$ — оператор рождения *античастицы* с импульсом $-\mathbf{p}$.

Последняя замена возникает из того, что временная зависимость во второй сумме в (3.75) $e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}}t} = (e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}}t})^*$ соответствует появлению одной "лишней" частицы с энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ в конечном состоянии (при вычислении любого матричного элемента перехода, включающего в себя поле φ). Теперь, заменяя во второй сумме $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, запишем:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \Big(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx} \Big) , \\ \hat{\varphi}^{+} &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \Big(\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \Big) . \end{aligned} \tag{3.76}$$

Теперь операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ в разложении (3.76) оказываются умноженными на "правильные" множители $e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}}t}$, а операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$ — на комплексно сопряженные $e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}}t}$. Оба вида частиц (частицы и античастицы), операторы которых входят в один $\widehat{\varphi}$-оператор, очевидно, имеют одинаковые массы.

Подставляя операторное разложение (3.76) в (3.69) и интеграл $\int d^3\mathbf{r} T_{00}$, определяющий энергию поля, находим гамильтониан в виде:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \big(\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^{+} \big) . \tag{3.77}$$

Физически разумный результат для собственных значений этого оператора (положительная определенность энергии), получается только если операторы рождения и уничтожения удовлетворяют *бозевским* коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}] = [\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}] = 1 , \qquad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}}] = [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}] = \ldots = 0 . \tag{3.78}$$

В самом деле, пользуясь этими коммутационными соотношениями, можно представить гамильтониан (3.77) в виде:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^{+} b_{\mathbf{p}} + 1) . \tag{3.79}$$

Выше мы уже видели, что в представлении чисел заполнения собственные значения бозевских операторов $a_{\mathbf{p}}^{+} a_{\mathbf{p}}$ и $b_{\mathbf{p}}^{+} b_{\mathbf{p}}$ равны целым неотрицательным числам, которые мы будем обозначать, соответственно, как $N_{\mathbf{p}}$ и $\bar{N}_{\mathbf{p}}$ (число частиц и античастиц в состоянии с данным импульсом). Тогда энергию и импульс нашего поля, отбросив (бесконечную) энергию вакуума, можно записать как:

$$E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} (N_{\mathbf{p}} + \bar{N}_{\mathbf{p}}) , \tag{3.80}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} (N_{\mathbf{p}} + \bar{N}_{\mathbf{p}}) . \tag{3.81}$$

Формальный вывод последнего выражения можно выполнить с помощью (3.70), (3.71). Если бы мы приняли для операторов рождения и уничтожения антикоммутационные соотношения фермиевского типа, то вместо (3.79) получили бы $H =$

$\sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}(a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - b^+_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} + 1)$, т.е. не положительно определенное выражение (отсутствие основного состояния). Таким образом, частицы со спином 0 (скалярные частицы), являются бозонами.

Выше мы видели, что для комплексного скалярного поля выполняется и закон сохранения заряда (2.65). Заменяя в выражении для плотности тока (2.63) классические поля φ, φ^* на операторы $\hat{\varphi}\,, \hat{\varphi}^+$ из (3.76) и проводя элементарные выкладки, получим из (2.65):

$$Q = \sum_{\mathbf{p}} (a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}} b^+_{\mathbf{p}}) = \sum_{\mathbf{p}} (a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - b^+_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} - 1)\,, \tag{3.82}$$

где при переходе к последнему равенству опять воспользовались коммутационными соотношениями (3.78). Собственные значения этого оператора, за вычетом вакуумного вклада, представляются в виде:

$$Q = \sum_{\mathbf{p}} (N_{\mathbf{p}} - \bar{N}_{\mathbf{p}})\,, \tag{3.83}$$

откуда видно, что заряды частиц и античастиц противоположны. Заметим, что теперь (после квантования) заряд может меняться только дискретным образом.

3.2.2 Истинно нейтральные частицы.

Выше операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ рассматривались как относящиеся к различным частицам. Это не всегда так: в частном случае операторы, входящие в разложение $\hat{\varphi}$ могут относиться и к одним и тем же частицам (аналогично тому, как это было для фотонов). Тогда:

$$\hat{\varphi} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \Big(\hat{c}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{c}^+_{\mathbf{p}} e^{ipx} \Big)\,, \tag{3.84}$$

так что частица просто совпадает со своей античастицей, и мы имеем дело с так называемыми истинно нейтральными частицами. Оператор поля теперь эрмитов: $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^+$, что является аналогом вещественного поля в классике. Это поле, естественно, имеет вдвое меньше степеней свободы, чем комплексное поле, его лагранжиан имеет вид (2.28). Соответственно, можно вычислить тензор энергии-импульса и, в частности, для плотности энергии получить:

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right\}\,. \tag{3.85}$$

Тогда, подставляя в $\int d^3\mathbf{r} T_{00}$ разложение (3.84), получим гамильтониан в виде:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \big(\hat{c}^+_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}} + \hat{c}_{\mathbf{p}} \hat{c}^+_{\mathbf{p}} \big)\,. \tag{3.86}$$

Снова видна необходимость квантования по Бозе, так что коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения имеют вид:

$$[\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}^+_{\mathbf{p}}] = 1\,, \qquad [\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}_{\mathbf{p}}] = [\hat{c}^+_{\mathbf{p}}, \hat{c}^+_{\mathbf{p}}] = 0\,. \tag{3.87}$$

Тогда гамильтониан
$$H = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \left(c^+_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right) , \tag{3.88}$$
так что, после отбрасывания энергии вакуума, его собственные значения приобретают вид:
$$E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} . \tag{3.89}$$
Понятно, что для эрмитова поля (также, как в классике для вещественного) плотность тока и заряд равны тождественно нулю.

Заметим, что из рассмотренных до сих пор физических частиц, примером истинно нейтральной частицы был фотон, а вещественность соответствующего поля отвечала физической измеримости напряженностей электрического и магнитного поля.

Отступление о группе Лоренца.

Согласно специальной теории относительности все инерциальные системы отсчета эквивалентны. Если две системы координат движутся друг относительно друга в направлении x_1 со скоростью v, то связь между ними выражается преобразованием Лоренца [25]:
$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) = x^0 chu - x^1 shu , \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) = x^1 chu - x^0 shu , \\ x'^2 &= x^2 , \qquad x'^3 = x^3 , \end{aligned} \tag{3.90}$$
где
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} , \qquad \beta = \frac{v}{c} , \qquad thu = \beta . \tag{3.91}$$
В общем случае, постулируется инвариантность физических законов относительно линейных преобразований координат вида (неоднородных преобразований Лоренца):
$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu , \tag{3.92}$$
сохраняющих квадрат интервала:
$$(x-y)^2 = (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu) = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu) . \tag{3.93}$$
В (3.92) смещение совершается после однородного преобразования. Неоднородные преобразования Лоренца называют также преобразованиями Пуанкаре.

Среди рассматриваемых преобразований содержатся не только смещения и вращения в псевдоевклидовом пространстве, но и отражения пространства и времени, обозначаемые P, T и PT:
$$\begin{aligned} &Px^k = -x^k , \qquad Px^0 = x^0 , \\ &Tx^k = x^k , \qquad Tx^0 = -x^0 , \\ &\qquad\qquad PTx^\mu = -x^\mu . \end{aligned} \tag{3.94}$$
Интервал (3.93) не изменяется при преобразованиях (3.92) если
$$\Lambda^\nu_\mu \Lambda^\mu_\sigma = \delta^\nu_\sigma , \qquad \Lambda^\nu_\mu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\beta g^{\beta\nu} . \tag{3.95}$$
В матричном виде последнее условие записывается как:
$$\tilde{\Lambda} g \Lambda = g , \tag{3.96}$$
где тильда обозначает операцию транспонирования. Отсюда ясно, что
$$\mathrm{Det}\, \Lambda = \pm 1 . \tag{3.97}$$
Из (3.95) также следует:
$$(\Lambda^{00})^2 - \sum_k (\Lambda^{0k})^2 = 1 , \tag{3.98}$$
так что $(\Lambda^{00})^2 \geq 1$. Соответственно возникает две возможности:
$$\Lambda^{00} \geq 1 , \qquad \Lambda^{00} \leq -1 . \tag{3.99}$$
Таким образом, общие преобразования (3.92) подразделяются на четыре класса:

1. $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$: $\mathrm{Det}\,\Lambda = 1$, $\Lambda^{00} \geq 1$.
   Отражения времени и пространства отсутствуют. Учитываются только вращения и смещения в псевдоевклидовом пространстве, образующие собственную ортохронную группу Пуанкаре.
2. $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$: $\mathrm{Det}\,\Lambda = 1$, $\Lambda^{00} \leq -1$.
   Здесь включена операция T. Ввиду унимодулярности преобразований, они содержат также и операцию P. Любое преобразование из $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$ может быть представлено в виде произведения $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ и PT. В частности, 4-инверсия $PT \in \mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$, а P и T по отдельности не входят в $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$ в силу $\mathrm{Det}\,\Lambda = 1$. Преобразования $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ и $\mathcal{P}_{+}^{\downarrow}$ вместе образуют собственную группу Пуанкаре $\mathcal{P}_{+}$.
3. $\mathcal{P}_{-}^{\uparrow}$: $\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$, $\Lambda^{00} \geq 1$.
   Соответствующие преобразования имеют вид $P\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$. Вместе с $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ они образуют ортохронную группу Пуанкаре.
4. $\mathcal{P}_{-}^{\downarrow}$: $\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$, $\Lambda^{00} \leq -1$.
   Направление времени меняется. Любое преобразование этого класса представляется в виде $T\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$.

Общая группа Пуанкаре может, таким образом, быть представлена как сумма:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{+}^{\uparrow} + PT\mathcal{P}_{+}^{\uparrow} + P\mathcal{P}_{+}^{\uparrow} + T\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}\,. \tag{3.100}$$

Из всех этих компонент группы Пуанкаре только $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ содержит единичное преобразование. Поэтому преобразования, принадлежащие различным классам, не могут быть связаны каким - либо непрерывным преобразованием, относящимся к $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$. Преобразования из одного и того же класса могут быть получены друг из друга с помощью преобразований из $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$.

3.2.3 Преобразования C, P, T.

Инверсия пространства.

В квантовой теории поля имеют большое значение дискретные симметрии, такие как инверсия пространства, отражение времени и зарядовое сопряжение (замена частиц античастицами). В частности, операция инверсии пространства определяется следующим образом:

$$P\mathbf{r} = -\mathbf{r}\,. \tag{3.101}$$

При этом преобразовании, рассматривавшееся выше скалярное поле может преобразовываться следующим образом:

$$P\varphi(t, \mathbf{r}) = \pm\varphi(t, -\mathbf{r})\,, \tag{3.102}$$

где знаки соответствуют случаю обычного скаляра и псевдоскаляра. В нерелятивистской квантовой механике поведение волновой функции системы при пространственной инверсии связано просто с ее координатной зависимостью, что приводит к понятию орбитальной четности [29]:

$$\psi(t, -\mathbf{r}) = \pm\psi(t, \mathbf{r})\,. \tag{3.103}$$

В квантовой теории поля речь идет о поведении поля в данной точке пространства, а соотношение (3.102) определяет *внутреннюю* четность соответствующих частиц. Полная четность системы частиц равна произведению их внутренних четностей и орбитальной четности их относительного движения. “Внутренние” свойства симметрии различных частиц проявляются лишь в процессах их взаимных превращений.

В формализме вторичного квантования внутренняя четность выражается поведением при инверсии соответствующих $\widehat{\varphi}$-операторов. Скалярному и псевдоскалярному полю отвечает:

$$P\widehat{\varphi}(t,\mathbf{r}) = \pm\widehat{\varphi}(t,-\mathbf{r})\,. \qquad (3.104)$$

Воздействие P–операции на $\widehat{\varphi}$–оператор можно сформулировать в виде соответствующих правил преобразования операторов рождения и уничтожения частиц, таких, чтобы в результате возникало изменение (3.104). Используя (3.76), нетрудно получить, что эти правила имеют вид:

$$P: \quad \begin{array}{ll} a_{\mathbf{p}} \to \pm a_{-\mathbf{p}}\,, & b_{\mathbf{p}} \to \pm b_{-\mathbf{p}}\,, \\ a^{+}_{\mathbf{p}} \to \pm a^{+}_{-\mathbf{p}}\,, & b^{+}_{\mathbf{p}} \to \pm b^{+}_{-\mathbf{p}}\,. \end{array} \qquad (3.105)$$

В самом деле, записав

$$\varphi(t,\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}}\big(a_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t + i\mathbf{p}\mathbf{r}} + b^{+}_{\mathbf{p}} e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}} t - i\mathbf{p}\mathbf{r}}\big)\,, \qquad (3.106)$$

после операции (3.105) и переобозначения переменной суммирования $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ получим $\pm\varphi(t,-\mathbf{r})$, что и требовалось[7]. Заметим, что преобразование (3.105) вполне очевидно — инверсия просто меняет знак полярного вектора $\mathbf{p}$.

Зарядовое сопряжение.

Замена частица – античастица производится в полевом операторе (3.76) с помощью очевидной операции:

$$C: \quad a_{\mathbf{p}} \to b_{\mathbf{p}}\,, \quad b_{\mathbf{p}} \to a_{\mathbf{p}}\,. \qquad (3.107)$$

При этом $\varphi \to \varphi^{C}$, где

$$\varphi^{C}(t,\mathbf{r}) = \varphi^{+}(t,\mathbf{r})\,. \qquad (3.108)$$

Смысл этого преобразования не изменяется, если ввести произвольный фазовый множитель:

$$a_{\mathbf{p}} \to e^{i\alpha} b_{\mathbf{p}}\,, \qquad b_{\mathbf{p}} \to e^{-i\alpha} a_{\mathbf{p}}\,, \qquad (3.109)$$

так что

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi^{+}\,, \qquad \varphi^{+} \to e^{-i\alpha}\varphi\,. \qquad (3.110)$$

Двукратное применение зарядового сопряжения дает тождественное преобразование $\varphi \to \varphi$. Симметрия по отношению к замене частиц на античастицы не приводит, в общем случае, к возникновению какой-либо новой характеристики частиц, а оператор C не имеет собственных состояний и собственных значений. Исключением является система, состоящая из равного числа частиц и античастиц. Оператор C переводит такую систему саму в себя, в этом случае для него существуют собственные значения $C = \pm 1$ (поскольку $C^2 = 1$). Тоже самое верно для истинно нейтральных частиц, когда $\varphi^{C} = \pm\varphi$ и возникает понятие зарядово четных или нечетных частиц.

[7]Заметим, что в дальнейшем мы практически не будем указывать значок оператора над обозначениями операторов рождения и уничтожения, а также и других полевых операторов, надеясь, что это не приведет к недоразумениям.

Четырехмерная инверсия и обращение времени.

Четырехмерная инверсия определяется операцией:

$$x \to -x\,, \qquad \text{где} \qquad x = (\mathbf{r}, t)\,. \tag{3.111}$$

Эту операцию всегда можно представить себе, как некоторое четырехмерное вращение или, иначе говоря, как преобразование Лоренца, поскольку детерминант матрицы преобразования в в обоих случаях равен единице. Ситуация здесь отличается от трехмерной (пространственной) инверсии, детерминант которой равен -1. Поэтому любое выражение, инвариантное относительно относительно преобразований Лоренца, является инвариантным и относительно четырехмерной инверсии. По отношению к оператору скалярного поля (скаляру, по отношению к четырехмерным вращениям!) это означает:

$$\varphi(t, \mathbf{r}) \to \varphi(-t, -\mathbf{r})\,. \tag{3.112}$$

В терминах операторов рождения и уничтожения преобразование (3.112) достигается перестановкой коэффициентов при e^{-ipx} и e^{ipx} в выражении (3.76), что дает:

$$CPT: \quad a_{\mathbf{p}} \to b^+_{\mathbf{p}}\,, \qquad b_{\mathbf{p}} \to a^+_{\mathbf{p}}\,. \tag{3.113}$$

Таким образом, это преобразование включает замену частицы античастицей, а в релятивистской теории *автоматически* возникает инвариантность по отношению к преобразованию, при котором одновременно с P и T производится также и зарядовое сопряжение C. Это утверждение составляет содержание так называемой CPT-теоремы, являющейся одним из наиболее общих результатов квантовой теории поля: ничего в Природе не изменится, если одновременно с четырехмерной инверсией (отражением пространства-времени) произвести замену всех частиц на античастицы! Преобразование (3.113) можно записать также в виде:

$$\varphi^{CPT}(t, \mathbf{r}) = \varphi(-t, -\mathbf{r})\,. \tag{3.114}$$

Отсюда легко найти формулировку T-инверсии (обращения времени). Эту операцию нужно определить так, чтобы вместе с CP она давала CPT-преобразование (3.113). Учитывая (3.105) и (3.107), легко находим:

$$T: \quad a_{\mathbf{p}} \to \pm a^+_{-\mathbf{p}}\,, \qquad b_{\mathbf{p}} \to \pm b^+_{-\mathbf{p}}\,, \tag{3.115}$$

где знаки соответствуют знакам в (3.105). Таким образом, обращение времени не только переводит движение с импульсом $\mathbf{p}$ в движение с импульсом $-\mathbf{p}$, но также переставляет начальные и конечные состояния во всех матричных элементах, что приводит к замене операторов уничтожения частиц с импульсом $\mathbf{p}$ на операторы рождения частиц с импульсом $-\mathbf{p}$ (и наоборот). Из (3.115) и (3.106), с переобозначением $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, получаем:

$$\varphi^T(t, \mathbf{r}) = \pm\varphi^+(-t, \mathbf{r})\,. \tag{3.116}$$

Фактически, здесь имеется полная аналогия с операцией обращения времени в квантовой механике [29]: если некоторое состояние описывается волновой функцией $\psi(t, \mathbf{r})$, то обращенное по времени описывается с помощью $\psi^*(-t, \mathbf{r})$.

Преобразования T и CPT переставляют начальные и конечные состояния и для них не существует понятия собственных состояний и собственных значений. Они не приводят, таким образом, к существованию новых характеристик частиц. В силу релятивистской инвариантности, оператор CPT преобразования должен коммутировать с любым гамильтонианом (лагранжианом) релятивистской теории поля. Что же касается C и P (т.е. и T) по отдельности, то это вообще говоря не так. В частности слабые взаимодействия элементарных частиц не инвариантны по отношению к пространственному отражению P, и даже по отношению к комбинированной операции CP. Последнее (очень слабое!) нарушение симметрии слабых взаимодействий, согласно CPT-теореме, означает наличие в Природе очень слабой неэквивалентности направлений времени, что имеет весьма существенные космологические последствия. Например, согласно идее Сахарова, это обстоятельство может объяснить колоссальное преобладание материи над антиматерией в современном состоянии Вселенной.

Дискретные преобразования тока.

Рассмотрим оператор сохраняющегося тока скалярного поля, который, с помощью (2.63), можно записать в виде:

$$j^\mu = i(\varphi^+ \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^+)\,. \tag{3.117}$$

Преобразование (3.104), вместе с очевидной заменой $(\partial_0, \boldsymbol{\partial}) \to (\partial_0, -\boldsymbol{\partial})$, дает:

$$P: \quad (j^0, \mathbf{j})_{t,\mathbf{r}} \to (j^0, -\mathbf{j})_{t,-\mathbf{r}}\,, \tag{3.118}$$

как и должно быть для истинного 4-вектора.

Аналогичным образом, преобразование зарядового сопряжения (3.108) дает:

$$C: \quad (j^0, \mathbf{j})_{t,\mathbf{r}} \to (-j^0, -\mathbf{j})_{t,\mathbf{r}}\,, \tag{3.119}$$

если операторы φ и φ^+ коммутируют. Правда, они не коммутируют, но это обстоятельство несущественно — некоммутативность возникает только от некоммутативности операторов рождения и уничтожения с одинаковыми $\mathbf{p}$, а в силу соотношений коммутации для этих операторов, их перестановка приводит к появлению членов, не зависящих от чисел заполнения, т.е. от состояния поля. Отбрасывая эти члены, все равно получим (3.119). Из (3.119) видно, что замена частиц античастицами, естественно, приводит к изменению знака всех компонент тока.

Операция обращения времени связана с перестановкой начальных и конечных состояний, так что при применении к произведению операторов она меняет порядок сомножителей, например

$$(\varphi^+ \partial_\mu \varphi)^T = (\partial_\mu \varphi)^T (\varphi^+)^T\,. \tag{3.120}$$

В соответствии с только что сделанным после (3.119) замечанием, это обстоятельство несущественно, а возвращение к исходному порядку множителей не отражается на результате. Учитывая, что при T-отражении $(\partial_0, \boldsymbol{\partial}) \to (-\partial_0, \boldsymbol{\partial})$, с помощью (3.116) получаем:

$$T: \quad (j^0, \mathbf{j})_{t,\mathbf{r}} \to (j^0, -\mathbf{j})_{-t,\mathbf{r}}\,, \tag{3.121}$$

так что трехмерный $\mathbf{j}$ ток меняет знак, в соответствии с классическим смыслом этой величины, тогда как плотность заряда j^0 не меняется.

Наконец, при четырехмерной инверсии (3.112) легко получить:

$$CPT: \quad (j^0, \mathbf{j})_{t,\mathbf{r}} \to (-j^0, -\mathbf{j})_{-t,-\mathbf{r}} \tag{3.122}$$

в соответствии со смыслом этой операции, как CPT преобразования.

Оператор электромагнитного взаимодействия пропорционален $j_\mu A^\mu$ и инвариантен относительно CPT, как и всякое другое релятивистское взаимодействие. Соответственно, используя (3.118), (3.119) и (3.121) нетрудно получить правила преобразования потенциала электромагнитного поля $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$:

$$\begin{aligned}
C: &\qquad (A_0, \mathbf{A})_{t,\mathbf{r}} \to (-A_0, -\mathbf{A})_{t,\mathbf{r}} \\
P: &\qquad (A_0, \mathbf{A})_{t,\mathbf{r}} \to (A_0, -\mathbf{A})_{t,-\mathbf{r}} \\
T: &\qquad (A_0, \mathbf{A})_{t,\mathbf{r}} \to (A_0, -\mathbf{A})_{-t,\mathbf{r}} \\
CPT: &\qquad (A_0, \mathbf{A})_{t,\mathbf{r}} \to (-A_0, -\mathbf{A})_{-t,-\mathbf{r}}\,.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Аналогичные правила преобразования имеют место и для калибровочных полей Янга – Миллса.

3.2.4 Векторные бозоны.

Частица со спином 1 описывается в системе покоя трехкомпонентной волновой функцией — трехмерным вектором (векторный бозон). По своему четырехмерному "происхождению" это могут быть три пространственные компоненты 4-вектора ψ^μ (пространственноподобного!) или же антисиметричного тензора второго ранга $\psi^{\mu\nu}$, у которых в системе покоя обращаются в нуль соответственно временные ψ^0, ψ^{00} и пространственные ψ^{ik} компоненты.

Волновое уравнение опять можно записать в виде дифференциальной связи ψ^μ и $\psi^{\mu\nu}$ в следующем виде:

$$i\psi_{\mu\nu} = p_\mu\psi_\nu - p_\nu\psi_\mu \,, \tag{3.124}$$

$$p^\nu\psi_{\mu\nu} = im^2\psi_\mu \,, \tag{3.125}$$

где $p_\mu = i\partial_\mu$ — оператор импульса. Эти уравнения называются уравнениями Прока. Применяя к обеим сторонам (3.125) операцию p^μ, получим ввиду антисимметрии $\psi_{\mu\nu}$:

$$p^\mu\psi_\mu = 0 \,. \tag{3.126}$$

Тогда, исключая $\psi_{\mu\nu}$ из (3.124), (3.125) (подставляя первое уравнение во второе), с учетом (3.126), получим:

$$(p^2 - m^2)\psi_\mu = 0 \,, \tag{3.127}$$

так что m, естественно, представляет собой массу частицы. Таким образом, свободная частица со спином 1 описывается одним 4-вектором ψ_μ, компоненты которого удовлетворяют уравнению "Клейна - Гордона" (3.127) и *дополнительному условию* типа условия Лоренца (четырехмерной поперечности) (3.126), исключающему из ψ^μ "часть, принадлежащую спину 0".

В системе покоя, где ψ_μ не зависит от пространственных координат ($\mathbf{p} = 0$), и мы имеем просто $p^0\psi_0 = 0$. В тоже время, с учетом того, что в системе покоя $p^0 = m$, так что $p^0\psi_0 = m\psi_0$. Тогда ясно, что в системе покоя $\psi_0 = 0$, как и должно быть для частицы со спином 1. Вместе с ψ_0 в этой системе обращаются в нуль также ψ_{ik} и ψ_{00}.

Частица со спином 1 может обладать различной внутренней четностью, в зависимости от того является ли ψ^μ истинным вектором или псевдовектором:

$$P\psi^\mu = (\psi^0, -\boldsymbol{\psi}) \quad \text{или} \quad P\psi^\mu = (-\psi^0, \boldsymbol{\psi}) \,. \tag{3.128}$$

Плоская волна, нормированная на одну частицу в объеме $V = 1$, представляется в виде:

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} u_\mu e^{-ipx} \,, \qquad u_\mu u^{\mu *} = -1 \,, \tag{3.129}$$

где u_μ — единичный 4-вектор поляризации, нормировка которого определяется требованием пространственноподобности ψ_μ, удовлетворяющий также условию четырехмерной поперечности:

$$u_\mu p^\mu = 0 \,. \tag{3.130}$$

Заметим, что в отличие от фотонов, векторные бозоны со спином 1 имеют три независимых поляризации.

Лагранжиан векторного поля может быть записан в виде:

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu\psi_\nu^*)(\partial^\mu\psi^\nu) + m^2\psi_\mu^*\psi^\mu \,. \tag{3.131}$$

Структура этого лагранжиана аналогична случаю скалярного поля, но обратим внимание на другой знак! Дело здесь в том, что ψ_μ — пространственноподобный вектор, так что $\psi_\mu^*\psi^\mu < 0$, тогда как для скалярного поля $\varphi^*\varphi > 0$, так что знак выбран так, чтобы обеспечить положительную определенность энергии поля в классическом пределе. В самом деле, практическое использование лагранжиана (3.131) сводится не столько к построению уравнений движения, сколько к нахождению тензора энергии–импульса и тока. Нетрудно найти, что:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu\psi^{\lambda *}\partial_\nu\psi_\lambda - \partial_\nu\psi^{\lambda *}\partial_\mu\psi_\lambda - \mathcal{L}g_{\mu\nu}\,, \tag{3.132}$$

$$j_\mu = -i[\psi_\lambda^*\partial_\mu\psi^\lambda - (\partial_\mu\psi_\lambda^*)\psi^\lambda]\,. \tag{3.133}$$

Эти выражения вполне аналогичны полученным выше для скалярного поля и не требуют особых пояснений.

Квантование также можно провести аналогично скалярному случаю. Снова, для обеспечения очевидного из физических соображений условия $T_{00} > 0$ и произвольности знака плотности заряда j^0, квантовать нужно по Бозе!

Подчеркнем, что ввиду $m \neq 0$ градиентная инвариантность теории отсутствует. Именно поэтому массивное векторное поле имеет три независимые компоненты. Отсутствие градиентной инвариантности рассматриваемой теории особенно четко видно из второго уравнения Прока (3.125): величина $\psi_{\mu\nu}$ градиентно инвариантна, так что левая часть уравнения градиентно инвариантна, тогда как его правая часть, очевидно, меняется при градиентных преобразованиях.

Частицы с произвольным целым спином.

Волновая функция частицы с целым спином s представляет собой неприводимый 4-тензор ранга s, т.е. тензор симметричный по всем своим индексам и обращающийся в нуль при упрощении (свертке) по любой паре индексов:

$$\psi_{\ldots\mu\ldots\nu\ldots} = \psi_{\ldots\nu\ldots\mu\ldots}\,, \qquad \psi^{\mu\ldots}_{\ldots\mu\ldots} = 0\,. \tag{3.134}$$

Этот тензор должен удовлетворять дополнительному условию четырехмерной поперечности:

$$p^\mu\psi_{\ldots\mu\ldots} = 0\,, \tag{3.135}$$

а любая его компонента должна удовлетворять уравнению:

$$(p^2 - m^2)\psi_{\ldots\mu\ldots} = 0\,. \tag{3.136}$$

В системе покоя (3.135) приводит к обращению в нуль всех компонент 4-тензора, среди индексов которых встречается 0. Таким образом, в системе покоя поле сводится к неприводимому трехмерному тензору ранга s, число независимых компонент которого равно $2s+1$, как и следует быть.

Лагранжиан, тензор энергии-импульса и плотность тока для поля с целым спином s отличаются от выписанных выше для случая $s = 1$ только заменой ψ_μ на $\psi_{\ldots\mu\ldots\nu\ldots}$. Нормированная плоская волна имеет вид:

$$\psi^{\mu\nu\ldots} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}}u^{\mu\nu\ldots}e^{-ipx}\,, \qquad u^*_{\mu\nu\ldots}u^{\mu\nu} = -1\,, \tag{3.137}$$

причем

$$u^{\ldots\mu\ldots}p_\mu = 0\,. \tag{3.138}$$

Имеется всего $2s+1$ независимых поляризаций.

Квантование производится очевидным обобщением случаев $s = 0$ и $s = 1$.

Изложенная схема достаточна для описания *свободных* частиц с произвольными целыми спинами. При введении взаимодействия ситуация усложняется. Для всех целых $s > 1$ оказывается невозможным сформулировать вариационный принцип с помощью только одной (тензорной) функции поля, ранг которой соответствует данному спину. Оказывается необходимым ввести вспомогательные тензорные (или спинорные) величины более низкого ранга. При этом лагранжиан выбирается так, чтобы эти вспомогательные величины обращались в нуль в силу следующих из вариационного принципа уравнений поля свободных частиц.

Заметим, в заключение, что вопрос о частицах со спином $s > 1$ имеет довольно “академический” характер, поскольку (если забыть о гравитоне!) в рамках стандартной модели таких элементарных частиц просто нет.

3.3 Фермионы.

3.3.1 Трехмерные спиноры.

Напомним, как описываются частицы с полуцелым спином (фермионы) в рамках нерелятивистской квантовой механики [29]. Частица со спином $s = 1/2$ описывается двухкомпонентной волновой функцией — *спинором*, которую удобно записать в виде столбца:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(1/2) \\ \psi(-1/2) \end{pmatrix}, \tag{3.139}$$

где компоненты ψ^1 и ψ^2 соответствуют проекциям спина $s^z = \pm 1/2$. При произвольном вращении системы координат компоненты спинора преобразуются друг через друга линейным образом:

$$\psi'^1 = a\psi^1 + b\psi^2 , \quad \psi'^2 = c\psi^1 + d\psi^2 . \tag{3.140}$$

Иначе говоря,

$$\psi' = U\psi , \qquad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \tag{3.141}$$

Коэффициенты преобразования (элементы матрицы U), вообще говоря, комплексны и являются функциями углов поворота системы координат.

Рассмотрим билинейную форму вида:

$$\psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1 , \tag{3.142}$$

где ψ и φ — два спинора. Простое вычисление дает:

$$\psi'^1\varphi'^2 - \psi'^2\varphi'^1 = (ad - bc)(\psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1) , \tag{3.143}$$

так что (3.142) при поворотах системы координат (3.140) преобразуется сама через себя. Рассмотрим билинейную форму (3.142) как некоторую волновую функцию составной системы. Но если имеется всего одна волновая функция, преобразующаяся при поворотах сама через себя, то она соответствует спину нуль, т.е. является скаляром и вообще не меняется при поворотах. Поэтому на коэффициенты преобразования следует наложить условие:

$$ad - bc = 1 , \qquad \mathrm{Det}\, U = 1 . \tag{3.144}$$

Тогда (3.142) просто представляет собой волновую функцию частицы со спином $s = 0$, составленной из двух частиц со спином $s = 1/2$. Но в квантовой механике можно ввести еще один скаляр, составленный из компонент спинора (3.139):

$$\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*} \tag{3.145}$$

и представляющий собой плотность вероятности нахождения частицы в данной точке пространства. Преобразование, оставляющее инвариантной сумму квадратов модулей преобразуемых величин, является унитарным, так что

$$U^+ = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = U^{-1} . \tag{3.146}$$

С учетом (3.144) обратная матрица преобразования имеет вид:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{3.147}$$

так что из условия унитарности получаем:

$$a = d^*, \qquad b = -c^*. \tag{3.148}$$

В силу условий (3.144) и (3.148), из четырех комплексных величин a, b, c, d (т.е. восьми вещественных), на самом деле, только три (вещественных) являются независимыми, что соответствует трем углам поворота трехмерной системы координат.

Сравнивая скаляры (3.142) и (3.145) видим, что ψ^{1*} и ψ^{2*} должны преобразовываться как ψ^2 и $-\psi^1$, соответственно.

Наряду с рассмотренными выше *контрвариантными* компонентами спинора ψ^1, ψ^2 вводят еще и *ковариантные* компоненты:

$$\psi_1 = \psi^2, \qquad \psi_2 = -\psi^1. \tag{3.149}$$

Инвариант (3.142) записывается тогда в виде скалярного произведения:

$$\psi^\lambda \varphi_\lambda = \psi^1 \varphi_1 + \psi^2 \varphi_2 = \psi^1 \varphi^2 - \psi^2 \varphi^1. \tag{3.150}$$

Учтем теперь, что

$$\psi^\lambda \varphi_\lambda = \psi^1 \varphi_1 + \psi^2 \varphi_2 = -\psi_2 \varphi^2 - \psi_1 \varphi^1, \tag{3.151}$$

так что всегда выполняется следующее условие антисимметрии:

$$\psi^\lambda \varphi_\lambda = -\psi_\lambda \varphi^\lambda. \tag{3.152}$$

Отсюда очевидно, что:

$$\psi^\lambda \psi_\lambda = 0. \tag{3.153}$$

Можно определить и спиноры высших рангов. Например, можно ввести спиноры второго ранга как:

$$\psi^{\lambda\mu} \sim \psi^\lambda \varphi^\mu, \qquad \psi_{\lambda\mu} \sim \psi_\lambda \varphi_\mu, \qquad \psi_\lambda^\mu \sim \psi_\lambda \varphi^\mu. \tag{3.154}$$

Спиноры более высокого ранга определяются аналогично.

Переход от контрвариантных спиноров к ковариантным можно провести с помощью "метрического тензора" вида:

$$g_{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.155}$$

поскольку, как легко видеть, можно написать:

$$\psi_\lambda = g_{\lambda\mu} \psi^\mu, \qquad \psi^\lambda = g^{\mu\lambda} \psi_\mu. \tag{3.156}$$

Рассмотрим умножение и упрощение (свертку) спиноров. Умножение двух спиноров второго и третьего ранга $\psi_{\lambda\mu}\psi^{\nu\rho\sigma}$ дает спинор пятого ранга. Упрощение (свертка) $\psi_{\lambda\mu}^{\nu\rho\sigma}$ по двум индексам μ и ν дает спинор третьего ранга $\psi_{\lambda\mu}^{\mu\rho\sigma}$. В частности, упрощение ψ_λ^μ дает скаляр ψ_λ^λ. При этом, однако, надо учесть (3.152), (3.153), так что

$\psi^\lambda_\lambda = -\psi^\lambda_\lambda$. Отсюда следует, что упрощение по двум индексам любого *симметричного* (по перестановке индексов) спинора дает нуль! В частности для симметричного спинора второго ранга $\psi_{\lambda\mu} = \psi_{\mu\lambda}$ имеем $\psi^\lambda_\lambda = 0$. Симметричный по всем индексам спинор любого ранга можно всегда составить соответствующей симметризацией (т.е. взять сумму спиноров со всеми перестановками индексов). В силу сказанного, из компонент симметричного спинора невозможно составить (путем упрощения) спиноры более низкого ранга. С математической точки зрения такие спиноры реализуют неприводимые представления группы вращений $SU(2)$.

По определению оператора момента импульса (спина) $\mathbf{s}$ оператор $1 + i\delta\varphi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{s})$ описывает поворот на угол $\delta\varphi$ на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси, ориентированной вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$ [29]. Для спина $s = 1/2$ имеем $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sigma$, где σ — набор трех матриц Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.157}$$

Оператор поворота на конечный угол, соответственно, есть:

$$U_{\mathbf{n}} = \exp\left(\frac{i}{2}(\mathbf{n}\cdot\sigma)\varphi\right), \tag{3.158}$$

что иначе можно записать как:

$$U_{\mathbf{n}} = \cos\frac{\varphi}{2} + i(\mathbf{n}\cdot\sigma)\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{3.159}$$

Тогда для поворота вокруг оси z имеем:

$$U_z(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_z\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, \tag{3.160}$$

так что

$$\psi'^1 = \psi^1 e^{i\varphi/2}, \qquad \psi'^2 = \psi^2 e^{-i\varphi/2}. \tag{3.161}$$

Отсюда видно необычное свойство спинора первого ранга — *при повороте на угол* 2π *его компоненты меняют знак* (неклассическая двузначность). Таким же свойством обладают все спиноры нечетных рангов.

Для поворотов вокруг осей x и y аналогичным образом находим:

$$U_x(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_x\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.162}$$

$$U_y(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma_y\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.163}$$

Спиновые свойства волновых функций тождественны для частицы со спином s и для системы из $n = 2s$ частиц со спинами $s = 1/2$, направленными так, что полный спин системы равен $2s$. Число независимых компонент симметричного спинора ранга $2s$ равно $2s + 1$, поскольку различны лишь его компоненты, среди индексов которых имеется $2s$ единиц и 0 двоек, $2s - 1$ единиц и одна двойка, ... , 0 единиц и $2s$ двоек. Как уже указывалось, симметричные спиноры преобразуются по неприводимым представлениям группы вращений.

В частности, спиноры *четного* ранга преобразуются как *тензора* половинного (вдвое меньшего) ранга. Компоненты этих тензоров могут быть непосредственно выражены через компоненты соответствующих спиноров. В качестве важного примера приведем в явном виде связь компонент спинора второго ранга с компонентами соответствующего вектора [29]:

$$\psi_{12} = \frac{i}{\sqrt{2}} a_z \,, \quad \psi_{11} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y) \,, \quad \psi_{22} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y) \,, \tag{3.164}$$

$$\psi^{12} = -\frac{i}{\sqrt{2}} a_z \,, \quad \psi^{11} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y) \,, \quad \psi^{22} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y) \tag{3.165}$$

и обратно:

$$a_z = i\sqrt{2}\psi^{12} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi^{12} + \psi^{21}) \,, \quad a_x = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi^{22} - \psi^{11}) \,, \quad a_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{11} + \psi^{22}) \,. \tag{3.166}$$

Используя матрицы Паули, эти соотношения можно переписать в наглядном и компактном виде:

$$\psi^{\mu}_{\lambda} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{a} \cdot \sigma^{\mu}_{\lambda} \,, \tag{3.167}$$

$$\mathbf{a} = \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma^{\lambda}_{\mu} \psi^{\mu}_{\lambda} \,. \tag{3.168}$$

Скалярное произведение векторов непосредственно выражается через скалярное произведение соответствующих спиноров как:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \psi_{\lambda\mu} \varphi^{\lambda\mu} \,. \tag{3.169}$$

3.3.2 Спиноры группы Лоренца.

Итак, в нерелятивистской теории частица со спином s описывается $(2s+1)$- компонентной величиной — симметричным спинором ранга $2s$, т.е. математической величиной, реализующей соответствующее неприводимое представление группы вращений $SU(2)$. Группа вращений является подгруппой группы Лоренца (группы вращений в четырехмерном пространстве-времени). Ограничимся рассмотрением собственной группы Лоренца (без пространственных отражений). Теория четырехмерных спиноров строится аналогично теории трехмерных спиноров.

Спинор ξ^{α} представляет собой двухкомпонентную величину $\alpha = 1, 2$, соответственно проекциям спина $s = \pm 1/2$. Под воздействием произвольного преобразования Лоренца, компоненты спинора преобразуются друг через друга (бинарные преобразования):

$$\xi'^{1} = \alpha\xi^{1} + \beta\xi^{2} \,, \qquad \xi'^{2} = \gamma\xi^{1} + \delta\xi^{2} \,, \tag{3.170}$$

где комплексные коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяются углами поворота четырехмерной системы координат и подчинены условию:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \,, \tag{3.171}$$

так что детерминант преобразования (3.170) равен единице, что накладывает ограничение в виде двух уравнений на четыре комплексных коэффициента. Поэтому остается 8-2=6 вещественных параметров преобразования в соответствии с числом углов поворота системы координат в четырехмерном пространстве-времени (повороты в шести координатных плоскостях).

В силу (3.171) при преобразованиях (3.170) остается инвариантной билинейная форма:

$$\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1\,, \tag{3.172}$$

построенная из двух спиноров ξ^α и Ξ^α, и соответствующая скалярной частице со спином $s=0$, составленной из двух частиц спина $s=1/2$.

Наряду с контрвариантными спинорами ξ^α вводят еще и ковариантные спиноры ξ_α:

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta\,, \tag{3.173}$$

где "метрическоий тензор" $g_{\alpha\beta}$ имеет вид (3.155), так что

$$\xi_1 = \xi^2\,, \qquad \xi_2 = -\xi^1\,, \tag{3.174}$$

$$\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1 = \xi^\alpha\Xi_\alpha = -\xi_\alpha\Xi^\alpha\,. \tag{3.175}$$

Пока все формулы абсолютно те же, что и в нерелятивистской теории. Различие возникает при рассмотрении комплексно сопряженных спиноров. В нерелятивистской теории сумма $\psi^1\psi^{1*}+\psi^2\psi^{2*}$, определяющая плотность вероятности локализации частиц в пространстве, является скаляром. Поэтому, компоненты $\psi^{\alpha*}$ должны преобразовываться как ковариантные компоненты спинора. Соответственно, преобразование (3.141), как мы видели, является унитарным. В релятивистской теории плотность частиц не является скаляром, а представляет собой временную компоненту 4-вектора, а на коэффициенты преобразования (3.170) не накладывается никаких ограничений, кроме (3.171). Поэтому, в релятивистской теории комплексно сопряженные преобразования спиноров оказываются существенно различными. Соответственно, здесь возникает два типа спиноров. Индексы спиноров, преобразующихся по комплексно сопряженным формулам (3.170) отмечаются точками (пунктирные индексы).

По определению имеем $\eta^{\dot\alpha} \sim \xi^{\alpha*}$ (значок $\sim$ означает здесь "преобразуется как"), и правило преобразования спиноров с пунктирными индексами имеет вид:

$$\eta'^{\dot 1} = \alpha^*\eta^{\dot 1} + \beta^*\eta^{\dot 2}\,, \qquad \eta'^{\dot 2} = \gamma^*\eta^{\dot 1} + \delta^*\eta^{\dot 2}\,. \tag{3.176}$$

Операции опускания и поднимания индексов имеют прежний вид:

$$\eta_{\dot 1} = \eta^{\dot 2}\,, \qquad \eta_{\dot 2} = -\eta^{\dot 1}\,. \tag{3.177}$$

По отношению к трехмерным вращениям 4-спиноры ведут себя как трехмерные спиноры, поскольку, как отмечалось выше, группа вращений является подгруппой группы Лоренца. Но для трехмерных спиноров $\psi^*_\alpha \sim \psi^\alpha$. Поэтому $\eta_{\dot\alpha}$ ведет себя при вращениях как контрвариантный 3-спинор ψ^α.

Спиноры высших рангов определяются как совокупности величин, преобразующихся как произведения компонент нескольких спиноров первого ранга. Например, можно ввести три типа спиноров второго ранга:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha\Xi^\beta\,, \quad \zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha\eta^{\dot\beta}\,, \quad \eta^{\dot\alpha\dot\beta} \sim \eta^{\dot\alpha}H^{\dot\beta}\,. \tag{3.178}$$

Соответственно, ранг спинора в релятивистской теории указывается в виде пары чисел (k,l), т.е. числа непунктирных и пунктирных индексов.

Свертывание (упрощение) спиноров может производиться лишь по парам индексов одинакового рода (двум пунктирным или двум непунктирным), поскольку суммирование по паре индексов различного рода не является инвариантной операцией. Поэтому из спинора

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot\beta_1\dot\beta_2\ldots\dot\beta_l}, \tag{3.179}$$

симметричного по всем k пунктирным и l непунктирным индексам нельзя образовать спинор более низкого ранга (упрощение по паре индексов, относительно которых спинор симметричен дает, с учетом (3.175), нуль). Таким образом, симметричные спиноры реализуют неприводимые представления группы Лоренца, а каждое такое представление определяется парой чисел (k, l). Поскольку каждый из спинорных индексов пробегает два значения, то имеется $k+1$ существенно[8] различных наборов чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ в (3.179) (содержащих 0,1,2,...k единиц и k,k-1,...,0 двоек) и $l+1$ наборов чисел $\dot\beta_1, \dot\beta_2, ..., \dot\beta_l$. Следовательно, симметричный спинор ранга (k, l) имеет $(k+1)(l+1)$ независимых компонент, что и определяет размерность соответствующего неприводимого представления.

Связь спиноров с 4-векторами.

Спинор $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ имеет 2·2=4 компоненты, столько же, сколько и у 4-вектора a^μ. Поскольку тот и другой реализуют одно и то же неприводимое представление собственной группы Лоренца, между их компонентами существует линейная связь:

$$a^1 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot2} + \zeta^{2\dot1}), \qquad a^2 = \frac{i}{2}(\zeta^{1\dot2} - \zeta^{2\dot1}),$$
$$a^3 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} - \zeta^{2\dot2}), \qquad a^0 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot1} + \zeta^{2\dot2}). \tag{3.180}$$

Для пространственных компонент эта связь такая же, как и в трехмерной группе вращений, с учетом замены $\psi^\alpha_\beta \to \zeta^{\alpha\dot\beta}$. Выражение для a^0 очевидно из проведенных выше рассуждений о плотности вероятности пространственной локализации частицы, как временной компоненты 4-вектора. Обратные формулы имеют вид:

$$\zeta^{1\dot1} = \zeta_{2\dot2} = a^3 + a^0, \qquad \zeta^{2\dot2} = \zeta_{1\dot1} = a^0 - a^3,$$
$$\zeta^{1\dot2} = -\zeta_{2\dot1} = a^1 - ia^2, \qquad \zeta^{2\dot1} = -\zeta_{1\dot2} = a^1 + ia^2. \tag{3.181}$$

Коэффициенты в этих формулах подобраны так, чтобы скалярное произведение записывалось в виде:

$$a^2 = \frac{1}{2}\zeta_{\alpha\dot\beta}\zeta^{\alpha\dot\beta}, \qquad ab = \frac{1}{2}\zeta_{\alpha\dot\beta}\xi^{\alpha\dot\beta}. \tag{3.182}$$

Соответствие между $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ и 4-вектором a^μ есть частный случай общего правила: любой симметричный спинор ранга (k, k) эквивалентен симметричному неприводимому (т.е. обращающемуся в нуль при свертывании по любой паре индексов) 4-тензору ранга k.

Связь спинора ранга $(1, 1)$ с 4-вектором (3.180), (3.181) можно записать в компактном виде с помощью матриц Паули:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}Sp(\hat\zeta\sigma), \qquad a^0 = \frac{1}{2}Sp\hat\zeta, \tag{3.183}$$

[8] $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ и $\zeta^{\dot\beta\alpha}$ — это одно и то же, поскольку преобразования (3.170) и (3.176) независимы.

$$\hat{\zeta} = \mathbf{a} \cdot \sigma + a^0 \hat{1}\,, \tag{3.184}$$

где $\hat{\zeta}$ — матрица $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$, $\hat{1}$ — единичная матрица.

Запишем преобразование спинора ξ^α в виде:

$$\xi'^\alpha = (B\xi)^\alpha\,, \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{3.185}$$

Тогда[9]

$$\eta'^{\dot{\beta}} = (B^*\eta)^{\dot{\beta}} = (\eta B^+)^{\dot{\beta}}\,. \tag{3.186}$$

Тогда преобразование спинора ранга $(1,1)$ записывается как:

$$\zeta' = B\zeta B^+\,. \tag{3.187}$$

При бесконечно малом преобразовании $B = 1+\lambda$, где λ – бесконечно малая матрица. Тогда из (3.187) имеем:

$$\zeta' = \zeta + (\lambda\zeta + \zeta\lambda^+)\,. \tag{3.188}$$

Рассмотрим теперь преобразование Лоренца к системе координат, движущейся с бесконечно малой скоростью $\delta\mathbf{v}$ (без изменения направления пространственных осей). При этом 4-вектор $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ преобразуется как:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - a^0\delta\mathbf{v}\,, \qquad a'^0 = a^0 - \mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{v}\,. \tag{3.189}$$

Используем теперь (3.183). С одной стороны:

$$a'^0 = a^0 - \mathbf{a}\delta\mathbf{v} = a^0 - \frac{1}{2}Sp(\zeta\sigma\delta\mathbf{v})\,, \tag{3.190}$$

а с другой

$$a'^0 = \frac{1}{2}Sp\zeta' = a^0 + \frac{1}{2}Sp(\lambda\zeta + \zeta\lambda^+) = a^0 + \frac{1}{2}Sp\zeta(\lambda + \lambda^+)\,. \tag{3.191}$$

Сравнивая (3.190), (3.191) получаем:

$$\lambda + \lambda^+ = -\sigma\delta\mathbf{v}\,. \tag{3.192}$$

Аналогичным образом, рассматривая преобразование $\mathbf{a}$, получим:

$$\sigma\lambda + \lambda^+\sigma = -\delta\mathbf{v}\,. \tag{3.193}$$

Равенства (3.192), (3.193) имеют решение:

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{1}{2}\sigma\cdot\delta\mathbf{v}\,, \tag{3.194}$$

так что бесконечно малое преобразование Лоренца для спинора ξ^α осуществляется матрицей:

$$B = 1 - \frac{1}{2}(\sigma\cdot\mathbf{n})\delta v \tag{3.195}$$

[9] Для ковариантных компонент имеем $\xi'_\alpha = (\tilde{B}^{-1}\xi)_\alpha = (\xi B^{-1})_\alpha$, $\eta'_{\dot{\alpha}} = (\eta B^{*-1})_\alpha$, так что скалярное произведение спиноров остается инвариантным.

где $\mathbf{n} = \delta\mathbf{v}/\delta v$. Отсюда можно перейти к конечным преобразованиям. Преобразование Лоренца (переход к системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$) геометрически означает поворот четырехмерной системы координат в плоскости $(t, \mathbf{n})$ на угол φ, связанный со скоростью v равенством $v = th\varphi$ [25]. Бесконечно малому преобразованию соответствует угол $\delta\varphi = \delta v$, а поворот на конечный угол осуществляется $\varphi/\delta\varphi$-кратным применением поворота на $\delta\varphi$. Возводя (3.195) в степень $\varphi/\delta\varphi$ и переходя к пределу $\delta\varphi \to 0$, получаем:

$$B = \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma\right). \tag{3.196}$$

Учитывая, что четные степени $\mathbf{n}\cdot\sigma$ равны 1, а нечетные — $\mathbf{n}\cdot\sigma$, имеем:

$$B = ch\frac{\varphi}{2} - \mathbf{n}\cdot\sigma sh\frac{\varphi}{2}, \qquad th\varphi = v. \tag{3.197}$$

Отметим эрмитовость матрицы преобразования $B = B^{+}$. Выражение (3.197) и определяет лоренцевское преобразование четырехмерного спинора первого ранга.

Рассмотрим теперь бесконечно малый поворот вектора в трехмерном пространстве, когда:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - [\delta\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a}]. \tag{3.198}$$

В этом случае, аналогичным образом, получим:

$$B = 1 + \frac{i}{2}\sigma\cdot\delta\boldsymbol{\theta}, \tag{3.199}$$

а для поворота на конечный угол:

$$B = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}, \tag{3.200}$$

где $\mathbf{n}$ задает направление оси вращения. Эта матрица унитарна $B^{+} = B^{-1}$, как и должно быть для пространственного поворота.

Инверсия спиноров (P-отражение).

В нерелятивистской квантовой механике операция инверсии пространства не меняет знак аксиального вектора, каковым является спин. Поэтому не меняет знак и его проекция s^z. Таким образом, при инверсии каждая компонента трехмерного спинора ψ^α преобразуется только через саму себя:

$$\psi^\alpha \to P\psi^\alpha \tag{3.201}$$

Проводя инверсию дважды, мы возвращаемся к исходной системе координат. В случае спиноров, возврат к начальному положению можно понимать либо как поворот на угол 0, либо как поворот на угол 2π. Но мы видели, что для спиноров это не одно и то же, поскольку, согласно (3.161), компоненты ψ^α меняют знак при повороте на 2π. Поэтому возникают две альтернативы:

$$P^2 = 1, \qquad \text{т.е.} \qquad P = \pm 1, \tag{3.202}$$

$$P^2 = -1, \qquad \text{т.е.} \qquad P = \pm i. \tag{3.203}$$

Перейдем к четырехмерным спинорам. Инверсия коммутативна с пространственными вращениями, поскольку она лишь меняет знак x, y, z в x, y, z, t, но некоммутативна с преобразованиями, поворачивающими ось t. В самом деле, если L есть преобразование Лоренца к системе, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, то $PL = L'P$, где L' — преобразование к системе, движущейся со скоростью $-\mathbf{v}$. Таким образом, при инверсии, компоненты четырехмерного спинора ξ^α не могут преобразовываться через самих себя. Таким образом, инверсия преобразует ξ^α через другие величины, каковыми могут быть лишь $\eta^{\dot\alpha}$. Поскольку инверсия не изменяет знак s_z, то компоненты ξ^1 и ξ^2 могут перейти только в $\eta_{\dot 1}$ и $\eta_{\dot 2}$, соответствующие тем же $s_z = +1/2$ и $s_z = -1/2$. Понимая под инверсией операцию, дающую 1 при двукратном применении, определим ее формулами:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \to \eta_{\dot\alpha}\,, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to \xi^\alpha\,, \\ \xi_\alpha \to -\eta^{\dot\alpha}\,, \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -\xi^\alpha \end{aligned} \tag{3.204}$$

для случая $P^2 = 1$. Для варианта $P^2 = -1$ можно написать:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha} \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \\ \xi_\alpha \to -i\eta^{\dot\alpha} \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -i\xi^\alpha \end{aligned} \tag{3.205}$$

Другой знак во вторых строках этих формул связан с тем обстоятельством, что опускание и поднимание одного и того же индекса происходит, согласно (3.174), (3.177), с разными знаками. Ниже, для определенности, везде будем пользоваться определением (3.205).

По отношению к подгруппе вращений, как мы видели выше, величины ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$ преобразуются одинаково. Образуем их комбинации:

$$\xi^\alpha \pm \eta_{\dot\alpha}\,. \tag{3.206}$$

Нетрудно видеть, что эти комбинации преобразуются при инверсии сами через себя, как (3.201) с $P = \pm i$. Однако, эти комбинации не ведут себя как спиноры по отношению ко всем преобразованиям группы Лоренца.

Таким образом, включение инверсии в группу симметрии требует одновременного рассмотрения пары спиноров $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ — *биспинора.* Четыре компоненты биспинора реализуют одно их неприводимых представлений расширенной группы Лоренца. Скалярное произведение двух биспиноров может быть образовано двумя разными способами. Величина

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{3.207}$$

при инверсии не меняется и определяет, таким образом, истинный скаляр. Величина

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha - \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{3.208}$$

также инвариантна относительно поворотов четырехмерной системы координат, но меняет знак при инверсии, определяя, таким образом, *псевдоскаляр.*

Двумя способами из компонент двух биспиноров можно определить и соответствующий спинор второго ранга $\zeta^{\alpha\dot\beta}$. Определив его как:

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha H^{\dot\beta} + \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}\,, \tag{3.209}$$

получим величину, преобразующуюся при инверсии согласно $\zeta^{\alpha\dot\beta} \to \zeta_{\dot\alpha\beta}$, так что 4-вектор, эквивалентный этому спинору преобразуется согласно $(a^0, \mathbf{a}) \to (a^0, -\mathbf{a})$ и представляет собой истинный 4-вектор (при этом $\mathbf{a}$ — полярный вектор). Но можно определить $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ и иначе:

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^{\alpha} H^{\dot{\beta}} - \Xi^{\alpha}\eta^{\dot{\beta}} . \tag{3.210}$$

Тогда при инверсии $\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \to -\zeta_{\dot{\alpha}\beta}$ и этому спинору соответствует 4-вектор, преобразующийся при инверсии как $(a^0, \mathbf{a}) \to (-a^0, \mathbf{a})$, т.е. 4-псевдовектор ($\mathbf{a}$ — аксиальный вектор).

3.3.3 Уравнение Дирака.

Частица со спином 1/2 в системе покоя описывается двухкомпонентной волновой функцией — трехмерным спинором. По своему четырехмерному "происхождению" это может быть как непунктирный, так и пунктирный 4-спинор: ξ^{α} или $\eta_{\dot{\alpha}}$. Единственный оператор, входящий в волновое уравнение , есть $p_{\mu} = i\partial_{\mu}$, который в спинорном представлении выражается через $p_{\alpha\dot{\beta}}$:

$$\begin{aligned} p^{1\dot{1}} &= p_{2\dot{2}} = p_z + p_0 \,, & p^{2\dot{2}} &= p_{1\dot{1}} = p_0 - p_z \,, \\ p^{1\dot{2}} &= -p_{2\dot{1}} = p_x - ip_y \,, & p^{2\dot{1}} &= -p_{1\dot{2}} = p_x + ip_y \,. \end{aligned} \tag{3.211}$$

Из требования релятивистской инвариантности сразу же можно написать следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} &= m\xi^{\alpha} \,, \\ p_{\dot{\beta}\alpha}\xi^{\alpha} &= m\eta_{\dot{\beta}} \,, \end{aligned} \tag{3.212}$$

которая и представляет собой систему уравнений Дирака в спинорном представлении.

Подставляя $\eta_{\dot{\beta}}$ из второго уравнения (3.212) в первое, получим:

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} = \frac{1}{m} p^{\alpha\dot{\beta}} p_{\gamma\dot{\beta}}\xi^{\gamma} = m\xi^{\alpha} . \tag{3.213}$$

Учитывая $p^{\alpha\dot{\beta}} p_{\gamma\dot{\beta}} = p^2\delta^{\alpha}_{\gamma}$, получаем из (3.213):

$$(p^2 - m^2)\xi^{\gamma} = 0 \tag{3.214}$$

— уравнение Клейна – Гордона для каждой компоненты спинора. При этом ясно, что параметр m играет роль массы частицы. Заметим, что именно необходимость введения массы требует одновременного рассмотрения *двух* спиноров ξ^{α} и $\eta_{\dot{\beta}}$, т.е. введения биспинора, иначе не удается составить релятивистски инвариантные уравнения, содержащие размерный параметр m. В результате, волновое уравнение оказывается автоматически инвариантным относительно пространственной инверсии, если определить ее как (ср. (3.205)):

$$P: \qquad \xi^{\alpha} \to i\eta_{\dot{\alpha}} \,, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \to i\xi^{\alpha} \,. \tag{3.215}$$

При этом в (3.212) одновременно $p^{\dot{\alpha}\beta} \to p_{\alpha\dot{\beta}}$.

С помощью (3.184) и (3.181) уравнения (3.212) можно записать как:

$$\begin{aligned} (p_0 + \mathbf{p}\sigma)\eta &= m\xi \,, \\ (p_0 - \mathbf{p}\sigma)\xi &= m\eta \,, \end{aligned} \tag{3.216}$$

где мы ввели столбцы:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta_{\dot 1} \\ \eta_{\dot 2} \end{pmatrix}. \tag{3.217}$$

Для комплексно сопряженных уравнений удобно ввести строки:

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}), \qquad \eta^* = (\eta^*_{\dot 1}, \eta^*_{\dot 2}) \tag{3.218}$$

и записать (с учетом $p^*_\mu = -p_\mu$):

$$\begin{aligned} \eta^*(p_0 + \mathbf{p}\sigma) &= -m\xi^*, \\ \xi^*(p_0 - \mathbf{p}\sigma) &= -m\eta^*. \end{aligned} \tag{3.219}$$

Операция инверсии для комплексно сопряженных спиноров записывается как:

$$P: \qquad \xi^{\alpha *} \to -i\eta^*_{\dot\alpha}, \qquad \eta^*_{\dot\alpha} \to -i\xi^{\alpha *}. \tag{3.220}$$

В литературе, гораздо чаще нежели (3.212) или (3.216), используется так называемая симметричная форма уравнения Дирака. Чтобы перейти к ней, введем четырехкомпонентный биспинор Дирака, составленный из столбцов (3.217):

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3.221}$$

Тогда систему (3.216) можно записать как:

$$p_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m\psi_i \tag{3.222}$$

или, опуская биспинорные индексы:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{3.223}$$

где $\gamma^\mu p_\mu = p_0\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla$, и мы ввели матрицы 4×4 (матрицы Дирака) вида:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \hat 1 \\ \hat 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat\sigma \\ \hat\sigma & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.224}$$

Действительно, (3.216) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_0 + \mathbf{p}\sigma \\ p_0 - \mathbf{p}\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{3.225}$$

что совпадает с (3.223) при выборе γ-матриц в виде (3.224).

В общем случае γ-матрицы должны лишь удовлетворять условиям, обеспечивающим равенство $p^2 = m^2$. Для вывода этих условий умножим (3.223) слева на $\gamma^\nu p_\nu$. Тогда:

$$(\gamma^\nu p_\nu)(\gamma^\mu p_\mu)\psi = m(\gamma^\mu p_\mu)\psi = m^2\psi. \tag{3.226}$$

Поскольку $p_\mu p_\nu$ представляет собой симметричный тензор (компоненты импульса коммутативны), то (3.226) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} p_\mu p_\nu (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi = m^2\psi, \tag{3.227}$$

так что необходимое условие выполнено, если:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,. \tag{3.228}$$

Таким образом, пары разных матриц γ^μ антикоммутируют, а их квадраты равны:

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1\,, \quad (\gamma^0)^2 = 1\,. \tag{3.229}$$

При произвольном унитарном преобразовании компонент биспинора ψ: $\psi' = U\psi$, где U — унитарная матрица 4×4, γ-матрицы преобразуются как:

$$\gamma' = U\gamma U^{-1} = U\gamma U^{+}\,, \tag{3.230}$$

так что $(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0$ переходит в $(\gamma'^\mu p_\mu - m)\psi' = 0$. При таком преобразовании сохраняются очевидные из (3.224) свойства:

$$\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma}\,, \qquad \gamma^{0+} = \gamma^0\,. \tag{3.231}$$

Уравнение, комплексно сопряженное (3.223), можно записать в виде:

$$(-p_0\tilde{\gamma}_0 - \mathbf{p}\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - m)\psi^* = 0\,. \tag{3.232}$$

Переставляя ψ^* с помощью $\tilde{\gamma}^\mu\psi^* = \psi^*\gamma^\mu$ и умножая все уравнение справа на γ^0 (с учетом $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$), получим сопряженное уравнение Дирака:

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0\,, \tag{3.233}$$

где мы ввели:

$$\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0 \qquad \psi^* = \bar{\psi}\gamma^0 \tag{3.234}$$

— операцию дираковского сопряжения биспинора ψ.

Нетрудно видеть, что уравнение Дирака (3.223): может быть получено из уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = 0 \tag{3.235}$$

если ввести лагранжиан дираковского поля в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] - m\bar{\psi}\psi \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\,, \tag{3.236}$$

где через $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ обозначена операция дифференцирования “вправо” и “влево”, определенная выписанным тождеством. При этом, в уравнениях Эйлера – Лагранжа $\bar{\psi}$ и ψ рассматриваются как независимые поля. Сопряженное уравнение Дирака (3.233) получается из уравнения (3.235) после замены $\bar{\psi} \to \psi$. Тогда немедленно находим канонический импульс $\pi(x)$ дираковского поля:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = i\psi^+(x)\,. \tag{3.237}$$

В результате, плотность гамильтониана дираковского поля записывается как:

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^+\gamma^0(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi = \psi^+\gamma^0(i\gamma^0\partial_0\psi) = \psi^+ i\frac{\partial\psi}{\partial t}\,, \tag{3.238}$$

где во втором равенстве использовано уравнение Дирака (3.223).

Отступление о размерностях.

Используя явный вид лагранжиана дираковского поля (3.236) и известные размерности $[\mathcal{L}] = l^{-4}$, $[m] = l^{-1}$, $[\partial] = l^{-1}$, элементарно находим размерность дираковского поля:

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = l^{-3/2} \tag{3.239}$$

что пригодится в дальнейшем.

Преобразование инверсии (3.215) для ψ можно записать в виде:

$$P: \qquad \psi \to i\gamma^0\psi\,, \quad \bar{\psi} \to -i\bar{\psi}\gamma^0\,. \tag{3.240}$$

Инвариантность уравнения Дирака относительно (3.240) очевидна: заменяя $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ и $\psi \to i\gamma^0\psi$ получаем $(p_0\gamma^0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\gamma^0\psi = 0$, а умножая это уравнение слева на γ^0, и учитывая антикоммутативность γ^0 и $\boldsymbol{\gamma}$, возвращаемся к исходному уравнению.

Умножим $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0$ слева на $\bar{\psi}$, а $\bar{\psi}(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0$ справа на ψ, сложим их и получим:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(p_\mu\psi) + (p_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = p_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \tag{3.241}$$

— уравнение непрерывности для 4-тока дираковских частиц:

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,, \qquad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^*\psi, \psi^*\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi)\,, \tag{3.242}$$

описывающее закон сохранения заряда, плотность которого $j^0 = \psi^*\psi > 0$.

Уравнение Дирака можно записать в виде уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi\,, \tag{3.243}$$

где гамильтониан H имеет вид:

$$H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m\,, \tag{3.244}$$

где дираковские матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и β:

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\,, \qquad \beta = \gamma^0\,, \tag{3.245}$$

так что (3.244) совпадает с введенным выше (3.238). Матрицы (3.245) удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}\,, \quad \beta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\beta = 0\,, \quad \beta^2 = 1\,, \tag{3.246}$$

а их явный вид:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.247}$$

Рассмотрим нерелятивистский предел. Переходя в (3.216) к пределу $\mathbf{p} \to 0$, $\varepsilon \to m$, получим $\xi = \eta$, так что оба спинора из биспинора совпадают, но все четыре компоненты биспинора остаются ненулевыми. В тоже время, ясно, что лишь две из них независимы. Удобно перейти к так называемому стандартному представлению, в котором в нерелятивистском пределе две компоненты биспинора обращаются в нуль. Для этого вводим:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\,, \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\,. \tag{3.248}$$

Для покоящейся частицы, очевидно, имеем $\chi = 0$. Складывая и вычитая уравнения (3.216), получаем:

$$\begin{aligned} p_0\varphi - \mathbf{p}\sigma\chi &= m\varphi\,, \\ -p_0\chi + \mathbf{p}\sigma\varphi &= m\chi\,, \end{aligned} \tag{3.249}$$

откуда можно найти явный вид γ-матриц для стандартного представления [1]. Отметим, что в (3.248) отдельно складываются первые и вторые компоненты спиноров ξ и η. Соответственно, в стандартном представлении, как и в рассмотренном выше спинорном, ψ_1, ψ_3 соответствуют проекции $s^z = +1/2$, а ψ_2, ψ_4 — проекции $s^z = -1/2$. Матрица

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{3.250}$$

дает трехмерный оператор спина в стандартном представлении.

Спиральность.

В релятивистской теории орбитальный момент $\mathbf{l}$ и спин $\mathbf{s}$ движущейся частицы не сохраняются каждый в отдельности. Сохраняется лишь полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Поэтому не сохраняется и проекция спина на какое-либо направление (ось z), так что эта величина не может служить для перечисления поляризационных (спиновых) компонент движущейся частицы. Сохраняется, однако, ***спиральность***, т.е. проекция спина на направление движения (импульса). В самом деле, поскольку $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, то произведение $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, совпадает с очевидно сохраняющимся произведением $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$. Собственные значения спиральности $\lambda = -s, ..., +s$. Соответственно, волновые функции свободной частицы с импульсом $\mathbf{p}$ характеризуются еще и спиральностью: $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$. В системе покоя состояние частицы характеризуется, как обычно, спином (его проекцией на ось z).

Для частицы с нулевой массой покоя не существует системы покоя, в любой системе координат она движется со скоростью света. По отношению к такой частице всегда существует выделенное направление в пространстве — направление вектора импульса $\mathbf{p}$. В этом случае не существует симметрии по отношению ко всей группе трехмерных вращений, а существует лишь аксиальная симметрия по отношению к поворотам вокруг этой выделенной оси. Соответственно, сохраняется только спиральность. Если потребовать симметрию по отношению к отражениям в плоскостях, проходящих через ось $\mathbf{p}$, то состояния, отличающиеся знаком λ, будут вырождены, так что при $\lambda \neq 0$ имеем двукратное вырождение. Таким образом, при переходе к пределу $m \to 0$ система уравнений для частицы со спином s распадается на независимые уравнения, отвечающие частицам со спиральностями $\pm s, \pm(s-1), ...$. Например, для фотона $\lambda = \pm 1$, что на языке поляризации соответствует право- и левополяризованным фотонам.

3.3.4 Алгебра матриц Дирака.

В практических вычислениях большое значение имеет алгебра γ-матриц. Приведем сводку основных формул и определений, которые будут все время использоваться в дальнейшем. Все алгебраические свойства этих матриц выводятся из двух основных соотношений:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,, \tag{3.251}$$

$$g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \gamma_\mu\gamma^\mu = 4 \quad \text{или} \quad \gamma_0^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = 4\,, \tag{3.252}$$

т.е. из основного антикоммутационного соотношения и скалярного произведения.

Если γ_μ и γ^μ разделены несколькими матрицами γ, то γ_μ и γ^μ могут быть приведены в соседние положения с помощью (3.251), после чего суммирование по μ можно провести с помощью (3.252). Таким образом можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu\,,\\ \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu &= 4g^{\lambda\nu}\,,\\ \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\,,\\ \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu &= 2(\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho+\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma)\,.\end{aligned} \tag{3.253}$$

Часто γ^μ встречаются в комбинациях с 4-векторами. Введем стандартное обозначение:

$$\hat a \equiv \gamma^\mu a_\mu\,. \tag{3.254}$$

Тогда из (3.251) получаем:

$$\hat a\hat b+\hat b\hat a = 2a_\mu b^\mu\,, \qquad \hat a\hat a = a^2\,, \tag{3.255}$$

а из (3.253):

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\hat a\gamma^\mu &= -2\hat a\,,\\ \gamma_\mu\hat a\hat b\gamma^\mu &= 4a_\mu b^\mu\,,\\ \gamma_\mu\hat a\hat b\hat c\gamma^\mu &= -2\hat c\hat b\hat a\,,\\ \gamma_\mu\hat a\hat b\hat c\hat d\gamma^\mu &= 2\big(\hat d\hat a\hat b\hat c+\hat c\hat b\hat a\hat d\big)\,.\end{aligned} \tag{3.256}$$

Широко используется операция шпурирования γ-матриц. В частности:

$$Sp\gamma^\mu = 0\,. \tag{3.257}$$

Вводя

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu) \tag{3.258}$$

и вычисляя шпур от (3.251), найдем:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \tag{3.259}$$

и, соответственно

$$\frac{1}{4}Sp(\hat a\hat b) = a^\mu b_\mu\,. \tag{3.260}$$

Особую роль играет матрица γ^5, определяемая как:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.261}$$

Легко убедиться, что

$$\gamma^5\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^5 = 0\,, \qquad (\gamma^5)^2 = 1\,, \tag{3.262}$$

так что γ^5 антикоммутирует с остальными γ-матрицами. По отношению к матрицам $\boldsymbol\alpha$ и β имеем:

$$\boldsymbol\alpha\gamma^5-\gamma^5\boldsymbol\alpha = 0\,, \qquad \beta\gamma^5+\gamma^5\beta = 0\,. \tag{3.263}$$

Матрица γ^5 эрмитова:

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \gamma^5\,, \tag{3.264}$$

поскольку переход от порядка индексов 3210 к 0123 достигается четной перестановкой γ-матриц.

В спинорном представлении явный вид γ^5 есть:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}, \tag{3.265}$$

а в стандартном представлении:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.266}$$

откуда видно, что

$$Sp\gamma^5 = 0\,, \tag{3.267}$$

что, естественно, не зависит от выбора представления.

Совокупность 16 матриц:

$$\left\{\gamma^A\right\} = \left\{\widehat{1}, \gamma^5, \gamma^\mu, i\gamma^\mu\gamma^5, i\sigma^{\mu\nu}\right\}, \tag{3.268}$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{3.269}$$

образует "полный набор", по которому может быть "разложена" любая матрица 4×4. В самом деле, все эти матрицы обладают свойствами:

$$\begin{gathered} Sp\gamma^A = 0 \qquad (A \neq 1)\,, \\ \gamma^A\gamma_A = 1\,, \qquad \frac{1}{4}Sp\gamma^A\gamma_B = \delta^A_B\,. \end{gathered} \tag{3.270}$$

Соответственно, все γ^A-матрицы линейно независимы, а любая матрица 4×4 представляется в виде:

$$\Gamma = \sum_A c_A\gamma^A\,, \qquad c_A = \frac{1}{4}[21\ Sp\gamma_A\Gamma\,. \tag{3.271}$$

3.3.5 Плоские волны.

Состояние свободной частицы с определенным импульсом и энергией описывается плоской волной, которую запишем в виде:

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}}u_p e^{-ipx}\,, \tag{3.272}$$

где u_p — определенным образом нормированный биспинор. Для волновой функции с "отрицательной частотой" (изменяя также знак $\mathbf{p}$) запишем:

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}}u_{-p} e^{ipx}\,. \tag{3.273}$$

В обоих случаях пишем $\varepsilon_{\mathbf{p}} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Компоненты биспиноров u_p и u_{-p} удовлетворяют следующим уравнениям, получающимся при подстановке (3.272) и (3.273) в уравнение Дирака:

$$(\hat{p} - m)u_p = 0\,, \qquad (\hat{p} + m)u_{-p} = 0\,. \tag{3.274}$$

Для сопряженных спиноров $\bar{u}_p = u_p^* \gamma^0$ имеем:

$$\bar{u}_p(\hat{p} - m) = 0\,, \qquad \bar{u}_{-p}(\hat{p} + m) = 0\,. \tag{3.275}$$

Примем следующее инвариантное условие нормировки:

$$\bar{u}_p u_p = 2m\,, \qquad \bar{u}_{-p} u_{-p} = -2m\,. \tag{3.276}$$

Умножая (3.274) слева на $\bar{u}_{\pm p}$ получим $(\bar{u}_{\pm p}\gamma^\mu u_{\pm p})p_\mu = 2m^2 = 2p^2$, т.е.

$$\bar{u}_p \gamma^\mu u_p = \bar{u}_{-p}\gamma^\mu u_{-p} = 2p^\mu\,, \tag{3.277}$$

так что 4-вектор плотности тока для плоских волн (3.272), (3.273) равен:

$$j^\mu = \bar{\psi}_{\pm p}\gamma^\mu \psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}\bar{u}_{\pm p}\gamma^\mu u_{\pm p} = \frac{p^\mu}{\varepsilon_{\mathbf{p}}}\,, \tag{3.278}$$

т.е. $j^\mu = (1, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_{\mathbf{p}}}$ – скорость частицы. Видим, что выбранная нормировка соответствует "одной частице в объеме $V = 1$".

В стандартном представлении, из (3.249) получаем систему однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - m)\varphi - \mathbf{p}\sigma\chi = 0\,, \\ (\varepsilon_{\mathbf{p}} + m)\chi - \mathbf{p}\sigma\varphi = 0\,. \end{aligned} \tag{3.279}$$

Отсюда:

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\sigma}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - m}\chi\,, \qquad \chi = \frac{\mathbf{p}\sigma}{\varepsilon_{\mathbf{p}} + m}\varphi\,. \tag{3.280}$$

Общий множитель перед φ и χ (произвольный, пока речь идет просто о решении однородных уравнений) следует выбрать из условия нормировки (3.276). Соответственно, в стандартном представлении, спиноры u_p и u_{-p} имеют вид:

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} + m}\, w \\ \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} - m}\,(\mathbf{n}\sigma)w \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} - m}\,(\mathbf{n}\sigma)w' \\ \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} + m}\, w' \end{pmatrix}, \tag{3.281}$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, а w — произвольный двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий условию:

$$w^* w = 1\,. \tag{3.282}$$

Вторая формула в (3.281) получается из первой изменением знака перед m и переобозначением $w \to (\mathbf{n}\sigma)w'$. Аналогичным образом, можно получить [1]:

$$\begin{aligned} \bar{u}_p &= \left(\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} + m}\, w^*,\ -\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} - m}\, w^*(\mathbf{n}\sigma)\right), \\ \bar{u}_{-p} &= \left(\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} - m}\, w'^*(\mathbf{n}\sigma),\ -\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}} + m}\, w'^*\right). \end{aligned} \tag{3.283}$$

Перемножением непосредственно убеждаемся, что

$$\bar{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m\,.$$

В системе покоя, т.е. при $\varepsilon_{\mathbf{p}} = m$, имеем:

$$u_p = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \tag{3.284}$$

так что w — это тот самый трехмерный спинор, к которому в нерелятивистском пределе сводится каждая из волн:

$$w^{\sigma=1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w^{\sigma=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.285}$$

При заданном импульсе существует два различных независимых состояния, в соответствии с двумя возможными значениями проекции спина. В соответствии со сделанными ранее общими утверждениями, в общем случае, речь идет о спиральности частицы λ — проекции спина на направление $\mathbf{p}$. Спиральным состояниям соответствуют плоские волны, у которых спинор $w = w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$ является собственной функцией оператора $\mathbf{n}\sigma$:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{n}\sigma)w^{(\lambda)} = \lambda w^{(\lambda)}. \tag{3.286}$$

3.3.6 Связь спина и статистики.

Вторичное квантование дираковского поля (частиц со спином $s = 1/2$) производится следующим образом. Введем разложение произвольного дираковского поля по плоским волнам в виде:

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \Big(a_{\mathbf{p}\sigma} u_{p\sigma} e^{-ipx} + b^+_{\mathbf{p}\sigma} u_{-p-\sigma} e^{ipx} \Big),$$
$$\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0 = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \Big(a^+_{\mathbf{p}\sigma} \bar{u}_{p\sigma} e^{ipx} + b_{\mathbf{p}\sigma} \bar{u}_{-p-\sigma} e^{-ipx} \Big). \tag{3.287}$$

Гамильтониан Дирака нам известен, поэтому тензор энергии-импульса можно и не искать. Используя (3.238), (3.243) находим среднюю энергию дираковской частицы в состоянии с волновой функцией ψ:

$$E = \int d^3\mathbf{r} \psi^* H \psi = i \int d^3\mathbf{r} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = i \int d^3\mathbf{r} \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{3.288}$$

Подставляя сюда (3.287), учитывая ортогональность функций с разными $\mathbf{p}, \sigma$, а также $\bar{u}_{\pm p\sigma} \gamma^0 u_{\pm p,\sigma} = 2\varepsilon_{\mathbf{p}}$ (ср. (3.278)), получаем:

$$H = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} \big(a^+_{\mathbf{p}\sigma} a_{\mathbf{p}\sigma} - b_{\mathbf{p}\sigma} b^+_{\mathbf{p}\sigma} \big). \tag{3.289}$$

Это выражение, очевидно, есть прямое следствие трансформационных свойств дираковского поля и требования релятивистской инвариантности. Но теперь мы видим, что наше поле нужно квантовать по Ферми, т.е. вводя *антикоммутаторы*:

$$\big\{ a_{\mathbf{p}\sigma}, a^+_{\mathbf{p}\sigma} \big\} = 1, \qquad \big\{ b_{\mathbf{p}\sigma}, b^+_{\mathbf{p}\sigma} \big\} = 1. \tag{3.290}$$

При несовпадающих индексах, а также для пар "некрещеных" и "крещеных" операторов соответствующие антикоммутаторы равны нулю. В результате (3.289) переписывается в виде:

$$H = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} (a^+_{\mathbf{p}\sigma} a_{\mathbf{p}\sigma} + b^+_{\mathbf{p}\sigma} b_{\mathbf{p}\sigma} - 1), \tag{3.291}$$

так что собственные значения энергии, за вычетом бесконечной энергии вакуума, равны:

$$E = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} (N_{\mathbf{p}\sigma} + \bar{N}_{\mathbf{p}\sigma}) \tag{3.292}$$

и являются положительно определенными. При квантовании по Бозе получили бы $E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}\sigma}(N_{\mathbf{p}\sigma} - \bar{N}_{\mathbf{p}\sigma})$, т.е. не положительно определенное выражение [10].

Для оператора импульса, из $\int d^3\mathbf{r}\psi^*\hat{\mathbf{p}}\psi$, аналогичным образом получим:

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \mathbf{p}(N_{\mathbf{p}\sigma} + \bar{N}_{\mathbf{p}\sigma})\,. \tag{3.293}$$

Оператор плотности 4-тока $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, в представлении вторичного квантования дает оператор заряда в виде:

$$Q = \int d^3\mathbf{r}\bar{\psi}\gamma^0\psi = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(a^+_{\mathbf{p}\sigma}a_{\mathbf{p}\sigma} + b_{\mathbf{p}\sigma}b^+_{\mathbf{p}\sigma}\right) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(a^+_{\mathbf{p}\sigma}a_{\mathbf{p}\sigma} - b^+_{\mathbf{p}\sigma}b_{\mathbf{p}\sigma} + 1\right). \tag{3.294}$$

Это дает собственные значения заряда в виде:

$$Q = \sum_{\mathbf{p}\sigma} (N_{\mathbf{p}\sigma} - \bar{N}_{\mathbf{p}\sigma})\,, \tag{3.295}$$

что означает противоположность зарядов частиц и античастиц.

Фермионные правила антикоммутации операторов рождения и уничтожения, как хорошо известно [29], приводят к принципу Паули — собственные значения оператора числа частиц в данном квантовом состоянии $N_{\mathbf{p}\sigma}$ могут равняться только 0 или 1, причем мы убедились, что для частиц со спином 1/2 это является прямым следствием требований релятивистской инвариантности и положительной определенности энергии. В результате, мы можем легко прийти к общей теореме о связи спина и статистики: *все частицы с полуцелым спином — фермионы, а частицы с целым спином — бозоны.* Это очевидно, если учесть, что любую частицу со спином s можно представить себе “составленной” из $2s$ частиц со спином 1/2. При полуцелом s число $2s$ нечетно, а при целом s — четно. “Сложная” частица, содержащая четное число фермионов является бозоном, а содержащая нечетное число фермионов — фермионом. Чтобы понять это достаточно рассмотреть перестановки таких “составных” частиц. При этом подразумевается, что все частицы с одинаковым спином подчиняются одинаковой статистике. Если бы существовали фермионы со спином $s = 0$, то из такого фермиона и фермиона со спином 1/2 можно было бы составить частицу спина 1/2, которая была бы бозоном, в противоречии с общим результатом для $s = 1/2$, полученном выше. Эта замечательная теорема, относящаяся к наиболее общим утверждениям квантовой теории поля, впервые была доказана Паули[11].

[10] Все обозначения здесь стандартные, общие свойства и смысл фермиевских операторов рождения и уничтожения предполагаются известными [29]

[11] Подчеркнем, что в квантовой теории поля эта теорема именно доказывается, на основе самых общих требований релятивистской инвариантности (трансформационных свойств полей) и положительной определенности энергии, т.е. устойчивости основного состояния, а не постулируется, как это делается в нерелятивистской квантовой механике.

3.3.7 Преобразования C, P, T для фермионов.

Множители $\psi_{p\sigma} = u_{p\sigma}\exp(-ipx)$, входящие в (3.287) с операторами $a_{\mathbf{p}\sigma}$, представляют собой волновые функции свободных частиц (например электронов) с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ: $\psi^{(e)} = \psi_{p\sigma}$. Множители $\bar\psi_{-p-\sigma}$ при операторах $b_{\mathbf{p}\sigma}$ следует рассматривать как волновые функции соответствующих античастиц (например позитронов) с теми же $\mathbf{p}$ и σ. Однако $\psi_{p\sigma}$ и $\bar\psi_{-p-\sigma}$ различны по своим трансформационным свойствам, а их компоненты удовлетворяют различным системам уравнений. Для устранения этого недостатка надо провести еще некоторое унитарное преобразование $\bar\psi_{-p-\sigma}$, такое, чтобы новая волновая функция удовлетворяла тому же уравнению, что и $\psi_{p\sigma}$. Такую функцию и будем называть волновой функцией античастицы (позитрона) с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ. Запишем:

$$\psi^{(p)}_{p\sigma} = U_C\bar\psi_{-p-\sigma}\,. \tag{3.296}$$

Эта операция называется зарядовым сопряжением C. Эта операция не ограничивается плоскими волнами, в общем случае пишем:

$$C\psi(t,\mathbf{r}) = U_C\bar\psi(t,\mathbf{r})\,. \tag{3.297}$$

Опуская детали вывода, которые можно найти в [1], приведем только окончательный результат:

$$U_C = \gamma^2\gamma^0\,. \tag{3.298}$$

Из $\bar\psi = \psi^*\gamma^0 = \tilde\gamma^0\psi^* = \gamma^0\psi^*$ имеем:

$$C\psi = \gamma^2\gamma^0\bar\psi = \gamma^2\psi^*\,. \tag{3.299}$$

Для решений в виде плоских волн нетрудно убедиться, что

$$C\psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}\,, \tag{3.300}$$

так что электроны и позитроны описываются одинаковыми волновыми функциями: $\psi^{(e)} = \psi^{(p)} = \psi_{p\sigma}$, как и должно быть, поскольку эти функции несут информацию только об импульсе и поляризации частиц.

Аналогично можно рассмотреть и операцию обращения времени. Изменение знака времени должно сопровождаться комплексным сопряжением волновой функции [29]. Для того, чтобы получить в результате "обращенную по времени" волновую функцию фермиона $T\psi$ в том же представлении, что и исходная ψ, надо, опять таки, провести над ψ^* (или $\bar\psi$) некоторое унитарное преобразование:

$$T\psi(\mathbf{r},t) = U_T\bar\psi(\mathbf{r},-t)\,. \tag{3.301}$$

Можно показать [1], что

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\,, \tag{3.302}$$

так что

$$T\psi(t,\mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\bar\psi(-t,\mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t,\mathbf{r})\,. \tag{3.303}$$

Операция пространственной инверсии (би)спиноров P была определена выше в (3.240):

$$P\psi = i\gamma^0\psi\,, \qquad P\bar\psi = -i\bar\psi\gamma^0\,. \tag{3.304}$$

Приведем последовательно результат воздействия на дираковское поле ψ всех трех операций T, P, C:

$$\begin{aligned} T\psi(t,\mathbf{r}) &= -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t,\mathbf{r})\,,\\ PT\psi(t,\mathbf{r}) &= i\gamma^0(T\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t,-\mathbf{r})\,,\\ CPT\psi(t,\mathbf{r}) &= \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t,-\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{3.305}$$

или

$$CPT\psi(t,\mathbf{r}) = i\gamma^5\psi(-t,-\mathbf{r})\,. \tag{3.306}$$

Применяя эти операции к (3.287), можно найти следующие правила преобразования операторов рождения и уничтожения [1]:

$$\begin{aligned} a^C_{\mathbf{p}\sigma} &= b_{\mathbf{p}\sigma}\,, \qquad b^C_{\mathbf{p}\sigma} = a_{\mathbf{p}\sigma}\,,\\ a^P_{-\mathbf{p}\sigma} &= ia_{\mathbf{p}\sigma}\,, \qquad b^P_{-\mathbf{p}\sigma} = ib_{\mathbf{p}\sigma}\,,\\ a^T_{-\mathbf{p}-\sigma} &= 2\sigma i a^+_{\mathbf{p}\sigma}\,, \qquad b^T_{-\mathbf{p}-\sigma} = 2\sigma i b^+_{\mathbf{p}\sigma}\,. \end{aligned} \tag{3.307}$$

3.3.8 Билинейные формы.

Поскольку биспиноры ψ и ψ^* имеют по 4 компоненты, то из них можно составить $4{\times}4{=}16$ независимых билинейных комбинаций. В симметричном виде эти комбинации записываются следующим образом (см. (3.268), (3.269) :

$$\begin{aligned} S = \bar\psi\psi\,, \qquad & V^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi\,, \\ P = i\bar\psi\gamma^5\psi\,, \qquad & A^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi\,, \\ & T^{\mu\nu} = i\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi\,, \end{aligned} \tag{3.308}$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\,. \tag{3.309}$$

Эти билинейные формы образуют один скаляр S, один псевдоскаляр P, 4-вектор V^μ, 4-псевдовектор A^μ и антисимметричный тензор $T^{\mu\nu}$.

Скалярность S и псевдоскалярность P очевидны из их спинорного представления (см. (3.207) и (3.208)):

$$S = \xi^*\eta + \eta^*\xi\,, \qquad P = i(\xi^*\eta - \eta^*\xi)\,. \tag{3.310}$$

Векторный характер V^μ очевиден, тогда, из уравнения Дирака $p_\mu\gamma^\mu\psi = m\psi$, из которого сразу следует $(\bar\psi p_\mu\gamma^\mu\psi) = m\bar\psi\psi$, где справа и слева стоят скаляры.

Вообще, правило составления билинейных форм (3.308) очевидно: они составлены так, как будто γ^μ представляет собой 4-вектор, γ^5 — псевдоскаляр, а стоящие с обеих сторон $\bar\psi$ и ψ образуют вместе скаляр. Отсутствие билинейных форм, которые имели бы характер симметричного 4-тензора ясно из того факта, что симметричная комбинация $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, так что соответствующая билинейная форма сводится к $g^{\mu\nu}\bar\psi\psi$. Практически, билинейные формы (3.308) используются при построении различных лагранжианов взаимодействия спинорных полей между собой и с другими полями. Правила преобразования билинейных форм при дискретных преобразованиях C, P, T можно найти в [1].

3.3.9 Нейтрино.

Выше мы видели, что необходимость описания частицы со спином $s = 1/2$ двумя спинорами ξ и η связана с массой частицы. Эта причина отпадает, если масса равна нулю[12]. Волновое уравнение, описывающее такую частицу может быть составлено с помощью всего одного спинора, например η:

$$p^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = 0 \tag{3.311}$$

или, что тоже самое:

$$(p_0 + \mathbf{p}\sigma)\eta = 0\,. \tag{3.312}$$

Это уравнение называется уравнением Вейля.

Выше отмечалось, что волновое уравнение с массой m, автоматически оказывается инвариантным по отношению к пространственной инверсии (преобразование $\xi \leftrightarrow \eta$ (3.215)). При описании частицы одним спинором эта симметрия пропадает.

[12]Среди всех известных фермионов, с имеющейся экспериментальной точностью, равна нулю масса нейтрино: установленное ограничение на его массу $m_\nu < 30eV$.

Энергия и импульс частицы с $m = 0$ связаны соотношением $\varepsilon = |\mathbf{p}|$. Поэтому для плоской волны $\eta_p \sim e^{-ipx}$ уравнение (3.312) дает:

$$(\mathbf{n} \cdot \sigma)\eta_p = -\eta_p \,, \tag{3.313}$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. Такое же уравнение имеет место и для волны с "отрицательной частотой" $\eta_{-p} \sim e^{ipx}$:

$$(\mathbf{n} \cdot \sigma)\eta_{-p} = -\eta_{-p} \,. \tag{3.314}$$

Вторично-квантованные операторы поля η представляются в виде:

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{\mathbf{p}} (\eta_p a_{\mathbf{p}} + \eta_{-p} b^+_{\mathbf{p}}) \,, \\ \eta^+ &= \sum_{\mathbf{p}} (\eta^*_p a^+_{\mathbf{p}} + \eta^*_{-p} b_{\mathbf{p}}) \,. \end{aligned} \tag{3.315}$$

Отсюда, как обычно, следует, что η^*_{-p} является волновой функцией античастицы. Нейтрино представляет собой электрически нейтральную частицу, но в рассматриваемом формализме оно не является истинно нейтральной частицей!

Из определения операторов $p^{\alpha\dot\beta}$ (3.211) видно, что $p^{\alpha\dot\beta *} = -p^{\dot\alpha\beta}$. Поэтому комплексно сопряженный спинор η^* удовлетворяет уравнению $p^{\dot\alpha\beta}\eta^*_{\dot\beta} = 0$, или, что тоже самое:

$$p_{\dot\alpha\beta}\eta^{\dot\beta *} = 0 \,. \tag{3.316}$$

Обозначим $\eta^{\dot\beta *} = \xi^\beta$, поскольку комплексное сопряжение превращает пунктирный спинор в непунктирный. Таким образом, волновые функции античастицы удовлетворяют уравнению:

$$p_{\dot\alpha\beta}\xi^\beta = 0 \tag{3.317}$$

или

$$(p_0 - \mathbf{p}\sigma)\xi = 0 \,. \tag{3.318}$$

Для плоской волны отсюда имеем:

$$(\mathbf{n} \cdot \sigma)\xi_p = \xi_p \,. \tag{3.319}$$

Заметим, что $\frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \sigma)$ представляет собой оператор проекции спина на направление движения (спиральности). Поэтому уравнения (3.313), (3.319) означают, что состояние частицы с определенным импульсом автоматически оказывается спиральным — проекция спина у них направлена вдоль направления движения. При этом спин частицы противоположен импульсу (спиральность равна -1/2, "левый винт"), а спин античастицы направлен вдоль импульса (спиральность равна +1/2, "правый винт"). Соответственно для нейтрино и антинейтрино отсутствует симметрия по отношению к отражениям в плоскости, проходящей через ось, направленную вдоль импульса, как это показано на Рис. 3.2. Это соответствует экспериментально наблюдаемому нарушению пространственной четности в слабых взаимодействиях. При этом сохраняется, однако, симметрия относительно операции CP — так называемая комбинированная четность[13] Рассмотренная схема называется теорией двухкомпонентного нейтрино. Она была предложена впервые Ландау. С помощью одного спинора η (или

[13] Фактически , в слабых взаимодействиях имеет место также и очень слабое нарушение CP четности, что наблюдается, в основном, в процессах распадов K-мезонов. Это означает, как отмечалось выше, также очень слабое нарушение T- инвариантности. Природа нарушения CP-инвариантности остается невыясненной, изложенная выше схема описания нейтрино пренебрегает этим слабым эффектом.

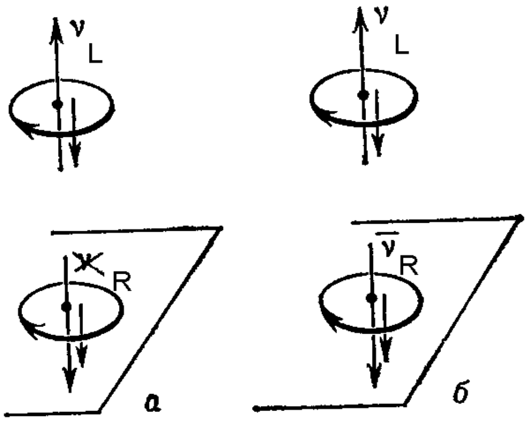


Рис. 3.2: При отражении в зеркале (пространственной инверсии) левое нейтрино переходит в несуществующее правое нейтрино (а). Реальное состояние получается при одновременном с отражением переходе от частицы к античастице (зарядовом сопряжении), при этом левое нейтрино переходит в правое антинейтрино (б).

ξ) можно образовать всего четыре билинейные комбинации, составляющие вместе 4-вектор:

$$j^\mu = (\eta^* \eta, \eta^* \sigma \eta)\,. \tag{3.320}$$

В силу $(p_0 + \mathbf{p}\sigma)\eta = 0$ и $\eta^*(p_0 - \mathbf{p}\sigma) = 0$ имеет место уравнение непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$, так что j^μ представляет собой 4-вектор плотности тока нейтрино.

Плоские волны нейтрино удобно записать как и выше в виде:

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}\,, \qquad \eta_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}\,, \tag{3.321}$$

а спинорные амплитуды нормировать инвариантным условием:

$$u^*_{\pm p}(1, \sigma) u_{\pm p} = 2(\varepsilon, \mathbf{p})\,. \tag{3.322}$$

Тогда плотность частиц и плотность тока равны $j^0 = 1$, $\mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon} = \mathbf{n}$.

При рассмотрении процессов взаимодействия нейтрино с другими частицами удобно пользоваться единообразными обозначениями и ввести для нейтрино “биспинорную” волновую функцию, две из компонент которой равны нулю: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Однако такая форма ψ, вообще говоря, меняется при переходе к другому (не спинорному) представлению. Эту трудность можно обойти, если заметить, что в спинорном представлении:

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}\left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix}\,,$$
$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{3.323}$$

так что можно написать тождества:

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad (\eta^*, \xi^*)\frac{1}{2}(1-\gamma^5) = (\eta^*, 0)\,, \tag{3.324}$$

где ξ — произвольный "балластный" спинор. Тогда условие истинной двухкомпонентности нейтрино будет соблюдено и при описании его четырехкомпонентным биспинором ψ в любом представлении, если под ψ понимать решение уравнение Дирака с $m = 0$:

$$\widehat{p}\psi = 0 \tag{3.325}$$

с дополнительным условием (γ^5-инвариантность):

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \psi \qquad \text{или} \qquad \gamma^5\psi = \psi\,. \tag{3.326}$$

Это условие можно учесть автоматически, если во всех выражениях произвести замену нейтринных биспиноров по правилу:

$$\psi \to \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi\,, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,. \tag{3.327}$$

Например, 4-вектор плотности тока записывается в виде:

$$j^\mu = \frac{1}{4}\bar{\psi}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi\,. \tag{3.328}$$

Из проведенного выше обсуждения спиральности безмассовых фермионов ясно, что для них в общем случае удобно ввести "правые" и "левые" поля как:

$$\psi^R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi\,, \qquad \psi^L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi\,, \qquad \psi = \psi^R + \psi^L\,. \tag{3.329}$$

Такие обозначения часто используются не только при описании нейтрино, но и для любых других фермионов со спином $s = 1/2$, при рассмотрении задач, в которых можно пренебречь их массой.

В последние годы, в связи с косвенными экспериментальными указаниями на конечность массы нейтрино, возник интерес к модели истинно нейтральных, так называемых ***майорановских*** нейтрино, переходящих сами в себя при операции зарядового сопряжения и имеющих конечную массу, описание которой несколько отличается от обычной дираковской массы. Массовый член дираковского типа, как ясно из предыдущего изложения, в лагранжиане связывает (перемешивает) L и R компоненты одного и того же поля:

$$\mathcal{L}_D = D(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) = D\bar{\psi}\psi\,, \tag{3.330}$$

где D обозначает дираковскую массу. Массовый член майорановского типа перемешивает L и R компоненты ***зарядово сопряженных полей***, так что соответствующие вклады в лагранжиан можно записать как [11]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MA} &= A(\bar{\psi}_L^C\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_L^C) = A\bar{\chi}\chi\,, \\ \mathcal{L}_{MB} &= B(\bar{\psi}_R^C\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_R^C) = B\bar{\omega}\omega\,, \end{aligned} \tag{3.331}$$

где индекс C обозначает зарядовое сопряжение и введены эрмитовы (истинно нейтральные или майорановские) поля:

$$\begin{aligned} \chi &= \psi_L + \psi_L^C\,, \qquad \chi^C = \chi\,, \\ \omega &= \psi_R + \psi_R^C\,, \qquad \omega^C = \omega\,. \end{aligned} \tag{3.332}$$

Обратные равенства имеют вид:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\chi\,, \qquad \psi_L^C = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\chi\,,$$
$$\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\omega\,, \qquad \psi_R^C = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\omega\,. \tag{3.333}$$

Когда в лагранжиане одновременно присутствуют и дираковские и майорановские массовые члены, имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DM} &= D\bar\psi_L\psi_R + A\bar\psi_L^C\psi_L + B\bar\psi_R^C\psi_R + h.c = \\ &= \frac{1}{2}D(\bar\chi\omega + \bar\omega\chi) + A\bar\chi\chi + B\bar\omega\omega = (\bar\chi,\bar\omega)\begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}D & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.334}$$

Возникшая здесь массовая матрица легко диагонализуется и ее собственные значения дают:

$$m_{1[21\ ,2} = \frac{1}{2}(A+B) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + D^2}\,. \tag{3.335}$$

Таким образом, самый общий массовый член (3.334) с четырехкомпонентным фермионным полем фактически описывает две майорановские частицы с разными массами. Соответствующие поля представляются следующими (диагонализующими (3.334)) линейными комбинациями исходных полей:

$$\phi_1 = \chi\cos\theta - \omega\sin\theta\,, \qquad \phi_2 = \chi\sin\theta + \omega\cos\theta\,, \tag{3.336}$$

где

$$tg2\theta = \frac{D}{B-A}\,. \tag{3.337}$$

Нетрудно убедиться, что при $A = B = 0$ (т.е. при равных нулю майорановских массах) отсюда получается формализм обычного четырехкомпонентного дираковского поля, так что дираковский фермион соответствует “вырожденному” пределу $A = B = 0$ двух майорановских частиц. Поскольку майорановские массовые члены в лагранжиане (3.331), очевидно, приводят к несохранению аддитивного квантового числа, которое несет поле ψ, например электрического заряда, все известные элементарные фермионы, за исключением нейтрино, будучи заряженными, должны иметь $A = B = 0$, т.е. быть дираковскими частицами. А вот для нейтрино этого ограничения нет и его можно описывать и в рамках более общего майорановского формализма. Если масса нейтрино точно равна нулю, то майорановские нейтрино неотличимы от двухкомпонентных (вейлевских) нейтрино, рассмотренных выше. Если же масса нейтрино отлична от нуля, то теория майорановских нейтрино приводит к ряду специфических предсказаний.

Частицы со спином $s = 3/2$.

Частицы со спином $s = 3/2$ в своей системе покоя описываются трехмерным симметричным спинором третьего ранга, имеющим $2s+1 = 4$ независимых компоненты. Соответственно, в произвольной системе отсчета описание таких частиц можно строить, используя спиноры $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, $\eta_{\dot\alpha\beta\gamma}$, $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, каждый из которых симметричен по всем одинаковым (т.е. пунктирным или непунктирным) индексам. Заметим, что последняя пара спиноров не добавляет ничего нового в уравнения, полученные с помощью первой пары. Существует несколько эквивалентных формулировок волновых уравнений в рассматриваемой задаче, мы ограничимся кратким обзором лишь одной из них [1].

Паре спинорных индексов $\alpha\dot\beta$, как мы видели выше, можно сопоставить один 4-векторный индекс μ. Поэтому сопоставляем $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma} \to \psi_\mu^{\dot\gamma}$ и $\eta^{\dot\beta\alpha\gamma} \to \psi_\mu^{\gamma}$, т.е. вводим “смешанные” спинорно - тензорные величины. Совокупности этих двух спиноров сопоставляется “векторный” биспинор ψ_μ (где уже не пишем биспинорные индексы). Волновое уравнение записывается в виде “уравнения Дирака” для каждой из векторных компонент ψ_μ:

$$(\hat p - m)\psi_\mu = 0 \tag{3.338}$$

с дополнительным условием

$$\gamma^\mu\psi_\mu = 0\,. \tag{3.339}$$

Умножая (3.338) на γ^μ, с учетом (3.339), получим $\gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu\psi_\mu = 0$ или, в силу правил коммутации для γ^μ: $2g^{\mu\nu}p_\nu\psi_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\psi_\mu = 0$, где в силу (3.339) второй член дает нуль. Тогда имеем:

$$p^\mu\psi_\mu = 0\,, \tag{3.340}$$

что обеспечивает переход четырехмерных спиноров в "нужные" трехмерные в системе покоя.

Проблем учета дополнительных условий к волновым уравнениям создает существенные трудности при проведении процедуры квантования. Заметим, однако, что как и в случае частиц с высшими целыми спинами, так и при обсуждении фермионов со спином $s \geq 3/2$, следует помнить, что элементарных частиц такого типа в рамках "стандартной модели" просто нет.

Глава 4

ФЕЙНМАНОВСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

4.1 Нерелятивистская теория. Функции Грина.

В этой главе дается элементарное введение в квантовую электродинамику, понимаемую, как теория электромагнитного взаимодействия элементарных лептонов – т.е., фактически, электронов и позитронов. При этом мы следуем, в основном, оригинальным работам Фейнмана, хорошее изложение которых можно найти в [5,31]. Но начнем мы с нерелятивистской квантовой механики, чтобы ввести ряд понятий и подходов, которые, обычно, выпадают из традиционных курсов типа [29].

Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi\,. \tag{4.1}$$

Обычный подход к решению такого дифференциального уравнения состоит в том, что зная волновую функцию в некий начальный момент времени $\psi(t_1)$, мы пытаемся рассчитать ее изменение за малый интервал времени Δt, соответственно найти $\psi(t_1+\Delta t)$, а затем продолжить этот процесс. Фейнман предложил запись решения (4.1) в интегральном виде, так что при переходе к моменту времени $t_2 > t_1$ волновая функция в точке $(t_2, \mathbf{x}_2)$ выражается через волновую функцию в точке $(t_1, \mathbf{x}_1)$ следующим образом:

$$\psi(\mathbf{x}_2, t_2) = \int d^3\mathbf{x}_1 K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1)\psi(\mathbf{x}_1 t_1)\,, \qquad t_2 \geq t_1\,. \tag{4.2}$$

Здесь интегральное ядро $K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1)$ представляет собой *пропагатор* (функцию Грина), соответствующий линейному дифференциальному уравнению (4.1). Физический смысл пропагатора ясен из самой записи (4.2) — это квантовомеханическая амплитуда вероятности перехода частицы из точки $\mathbf{x}_1$ в момент времени t_1 в точку $\mathbf{x}_2$ в момент t_2.

Пусть, для простоты, гамильтониан H не зависит от времени. В соответствии с принципом суперпозиции квантовой механики можно разложить $\psi(\mathbf{x}_1 t_1)$ в ряд по полному набору ортонормированных собственных функций $u_n(\mathbf{x})$ оператора H с собственными значениями E_n:

$$\begin{gathered} Hu_n = E_n u_n\,, \\ \int d^3\mathbf{x} u_n^*(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x}) \equiv (u_n, u_m) = \delta_{nm}\,, \\ \sum_n u_n(\mathbf{x}) u_n^*(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Тогда:

$$\psi(\mathbf{x}_1 t_1) = \sum_n c_n u_n(\mathbf{x}_1) e^{-iE_n t_1/\hbar}\,. \tag{4.4}$$

Коэффициенты c_n можно получить теперь, умножая (4.4) на $u_n^*(\mathbf{x}_1)$ и интегрируя по трехмерному пространству:

$$c_n = \int d^3\mathbf{x}_1 u_n^*(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1 t_1) e^{iE_n t_1/\hbar}\,. \tag{4.5}$$

Волновую функцию в момент времени t_2 можно записать в виде:

$$\psi(\mathbf{x}_2 t_2) = \sum_n c_n u_n(\mathbf{x}_2) e^{-iE_n t_2/\hbar}\,. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5) в (4.6), меняя порядок суммирования и интегрирования и сравнивая с (4.2), получаем:

$$K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = \sum_n u_n(\mathbf{x}_2) u_n^*(\mathbf{x}_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)/\hbar} \tag{4.7}$$

или, вводя обозначение

$$\chi_n(\mathbf{x}, t) = u_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t/\hbar}\,, \tag{4.8}$$

имеем более короткую запись:

$$K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = \sum_n \chi_n(\mathbf{x}_2 t_2)\,.\chi_n^*(\mathbf{x}_1 t_1) \tag{4.9}$$

При совпадающих временах $t_1 = t_2 = t$ из (4.7) получим:

$$K(\mathbf{x}_2 t; \mathbf{x}_1 t) = \sum_n u_n(\mathbf{x}_2) u_n^*(\mathbf{x}_1) = \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\,. \tag{4.10}$$

Это, с очевидностью, превращает (4.2) в тождество при $t_1 = t_2$. Нас, конечно, интересуют времена $t_2 > t_1$, поэтому удобно положить $K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = 0$ при $t_2 < t_1$, что обеспечит выполнение *принципа причинности*, и определить:

$$K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = \theta(t_2 - t_1) \sum_n \chi_n(\mathbf{x}_2 t_2) \chi^*(\mathbf{x}_1 t_1)\,, \tag{4.11}$$

где введена ступенчатая функция:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad t < 0 \end{cases} . \tag{4.12}$$

Для производной θ-функции имеем:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(t) \, . \tag{4.13}$$

Теперь уже можно вывести дифференциальное уравнение для функции Грина (пропагатора) $K(\mathbf{r}_2 t_2; \mathbf{r}_1 t_1)$. Поскольку χ_n представляют собой решения уравнения Шредингера (4.1), (4.4), то используя (4.10), (4.11) и (4.13) имеем:

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\mathbf{x}_2) \right] K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = i\hbar \sum_n \chi_n(\mathbf{x}_2 t_2) \chi^*(\mathbf{x}_1 t_1) \frac{\partial}{\partial t_2} \theta(t_2 - t_1) = \\ = i\hbar \sum_n u_n(\mathbf{x}_2) u_n^*(\mathbf{x}_1) e^{-iE_n(t_2 - t_1)/\hbar} \delta(t_2 - t_1) = \\ = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \sum_n u_n(\mathbf{x}_2) u_n^*(\mathbf{x}_1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \, . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Итак, в общем случае (даже когда H зависит от времени) функция Грина (пропагатор) $K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1)$ определяется как решение неоднородного (с δ-источником в правой части) дифференциального уравнения вида[1]:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\mathbf{x}_2 t_2) \right] K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \, , \tag{4.15}$$

причем в качестве граничного условия требуем

$$K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = 0 \qquad \text{при} \qquad t_2 < t_1 \, . \tag{4.16}$$

При $t_2 \neq t_1$ уравнение (4.15) сводится к:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\mathbf{x}_2 t_2) \right] K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = 0 \, . \tag{4.17}$$

Если проинтегрировать (4.15) по бесконечно малому интервалу времени от $t_2 = t_1 - \varepsilon$ до $t_2 = t_1 + \varepsilon$, то получим:

$$K(\mathbf{x}_2 t_1 + \varepsilon; \mathbf{x}_1 t_1) - K(\mathbf{x}_2 t_1 - \varepsilon; \mathbf{x}_1 t_1) = \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \, . \tag{4.18}$$

Вклад второго члена в левой части (4.15) пропадает при $\varepsilon \to 0$ для конечных H. Учтем, теперь, что $K(\mathbf{x}_2 t_1 - \varepsilon, \mathbf{x}_1 t_1) = 0$ ввиду (4.16) и $t_1 - \varepsilon < t_1$. Тогда:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K(\mathbf{x}_2 t_1 + \varepsilon; \mathbf{x}_1 t_1) = K(\mathbf{x}_2 t_1; \mathbf{x}_1 t_1) = \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \, , \tag{4.19}$$

что совпадает с (4.10).

[1] Отсюда, кстати, видно, что наше определение функции Грина уравнения Шредингера совпадает с ее определением в математической физике [32]

Таким образом, использование (4.2) эквивалентно обычному квантовомеханическому описанию. Пусть мы имеем дело с задачей, в которой $H = H_0 + V$, причем для $H = H_0$ задача решается точно. Тогда по потенциалу V можно попытаться построить теорию возмущений. Обозначим $K_0(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1)$ функцию Грина "свободной" частицы, движущейся в отсутствие возмущения V. Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение (4.15) и граничное условие (4.16) можно объединить в одно *интегральное уравнение*:

$$K(2,1) = K_0(2,1) - \frac{i}{\hbar} \int d^4x_3 K_0(2,3)V(3)K(3,1)\,, \tag{4.20}$$

где цифрами обозначены пространственно-временные точки, например, $(2) = (\mathbf{x}_1, t_2)$ и т. п., и введена четырехмерная переменная интегрирования $x_3 = (\mathbf{x}_3, t_3)$, причем по времени t_3 подразумевается формальное интегрирование в бесконечных пределах (наличие θ-функции в определении пропагатора автоматически обеспечивает правильные конечные пределы). Чтобы убедиться в справедливости (4.20) подействуем на обе его части оператором $\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)\right]$ и, используя уравнение (4.15) для K_0 (т.е. при $V = 0$), получим дифференциальное уравнение вида:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)\right] K(2,1) = i\hbar\delta(2,1) + V(2)K(2,1)\,,$$

что после переноса второго члена справа в левую часть просто совпадает с (4.15). Поскольку $K_0(2,1) = 0$ при $t_2 < t_1$, то и $K(2,1) = 0$ при $t_2 < t_1$.

Преимущество интегрального уравнения (4.20) состоит в том, что его удобно решать итерациями, так что возникает ряд теории возмущений для пропагатора вида:

$$\begin{aligned} K(2,1) &= K_0(2,1) - \frac{i}{\hbar}\int d^4x_3 K_0(2,3)V(3)K_0(3,1) + \\ &+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int d^4x_3 d^4x_4 K_0(2,3)V(3)K_0(3,4)V(4)K_0(4,1) + \dots \end{aligned} \tag{4.21}$$

Члены этого ряда имеют очевидную и наглядную интерпретацию: первый член описывает распространение свободной частицы из точки 1 в точку 2, второй описывает распространение свободной частицы из точки 1 в точку 3, где она испытывает рассеяние на потенциале V, после чего снова происходит распространение свободной частицы из 3 в 2. Очевидно, что точка 3 произвольна, так что по ее координатам надо проинтегрировать. Процесс продолжается бесконечно, т.е. ряд описывает также процессы двукратного, трехкратного и, в пределе, бесконечнократного рассеяния на потенциале V. Такая теория возмущений может быть эффективно использована при решении конкретных задач, и мы еще вернемся к ее использованию.

4.2 Релятивистская теория.

Перейдем к построению аналогичного формализма в релятивистской теории. Уравнение Дирака для *свободной* частицы имеет вид:

$$(i\widehat{\nabla} - m)\psi = 0\,, \qquad \widehat{\nabla} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0\partial_0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\,, \tag{4.22}$$

где, в отличие от предыдущего раздела, мы вернулись к системе единиц $\hbar = c = 1$. Четырехкомпонентная волновая функция (биспинор) Дирака $\psi(\mathbf{x}_2 t_2)$ может быть получена из "начальной" $\psi(\mathbf{x}_1 t_1)$ с помощью пропагатора (функции Грина) $K_0(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1)$, представляющего собой некоторую матрицу 4×4. Эта матрица должна удовлетворять уравнению Дирака с правой частью, аналогичному (4.15):

$$(i\widehat{\nabla}_2 - m)K_0(2,1) = i\delta(2,1)\,, \tag{4.23}$$

где мы используем, как и выше, очевидные обозначения пространственно-временных переменных цифрами. По аналогии с (4.4), (4.6) функцию ψ можно разложить в ряд по набору собственных функций u_n, соответствующих набору как положительных, так и отрицательных энергий. Вместо u_n^* удобно использовать сопряженные спиноры $\bar{u}_n = u^\dagger\gamma^0 = u^\dagger\beta$ (где фигурирует дираковская матрица $\gamma^0 = \beta$, $\beta^2 = 1$). Повторяя рассмотрение, использованное при выводе (4.7), найдем искомый пропагатор в виде:

$$\begin{gathered}
K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = \\
= \sum_{E_n>0} u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-iE_n(t_2-t_1)} + \sum_{E_n<0} u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-iE_n(t_2-t_1)}\,, \quad \text{при} \quad t_2 > t_1\,, \\
K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = 0 \qquad \text{при} \qquad t_2 < t_1\,.
\end{gathered} \tag{4.24}$$

Разложение ψ должно идти именно по *полному* набору собственных функций, включающему состояния с отрицательной энергией. Казалось бы, это плохо с физической точки зрения — например внешнее возмущение (потенциал) может вызвать переходы частицы (для определенности электрона) из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией, что означает неустойчивость системы (отсутствие основного состояния). Дирак, как известно, решал эту проблему так: давайте считать, что все состояния с отрицательной энергией в основном состоянии (вакууме) уже заняты электронами, тогда принцип Паули не дает электрону, движущемуся над таким вакуумом, перейти, в результате рассеяния, в уже занятые состояния с отрицательной энергией. Это требует, чтобы для $t_2 > t_1$ пропагатор $K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1)$ был суммой решений, соответствующих только положительным энергиям частицы. Для того, чтобы реализовать это математически, т.е. сделать

$$K(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = \sum_{E_n>0} u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad \text{при} \quad t_2 > t_1\,, \tag{4.25}$$

нужно из (4.24) вычесть сумму членов вида:

$$u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-iE_n(t_2-t_1)} \tag{4.26}$$

по состояниям с отрицательной энергией для *всех* моментов времени. Это сделать можно, поскольку такая сумма представляет собой решение однородного (без правой части) уравнения (4.23). В результате, эта сумма сократится со второй половиной решения (4.24), и мы получим следующую функцию Грина для свободной частицы:

$$K_+(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = \sum_{E_n>0} u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad \text{при} \quad t_2 > t_1\,. \tag{4.27}$$

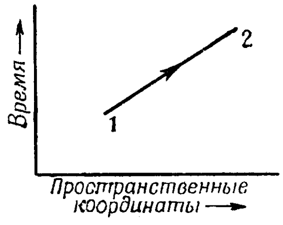


Рис. 4.1:

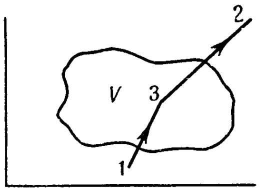


Рис. 4.2:

Но теперь для $t_2 < t_1$ эта функция уже не равна нулю, и мы имеем:

$$K_+(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = -\sum_{E_n<0} u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-iE_n(t_2-t_1)} \quad \text{при} \quad t_2 < t_1 \,. \tag{4.28}$$

Обратите внимание на возникший здесь общий знак минус! Последнее выражение удобно записать как:

$$K_+(\mathbf{x}_2 t_2; \mathbf{x}_1 t_1) = -\sum_{E_n<0} u_n(\mathbf{x}_2)\bar{u}_n(\mathbf{x}_1)e^{-i|E_n||t_2-t_1|} \quad \text{при} \quad t_2 < t_1 \,, \tag{4.29}$$

так что в показателе экспоненты стоят уже только положительные величины, а отрицательные энергии как бы исчезли.

При наличии внешнего потенциала можно опять написать интегральное уравнение типа (4.20) и его разложение в ряд (4.21), только K_0 нужно везде заменить на K_+, а потенциал V рассматривать как матрицу 4×4. Смысл членов полученного ряда лучше всего понять, нарисовав пространственно-временные *диаграммы* Фейнмана. Первый член ряда (4.21) $K_+(2,1)$ описывает распространение свободной частицы из точки 1 в точку 2 (Рис. 4.1). Второй член (Рис. 4.2) имеет вид:

$$(-i)\int d^4x_3 K_+(2,3)V(3)K_+(3,1) \tag{4.30}$$

и описывает однократное рассеяние. На рисунке замкнутой кривой обозначена область, в которой отличен от нуля потенциал V. Третий член (Рис. 4.3):

$$(-i)^2\int d^4x_3 d^4x_4 K_+(2,3)V(3)K_+(3,4)V(4)K_+(4,1) \tag{4.31}$$

описывает двукратное рассеяние. Диаграммы Рис. 4.3(а) и Рис. 4.3(б) иллюстрируют два варианта такого рассеяния.

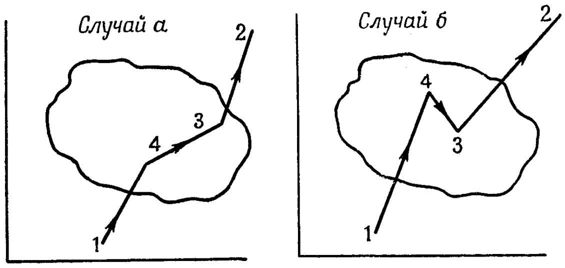


Рис. 4.3:

- *Случай (а)*: Если из точки 1 к точке 2 электрон движется так, что время растет вдоль мировой линии, то в выражении для K_+ имеются лишь суммы типа (4.27), т.е. учитываются только состояния частицы с положительной энергией. Это есть обычное двукратное рассеяние электрона с положительной энергией, как в нерелятивистской теории.

- *Случай (б)*: При движении по мировой линии, при переходе из 4 в 3 частица возвращается *назад* по времени, тогда в выражении для K_+ остаются только суммы по состояниям с отрицательной энергией типа (4.29). В интерпретации Фейнмана это соответствует распространению *позитрона* (т.е. античастицы) из точки 3 в точку 4. Если считать, что время всегда возрастает, то эту последовательность событий можно интерпретировать так: в точке 3 рождается электрон-позитронная пара, электрон распространяется в направлении к точке 2, тогда как позитрон — в направлении к точке 4, где он аннигилирует с приходящим туда исходным электроном.

Таким образом, по Фейнману, *позитрон — суть электрон, распространяющийся обратно по времени.*

Эта интерпретация может быть проиллюстрирована и из классических соображений: в уравнениях движения классической частицы в электромагнитном поле [25]:

$$m\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = e\frac{dx_\nu}{ds}F^{\mu\nu}\,. \tag{4.32}$$

Изменение направления собственного времени s эквивалентно изменению знака заряда e.

Заметим, что в процессе, показанном на Рис. 4.3, мы, конечно, должны проинтегрировать по всем временам t_3 и t_4, так что оба случая описываются одним членом ряда (4.31), который изображается одной диаграммой Рис. 4.3(а), а диаграмма Рис. 4.3(б), фактически, идентична. Процесс Рис. 4.3(б) протекает именно так, как и следует из теории Дирака: электрон с отрицательной энергией переходит в состояние 2 с положительной энергией (конечное состояние), т.е. рожается электрон-позитронная пара, а дырка заполняется электроном, прилетевшим из 1, т.е. происходит аннигиляция. В результате электрон рассеивается, переходя из состояния 1 в состояние 2, причем электрон с положительной энергией заменяется одним из электронов отрицательного "фона". Происходит, таким образом, *обмен* тождественными частицами, а соответствующий матричный элемент имеет отрицательный знак, как и должно быть для фермионов. Но мы нигде не использовали явно принцип Паули!

Оказывается, что возникновение отрицательного знака в (4.28), произошедшее из самого метода построения пропагатора K_+, обеспечивает нам правильную статистику! Обобщение этих рассуждений для процессов произвольного порядка теории возмущений дает еще одно доказательство теоремы о связи спина и статистики [31].

4.3 Импульсное представление.

Расчеты реальных задач значительно удобнее проводить в импульсном представлении. Пропагатор K_+ находится как решение уравнения:

$$(i\widehat{\nabla} - m)K_+(2,1) = i\delta(2,1)\,. \tag{4.33}$$

Введем фурье-образ K_+, который обозначим $S_+(p)$, тогда:

$$K_+(2,1) = \int d^4p e^{-ip(x_2-x_1)} S_+(p)\,, \tag{4.34}$$

где $d^4p = dp_0 d^3\mathbf{p}$. Оператор $(i\widehat{\nabla} - m)$ можно внести под интеграл в виде $(\hat{p} - m)$, а для δ-функции написать фурье-представление:

$$\delta(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_2-x_1)}\,. \tag{4.35}$$

Тогда легко получаем уравнение для $S_+(p)$:

$$S_+(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{\hat{p} - m}\,. \tag{4.36}$$

Это выражение удобно переписать так:

$$S_+(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+m}{\hat{p}+m}\frac{1}{\hat{p}-m} = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\,, \tag{4.37}$$

где мы учли, что $\hat{p}^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = p^2$, так что знаменатель в (4.37) уже не содержит матриц. Соответственно:

$$K_+(2,1) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p e^{-ip(x_2-x_1)}\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\,. \tag{4.38}$$

Введем, по определению, интеграл:

$$I_+(2,1) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{e^{-ip(x_2-x_1)}}{p^2-m^2}\,. \tag{4.39}$$

Тогда (4.38) может быть записано как:

$$K_+(2,1) = i(i\widehat{\nabla}_2 + m)I_+(2,1)\,. \tag{4.40}$$

Подставляя (4.40) в (4.33), находим, что интеграл I_+ удовлетворяет уравнению:

$$(\Box + m^2)I_+(2,1) = -\delta(2,1) \tag{4.41}$$

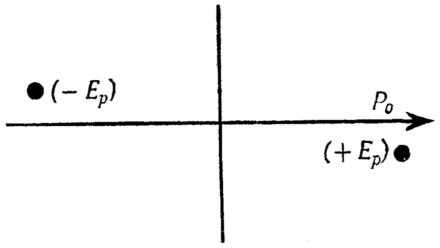


Рис. 4.4:

т.е. является, фактически, функцией Грина уравнения Клейна – Гордона. Записав отдельно пространственные и временные координаты, перепишем I_+ как:

$$I_+(x_2 - x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{-ip_0(t_2-t_1)} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2}\,. \tag{4.42}$$

Но здесь возникает проблема — подинтегральное выражение имеет полюса при $p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0$, т.е. при $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_{\mathbf{p}}$. Поэтому интеграл нужно доопределить правилом "обхода" этих этих полюсов. Правило Фейнмана состоит в замене:

$$m \to m - i\delta\,, \qquad \delta > 0\,, \qquad \delta \to +0\,. \tag{4.43}$$

Тогда наш интеграл можно записать как:

$$I_+(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(t_2-t_1)}}{(p_0 - E_{\mathbf{p}} + i\varepsilon)(p_0 + E_{\mathbf{p}} - i\varepsilon)}\,, \tag{4.44}$$

поскольку при замене (4.43), величина $E_{\mathbf{p}}$ приобретает бесконечно малую мнимую добавку, которую мы обозначили $i\varepsilon$. Рассмотрим теперь подинтегральное выражение в комплексной плоскости переменной p_0. Видим, что полюс $p_0 = -E_{\mathbf{p}}$ теперь лежит немного выше действительной оси p_0 (пути интегрирования в (4.44)), а полюс $p_0 = +E_{\mathbf{p}}$ лежит чуть ниже ее, как это показано на Рис. 4.4. Проинтегрируем (4.44), считая, что $t_2 - t_1 > 0$. Тогда интеграл можно легко вычислить по теореме Коши, замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости p_0. При этом интеграл по удаленной полуокружности обращается в нуль из-за быстрого затухания экспоненциального множителя в подинтегральном выражении, так что, фактически остается только нужный нам интеграл вдоль вещественной оси. Но интеграл по замкнутому контуру просто определяется вычетом в полюсе $+E_{\mathbf{p}}$, который оказался внутри контура (и обходится по часовой стрелке), так что получаем ответ:

$$-\frac{2\pi i}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-iE_{\mathbf{p}}(t_2-t_1)}\,. \tag{4.45}$$

Если же $t_2 - t_1 < 0$, то для обнуления вклада удаленной полуокружности, нужно контур интегрирования замкнуть сверху. Тогда внутрь контура попадет только полюс при $-E_{\mathbf{p}}$, который будет обходиться против часовой стрелки, и искомый интеграл равен:

$$-\frac{2\pi i}{2E_{\mathbf{p}}} e^{+iE_{\mathbf{p}}(t_2-t_1)}\,. \tag{4.46}$$

Заметим, что величина $E_{\mathbf{p}}$, по определению, считается положительной, так что показатели экспоненты как в (4.45), так и в (4.46), положительны (с точностью до $-i$). Таким образом, интеграл I_+, а значит и функция K_+, ведут себя аналогично (4.27) и (4.28) — при $t_2-t_1>0$ играют роль только положительные энергии, а при $t_2-t_1<0$ — только отрицательные! Фактически, условие (4.43) обеспечивает эквивалентность прежнему определению пропагатора K_+.

Можно было бы при доопределении пропагатора поступить иначе и вместо (4.43) добавить бесконечно малую мнимую добавку к p_0:

$$p_0 \to p_0 + i\delta\,, \qquad \delta \to +0\,. \tag{4.47}$$

При этом в (4.42) возникают два полюса, лежащие в нижней полуплоскости p_0. Тогда при $t_2-t_1>0$, когда контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости, играют роль как положительные, так и отрицательные энергии. В тоже время при t_2-t_1, замыкая контур сверху, мы видим, что внутри него вообще нет полюсов, так что соответствующий интеграл просто равен нулю. Такое доопределение пропагатора K дает, фактически, результат (4.24) ("запаздывающую" функцию Грина), т.е. дираковскую теорию одних только электронов. Фейнмановское правило имеет то преимущество, что мнимость вводится в релятивистский инвариант m, все выражения остаются ковариантными, тогда как в теории "одних электронов" мнимость в величине p_0 делает ее отличной от остальных компонент импульса.

Мы еще не раз вернемся к обсуждению этих, достаточно тонких, вопросов определения аналитических свойств функций Грина, а сейчас отметим общее свойство — полюса пропагаторов (функций Грина) в импульсном представлении, фактически, определяют энергетический спектр соответствующих частиц. В рассмотренном случае $E_{\mathbf{p}}=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ представляет собой релятивистский спектр свободного электрона (позитрона). Это свойство функций Грина получило глубокое развитие в современной теории конденсированного состояния. На нем, в частности, основана вся концепция квазичастиц — элементарных возбуждений многочастичных систем [13].

4.4 Электрон и внешнее электромагнитное поле.

Рассмотрим взаимодействие электрона с внешним электромагнитным полем. Это взаимодействие описывается выражением $ej^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, так что "потенциал" взаимодействия удобно обозначить как: $e\gamma^\mu A_\mu \equiv e\widehat{A}$ (e — заряд электрона). Уравнение Дирака, учитывающее взаимодействие с электромагнитным полем, имеет, очевидно, вид:

$$(i\widehat{\nabla} - e\widehat{A} - m)\psi = 0\,, \tag{4.48}$$

где произведен переход к соответствующей ковариантной производной электродинамики. Соответственно, пропагатор частицы во внешнем поле K_+^A определяется уравнением:

$$(i\widehat{\nabla}_2 - e\widehat{A}_2 - m)K_+^A(2,1) = i\delta(2,1)\,. \tag{4.49}$$

Уравнение Дирака (4.48) можно также переписать в виде уравнения Шредингера с соответствующим гамильтонианом:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = \left[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) + e\varphi + m\beta\right]\psi\,, \tag{4.50}$$

где учтено, что $A_\mu=(\varphi,-\mathbf{A})$. Пропагатор тогда определяется как решение уравнения:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_2} - e\varphi(2) - \boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\nabla_2 - e\mathbf{A}_2) - m\beta\right]K_+^A(2,1) = i\beta\delta(2,1)\,, \tag{4.51}$$

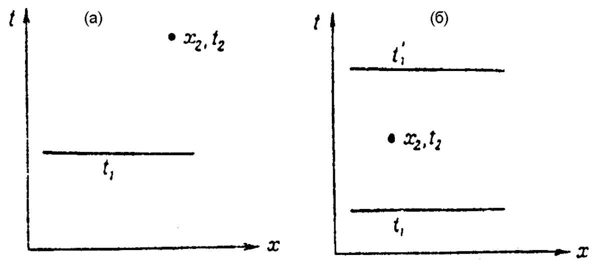


Рис. 4.5:

где появление матрицы $\beta = \gamma^0$ справа связано с использованием сопряженных (по Дираку) спиноров в определении (4.24) и обеспечивает, таким образом, релятивистскую инвариантность. Умножая (4.51) на матрицу β, приводим его к виду , совпадающему с (4.49).

Решение уравнения (4.49) удовлетворяет интегральному уравнению, аналогичному (4.20):

$$K_+^A(2,1) = K_+(2,1) - ie \int d^4x_3 K_+(2,3)\widehat{A}(3)K_+^A(3,1)\,, \tag{4.52}$$

разложение которого в ряд теории возмущений (итерации) дает аналог (4.21):

$$\begin{aligned} K_+^A(2,1) &= K_+(2,1) - ie \int d^4x_3 K_+(2,3)\widehat{A}(3)K_+(3,1) + \\ &+ (-ie)^2 \int d^4x_3 d^4x_4 K_+(2,3)\widehat{A}(3)K_+(3,4)\widehat{A}(4)K_+(4,1) + \dots \end{aligned} \tag{4.53}$$

В релятивистском случае, связь между волновыми функциями $\psi(2)$ в точке x_2 и $\psi(1)$ в точке x_1, по аналогии с (4.2), казалось бы, можно записать как:

$$\psi(2) = \int d^3\mathbf{x}_1 K_+^A(2,1)\beta\psi(1)\,, \tag{4.54}$$

где $d^3\mathbf{x}_1$ — элемент объема трехмерного пространства при фиксированном времени t_1, что иллюстрируется Рис. 4.5(а). Волны, испускаемые точками гиперплоскости $t_1 = \mathrm{const}$, формируют волновую функцию в точке $\mathbf{x}_2$ в более поздний момент времени t_2. Но это не совсем так! Дело в том, что мы определили функцию Грина (пропагатор) в релятивистской теории так, что она описывает распространение частиц с положительной энергией вперед по времени, а распространение частиц с отрицательной энергией *назад* по времени. Поэтому, фактически, аналог выражения (4.2) надо писать так:

$$\psi(\mathbf{x}_2t_2) = \int d^3\mathbf{x}_1 K_+^A(\mathbf{x}_2t_2, \mathbf{x}_1, t_1)\beta\psi(\mathbf{x}_1t_1) - \int d^3\mathbf{x}_1 K_+^A(\mathbf{x}_2t_2, \mathbf{x}_1t_1')\beta\psi(\mathbf{x}_1t_1')\,, \tag{4.55}$$

где $t_1 < t_2 < t_1'$! Здесь, в соответствии с Рис. 4.5(б), первое слагаемое представляет вклад состояний с положительной энергией и зависит от предшествующих моментов времени, а второе слагаемое дает вклад состояний с отрицательной энергией и зависит от последующих моментов времени. Амплитуда вероятности того, что частица

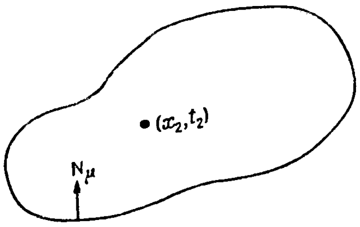


Рис. 4.6:

приходит в точку $\mathbf{x}_2, t_2$ не определена, если известна только амплитуда вероятности обнаружения электрона (или позитрона) в более ранний момент времени. Если позитрон и не присутствовал в более ранний момент времени, внешнее поле может породить электрон-позитронную пару в процессе эволюции системы, что приводит к появлению амплитуды вероятности обнаружения позитрона в будущем. В теории Фейнмана вклады в пропагатор, соответствующие частицам с положительной энергией, рассматриваются как амплитуды вероятности того, что электрон имеет обычный отрицательный заряд, тогда как вклады, соответствующие частицам с отрицательной энергией, рассматриваются как амплитуды вероятности обнаружения позитрона с энергией $-E > 0$. Таким образом, чтобы определить волновую функцию дираковского поля в некоторый момент времени, необходимо знать ее электронную компоненту в предыдущий момент времени, а ее позитронную компоненту в *последующий* момент времени!

Выражение (4.55) можно обобщить, замечая, что для определения функции $\psi(\mathbf{x}_2 t_2)$ необходимо знать волновую функцию $\psi(\mathbf{x}_1 t_1)$ на некоторой четырехмерной гиперповерхности, окружающей точку $\mathbf{x}_2, t_2$, как это показано на Рис. 4.6:

$$\psi(\mathbf{x}_2 t_2) = \int d\sigma(x_1) K_+^A(2,1) \widehat{N}(1) \psi(1)\,, \tag{4.56}$$

где $\widehat{N} = N_\mu \gamma^\mu$, где N_μ — вектор нормали к гиперповерхности, окружающей точку $\mathbf{x}_2, t_2$. Интегрирование в (4.56) идет по этой гиперповерхности. Тогда можно сказать, что запись в виде (4.54) именно это и подразумевает. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы и будем пользоваться этой простейшей формой записи. Нужно только помнить, что пространственное интегрирование в (4.54) подразумевает интегрирование по правильно выбранной гиперповерхности в четырехмерном пространстве-времени.

Формальный вывод (4.56) можно провести следующим образом. Воспользуемся четырехмерной теоремой Гаусса:

$$\int_\Omega d^4x' \frac{\partial F_\mu(x')}{\partial x'_\mu} = \int_S d\sigma(x') F_\mu(x') n^\mu(x')\,, \tag{4.57}$$

где $F_\mu(x')$ — некоторая 4-векторная функция, определенная в пространственно-временном объеме Ω, ограниченном поверхностью S, $n_\mu(x')$ — внешняя нормаль к элементу поверхности $d\sigma(x')$ в точке x'. Пусть $\psi(x)$ — решение уравнения Дирака $i\gamma^\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0$. Выберем $F(x') = iK_+(x-$

$x')\gamma^\mu\psi(x')$, где $x, x' \in \Omega$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\mu(x')}{\partial x'_\mu} &= i\frac{\partial}{\partial x'_\mu}[K_+(x-x')\gamma_\mu\psi(x')] = \\ &= \left[i\frac{\partial K_+(x-x')}{\partial x'_\mu}\gamma_\mu + mK_+(x-x')\right]\psi(x') + K_+(x-x')\left[i\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x')}{\partial x'_\mu} - m\psi(x')\right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Второе слагаемое здесь равно нулю в соответствии с уравнением Дирака. Подставим полученное выражение в левую часть (4.57) и учтем еще, что

$$i\frac{\partial K_+(x-x')}{\partial x'_\mu}\gamma_\mu + mK_+(x-x') = -i\delta(x-x')\,. \quad (4.59)$$

Тогда имеем:

$$\psi(x) = -\int_S d\sigma(x')K_+(x-x')\gamma_\mu\psi(x')n^\mu(x')\,, \quad (4.60)$$

где n^μ — внешняя нормаль. Ну а если ввести внутреннюю нормаль N^μ, то получим:

$$\psi(x) = \int_S d\sigma(x')K_+(x-x')\gamma_\mu\psi(x')N^\mu(x')\,, \quad (4.61)$$

что и требовалось доказать. Выражение (4.55) следует отсюда, если выбрать поверхность S в виде двух пространственноподобных гиперплоскостей t_1 и t_2, а "боковыми" вкладами пренебречь, с учетом того, что соответствующие части поверхности S растягиваются на бесконечность. Заметим еще, что при этом $N^0\gamma_0 = \beta$.

Амплитуда вероятности перехода *электрона* из некоторого состояния с волновой функцией $\psi_0(\mathbf{x}_1 t_1)$ частицы с положительной энергией в момент t_1 в состояние с волновой функцией $\varphi_0(\mathbf{x}_2 t_2)$, также соответствующей состояниям с положительной энергией, в момент $t_2 > t_1$ дается выражением:

$$M = \int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \varphi_0^*(\mathbf{x}_2 t_2)K_+(\mathbf{x}_2 t_2;\mathbf{x}_1 t_1)\beta\psi_0(\mathbf{x}_1 t_1) = \int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \bar{\varphi}_0(2)\beta K_+(2,1)\beta\psi_0(1)\,. \quad (4.62)$$

Если между моментами времени t_1 и t_2 действует потенциал $e\widehat{A}$, то функция K_+ заменяется на K_+^A. Поэтому амплитуда перехода в первом приближении, в соответствии с (4.53), равна:

$$M_1 = -ie\int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 d^4x_3 \bar{\varphi}_0(2)\beta K_+(2,3)\widehat{A}(3)K_+(3,1)\beta\psi_0(1)\,. \quad (4.63)$$

С помощью (4.54) можно снять интегралы по $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, введя:

$$\psi_0(3) = \int d^3\mathbf{x}_1 K_+(3,1)\beta\psi_0(1)\,, \quad (4.64a)$$

$$\bar{\varphi}_0(3) = \int d^3\mathbf{x}_2 \bar{\varphi}_0(2)\beta K_+(2,3)\,, \quad (4.64b)$$

так что (4.63) превращается в:

$$M_1 = -ie\int d^4x\, \bar{\varphi}_0(x)\widehat{A}(x)\psi_0(x)\,. \quad (4.65)$$

Пусть начальная волновая функция соответствует электрону с 4-импульсом p_1, а конечная – электрону с 4-импульсом p_2:

$$\psi_0(x) = u(p_1)e^{-ip_1x}\,, \qquad \bar{\varphi}_0(x) = \bar{u}(p_2)e^{ip_2x}\,, \quad (4.66)$$

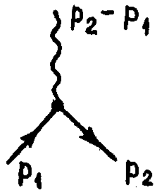


Рис. 4.7:

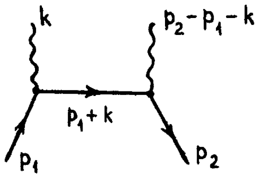


Рис. 4.8:

где u — спиноры, соответствующие свободным частицам с положительной энергией. Вводя фурье-образ $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) = \int d^4 k e^{-ikx} a_\mu(k) \tag{4.67}$$

и подставляя (4.66) и (4.67) в (4.65), выполняем интегрирование по x_3 и получаем:

$$M_1 = -ie(2\pi)^4 \int d^4 k\, \delta(p_2 - k - p_1)\bar{u}(p_2)\hat{a}(k)u(p_1) = -ie(2\pi)^4 \bar{u}(p_2)\hat{a}(p_2 - p_1)u(p_1)\,, \tag{4.68}$$

что можно изобразить диаграммой, показанной на Рис. 4.7. Аналогичным образом, матричный элемент перехода из состояния с p_1 в состояние с p_2, во втором порядке теории возмущений, можно записать как:

$$M_2 = (-ie)^2 \int d^4 x \int d^4 y\, \bar{\varphi}_0(x)\widehat{A}(x)K_+(x,y)\widehat{A}(y)\psi_0(y)\,. \tag{4.69}$$

Отсюда, после подстановки фурье-образов функций $\widehat{A}$ и K_+ из (4.67) и (4.38), а также (4.66), получаем:

$$M_2 = -ie^2(2\pi)^4 \int d^4 p \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \delta(p_2 - k_1 - p)\delta(p_1 + k_2 - p)\bar{u}(p_2)\hat{a}(k_1)\frac{1}{\hat{p} - m}\hat{a}(k_2)u(p_1) \tag{4.70}$$

или

$$M_2 = -ie^2(2\pi)^4 \int d^4 k\, \bar{u}(p_2)\hat{a}(p_2 - p_1 - k)\frac{1}{\hat{p}_1 + \hat{k} - m}\hat{a}(k)u(p_1)\,, \tag{4.71}$$

что изображается графиком Рис. 4.8. Ясно, что аналогичным образом выписываются и члены более высокого порядка. В результате возникают следующие *правила диаграммной техники* для рассеяния электронов на потенциале внешнего электромагнитного поля:

1. Матричный элемент перехода имеет вид $M = \bar{u}_2 N u_1$.

2. Каждому *виртуальному* состоянию электрона (внутренней электронной линии) с импульсом p соответствует в N фактор $\frac{i}{\hat{p}-m}$.

3. Каждому фотону (волнистой линии) с импульсом q соответствует в N фактор $-ie\hat{a}(q)$.

4. По всем импульсам q_i, не фиксированным законами сохранения, выполняющимися в *вершинах* взаимодействия, проводится интегрирование $\frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$.

При вычислении интегралов контур интегрирования по временной компоненте импульса следует выбирать исходя их фейнмановского правила обхода полюсов: масса m в подинтегральном выражении заменяется на $m \to m - i\delta \quad (\delta \to +0)$.

В качестве простого примера конкретных вычислений рассмотрим задачу рассеяния (электрона) на кулоновском поле атомного ядра (резерфордовское рассеяние) с зарядом Ze. В этом случае, потенциал ядра равен:

$$A_0 = V(r) = \frac{Ze}{r}\,. \tag{4.72}$$

Соответственно:

$$\hat{a}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{iqx}\gamma^\mu A_\mu = \frac{1}{(2\pi)^3}\delta(q_0)\gamma^0 \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{qr}} V(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{2\pi^2\mathbf{q}^2}\delta(q_0)\gamma^0\,. \tag{4.73}$$

Тогда амплитуда перехода первого порядка (4.68) имеет вид:

$$M_1 = -2\pi i\delta(E_1 - E_2)\left[\bar{u}(\mathbf{p}_2)\frac{4\pi Ze^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2}\gamma^0 u(\mathbf{p}_1)\right]\,, \tag{4.74}$$

где E_1 и E_2 — начальная и конечная энергия электрона. Из (4.74) видно, что $E_1 = E_2 = E$, т.е. рассеяние упругое (статический потенциал!). Вероятность рассеяния определяется как:

$$|M_1|^2 = (2\pi)^2\left|\bar{u}(\mathbf{p}_2)\frac{4\pi Ze^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2}\gamma^0 u(\mathbf{p}_1)\right|^2 \delta(E_1 - E_2)\delta(0)\,. \tag{4.75}$$

Здесь мы записали $[\delta(E_1 - E_2)]^2 = \delta(E_1 - E_2)\delta(0)$, что создает понятные проблемы. Величину $\delta(0)$ надо истолковать, пользуясь известным рецептом Ферми, как:

$$\delta(0) = \lim_{T\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{ixt} = \lim_{T\to\infty}\frac{T}{2\pi}\,, \tag{4.76}$$

где T — время взаимодействия. Тогда можно ввести вероятность перехода в единицу времени $w_{1\to 2}$:

$$w_{1\to 2} = 2\pi\left|\bar{u}(\mathbf{p}_2)\frac{4\pi Ze^2}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2}\gamma^0 u(\mathbf{p}_1)\right|^2 \delta(E_1 - E_2)\,. \tag{4.77}$$

Дальнейшие вычисления (в предположении неполяризованности пучка исходных электронов) требуют проведения усреднения по двум начальным поляризациям спина электрона и суммирования по конечным поляризациям. Для этого существует разработанный аппарат, использующий явный вид спиноров $u(\mathbf{p})$ и свойства матриц Дирака. Мы опустим соответствующие технические детали, которые можно найти, например, в [5] или в [1]. В конечном итоге, из (4.77) можно получить релятивистский вариант формулы Резерфорда (формулу Мотта) для дифференциального сечения рассеяния в элемент телесного угла $d\Omega$ [5]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2e^4}{4\mathbf{p}^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\,, \tag{4.78}$$

где мы учли $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| = 2|\mathbf{p}|\sin\theta/2$, где θ – угол рассеяния, и ввели скорость $v = |\mathbf{p}|/E$.

4.5 Задача двух частиц.

Если выбрать лоренцевскую калибровку, то уравнение Максвелла для потенциалов, как мы видели, принимает вид:

$$\Box A_\mu = 4\pi j_\mu \,. \tag{4.79}$$

Это уравнение легко решить с помощью функции Грина D_+, которую мы определим уравнением:

$$\Box_2 D_+(2,1) = 4\pi\delta(2,1)\,. \tag{4.80}$$

Проводя очевидные преобразования Фурье имеем:

$$D_+(2,1) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^4k\, e^{-ik(x_2-x_1)}\frac{1}{k^2+i\delta}\,, \qquad \delta\to +0\,. \tag{4.81}$$

По существу, с точностью до константы и знака, это выражение совпадает с интегралом I_+ из (4.39), если в нем положить доопределенную, согласно (4.43) массу $m=0$. Теперь мы можем записать решение (4.79) в практически очевидном виде:

$$A_\mu(2) = \int d^4x_1 D(2,1) j_\mu(1)\,. \tag{4.82}$$

Здесь отсутствует возможный неоднородный вклад, что соответствует граничному условию отсутствия свободного электромагнитного излучения при $t=\pm\infty$ (т.е. отсутствуют решения $A_\mu^{(0)}$ уравнения $\Box A_\mu = 0$, которые всегда можно добавить в правую часть (4.82)).

Рассмотрим теперь случай двух заряженных (взаимодействующих!) фермионов. Каждая из частиц является источником электромагнитного поля, которое оказывает влияние на движение другой частицы. В результате этого взаимодействия частицы рассеиваются друг на друге. Запишем выражение для тока, соответствующего переходу электрона "a" из состояния $u_a(p_1)e^{-ip_1x}$ в состояние $u_a(p_2)e^{-ip_2x}$:

$$j^\mu(x) = e\bar{u}_a(p_2)\gamma_a^\mu u_a(p_1)e^{i(p_2-p_1)x}\,. \tag{4.83}$$

В соответствии с (4.82) этот ток создает в пространственно-временной точке x поле с потенциалом:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= e\int d^4x' D_+(x-x')e^{i(p_2-p_1)x'}\bar{u}_a(p_2)\gamma_a^\mu u_a(p_1) = \\ &= -4\pi e\int d^4k\frac{1}{k^2+i\delta}e^{-ikx}\delta(k+p_2-p_1)\bar{u}_a(p_2)\gamma_a^\mu u_a(p_1)\,. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Этот потенциал действует на движение второго электрона "b". Согласно (4.65), матричный элемент первого порядка, соответствующий переходу электрона "b" из состояния с 4-импульсом q_1 в состояние с 4-импульсом q_2, вызванному потенциалом (4.84), имеет вид:

$$M = -ie\int d^4x \bar{u}_b(q_2)e^{iq_2x}\gamma_b^\mu A_\mu(x)u_b(q_1)e^{-iq_1x} =$$

$$= 4\pi i e^2(2\pi)^4\frac{\bar{u}_b(q_2)\gamma_b^\mu u_b(q_1)\bar{u}_a(p_2)\gamma_{a\mu}u_a(p_1)}{|p_1-p_2|^2}\delta(p_1+q_1-p_2-q_2)\,. \tag{4.85}$$

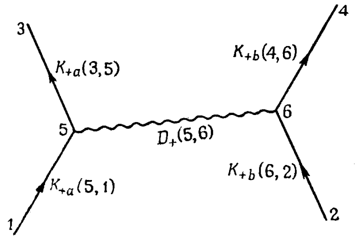


Рис. 4.9:

Рассмотрим теперь пропагатор системы их двух частиц (двухчастичную функцию Грина). В нерелятивистском приближении система из двух частиц описывается шредингеровской волновой функцией $\psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t)$, и мы можем, также как и выше в случае одной частицы, определить пропагатор $K(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t; \mathbf{x'}_a, \mathbf{x'}_b, t')$, представляющий собой амплитуду вероятности того, что частица "a" из точки $\mathbf{x'}_a$ в момент времени t' переходит в точку $\mathbf{x}_a$ в момент t, тогда как частица "b" из точки $\mathbf{x'}_b$ в момент t' переходит в точку $\mathbf{x}_b$ в момент t. Если частицы не взаимодействуют, то, очевидно, имеем:

$$K(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t; \mathbf{x'}_a, \mathbf{x'}_b, t') = K_{0a}(\mathbf{x}_a t; \mathbf{x'}_a t') K_{0b}(\mathbf{x}_b t; \mathbf{x'}_b t') \,, \tag{4.86}$$

где K_{0a}, K_{0b} — пропагаторы свободных частиц "a" и "b". В случае отсутствия взаимодействия можно определить и более общую двухчастичную функцию Грина, у которой времена частиц в начальном и конечном состояниях не совпадают:

$$K_0(3,4;1,2) = K_{0a}(3,1) K_{0b}(4,2) \,. \tag{4.87}$$

Выражение (4.85) можно теперь рассмотреть как матричный элемент, возникший из поправки первого порядка $K^{(1)}$ к пропагатору двух свободных частиц, записанной в виде:

$$K_+(3,4;1,2) = -ie^2 \int d^4x_5 \int d^4x_6 K_{+a}(3,5)\gamma_a^\mu K_{+a}(5,1) D_+(5,6) K_{+b}(4,6)\gamma_{b\mu} K_{+b}(6,2) \tag{4.88}$$

и представленной диаграммой Фейнмана на Рис. 4.9. Множитель D_+ в этом выражении рассматривается как пропагатор *виртуального* фотона. Фактически, приведенный вывод не вполне удовлетворителен, поскольку мы пока вовсе не квантовали само электромагнитное поле, но, как мы увидим ниже, этот же результат воспроизводится и в последовательной теории.

В импульсном представлении все это можно переписать в более привычном виде. При выполнении условия Лоренца $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} = 0$, дифференцирование (4.84) по x_μ дает:

$$\bar{u}_a(p_2)\gamma_a^\mu k_\mu u_a(p_1) = \bar{u}_a(p_2)(\gamma_a^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}) u_a(p_1) = 0 \,. \tag{4.89}$$

Это соотношение действительно выполняется, поскольку из-за наличия в (4.84) δ-функции имеем $\hat{k} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$, а $u(p_2)$ и $u(p_1)$ являются спинорами свободных частиц, так что

$$\bar{u}_1(p_2)(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)u(p_1) = \bar{u}(p_2)[(\hat{p}_1 - m) - (\hat{p}_2 - m)]u(p_1) = 0 \,. \tag{4.90}$$

Поэтому всюду, где в (4.85) встречается матрица γ_a^0), можно воспользоваться соотношением:

$$\gamma_a^0 \cdot k_0 - \boldsymbol{\gamma}_a \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{4.91}$$

и выразить γ_a^0 как:

$$\gamma_a^0 = \gamma_{al}\left(\frac{|\mathbf{k}|}{k_0}\right), \tag{4.92}$$

где γ_l — матрица γ "в направлении распространения" $\mathbf{k}$ (подчеркнем, что для виртуального фотона $k_0 \neq |\mathbf{k}|$). Таким образом, обозначая "поперечные" компоненты γ как γ_t^i можно переписать $\frac{\gamma_a^\mu \gamma_b^\mu}{k^2}$ в (4.85) как:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_a^\mu \gamma_b^\mu}{k^2} = \frac{\gamma_a^0\gamma_b^0 - \gamma_a^l\gamma_b^l - \sum_{i=1}^2 \gamma_{at}^i \gamma_{bt}^i}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} &= \frac{\gamma_a^0\gamma_b^0\left(1 - \frac{k_0^2}{|\mathbf{k}|^2}\right) - \sum_{i=1}^2 \gamma_{at}^i\gamma_{bt}^i}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} = \\ &= -\frac{\gamma_a^0\gamma_b^0}{\mathbf{k}^2} - \frac{\sum_{i=1}^2 \gamma_{at}^i\gamma_{bt}^i}{k_0^2 - \mathbf{k}^2}. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Первое слагаемое в этом выражении описывает в (4.85) и (4.88) мгновенное кулоновское взаимодействие двух электронов, а второе учитывает поперечные кванты, обуславливающие запаздывающее магнитное взаимодействие частиц. Возникновение "мгновенного" взаимодействия связано с нековариантным характером разбиения на два слагаемых исходно ковариантного выражения в (4.93): фактически первый член является главным в пределе малых скоростей, а второй член дает поправки к мгновенному кулоновскому взаимодействию.

До сих пор мы не учитывали, что электроны тождественны и подчиняются принципу Паули. Учет этого обстоятельства приводит к требованию антисимметричности волновой функции системы частиц, что обеспечивается введением двухчастичного пропагатора $K(3,4;1,2) - K(4,3;1,2)$, описывающего переход двух частиц из точек 1 и 2 в точки 3 и 4, с учетом *обмена*. Таким образом вместо (4.85) получаем матричный элемент рассеяния двух тождественных частиц, в первом порядке по взаимодействию, в виде:

$$\begin{aligned} M = 4\pi i e^2 (2\pi)^4 \left\{ \frac{\bar{u}_b(q_2)\gamma_b^\mu u_b(q_1)\bar{u}_a(p_2)\gamma_{a\mu}u_a(p_1)}{|p_1 - p_2|^2} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{u}_b(p_2)\gamma_b^\mu u_b(q_1)\bar{u}_a(q_2)\gamma_{a\mu}u_a(p_1)}{|q_1 - p_2|^2} \right\} \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2), \end{aligned} \tag{4.94}$$

что определяет, в частности, сечение так называемого меллеровского рассеяния.

В высших порядках по взаимодействию появляется бесконечное число поправок к этому матричному элементу, соответствующих обмену все большим числом виртуальных фотонов между частицами и собственному взаимодействию частиц. Все такие процессы изображаются диаграммами Фейнмана, которым сопоставляются соответствующие математические выражения. Примеры диаграмм порядка e^4 показаны на Рис. 4.10. Правила диаграммной, дополняющие сформулированные выше для задачи рассеяния на внешнем поле, техники формулируются следующим образом:

1. Амплитуда вероятности излучения виртуального фотона равна $e\gamma^\mu$, что сопоставляется точке (вершине) на диаграмме.

2. Амплитуда вероятности перехода (пропагатор, волнистая линия) фотона из точки 1 в точку 2 равна $D_+(2,1)$ или, в импульсном представлении $-\frac{4\pi}{k^2+i\delta}$.

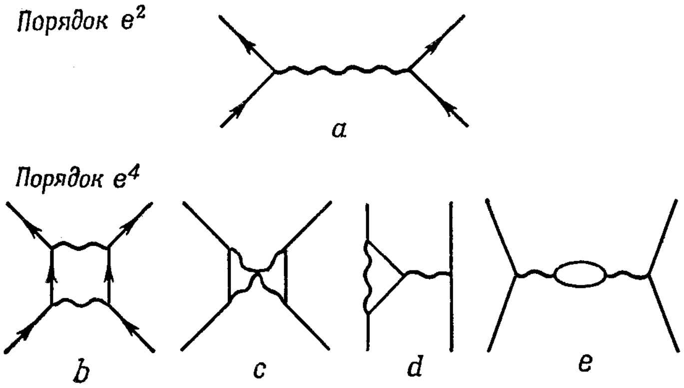


Рис. 4.10:

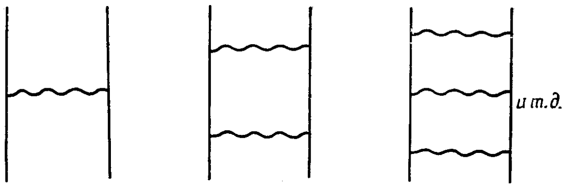


Рис. 4.11:

Ограничимся в задаче двух частиц "лестничными" диаграммами (без пересечений линий взаимодействия), показанными на Рис. 4.11. Введем функцию $\varphi(x_1, x_2)$ – амплитуду вероятности нахождения двух частиц в точках x_1 и x_2 после такого обмена n виртуальными фотонами. Тогда амплитуда вероятности после обмена $(n+1)$-м фотоном имеет вид:

$$\varphi_{n+1}(1,2) = -ie^2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 K_{+a}(1,3)\gamma_a^\mu K_{+b}(2,4)\gamma_{b\mu} D_+(3,4)\varphi_n(3,4)\,. \tag{4.95}$$

Следовательно, полная амплитуда вероятности в лестничном приближении может быть выражена в виде:

$$\psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x_1, x_2) \tag{4.96}$$

и, соответственно:

$$\psi(2,1) = \varphi_0(2,1) - ie^2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 K_{+a}(1,3)\gamma_a^\mu K_{+b}(2,4)\gamma_{b\mu} D_+(3,4)\psi(3,4)\,, \tag{4.97}$$

где $\varphi_0(2,1)$ — волновая функция, удовлетворяющая уравнению Дирака для свободной частицы по обеим переменным. Если теперь к обеим частям уравнения (4.97) применить дифференциальные операторы Дирака для частиц "a" и "b", то получим дифференциальное уравнение для $\psi(2,1)$:

$$(i\hat{\nabla}_a - m)(i\hat{\nabla}_b - m)\psi(2,1) = ie^2 \gamma_a^\mu \gamma_{b\mu} D_+(2,1)\psi(2,1)\,. \tag{4.98}$$

Это уравнение называется уравнением Бете – Солпитера (в лестничном приближении) и представляет собой релятивистское волновое уравнение для системы из двух частиц. Оно позволяет, в принципе, полностью рассмотреть и задачу образования связанных состояний в такой системе, например образование и энергетический спектр позитрония.

Глава 5

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

5.1 Амплитуда рассеяния.

Подавляющее большинство экспериментов в физике элементарных частиц сводятся к изучению их рассеяния, реакций и распадов. Взаимодействия частиц происходят, как правило, на очень малых расстояниях и временах (например в мишенях или в области пересечения встречных пучков ускорителей), после чего регистрируются уже практически невзаимодействующие продукты реакции, попадающие в систему детекторов, находящихся далеко от области взаимодействия, приведшего к образованию этих продуктов. Поэтому, весьма общая постановка задачи сводится к задаче о столкновениях. Зная начальное состояние системы свободных частиц, нужно найти вероятность различных конечных состояний, сводящихся к другим совокупностям свободных частиц, возникающих в результате взаимодействия.

Пусть $|i\rangle$ — некоторое начальное состояние. Результат взаимодействия можно представить как суперпозицию:

$$\sum_f |f\rangle\langle f|S|i\rangle \,, \tag{5.1}$$

где суммирование идет по всем возможным конечным состояниям $|f\rangle$. Коэффициенты $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ образуют так называемую *матрицу рассеяния* или S-*матрицу*[1]. Величина $|S_{fi}|^2$ дает вероятность перехода $i \to f$. В отсутствие взаимодействия S-матрица, очевидно, единична. Удобно эту единицу выделить и записать:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta(P_f - P_i)T_{fi} \,, \tag{5.2}$$

где δ-функция выражает закон сохранения 4-импульса. Для недиагональных элементов имеем просто:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4\delta(P_i - P_f)T_{fi} \,. \tag{5.3}$$

Величина T_{fi} называется *амплитудой рассеяния.*

При возведении (5.2) в квадрат появляется плохо определенный квадрат δ-функции, связанной с законом сохранения. Здесь нужно поступить следующим об-

[1] Понятие матрицы рассеяния впервые ввел Гейзенберг, предложив ее в качестве наиболее фундаментальной характеристики процессов взаимодействия элементарных частиц.

разом. Введем фурье-представление:

$$\delta(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{i(P_f - P_i)x} . \tag{5.4}$$

Тогда во втором таком же интеграле вычисления производятся при $P_f = P_i$, но интегрирование распространяется по некоторому большому, но конечному, объему V и интервалу времени T, что дает $VT/(2\pi)^4$, и мы записываем:

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 VT . \tag{5.5}$$

Соответственно, можно ввести уже хорошо определенную вероятность перехода в единицу времени (в конечном объеме)[2]:

$$w_{fi} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V . \tag{5.6}$$

Свободные частицы описываются соответствующими плоскими волнами с амплитудами u, представляющими собой биспиноры для дираковских фермионов, 4-вектора для фотонов и т. п. Тогда имеем:

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \dots Q u_1 u_2 \dots , \tag{5.7}$$

где Q — некоторая матрица по индексам компонент амплитуд волновых функций всех частиц.

Рассмотрим наиболее важные случаи, когда в начальном состоянии имеется всего одна или две частицы, т.е. распад одной и столкновения двух частиц. Начнем с задачи о распаде. Пусть частица распадается на некоторое число других частиц с импульсами $\mathbf{p'}_a$, попадающими в элемент объема фазового пространства $\prod_a d^3\mathbf{p'}_a$ (a нумерует частицы в конечном состоянии). Число состояний в этом элементе равно $\prod_a \frac{Vd^3\mathbf{p'}_a}{(2\pi)^3}$, соответственно (5.6) надо умножить на эту величину, дабы получить вероятность перехода в конечные состояния, попадающие в этот элемент объема фазового пространства:

$$dw = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{Vd^3\mathbf{p'}_a}{(2\pi)^3} . \tag{5.8}$$

Мы везде используем нормировку на "одну частицу в объеме V", тогда волновые функции всех частиц содержат множитель $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} V}}$, где $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ — энергия частицы. Удобно эти множители отнести в амплитуду рассеяния, т.е. писать волновые функции как:

$$\psi = ue^{-ipx} , \qquad \bar{u}u = 2m \qquad (\text{электроны}) , \tag{5.9}$$

$$A_\mu = \sqrt{4\pi} e_\mu e^{-ikx} , \quad e_\mu e^{*\mu} = -1 , \quad e_\mu k^\mu = 0 \quad (\text{фотоны}) \tag{5.10}$$

и т. п., а амплитуду рассеяния представить через новую амплитуду M_{fi}, определенную как:

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\varepsilon_1 V ... 2\varepsilon'_1 V ...)^{1/2}} , \tag{5.11}$$

[2] Этот рецепт принадлежит, как отмечалось выше, Ферми.

где в знаменателе содержится по одному множителю $(2\varepsilon_i V)$ на каждую начальную и конечную частицы. В частности, для вероятности распада имеем:

$$dw = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_a \frac{d^3\mathbf{p'}_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}\,, \tag{5.12}$$

где ε — энергия распадающейся частицы. Как и следовало ожидать, нормировочные объемы в (5.12) полностью сократились. Если среди конечных частиц есть N тождественных, то фазовый объем конечных состояний нужно еще поделить на $N!$, чтобы учесть их возможные перестановки.

Рассмотрим подробнее случай распада на две частицы с импульсами $\mathbf{p'}_1$, $\mathbf{p'}_2$ и энергиями ε'_1, ε'_2. В системе покоя распадающейся частицы $\mathbf{p'}_1 = -\mathbf{p'}_2 \equiv \mathbf{p'}$, $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = m$. Тогда

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2}|M_{fi}|^2 \frac{1}{2m}\frac{1}{4\varepsilon'_1\varepsilon'_2}\delta(\mathbf{p'}_1 + \mathbf{p'}_2)\delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - m)d^3\mathbf{p'}_1 d^3\mathbf{p'}_2\,. \tag{5.13}$$

Первую δ-функцию можно устранить, выполнив интегрирование по $d^3\mathbf{p'}_2$. Далее перепишем $d^3\mathbf{p'}_1$ в виде:

$$d^3\mathbf{p'} = |\mathbf{p'}|^2 d|\mathbf{p'}|d\Omega = |\mathbf{p'}|d\Omega' \frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2 d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2}\,, \tag{5.14}$$

что получается с учетом ${\varepsilon'_1}^2 - m_1^2 = {\varepsilon'_2}^2 - m_2^2 = |\mathbf{p'}|^2$. Тогда, проинтегрировав по $d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$, устраним и вторую δ-функцию в (5.13). Соответственно, для вероятности распада в элемент телесного угла $d\Omega'$ получим:

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2}|M_{fi}|^2 |\mathbf{p'}| d\Omega'\,. \tag{5.15}$$

Рассмотрим теперь задачу о столкновении двух частиц с импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и энергиями ε_1 и ε_2, с превращением их в совокупность из некоторого числа частиц с импульсами $\mathbf{p'}_a$ и энергиями ε'_a. Тогда

$$dw = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2 V} \prod_a \frac{d^3\mathbf{p'}_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}\,. \tag{5.16}$$

Инвариантное (относительно преобразований Лоренца) сечение рассеяния получается из (5.16) делением на [25]:

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2}\,, \quad \text{где} \quad I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}\,. \tag{5.17}$$

В системе центра инерции имеем $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$, так что $I = |\mathbf{p}|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ и

$$j = \frac{|\mathbf{p}|}{V}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{v_1 + v_2}{V}\,, \tag{5.18}$$

что дает плотность потока сталкивающихся частиц (v_1, v_2 — их скорости). Тогда окончательно:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3\mathbf{p'}_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}\,. \tag{5.19}$$

Исключим δ-функции для случая, когда в конечном состоянии имеются всего две частицы. Проведем рассмотрение в системе центра инерции. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ - - полная энергия

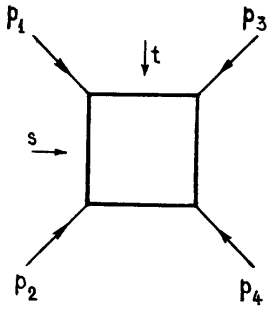


Рис. 5.1:

сталкивающихся частиц, а $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{p'}_1 = -\mathbf{p'}_2 \equiv \mathbf{p'}$ — начальные и конечные импульсы. Тогда, действуя также, как и выше в задаче о распаде, получаем:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p'}|}{|\mathbf{p}|\varepsilon^2} d\Omega' \tag{5.20}$$

В частном случае упругого рассеяния имеем $|\mathbf{p'}| = |\mathbf{p}|$. Введем кинематический инвариант:

$$t \equiv (p_1 - p_1')^2 = {m_1}^2 + {m_1'}^2 - 2(p_1 p_1') = {m_1}^2 + {m_1'}^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_1' + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p'}_1|\cos\theta\,, \tag{5.21}$$

где θ — угол рассеяния. В системе центра инерции $|\mathbf{p}_1| \equiv |\mathbf{p}|$ и $|\mathbf{p'}_1| \equiv |\mathbf{p'}|$ и определяются только полной энергией ε, так что при ее заданном значении имеем:

$$dt = 2|\mathbf{p}||\mathbf{p'}|d\cos\theta\,. \tag{5.22}$$

Соответственно, в (5.20) можно написать:

$$d\Omega' = -d\varphi d\cos\theta = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\mathbf{p}||\mathbf{p'}|}\,, \tag{5.23}$$

где φ — азимутальный угол вектора $\mathbf{p'}_1$ относительно $\mathbf{p}_1$. Далее, для краткости, пишем $d(-t)$ как dt и получаем:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2}\frac{d\varphi}{2\pi}\,. \tag{5.24}$$

Если сечение не зависит от азимута φ, то

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2}\,. \tag{5.25}$$

5.2 Кинематические инварианты.

Рассмотрим подробнее кинематику рассеяния двух частиц в две частицы в конечном состоянии. Запишем закон сохранения 4-импульса в виде, не предрешающем, какие из частиц являются начальными, а какие конечными:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0\,. \tag{5.26}$$

Амплитуду соответствующего процесса можно представить графиком (диаграммой), показанным на Рис. 5.1, на которой направления стрелок соответствуют "входящим" импульсам. Два импульса отвечают начальным частицам, а два конечным (для которых импульсами являются соответствующие $-p_a$). Таким образом, при такой записи, у двух из p_a временная компонента $p_a^0 > 0$, а у двух $p_a^0 < 0$. При заданных типах частиц, участвующих в процессе рассеяния, квадраты их 4-импульсов p_a^2 определяются их массами: $p_a^2 = m_a^2$ (свободные частицы всегда "лежат на своей

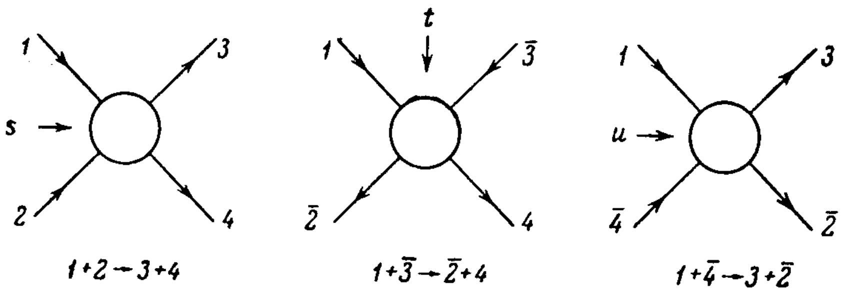


Рис. 5.2:

массовой поверхности"). В зависимости от значений, которые могут принимать временные компоненты p_a^0 и от значений зарядов частиц, амплитуда рассеяния Рис. 5.1 может описывать три разные реакции:

$$\begin{array}{lll} (1) & 1+2\to 3+4 & (s\text{-канал})\,, \\ (2) & 1+\bar{3}\to \bar{2}+4 & (t\text{-канал})\,, \\ (3) & 1+\bar{4}\to \bar{2}+3 & (u\text{-канал})\,, \end{array} \tag{5.27}$$

где черта обозначает соответствующие античастицы. Эти процессы рассеяния называют перекрестными (кросс) реакциями, графически они могут быть изображены диаграммами, показанными на Рис. 5.2. Можно говорить и о трех перекрестных каналах одной и той же реакции, изображенной на Рис. 5.1. Переход от одной реакции к другой происходит при изменении знака соответствующей временной компоненты импульса p_a^0 в (5.26):

$$\begin{array}{lllll} p_1^0>0\,, & p_2^0>0\,, & p_3^0<0\,, & p_4^0<0 & (s\text{-канал})\,, \\ p_1^0>0\,, & p_2^0<0\,, & p_3^0>0\,, & p_4^0<0 & (t\text{-канал})\,, \\ p_1^0>0\,, & p_2^0<0\,, & p_3^0<0\,, & p_4^0>0 & (u\text{-канал})\,, \end{array} \tag{5.28}$$

а также знака заряда. Все начальные и конечные состояния в (5.29) имеют, конечно, положительную энергию. При переходе к перекрестной реакции импульс частицы в начальном состоянии p_a заменяется на импульс античастицы $-p_a$ в конечном состоянии. Соответственно меняются и заряды. В силу CPT- инвариантности теории вместе с этими реакциями можно одновременно рассмотреть и три CPT-сопряженные реакции, получающиеся из (5.28) заменой всех частиц на античастицы и перестановкой начального и конечного состояний. Если теория инвариантна относительно зарядового сопряжения C, то к этим 6 реакциям добавится еще 6 C-сопряженных реакций, в которых все частицы заменены на античастицы.

Из четырех 4-импульсов, входящих в реакцию, можно образовать две независимые величины. В самом деле, в силу (5.26) всего три 4-вектора p_a независимы, пусть это будут p_1, p_2, p_3. Из них можно составить 6 инвариантов: $p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_1p_2, p_1p_3, p_2p_3$. Первые три сводятся к соответствующим квадратам масс: m_1^2, m_2^2, m_3^2. Вторые три связаны одним соотношением, вытекающим из равенства: $(p_1+p_2+p_3)^2 = p_4^2 = m_4^2$.

Для большей симметрии принято вводить три кинематических инварианта:

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \,, \\
t &= (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \,, \\
u &= (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 \,,
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

именуемые *переменными Мандельстама*. Легко проверить, что:

$$
s + t + u = h \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \,. \tag{5.30}
$$

В канале (1) инвариант s представляет собой квадрат полной энергии сталкивающихся частиц 1 и 2 в их системе центра инерции. В самом деле, при $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ сразу получаем $s = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$. В канале (2) аналогичную роль играет инвариант t, а в канале (3) — инвариант u. Соответственно говорят о s, t и u каналах реакции.

Рассмотрим подробнее s-канал. Пусть:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (\varepsilon_1, \mathbf{p}_s) \,, \qquad & p_2 &= (\varepsilon_2, -\mathbf{p}_s) \,, \\
p_3 &= (-\varepsilon_3, -\mathbf{p'}_s) \,, \qquad & p_4 &= (-\varepsilon_4, \mathbf{p'}_s) \,.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Тогда нетрудно получить:

$$
s = \varepsilon_s^2 \,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \,, \tag{5.32}
$$

$$
\begin{aligned}
4s\mathbf{p}_s^2 &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2] \,, \\
4s\mathbf{p'}_s^2 &= [s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2] \,,
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

$$
\begin{aligned}
2t &= h - s + 4\mathbf{p}_s\mathbf{p'}_s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \,, \\
2u &= h - s - 4\mathbf{p}_s\mathbf{p'}_s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \,.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

В случае упругого рассеяния ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) имеем $|\mathbf{p}_s| = |\mathbf{p'}_s|$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$. Тогда выражения (5.33) упрощаются:

$$
\begin{aligned}
t &= -(\mathbf{p}_s - \mathbf{p'}_s)^2 = -2\mathbf{p}_s^2(1 - \cos\theta_s) \\
u &= -2\mathbf{p}_s^2(1 + \cos\theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

где θ_s — угол между $\mathbf{p}_s$ и $\mathbf{p'}_s$, т.е. угол рассеяния. Таким образом инвариант $-t$ представляет в данном случае квадрат переданного при столкновении 3-импульса.

Аналогичные формулы для других каналов получаются переобозначением. Переход к t-каналу осуществляется заменой $s \leftrightarrow t$, $2 \leftrightarrow 3$, переход к u-каналу заменой $s \leftrightarrow u$, $2 \leftrightarrow 4$.

Если частицы, участвующие в реакции не имеют спина, то амплитуда рассеяния зависит только от кинематических инвариантов s, t, u, так что, фактически, амплитуда рассеяния сводится к одной функции:

$$
M_{fi} = f(s, t) \,. \tag{5.36}
$$

Если же частицы обладают спинами, то помимо s, t, u существуют инварианты, которые можно составить из волновых амплитуд частиц (биспиноров, 4-векторов, 4-тензоров и т.п.). Тогда амплитуда рассеяния имеет вид:

$$M_{fi} = \sum_n f_n(s,t) F_n \,, \tag{5.37}$$

где F_n — инварианты, линейно зависящие от волновых амплитуд всех участвующих частиц, а также от их 4-импульсов. Коэффициенты $f_n(s,t)$ называются *инвариантными амплитудами.*

5.3 Условие унитарности.

Матрица рассеяния должна быть унитарной: $SS^+ = 1$ или

$$(SS^+)_{fi} = \sum_n S_{fn} S^*_{in} = \delta_{fi} \,, \tag{5.38}$$

где n нумерует все возможные промежуточные состояния. Условие унитарности (5.38) выражает сохранение нормировки и ортогональности состояний в процессах рассеяния. В частности, диагональные элементы (5.38) представляют сумму всех вероятностей переходов из данного начального состояния в любое конечное:

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1 \,. \tag{5.39}$$

Используя (5.2) получаем из (5.38):

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta(P_f - P_n) T_{fn} T^*_{in} \,. \tag{5.40}$$

Левая часть линейна, а правая часть квадратична по T. Если взаимодействие содержит малый параметр, то левая сторона "больше" правой и, в первом приближении, пренебрегая правой стороной, можно записать:

$$T_{fi} = T^*_{if} \,, \tag{5.41}$$

так что T-матрица оказывается, в этом приближении, эрмитовой.

Рассмотрим задачу о столкновении двух частиц. Пусть имеются только упругие столкновения, тогда все промежуточные состояния в (5.40) тоже только двухчастичные. Суммирование по ним сводится к интегрированию по промежуточным импульсам $\mathbf{p''}_1, \mathbf{p''}_2$ и суммированию по спинам (спиральностям) обеих частиц, которые обозначим через λ'':

$$\sum_n = V^2 \int \frac{d^3\mathbf{p''}_1 d^3\mathbf{p''}_2}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''} \tag{5.42}$$

Исключая δ-функции способом, аналогичным описанному выше, можно получить "двухчастичное" условие унитарности в виде:

$$T_{fi} - T^*_{if} = i\frac{V^2}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int T_{fn} T^*_{in} \varepsilon''_1 \varepsilon''_2 d\Omega'' \,, \tag{5.43}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс, а ε — полная энергия в системе центра инерции. Нормировочный объем исчезает после перехода к амплитудам M_{fi}:

$$M_{fi} - M_{if}^* = \frac{i}{(4\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int M_{fn} M_{in}^* d\Omega'' \,. \tag{5.44}$$

Диагональный элемент T_{ii} называется амплитудой рассеяния на нулевой угол. Для этой амплитуды условие унитарности принимает вид:

$$2 \operatorname{Im} T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta(P_i - P_n) \,. \tag{5.45}$$

Правая сторона здесь пропорциональна полному сечению любых процессов рассеяния из данного начального состояния i, которое обозначим σ_{tot}. В самом деле, суммируя (5.6) по f и поделив на плотность потока частиц j, получим:

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{in}|^2 \delta(P_i - P_n) \,, \tag{5.46}$$

так что

$$\frac{2V}{j} \operatorname{Im} T_{ii} = \sigma_{tot} \,. \tag{5.47}$$

Нормировочный объем сокращается после перехода к $T_{ii} = M_{ii}/(2\varepsilon_1 V 2\varepsilon_2 V)$ (где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — энергии частиц в системе центра инерции) и подстановки j из (5.18):

$$\operatorname{Im} M_{ii} = 2|\mathbf{p}|\varepsilon\sigma_{tot} \,, \tag{5.48}$$

что представляет собой так называемую *оптическую теорему*.

В силу CPT-теоремы имеем:

$$T_{fi} = T_{\bar{i}\bar{f}} \,, \tag{5.49}$$

где $\bar{i}$ и $\bar{f}$ — состояния, получающиеся из i и f заменой всех частиц античастицами. Для диагональных элементов:

$$T_{ii} = T_{\bar{i}\bar{i}} \,. \tag{5.50}$$

Тогда из (5.45) и (5.48) следует, что полное сечение всех возможных процессов (с заданным начальным состоянием) одинаково для реакций между частицами и античастицами. В частности, одинаковы полные времена жизни (вероятности распада) частицы и античастицы.

В период некоторого разочарования в возможностях квантовой теории поля, связанного, как казалось, с непреодолимыми трудностями в ее развитии, предлагалось полностью перейти к анализу взаимодействий элементарных частиц на основе общих свойств S-матрицы, таких как унитарность и некоторые общие свойства аналитичности, связанные например с принципом причинности. Это породило целое направление теории, названное аналитической теорией S-матрицы [33]. Хотя на этом пути и удалось получить целый ряд важных теорем и утверждений, в целом этот подход оказался недостаточным для создания полной динамической теории элементарных частиц. В то же время, как мы увидим ниже, квантовая теория поля содержит хорошо разработанный формализм вычисления S-матрицы в рамках достаточно традиционного подхода, основанного на теории возмущений.

Глава 6

ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

6.1 Представление Шредингера и Гейзенберга.

Перейдем к систематическому рассмотрению математического аппарата теории возмущений по взаимодействию в квантовой теории поля. Хорошо известно, что существует две основных формы представления уравнений движения в квантовой теории. В *шредингеровском* представлении состояние системы в заданный момент времени t определяется вектором состояния $\Psi_S(t)$, содержащим полный набор всех возможных результатов измерений, производимых над системой в этот момент времени. Дальнейшая эволюция системы описывается временной зависимостью этого вектора состояния (волновой функции), описываемой уравнением Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_S}{\partial t} = H_S\Psi_S(t)\,. \tag{6.1}$$

В этом представлении, операторы физических величин F_S не зависят от времени, для всех t они одинаковы: $dF_S/dt = 0$. В тоже время, среднее значение оператора:

$$\langle F_S\rangle = \langle\Psi_S(t)|F_S|\Psi_S(t)\rangle\,, \tag{6.2}$$

вообще говоря, будет зависеть от времени как:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle F_S\rangle = \langle\Psi_S(t)|[F_S, H]|\Psi_S(t)\rangle\,. \tag{6.3}$$

Совершим некоторое унитарное преобразование вектора $\Psi_S(t)$, зависящее от времени:

$$\Phi(t) = V(t)\Psi_S(t)\,, \tag{6.4}$$

где

$$V(t)V^+(t) = V^+(t)V(t) = 1\,, \qquad V^+(t) = V^{-1}(t)\,. \tag{6.5}$$

Тогда новый вектор состояния $\Phi(t)$ подчиняется уравнению [1]:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \left(i\hbar\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1} + VH_SV^{-1}\right)\Phi(t)\,. \tag{6.6}$$

[1] Подробно имеем: $i\hbar\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial V}{\partial t}\Psi_S(t) + i\hbar V\frac{\partial\Psi_S}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1}\Phi(t) + VH_S\Psi_S = i\hbar\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1}\Phi(t) + VH_SV^{-1}\Phi(t)$, что совпадает с (6.6).

Выберем теперь $V(t)$ удовлетворяющее следующему уравнению:

$$-i\hbar\frac{\partial V}{\partial t} = (VH_S V^{-1})V = VH_S\,. \tag{6.7}$$

Тогда преобразованный вектор состояния не будет зависеть от времени, что прямо видно из (6.6). В силу унитарности $V(t)$, среднее значение оператора F_S выражается теперь в виде:

$$\langle F\rangle = \langle\Psi_S(t)|F_S|\Psi_S(t)\rangle = \langle V(t)\Psi_S(t)|V(t)F_S\Psi_S(t)\rangle = \langle\Phi_H|V(t)F_S V^{-1}(t)|\Phi_H\rangle\,, \tag{6.8}$$

где определили Φ_H как:

$$\Phi_H = V(t)\Psi_S(t)\,, \tag{6.9}$$

причем $V(t)$ удовлетворяет уравнению (6.7). Определим еще $F_H(t)$:

$$F_H(t) = V(t)F_S V^{-1}(t)\,. \tag{6.10}$$

Тогда зависящий от времени оператор $F_H(t)$ имеет такое же среднее в состоянии, определяемом вектором Φ_H, какое имеет оператор F_S в состоянии, определяемом вектором Ψ_S. Дифференцируя (6.5) по времени, имеем:

$$\frac{dV(t)}{dt}V^+(t) + V(t)\frac{dV^+(t)}{dt} = 0\,. \tag{6.11}$$

Тогда из (6.7) и (6.10) получаем для временной зависимости $F_H(t)$[2]:

$$\frac{\partial F_H(t)}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}V^+F_H(t) + F_H(t)V\frac{\partial V^+}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[VH_SV^+, F_H(t)] = \frac{i}{\hbar}[H_H, F_H(t)]\,, \tag{6.12}$$

что представляет собой уравнение движения для оператора физической величины в *гейзенберговском* представлении. Гейзенберговский вектор состояния Φ_H от времени не зависит:

$$\frac{\partial\Phi_H}{\partial t} = 0\,. \tag{6.13}$$

Можно, например, считать, что Φ_H просто совпадает с $\Psi_S(0)$ при $t = 0$.

6.2 Представление взаимодействия.

Рассмотрим снова обычное уравнение Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = (H_0 + H_I)\Phi(t)\,, \tag{6.14}$$

где H_0 — гамильтониан невзаимодействующих полей (частиц), а H_I — некоторый гамильтониан взаимодействия. Вектор состояния Φ в отсутствие взаимодействия, т.е. при $H_I = 0$, описывает движение заданного числа свободных частиц с определенными импульсами и спинами. Оператор H_I описывает взаимодействие этих частиц друг с другом и самих с собой.

[2] При получении (6.12) учтем, что: $\frac{\partial F_H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}F_S V^{-1} + VF_S\frac{\partial V^{-1}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}V^{-1}F_H + F_H V\frac{\partial V^{-1}}{\partial t}$.

Введем теперь вектор состояния:

$$\Psi(t) = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)\Phi(t)\,. \tag{6.15}$$

Нетрудно убедиться, что $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) H_I \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)\Psi(t) \tag{6.16}$$

или

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H_I^{IR}(t)\Psi(t)\,, \tag{6.17}$$

где

$$H_I^{IR}(t) = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) H_I \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) \tag{6.18}$$

— оператор энергии взаимодействия в этом новом представлении. Этот оператор явно зависит от времени, в противоположность шредингеровскому оператору H_I. Вообще, произвольный оператор $Q_{IR}(t)$ в этом, так называемом *представлении взаимодействия*, связан с шредингеровским оператором Q_S как:

$$Q_{IR}(t) = \exp\left(\frac{iH_0 t}{\hbar}\right) Q_S \exp\left(-\frac{iH_0 t}{\hbar}\right)\,. \tag{6.19}$$

Отсюда сразу же следует, что в представлении взаимодействия зависимость операторов от времени определяется гамильтонианом свободных частиц, так как дифференцируя (6.19) по t получаем:

$$i\hbar\frac{\partial Q_{IR}(t)}{\partial t} = [Q_{IR}(t), H_0]\,. \tag{6.20}$$

Заметим, что $H_0^{IR} = H_0^S$. Таким образом, в представлении взаимодействия операторы полей удовлетворяют уравнениям движения *свободного* поля [3], тогда как зависимость от времени вектора состояния системы $\Psi(t)$ определяется, согласно (6.17), лишь энергией взаимодействия. Представление взаимодействия оказывается весьма удобным для построения теории возмущений.

Рассмотрим например теорию дираковских фермионов, взаимодействующих со скалярным полем. В шредингеровском представлении гамильтониан свободных полей имеет вид:

$$H_0 = \int d^3\mathbf{r}\left[\bar\psi(x)\left(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m\right)\psi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x)\right]\,, \tag{6.21}$$

а гамильтониан взаимодействия (написанный из простейших соображений релятивистской инвариантности) есть:

$$H_I = g\int d^3\mathbf{r}\bar\psi(x)\psi(x)\varphi(x)\,, \tag{6.22}$$

где g — безразмерная константа взаимодействия. После перехода к представлению взаимодействия операторы полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(i\widehat\nabla - m)\psi_{IR}(x) = 0\,, \qquad (\Box + m^2)\varphi_{IR}(x) = 0\,, \tag{6.23}$$

[3] В частности, это означает, что для любых моментов времени сохраняются соответствующие коммутационные соотношения для этих операторов.

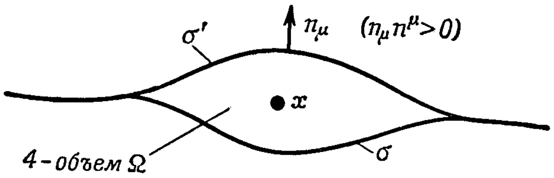


Рис. 6.1:

а уравнение (6.17) имеет вид:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = g\int_{ct=x_0} d^3\mathbf{r}\bar{\psi}_{IR}(x)\psi_{IR}(x)\varphi_{IR}(x)\Psi(t)\,. \tag{6.24}$$

Уравнение (6.17) можно обобщить, сделав его ковариантным. Это обобщение производится путем введения произвольной гиперповерхности в пространстве-времени вместо “плоской” поверхности $t = const$. Единственное условие, которому должна удовлетворять эта поверхность — нормаль к ней $n_\mu(x)$ в любой точке $\mathbf{r}$ должна быть времениподобной, т.е. $n_\mu(\mathbf{r})n^\mu(\mathbf{r}) > 0$. Это означает, что никакие две точки на данной поверхности не могут быть связаны световым сигналом, или же, что любые две точки на поверхности разделены пространственноподобным интервалом. Обозначим такую поверхность символом σ. В любой точке $\mathbf{r}$ на этой поверхности можно ввести время $t(\mathbf{r})$, называемое локальным временем. В пределе, когда поверхность становится плоской, все точки на ней имеют одинаковое время $t = const$. Теперь можно обобщить $\Psi(t)$ введя $\Psi[t(\mathbf{r})]$. Основное уравнение (6.17)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H_I(t)\Psi(t) \tag{6.25}$$

можно теперь рассмотреть как результат суммирования бесконечного ряда уравнений, полученных введением локального времени для каждой точки пространственноподобной поверхности. Если гамильтониан взаимодействия выразить как сумму по малым трехмерным ячейкам ΔV пространственноподробной поверхности σ, т.е.

$$H_I = \sum_\sigma \mathcal{H}_I(x)\Delta V\,, \tag{6.26}$$

то уравнение в малой ячейке вокруг пространственно-временной точки $\mathbf{r}, t(\mathbf{r})$ можно записать в виде:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi[t(\mathbf{r})]}{\partial t(\mathbf{r})} = \mathcal{H}_I(x)\Delta V\,\Psi[t(\mathbf{r})]\,, \tag{6.27}$$

что обобщает уравнение (6.17). Поскольку вариация $\Psi(t)$, соответствующая жесткому бесконечно малому перемещению гиперплоскости $t = const$ как целого, определяется интегралом $\int_t \mathcal{H}_I d^3\mathbf{r}$, то ясно, что вариация $\Psi[t(\mathbf{r})]$ относительно точки x будет определяться энергией взаимодействия в $\mathcal{H}_I(x)\Delta V$ в бесконечно малом объеме вокруг x. Поскольку произведение $\Delta V\Delta t$ является релятивистски инвариантным, то напрашивается следующая инвариантная процедура дифференцирования. Рассмотрим функцию на пространственноподобной поверхности $\Psi[t(\mathbf{r})] = \Psi(\sigma)$. Сравним затем величины этих функций на двух пространственно – подобных поверхностях

σ и σ', которые бесконечно мало отличаются в окрестности точки x, как это показано на Рис. 6.1. Определим теперь инвариантную операцию $\delta/\delta\sigma(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} &= \lim_{\Delta t\Delta V\to 0}\frac{\Psi[t(\mathbf{r})+\Delta t(\mathbf{r})]-\Psi[t(\mathbf{r})]}{c\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r}\Delta t(\mathbf{r})} \\
&= \lim_{\Delta t\Delta V\to 0}\frac{\Psi(\sigma')-\Psi(\sigma)}{c\Delta t(\mathbf{r})\Delta V} = \lim_{\Omega(x)\to 0}\frac{\Psi(\sigma')-\Psi(\sigma)}{\Omega(x)}\,,
\end{aligned} \tag{6.28}$$

где $\Omega(x)$ — 4-объем, заключенный между σ и σ'. Тогда в пределе $\Omega(x)\to 0$ уравнение (6.27) можно переписать в виде так называемого уравнения Томонага – Швингера:

$$i\hbar c\frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = \mathcal{H}_I(x)\Psi(\sigma)\,. \tag{6.29}$$

Это уравнение ковариантно, поскольку $\mathcal{H}_I(x)$ представляет собой релятивистский инвариант (скаляр), а для определения пространственноподобной поверхности σ не требуется какой-либо определенной лоренцевской системы отсчета. Поэтому уравнение Томонага – Швингера записывается без указания системы координат, к которой оно относится. Впрочем, в дальнейшем мы, в основном, будем работать с уравнением (6.17), записанном в конкретной системе координат.

6.3 Разложение S-матрицы.

Решение уравнения движения в представлении взаимодействия (6.17) можно записать в интегральном виде:

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')\Psi(t')\,. \tag{6.30}$$

Здесь учтено и начальное условие — при $t=t_0$ функция Ψ сводится к $\Psi(t_0)$.

Запишем связь $\Psi(t)$ с $\Psi(t_0)$ в виде[4]:

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= U(t,t_0)\Psi(t_0)\,, \\
\Psi(t_0) &= U^{-1}(t,t_0)\Psi(t)\,, \\
U(t_0,t_0) &= 1\,,
\end{aligned} \tag{6.31}$$

где $U(t,t_0)$ — унитарный (сохраняющий нормировку!) оператор эволюции. Тогда:

$$S = U(+\infty,-\infty) \tag{6.32}$$

определяет S-матрицу (матрицу рассеяния), которая определяет всевозможные изменения состояний системы в результате взаимодействия:

$$\Psi(+\infty) = S\Psi(-\infty)\,, \tag{6.33}$$

где $\Psi(-\infty)$ и $\Psi(+\infty)$ — асимптотические вектора состояния системы, в частности, асимптотические формы падающей и расходящейся волн в задаче рассеяния.

[4]Излагаемый ниже формализм принадлежит Дайсону.

Оператор $U(t,t_0)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, очевидному из (6.17):

$$i\hbar\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = H_I(t)U(t,t_0)\,. \tag{6.34}$$

Аналогично:

$$-i\hbar\frac{\partial U^+(t,t_0)}{\partial t} = U^+(t,t_0)H_I(t)\,, \tag{6.35}$$

поскольку $H_I(t)$ эрмитов. Из этих уравнений сразу следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(U^+(t,t_0)U(t,t_0)) = 0\,, \tag{6.36}$$

что эквивалентно

$$U^+(t,t_0)U(t,t_0) = 1\,. \tag{6.37}$$

Для доказательства унитарности нужно еще показать, что

$$U(t,t_0)U^+(t,t_0) = 1\,. \tag{6.38}$$

Выполняется следующее групповое свойство оператора эволюции:

$$U(t,t_1)U(t_1,t_0) = U(t,t_0)\,. \tag{6.39}$$

В самом деле, из

$$\Psi(t) = U(t,t_1)\Psi(t_1)\,, \qquad \Psi(t_1) = U(t_1,t_0)\Psi(t_0) \tag{6.40}$$

следует:

$$\Psi(t) = U(t,t_0)\Psi(t_0) = U(t,t_1)U(t_1,t_0)\Psi(t_0)\,, \tag{6.41}$$

что и требуется для выполнения (6.39). Если в (6.39) положить $t = t_0$, то получим:

$$U(t_0,t_1) = U^{-1}(t_1,t_0)\,. \tag{6.42}$$

Из равенства $U(t_0,t_1)U(t_1,t_0) = 1$, умножая его слева на $U^+(t_0,t_1)$ и используя (6.37), получим:

$$U(t_1,t_0) = U^+(t_0,t_1) = U^{-1}(t_0,t_1)\,, \tag{6.43}$$

что и доказывает унитарность оператора эволюции.

Непосредственно из группового свойства (6.39) вытекает, что любой переход системы на конечном интервале времени можно представить в виде произведения последовательности бесконечно малых преобразований, совершаемых с помощью оператора эволюции:

$$U(t,t') = U(t,t_1)U(t_1,t_2)...U(t_{n-1},t_n)U(t_n,t')\,, \tag{6.44}$$

где $U(t_j,t_{j+1})$ — бесконечно малое преобразование от момента времени t_j к t_{j+1}.

Решение Уравнения (6.34), очевидно, также может быть записано в интегральном виде:

$$U(t,t') = 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t'}^{t} d\tau H_I(\tau)U(\tau,t')\,. \tag{6.45}$$

Поэтому, для бесконечно малой разности времен $t_j - t_{j+1}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
U(t_j, t_{j+1}) &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_{j+1}}^{t_j} d\tau H_I(\tau) U(\tau, t_{j+1}) \approx \\
&\approx 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_{j+1}}^{t_j} dt' H_I(t') U(t_{j+1}, t_{j+1}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_{j+1}}^{t_j} dt' H_I(t')\,. \qquad (6.46)
\end{aligned}
$$

Неограниченно увеличивая число интервалов и группируя члены из (6.44) получаем:

$$
\begin{aligned}
U(t, t_0) = 1 &+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \\
&+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^3 \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} dt_2 \int\limits_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots\,. \qquad (6.47)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим интеграл, определяющий n-й порядок теории возмущений:

$$
\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} dt_2 ... \int\limits_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) ... H_I(t_n)\,. \qquad (6.48)
$$

Интегрирование здесь ведется, по существу, по всему интервалу времени от t_0 до t, с тем ограничением, что момент времени t_j раньше момента $t_{j-1} (j \le n)$. Естественно, что в выражении (6.48) можно произвольным образом переобозначить переменные интегрирования $t_1, ..., t_n \to t_{p_1}, t_{p_2} ... t_{p_n}$, от чего значение интеграла не изменится. Проделав все перестановки переменных $t_1, ..., t_n$, сложив все выражения и разделив на число перестановок $n!$, мы распространим область интегрирования по каждой переменной на весь интервал от t_0 до t. Существенно при этом, однако, чтобы операторы $H_I(t_j)$ под знаком интеграла всегда располагались справа налево в порядке возрастания времени. Это можно обеспечить введением оператора T-упорядочения, который действуя на произведение операторов, зависящих от времени, располагает их в хронологическом порядке, т.е. оператор с большим значением времени в произведении стоит слева:

$$
T\big(H_I(t_1) \dots H_I(t_k)\big) = H_I(t_i) H_I(t_j) \dots H_I(t_k) \quad \text{при} \quad t_i > t_j > \dots > t_k\,, \qquad (6.49)
$$

что определяет так называемое хронологическое или T-произведение операторов. Тогда, используя упомянутую симметрию подинтегрального выражения (6.48), получаем:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int\limits_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) = \\
&= \frac{1}{n!}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t} dt_2 \dots \int\limits_{t_0}^{t} dt_n T\big(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)\big)\,. \qquad (6.50)
\end{aligned}
$$

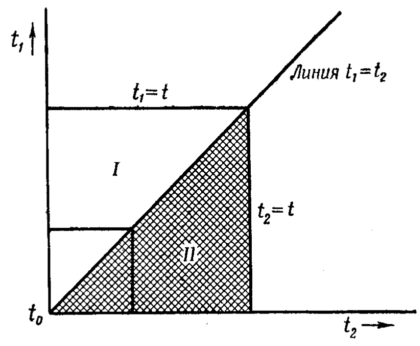


Рис. 6.2:

Рассмотрим подробно эквивалентность этих двух форм интеграла для случая $n = 2$. Из определения T-произведения имеем:

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)\big) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 H_I(t_2)H_I(t_1)\,. \tag{6.51}$$

Область интегрирования в левой части изображена на Рис. 6.2 в виде квадрата. С другой стороны, в первом члене в правой части (6.51) интегрирование распространяется по области I (незаштрихованный треугольник), тогда как во втором члене интегрирование идет по заштрихованной области II. Поменяем во втором интеграле порядок интегрирования, будем сначала интегрировать по t_1, тогда пределы интегрирования изменятся, и мы получим:

$$\int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2)H_I(t_1)\,. \tag{6.52}$$

Если теперь произвести замену переменных $t_1 \to t_2$ и $t_2 \to t_1$, то выражение (6.52) примет вид:

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)\,, \tag{6.53}$$

так что (6.51) сводится к:

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)\big) = 2! \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)\,, \tag{6.54}$$

что доказывает справедливость (6.50) для случая $n = 2$.

Итак, разложение (6.47) можно переписать как:

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) \quad &= \quad 1+\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 T\big(H_I(t_1)\big)+\frac{1}{2!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2 T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)\big)+\\
&\quad +\frac{1}{3!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^3\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2\int\limits_{t_0}^{t} dt_3 T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)H_I(t_3)\big)+\ldots=\\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t} dt_n T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_n)\big)\,,
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

что можно переписать как:

$$
U(t,t_0)=T\left\{\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} H_I(t')dt'\right)\right\}\,, \tag{6.56}
$$

где проведено символическое суммирование ряда (6.55), сводящее его к так называемой T-экспоненте.

Можно непосредственно проверить, что ряд (6.55) является решением уравнения (6.34). Для этого продифференцируем (6.55) по времени t:

$$
\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t} dt_{n-1} nH_I(t)T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)...H_I(t_{n-1})\big)\,. \tag{6.57}
$$

При написании правой части (6.57) мы воспользовались симметричностью подинтегрального выражения, а также тем обстоятельством, что оператор $H_I(t)$ всегда зависит от момента t, более позднего, чем $t_1,...,t_{n-1}$. Поэтому мы вынесли оператор $H_I(t)$ за знак T-произведения и написали его левее всех остальных множителей. Тогда (6.57) можно переписать как:

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} \quad &= \quad H_I(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n-1}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t} dt_{n-1}T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_{n-1})\big)=\\
&= \quad H_I(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{n}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1\int\limits_{t_0}^{t} dt_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t} dt_{n}T\big(H_I(t_1)H_I(t_2)\ldots H_I(t_{n})\big)=\\
&= \quad H_I(t)U(t,t_0)\,,
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

что и требовалось!

Вспоминая, что

$$
H_I(t)=\int d^3\mathbf{r}\mathcal{H}_I(x)\,, \tag{6.59}
$$

можно переписать (6.55) в форме, более явно указывающей на его ковариантность:

$$
U(t,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int\limits_{t_0}^{t} d^4x_1\int\limits_{t_0}^{t} d^4x_2\ldots\int\limits_{t_0}^{t} d^4x_n T\big(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\ldots\mathcal{H}_I(x_n)\big)\,, \tag{6.60}
$$

где учтено $\int dt \int d^3\mathbf{r} = \int d^4x/c$. Можно обобщить (6.60) таким образом, чтобы пределы интегрирования представляли собой пространственноподобные поверхности σ и σ', тогда $U(\sigma, \sigma')$ будет иметь инвариантный вид, поскольку и $\mathcal{H}_I$ и элемент объема d^4x являются 4-скалярами.

Важнейшим моментом в обосновании излагаемого формализма является так называемая *адиабатическая гипотеза.* Согласно определению S-матрицы нужно устремить начальный момент времени t_0 к $-\infty$, а конечный момент t к $+\infty$. Но тут следует проявить осторожность — для члена разложения (6.55) n-го порядка это можно сделать $n!$ способами для каждого из пределов. Дайсон предложил обойти эту проблему путем введения множителя сходимости вида $e^{-\lambda|t|}$, на который следует умножить гамильтониан взаимодействия. После проведения всех вычислений подразумевается переход к пределу $\lambda \to 0$. Эта процедура эквивалентна некоторому усреднению по всем возможным $n!$ переходам к пределу $t \to \pm\infty$. Приняв эту адиабатическую гипотезу можно считать, что волновые функции начального и конечного состояний являются собственными функциями "свободного" гамильтониана H_0, их обычно называют функциями состояний "голых" частиц. Поэтому, любой процесс рассеяния можно рассмотреть следующим образом:

1. В момент времени $t = -\infty$ система находится в состоянии, описываемом волновой функцией Φ, являющейся собственной функцией оператора H_0. В этом состоянии находится заданное число частиц с определенным спином и импульсом, причем частицы отделены друг от друга и не взаимодействуют между собой. Вектор Φ является постоянным не зависящим от времени ($H_I = 0$) вектором состояния в представлении взаимодействия.

2. Далее адиабатически включается взаимодействие, и состояние с волновой функцией Φ переходит в состояние $\Psi(t_0) = U(t_0, -\infty)\Phi$, которое, как считается, соответствует реальному состоянию физических ("одетых") частиц с теми же импульсом и спином. При этом предполагается, что частицы все еще достаточно отделены друг от друга и не взаимодействуют между собой. Однако включение H_I обеспечивает собственное взаимодействие, в результате чего "голые" частицы приобретают "шубу" из виртуальных квантов, т.е. происходит их "одевание", так что частицы становятся реальными физическими частицами, удовлетворяющими условию $p^2 = m^2$, где m – наблюдаемая масса частицы.

3. Далее частицы взаимодействуют между собой, т.е. рассеиваются, переходят в другие частицы и т. п. По прошествии достаточно большого времени $T = t - t_0$ частицы снова расходятся, но уже находясь в состояниях, описываемых волновой функцией $\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$, это состояние соответствует "одетым" (т.е. реальным физическим) частицам после рассеяния.

4. Далее взаимодействие адиабатически выключается и состояние с волновой функцией $\Psi(t)$ переходит в состояние с волновой функцией Φ', которое соответствует "голым" частицам после рассеяния, причем $\Phi' = U(\infty, t)\Psi(t)$.

Таким образом реальная задача рассеяния $\Psi(t_0) \to \Psi(t)$ заменяется "эквивалентной" задачей, вводящей в рассмотрение "голые" частицы при $t = \pm\infty$. Рассмотрим соотношение:

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0) \tag{6.61}$$

и запишем его в виде:

$$U^{-1}(\infty, t)\Psi' = U(t, t_0)U(t_0, -\infty)\Phi\,. \tag{6.62}$$

Отсюда имеем:

$$\Phi' = U(\infty, t)U(t, t_0)U(t_0, -\infty)\Phi = U(\infty, -\infty)\Phi = S\Phi\,. \tag{6.63}$$

Это означает, что Φ' при $t = +\infty$ действительно является волновой функцией состояния “голых” частиц, в которые они переходят в результате рассеяния из состояния, описываемого функцией Φ при $t = -\infty$.

Адиабатическая гипотеза приводит к результатам, прекрасно согласующимся с экспериментом. Это обстоятельство довольно удивительно, поскольку ясно, что взаимодействие между полями нельзя “выключить” (адиабатически или как либо иначе). В этом отношении квантовая теория поля довольно сильно отличается от квантовой механики, где обычно имеют дело с потенциалами конечного радиуса действия (кроме кулоновского случая, но тогда известны точные волновые функции), так что в задаче рассеяния волновые функции начального и конечного состояний действительно соответствуют свободным частицам.

6.4 Диаграммы Фейнмана для рассеяния электронов в квантовой электродинамике.

В квантовой электродинамике плотность гамильтониана взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{H}_I(x) = j_\mu(x)A^\mu(x)\,, \tag{6.64}$$

где j_μ — ток дираковских электронов, а A^μ — вектор-потенциал электромагнитного поля. Соответственно, матрица рассеяния записывается в виде [5]:

$$S = T\exp\left\{-ie\int d^4x j_\mu(x)A^\mu(x)\right\}\,, \tag{6.65}$$

где мы вернулись к системе единиц $\hbar = c = 1$.

Рассмотрим конкретные примеры вычисления матричных элементов матрицы рассеяния. Оператор тока j содержит произведение двух электронных ψ-операторов. Поэтому в первом порядке теории возмущений могли бы возникнуть процессы, в которых участвуют всего три частицы — два электрона и один фотон, типа показанных диаграммой Рис. 6.3, аналогичной Рис. 4.7. Однако такие процессы со *свободными* частицами невозможны из-за законов сохранения энергии и импульса. В самом деле, если p_1 и p_2 — 4-импульсы электронов, а k — 4-импульс фотона, то закон сохранения имеет вид $k = p_2 - p_1$ или $k = p_1 + p_2$. Однако такие равенства невозможны, поскольку для реального фотона всегда $k^2 = 0$, тогда как квадрат $(p_2 \pm p_1)^2$ заведомо не нуль. В этом нетрудно убедиться, вычисляя $(p_2 \pm p_1)^2$ в системе покоя одного из электронов, например электрона 1. Тогда $(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1p_2) = 2(m^2 \pm \varepsilon_1\varepsilon_2 \mp \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \varepsilon_2)$, а поскольку $\varepsilon_2 > m$, то и имеем $(p_2 + p_1)^2 > 0$ или $(p_2 - p_1)^2 < 0$.

[5] В дальнейшем изложении в этой и следующей главах, мы следуем, в основном, книге [1].

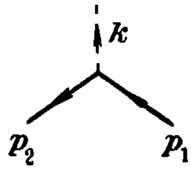


Рис. 6.3:

Таким образом, первые неисчезающие матричные элементы S-матрицы могут появиться лишь во втором порядке теории возмущений:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' T\big(j^\mu(x) A_\mu(x) j^\nu(x') A_\nu(x')\big) . \tag{6.66}$$

Поскольку электронные и фотонные операторы в представлении взаимодействия коммутируют друг с другом (6.66) можно переписать в виде:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' T\big(j^\mu(x) j^\nu(x')\big) T\big(A_\mu(x) A_\nu(x')\big) . \tag{6.67}$$

В качестве первого примера рассмотрим упругое рассеяние двух электронов. Тогда в начальном состоянии имеем два электрона с импульсами p_1 и p_2, а в конечном — два электрона с импульсами p_3 и p_4. Подразумевается, что электроны находятся в конкретных спиновых состояниях, но спиновые индексы, в дальнейшем, опускаем для краткости. Рассчитать мы должны, конечно же, матричный элемент матрицы рассеяния, между начальным и конечным состояниями, с соответствующими частицами. Поскольку в обоих этих состояниях фотоны просто отсутствуют, то нужный нам матричный элемент T-произведения фотонных операторов есть просто $\langle 0|\ldots|0\rangle$, где $|0\rangle$ — состояние фотонного вакуума. Соответственно из (6.67) возникает тензор:

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(x')|0\rangle , \tag{6.68}$$

который называется фотонной функцией распространения (пропагатором) или фотонной функцией Грина.

Из T-произведения электронных операторов в (6.67) возникает матричный элемент вида:

$$\langle 34|T j^\mu(x) j^\nu(x')|12\rangle , \tag{6.69}$$

где $|12\rangle$ и $|34\rangle$ обозначают состояния с двумя электронами с соответствующими импульсами. Этот матричный элемент можно также представить в виде некоторого среднего по вакууму, если воспользоваться соотношением типа:

$$\langle 2|F|1\rangle = \langle 0|a_2 F a_1^+|0\rangle , \tag{6.70}$$

где F — произвольный оператор, а a_1^+ и a_2 — операторы рождения 1-го и уничтожения 2-го электронов. Ясно, что вместо (6.69) нужно вычислять:

$$\langle 0|a_3 a_4 T(j^\mu(x) j^\nu(x')) a_2^+ a_1^+|0\rangle . \tag{6.71}$$

Каждый из операторов тока есть $j = \bar\psi\gamma\psi$, причем ψ-операторы представляются как:

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}} \psi_p + b_{\mathbf{p}}^+ \psi_{-p}) , \qquad \bar\psi = \sum_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^+ \bar\psi_p + b_{\mathbf{p}} \bar\psi_{-p}) , \tag{6.72}$$

где через ψ_p обозначены соответствующие спиноры (плоские волны). Вторые слагаемые здесь содержат позитронные операторы, которые в рассматриваемом случае в игре не участвуют. С учетом (6.72) произведение $j^\mu(x)j^\nu(x')$ представляется в виде суммы членов, каждый из которых содержит произведение двух операторов $a_{\mathbf{p}}$ и двух $a^+_{\mathbf{p}}$, которые должны обеспечить уничтожение электронов 1 и 2 и рождение электронов 3 и 4. Ясно, что это должны быть операторы a_1, a_2, a^+_3, a^+_4, которые "спариваются" с "внешними" операторами a^+_1, a^+_2, a_3, a_4 согласно очевидному равенству:

$$\langle 0|a_p a^+_p|0\rangle = 1\,. \tag{6.73}$$

Сами операторы, при этом, пропадают, остаются c-числа. В зависимости от того, из которых ψ-операторов берутся a_1, a_2, a^+_3, a^+_4 для спаривания с внешними a^+_1, a^+_2, a_3, a_4, из (6.71) возникают 4 слагаемых вида:

$$\begin{aligned}
&a_3^{\cdot\cdot\cdot}a_4^{\cdot}(\bar\psi^{\cdot}\gamma^\mu\psi^{\cdot\cdot})(\bar\psi'^{\cdot\cdot\cdot}\gamma^\nu\psi'^{\cdot\cdot\cdot\cdot})a_2^{+\cdot\cdot}a_1^{+\cdot\cdot\cdot\cdot} + a_3^{\cdot}a_4^{\cdot\cdot\cdot}(\bar\psi^{\cdot}\gamma^\mu\psi^{\cdot\cdot})(\bar\psi'^{\cdot\cdot\cdot}\gamma^\nu\psi'^{\cdot\cdot\cdot\cdot})a_2^{+\cdot\cdot\cdot\cdot}a_1^{+\cdot\cdot} + \\
&+a_3^{\cdot}a_4^{\cdot\cdot\cdot}(\bar\psi^{\cdot}\gamma^\mu\psi^{\cdot\cdot})(\bar\psi'^{\cdot\cdot\cdot}\gamma^\nu\psi'^{\cdot\cdot\cdot\cdot})a_2^{+\cdot\cdot}a_1^{+\cdot\cdot\cdot\cdot} + a_3^{\cdot\cdot\cdot}a_4^{\cdot}(\bar\psi^{\cdot}\gamma^\mu\psi^{\cdot\cdot})(\bar\psi'^{\cdot\cdot\cdot}\gamma^\nu\psi'^{\cdot\cdot\cdot\cdot})a_2^{+\cdot\cdot\cdot\cdot}a_1^{+\cdot\cdot}\,,
\end{aligned} \tag{6.74}$$

где $\psi = \psi(x)$ и $\psi' = \psi(x')$, а одинаковое количество точек выделяет спаренные фермиевские операторы. Теперь нужно в каждом из этих слагаемых последовательно переставить "спаренные" операторы $a_1, a_2, ...$ из ψ, записанных в виде (6.72), так чтобы они оказались рядом со своими внешними $a^+_1, a^+_2, ...$, чтобы можно было воспользоваться (6.73) и получить при вычислении вакуумного среднего просто произведение соответствующих средних. Учитывая антикоммутативность этих операторов (1,2,3,4 — различные состояния!), находим, что матричный элемент (6.69) равен[6]:

$$\begin{aligned}
\langle 34|Tj^\mu(x)j^\nu(x')|12\rangle &= (\bar\psi_4\gamma^\mu\psi_2)(\bar\psi'_3\gamma^\nu\psi'_1) + (\bar\psi_3\gamma^\mu\psi_1)(\bar\psi'_4\gamma^\nu\psi'_2) - \\
&- (\bar\psi_3\gamma^\mu\psi_2)(\bar\psi'_4\gamma^\nu\psi'_1) - (\bar\psi_4\gamma^\mu\psi_1)(\bar\psi'_3\gamma^\nu\psi'_2)\,,
\end{aligned} \tag{6.75}$$

где ψ уже не операторы, а соответствующие спиноры (плоские волны с импульсами 1,2,3,4)! Общий знак здесь условен, он зависит от порядка, в котором расположены "внешние" электронные операторы. Знак матричного элемента для рассеяния тождественных частиц вообще произволен. Первое и второе слагаемые в (6.75) (также, как и третье и четвертое) отличаются друг от друга лишь перестановкой индексов μ и ν и аргументов x и x'. Но такая перестановка не меняет матричный элемент (6.69), в котором порядок множителей все равно определяется символом T-упорядочения. Поэтому, после после перемножения (6.75) и (6.68) и интегрирования по d^4xd^4x' четыре члена из (6.75) дают попарно совпадающий результат, и мы имеем:

$$S_{fi} = ie^2\int d^4xd^4x' D_{\mu\nu}(x-x')[(\bar\psi_4\gamma^\mu\psi_2)(\bar\psi'_3\gamma^\nu\psi'_1) - (\bar\psi_4\gamma^\mu\psi_1)(\bar\psi'_3\gamma^\nu\psi'_2)] \tag{6.76}$$

Заметим, что множитель 2! сократился! С учетом того, что электронные функции здесь представляют собой плоские волны, можем написать, что выражение в квад-

[6] Ввиду антикоммутативности фермиевских операторов, операторы тока $j(x)$ и $j(x')$, составленные из их пар, можно считать, при вычислении матричного элемента, коммутирующими и опустить знак T-произведения.

$$e^2(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)D_{\mu\nu}(k)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1) =$$

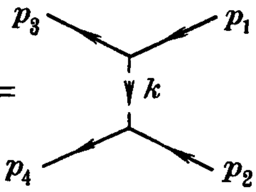


Рис. 6.4:

$$e^2(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(k')(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2) =$$

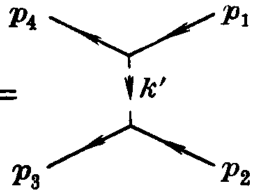


Рис. 6.5:

ратных скобках в (6.76) равно:

$$(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)e^{-i(p_2-p_4)x-i(p_1-p_3)x'} - (\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)e^{-i(p_1-p_4)x-i(p_2-p_3)x'} =$$
$$= \left\{(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)e^{-i[(p_2-p_4)+(p_3-p_1)]\xi/2} - (\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)e^{-i[(p_1-p_4)+(p_3-p_2)]\xi/2}\right\}$$
$$\times e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X}, \tag{6.77}$$

где мы ввели $\xi = x - x'$ и $X = \frac{1}{2}(x + x')$. Интегрирование в (6.76) по d^4xd^4x' заменяется теперь на $d^4\xi d^4X$. Интеграл по d^4X дает $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$, соответствующую закону сохранения 4-импульса. Переходя от S_{fi} к M_{fi} согласно (5.2), (5.3), (5.11), получим амплитуду рассеяния M_{fi} в виде:

$$M_{fi} = e^2[(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)D_{\mu\nu}(p_4 - p_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1) - (\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(p_4 - p_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)], \tag{6.78}$$

где

$$D_{\mu\nu}(k) = \int d^4\xi e^{ik\xi} D_{\mu\nu}(\xi) \tag{6.79}$$

— фотонный пропагатор в импульсном представлении.

Каждый из вкладов в амплитуду рассеяния в (6.78) может быть представлен соответствующей диаграммой Фейнмана. Например, первый член представляется диаграммой Рис. 6.4, где $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$. Аналогично, второе слагаемое представляется диаграммой Рис. 6.5, где $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$. Правила построения диаграмм аналогичны уже обсуждавшимся в Главе 4:

1. "Входящие" сплошные линии, направленные к вершине взаимодействия, отвечают начальным электронам, им сопоставляются биспиноры u. "Выходящие"

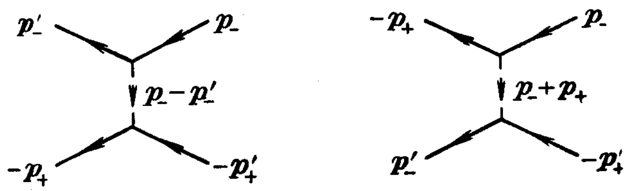


Рис. 6.6:

сплошные линии, направленные от вершин, соответствуют конечным электронам, этим линиям сопоставляются биспиноры $\bar{u}$. Эти множители записываются слева направо в порядке, соответствующем передвижению вдоль сплошных линий против направления стрелок.

2. Каждой вершине сопоставляется множитель $(-ie\gamma^\mu)$. Вершины соединяются фотонной линией, которой сопоставляется множитель $-iD_{\mu\nu}$. Для 4-импульсов всех частиц (линий) в вершинах выполняется закон сохранения. При этом, направление фотонной линии несущественно, оно лишь меняет знак импульса фотона k, но функция $D_{\mu\nu}(k)$ четная.

Две рассмотренные диаграммы отличаются друг от друга *обменом* двух электронных концов (p_3 и p_4), что соответствует обмену тождественных частиц в конечном состоянии, при этом происходит смена знака амплитуды рассеяния (принцип Паули!).

Рассмотрим теперь рассеяние электрона и позитрона, их начальные импульсы обозначим p_- и p_+, а конечные соответственно p'_- и p'_+. Операторы рождения и уничтожения позитронов входят в полевые операторы (6.72) вместе с соответствующими операторами уничтожения и рождения электронов. В рассмотренном выше случае рассеяния электронов, уничтожение начальных частиц обеспечивалось оператором ψ, а рождение конечных — оператором $\bar{\psi}$. Сейчас роли этих операторов меняются — сопряженная функция $\bar{\psi}(-p_+)$ описывает начальный позитрон, а конечный позитрон описывается функцией $\psi(-p_+)$. С учетом этого отличия, действуя как и выше, можно легко представить соответствующую амплитуду рассеяния в виде:

$$M_{fi} = -e^2(\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-))D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)(\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)) + \\ +e^2(\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-))D_{\mu\nu}(p_- + p_+)(\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+))\,, \tag{6.80}$$

что изображается диаграммами, показанными на Рис. 6.6. Правила составления диаграмм остаются прежними, входящим сплошным линиям сопоставляется биспинор u, а выходящим $\bar{u}$. Однако теперь входящие линии соответствуют *конечным*, а выходящие *начальным* позитронам, причем их импульсы берутся с обратным знаком. Это соответствует обсуждавшейся в Главе 4 фейнмановской картине позитрона, как электрона, распространяющегося обратно по времени. В первой диаграмме Рис. 6.6 в одной вершине пересекаются линии начального и конечного электронов, а во второй — позитронов, эта диаграмма описывает рассеяние электрона на позитроне. Во второй диаграмме в каждой из вершин встречаются электронная и позитронная линии, в верхней вершине происходит аннигиляция пары с испусканием виртуального фотона, а в нижней — рождение пары из этого фотона. Это различие отражается и в свойствах виртуальных фотонов. В первой диаграмме (канал рассеяния) 4-импульс виртуального фотона равен разности 4-импульсов двух электронов (или позитронов), поэтому $k^2 < 0$ (см. сноску в начале этого раздела). Во второй диаграмме (аннигиляционный канал) $k' = p_- + p_+$, а потому ${k'}^2 > 0$. Отметим, что для виртуального фотона всегда $k^2 \neq 0$, в отличие от реального, для которого всегда $k^2 = 0$.

6.5 Диаграммы Фейнмана для рассеяния фотона.

Рассмотрим теперь другой эффект второго порядка — рассеяние фотона на электроне (эффект Комптона). Пусть в начальном состоянии фотон и электрон имеют 4-импульсы k_1 и p_1, а в конечном k_2 и p_2 (а также и определенные поляризации, которые для краткости не указываем). При расчете матричного элемента $S^{(2)}$ по начальному и конечному состояниям, возникает фотонный матричный элемент вида:

$$\langle 2|TA_\mu(x)A_\nu(x)|1\rangle = \langle 0|c_2 TA_\mu(x)A_\nu(x')c_1^+|0\rangle\,, \tag{6.81}$$

где (ср. (3.41))

$$A_\mu = \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}} A_{k\mu} + c_{\mathbf{k}}^+ A_{k\mu}^*)\,. \tag{6.82}$$

В (6.81) проводим все спаривания “внешних” и “внутренних” фотонных операторов и получаем:

$$c_2^{\cdot} A_\mu^{\cdot} {A'}_\nu^{\cdot\cdot} c_1^{+\cdot\cdot} + c_2^{\cdot} A_\mu^{\cdot\cdot} {A'}_\nu^{\cdot} c_1^{+\cdot\cdot} = A_{2\mu}^* A'_{1\nu} + A_{1\mu} {A'}_{2\nu}^*\,. \tag{6.83}$$

Здесь мы учли коммутативность c_1 и c_2^+, и потому опустили знак T-упорядочения.

Аналогичным образом нужно рассмотреть и электронную часть матричного элемента:

$$\langle 2|Tj^\mu(x)j^\nu(x')|1\rangle = \langle 0|a_2 T(\bar\psi\gamma^\mu\psi)(\bar\psi'\gamma^\nu\psi')a_1^+|0\rangle\,. \tag{6.84}$$

Здесь опять фигурируют четыре ψ-оператора. Только два из них уничтожают электрон 1 и рождают электрон 2, т.е. спариваются с операторами a_1^+ и a_2. Это могут быть операторы $\bar\psi', \psi$ или $\psi', \bar\psi$, но не $\psi, \bar\psi$ или $\psi', \bar\psi'$, поскольку рождение и уничтожение в одной и той же точке x или x' двух реальных электронов (вместе с одним реальным фотоном) дает, очевидно, нуль. Производя все спаривания, получаем в матричном элементе (6.84) два слагаемых, которые выпишем сначала для случая $t > t'$:

$$a_2^{\cdot}(\bar\psi^{\cdot}\gamma^\mu\psi)(\bar\psi'\gamma^\nu\psi'^{\cdot\cdot})a_1^{+\cdot\cdot} + a_2^{\cdot}(\bar\psi\gamma^\mu\psi^{\cdot\cdot})(\bar\psi'^{\cdot}\gamma^\nu\psi')a_1^{+\cdot\cdot}\,. \tag{6.85}$$

В первом слагаемом спаривания дают:

$$a_2\bar\psi \to a_2 a_2^+ \bar\psi_2\,, \qquad \psi' a_1^+ \to a_1 a_1^+ {\psi'}_1\,. \tag{6.86}$$

Поскольку произведения $a_2 a_2^+$ и $a_1 a_1^+$ диагональны, они заменяются их средним по вакууму значением, т.е. единицей согласно (6.73). Для аналогичного преобразования второго слагаемого в (6.86) нужно сначала “протащить” оператор a_2^+ налево, а a_1 направо, что можно сделать с использованием правил коммутации, из которых следует, что:

$$\begin{gathered} \{a_p, \psi\}_+ = \{a_p^+, \bar\psi\}_+ = 0\,, \\ \{a_p, \bar\psi\}_+ = \bar\psi_p\,, \qquad \{a_p^+, \psi\}_+ = \psi_p\,, \end{gathered} \tag{6.87}$$

где в правой части последних двух соотношений появились спиноры, соответствующие плоским волнам с 4-импульсом p (ср. (6.72)). В результате (6.85) преобразуется к виду:

$$\langle 0|(\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi_1') - (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}_2'\gamma^\nu\psi')|0\rangle \quad \text{при} \quad t > t', \tag{6.88}$$

где ψ без индекса — операторы, а ψ_1, ψ_2 опять просто спиноры (плоские волны) с соответствующими импульсами. Аналогичным образом, при $t < t'$ получаем выражение, отличающееся перестановкой штрихов и индексов μ и ν:

$$\langle 0| - (\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi_1')(\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi) + (\bar{\psi}_2'\gamma^\nu\psi')(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_1)|0\rangle \quad \text{при} \quad t < t'. \tag{6.89}$$

Оба выражения (6.88) и (6.89) можно записать единым образом, введя следующее определение хронологического (T-упорядоченного) произведения фермиевских операторов:

$$T\psi(x)\bar{\psi}(x') = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x'), & t' < t, \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x), & t' > t. \end{cases} \tag{6.90}$$

Тогда первые и вторые слагаемые в (6.88) и (6.89) объединяются в единой записи:

$$\bar{\psi}_2\gamma^\mu\langle 0|T\psi\bar{\psi}'|0\rangle\gamma^\nu\psi_1' + \bar{\psi}_2'\gamma^\nu\langle 0|T\psi'\bar{\psi}|0\rangle\gamma^\mu\psi_1. \tag{6.91}$$

Отметим, что в соответствии с определением (6.90) произведения операторов при $t < t'$ и $t > t'$ берутся с разными знаками. В этом отличие определения T-произведения для фермиевских операторов от введенного выше, что связано с антикоммутацией этих операторов, в отличие от коммутирующих билинейных форм, входящих в гамильтониан взаимодействия.

Определим теперь электронный пропагатор (функцию распространения) или функцию Грина, как биспинор второго ранга следующего вида:

$$G(x - x') = -i\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle. \tag{6.92}$$

Тогда интересующий нас электронный матричный элемент записывается как:

$$\langle 2|Tj^\mu(x)j^\nu(x')|1\rangle = i\bar{\psi}_2\gamma^\mu G(x - x')\gamma^\nu\psi_1' + +i\bar{\psi}_2'\gamma^\nu G(x' - x)\gamma^\mu\psi_1. \tag{6.93}$$

После умножения на фотонный матричный элемент (6.81), (6.83) и интегрирования по d^4xd^4x' оба члена в (6.93) дают одинаковый результат, так что:

$$S_{fi} = -ie^2\int d^4x\int d^4x'\bar{\psi}_2(x)\gamma^\mu G(x - x')\gamma^\nu\psi_1(x')\big[A_{2\mu}^*(x)A_{1\nu}(x') + A_{2\nu}^*(x')A_{1\mu}(x)\big]. \tag{6.94}$$

Подставляя для электронных и фотонных волновых функций плоские волны и выделяя, тем же способом, что и выше, δ-функцию, соответствующую закону сохранения 4-импульса, получаем амплитуду рассеяния в виде:

$$M_{fi} = -4\pi e^2\bar{u}_2[(\gamma e_2^*)G(p_1 + k_1)(\gamma e_1) + (\gamma e_1)G(p_1 - k_2)(\gamma e_2^*)]u_1, \tag{6.95}$$

где e_1 и e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, а $G(p)$ — электронный пропагатор в импульсном представлении. Два слагаемых этого выражения представляются фейнмановскими диаграммами, показанными на Рис. 6.7.

Входящим линиям (начальный фотон) сопоставляется множитель $\sqrt{4\pi}e$, а выходящим (конечный фотон) — множитель $\sqrt{4\pi}e^*$. Внутренняя сплошная линия отвечает виртуальному электрону, 4-импульс которого определяется законом сохранения

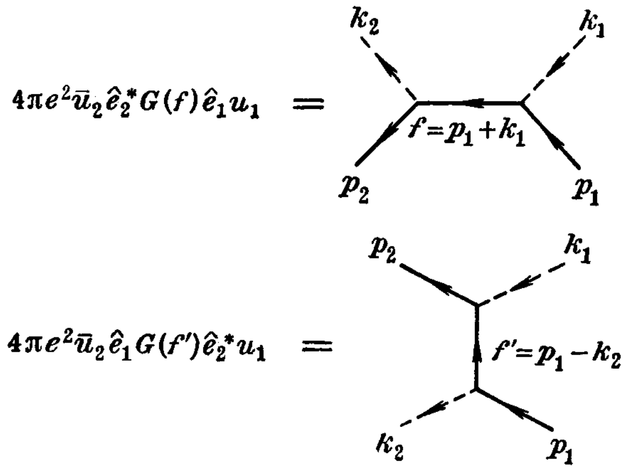


Рис. 6.7:

4-импульса в вершинах. Этой линии сопоставляется множитель $iG(f)$. В отличие от 4-импульса реальной частицы, квадрат 4-импульса виртуального электрона не лежит на его массовой поверхности, т.е. не равен m^2. Рассматривая инвариант f^2 в системе покоя электрона, легко показать, что:

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2 \,, \qquad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2 \,. \tag{6.96}$$

6.6 Электронный пропагатор.

Займемся теперь явным вычислением пропагаторов (функций Грина свободных частиц). По определению (6.92) электронный пропагатор есть:

$$G(x - x') = -i\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle \,.$$

Подействуем на него справа оператором $\gamma^\mu p_\mu - m$, где $p_\mu = i\partial_\mu$. Поскольку свободное поле $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(x) = 0$, то мы получим в результате нуль во всех точках x за исключением тех, в которых $t = t'$. Дело здесь в том, что $G(x - x')$ стремится к различным пределам при $t \to t' + 0$ и $t \to t' - 0$, поскольку согласно определению (6.92) эти пределы соответственно равны:

$$-i\langle 0|\psi(\mathbf{r}t)\bar{\psi}(\mathbf{r}'t)|0\rangle \quad \text{и} \quad +i\langle 0|\bar{\psi}(\mathbf{r}'t)\psi(\mathbf{r}t)|0\rangle \,, \tag{6.97}$$

так что при $t = t'$ функция Грина имеет конечный разрыв. Это приводит к появлению в производной $\partial G/\partial t$ дополнительного члена с δ-функцией:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\langle 0|T\frac{\partial \psi}{\partial t}\psi(x')|0\rangle + \delta(t - t')[G|_{t\to t'+0} - G|_{t\to t'-0}] \,. \tag{6.98}$$

Замечая, что в $\gamma^\mu p_\mu - m$ производная по t входит в виде $i\gamma^0\partial/\partial t$, имеем поэтому:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)G(x - x') = \delta(t - t')\gamma^0\langle 0| \left\{\psi(\mathbf{r}t), \bar{\psi}(\mathbf{r}'t)\right\}_+ |0\rangle \,. \tag{6.99}$$

Вычислим стоящий здесь антикоммутатор. Перемножая полевые операторы, заданные в виде (6.72) и используя коммутационные соотношения для $a_{\mathbf{p}}$ и $b_{\mathbf{p}}$, получим:

$$\left\{\psi(\mathbf{r},t),\bar{\psi}(\mathbf{r}'t)\right\}_+ = \sum_{\mathbf{p}}[\psi_p(\mathbf{r})\bar{\psi}_p(\mathbf{r}') + \psi_{-p}(\mathbf{r})\bar{\psi}_{-p}(\mathbf{r}')]\,, \tag{6.100}$$

где $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$ — плоские волны (биспиноры) без временного множителя. Но совокупность всех таких функций представляет полный набор, так что:

$$\sum_{\mathbf{p}}[\psi_p(\mathbf{r})\psi_p^*(\mathbf{r}') + \psi_{-p}(\mathbf{r})\psi_{-p}^*(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta_{ik} \tag{6.101}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера по спинорным индексам. Сумма, стоящая в правой части (6.100) отличается от (6.101) заменой ψ^* на $\psi^*\gamma^0$, так что:

$$\left\{\psi(\mathbf{r}t),\bar{\psi}(\mathbf{r}'t)\right\}_+ = \gamma^0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{6.102}$$

Подставляя (6.102) в (6.99) получим окончательно:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)G(x-x') = \delta(x-x')\,. \tag{6.103}$$

Таким образом, электронный пропагатор удовлетворяет уравнению Дирака с δ-функцией в правой части, т.е. действительно является функцией Грина для этого уравнения[7].

Рассмотрим снова фурье-образ функции Грина:

$$G(p) = \int d^4\xi e^{-ip\xi}G(\xi)\,. \tag{6.104}$$

Вычисляя фурье-компоненты от обеих сторон уравнения (6.103), найдем:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)G(p) = 1\,. \tag{6.105}$$

Решая это уравнение, получаем результат, который нам известен еще по Главе 4:

$$G(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2}\,. \tag{6.106}$$

Компоненты 4-вектора p в $G(p)$ являются независимыми переменными, они не связаны соотношением типа $p^2 \equiv p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Если записать знаменатель (6.106) в виде: $p_0^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2)$, то видно, что $G(p)$ как функция p_0 при заданном $\mathbf{p}$ имеет два полюса при $p_0 = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Тогда, при интегрировании по dp_0 в интеграле:

$$G(\xi) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\xi}G(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\mathbf{p}e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\int dp_0 e^{-ip_0\tau}G(p)\,, \quad (\tau = t-t') \tag{6.107}$$

возникает проблема обхода этих полюсов, также знакомая нам уже по Главе 4. Применим снова использовавшийся там подход Фейнмана. Вернемся к определению (6.92). Подставим в него ψ-операторы в виде (6.72), замечая, что отличны от

[7] Легко видеть, что величина $iG(x_1 - x_2)$ просто совпадает с введенной выше в Главе 4 фейнмановской функцией $K_+(2,1)$

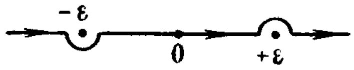


Рис. 6.8:

нуля вакуумные средние только от следующих произведений операторов рождения и уничтожения:

$$\langle 0|a_p a_p^+|0\rangle = 1\,, \qquad \langle 0|b_p b_p^+|0\rangle = 1\,. \tag{6.108}$$

Тогда получим:

$$G(x-x') = -i\sum_{\mathbf{p}} \psi_p(\mathbf{r}t)\bar{\psi}_p(\mathbf{r}'t') = -i\sum_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon(t-t')}\psi_p(\mathbf{r})\bar{\psi}_p(\mathbf{r}') \tag{6.109}$$

при $t-t'>0$. Соответственно:

$$G(x-x') = i\sum_{\mathbf{p}} \bar{\psi}_{-p}(\mathbf{r}'t')\psi_{-p}(\mathbf{r}t) = i\sum_{\mathbf{p}} e^{i\varepsilon(t-t')}\psi_{-p}(\mathbf{r})\bar{\psi}_{-p}(\mathbf{r}') \tag{6.110}$$

при $t-t'<0$. Видим, что как и Главе 4 при $t-t'>0$ вклад в G дают только электроны, а при $t-t'<0$ — только позитроны. Сравнивая (6.109) и (6.110) с (6.107) видим, что интеграл

$$\int dp_0 e^{-ip_0\tau}G(p) \tag{6.111}$$

в выражении (6.107) должен иметь множитель $e^{-i\varepsilon\tau}$ при $\tau>0$ и $e^{i\varepsilon\tau}$ при $\tau<0$. Этого можно добиться, если при вычислении (6.111) обходить полюса$p_0=\varepsilon$ и $p_0=-\varepsilon$ соответственно сверху и снизу в комплексной плоскости переменной p_0, как это показано на Рис. 6.8. В самом деле, при $\tau>0$ нужно (для сходимости!) замкнуть путь интегрирования по бесконечно удаленной полуокружности в нижней полуплоскости p_0, тогда значение интеграла (6.111) будет определяться вычетом в полюсе $p_0=+\varepsilon$. При $\tau<0$ замыкаем контур в верхней полуплоскости и интеграл определяется вычетом в полюсе $p_0=-\varepsilon$. Таким образом получается то, что требуется. Фейнмановское правило обхода полюсов можно, как мы уже видели в Главе 4, сформулировать и иначе: интегрирование по p_0 ведется вдоль самой вещественной оси, но к массе частицы m приписывается бесконечно малая отрицательная мнимая часть:

$$m \to m - i0\,. \tag{6.112}$$

Тогда

$$\varepsilon \to \sqrt{\mathbf{p}^2+(m-i0)^2} = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} - i0 = \varepsilon - i0\,. \tag{6.113}$$

Соответственно, полюса $p_0=\pm\varepsilon$ смещаются вниз и вверх от вещественной оси, как это показано на Рис. 6.9, так что интегрирование становится эквивалентным интегрированию вдоль контура Рис. 6.8[8].

[8]Полезно отметить, что правило сдвига полюсов соответствует тому, что $G(x-x')$ приобретает бесконечно малое затухание по $|\tau|$. Действительно, если записать значение p_0 в смещенных полюсах как $-(\varepsilon-i\delta)$ и $+(\varepsilon-i\delta)$, где $\delta\to+0$, то временной множитель в интеграле (6.111) будет равен $\exp(-i\varepsilon|\tau|-\delta|\tau|)$.

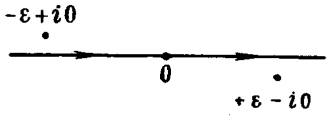


Рис. 6.9:

Рассматриваемое правило обхода полюсов соответствует известному соотношению:

$$\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)\,, \tag{6.114}$$

которое понимается в том смысле, что при интегрировании с какой-либо гладкой функцией $f(x)$ имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x \pm i0} = P \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} \mp i\pi f(0)\,, \tag{6.115}$$

где P обозначает интегрирование в смысле главного значения.

С учетом фейнмановского правила, электронный пропагатор в импульсном представлении записывается как:

$$G(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0}\,. \tag{6.116}$$

Эта функция Грина представляет собой произведение биспинорного множителя $\gamma^\mu p_\mu + m$ и скаляра:

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \tag{6.117}$$

Соответствующая координатная функция Грина $G^{(0)}(\xi)$ удовлетворяет уравнению:

$$(\Box - m^2)G^{(0)}(x - x') = \delta(x - x') \tag{6.118}$$

и является, таким образом, функцией Грина уравнения Клейна – Гордона. Очевидно, что она задает пропагатор скалярных частиц и может быть определена через скалярное поле как:

$$G^{(0)}(x - x') = -i\langle 0|T\varphi(x)\varphi^+(x')|0\rangle\,, \tag{6.119}$$

где

$$T\varphi(x)\varphi^+(x') = \begin{cases} \varphi(x)\varphi^+(x')\,, & t' < t\,, \\ \varphi^+(x')\varphi(x)\,, & t' > t \end{cases} \tag{6.120}$$

— определение T-произведения для бозевского поля.

6.7 Фотонный пропагатор.

При рассмотрении свободного электромагнитного поля мы представляли вектор-потенциал в виде разложения по поперечным плоским волнам. Такое описание не годится в случае произвольного электромагнитного поля. Это очевидно, например, из того, что в диаграммах рассеяния электронов нужно учитывать и их кулоновское взаимодействие, которое описывается скалярным потенциалом и заведомо не сводится к обмену поперечными виртуальными фотонами. Поэтому мы, казалось бы не имеем еще полного определения операторов A_μ и не можем непосредственно вычислить фотонный пропагатор по формуле:

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle\,. \tag{6.121}$$

Кроме того, калибровочная инвариантность в значительной мере лишает физического смысла операторы, которые можно ввести для "полного" описания электромагнитного поля. Однако оказывается, что можно провести некоторый общий анализ, который разрешает все эти вопросы [1].

Наиболее общий вид симметричного 4-тензора второго ранга, зависящего только от 4-вектора $\xi = x - x'$, есть:

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu}D(\xi^2) - \partial_\mu\partial_\nu D^l(\xi^2)\,, \tag{6.122}$$

где D и D^l — скалярные функции инварианта ξ^2. Соответственно, в импульсном представлении имеем:

$$D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}D(k^2) + k_\mu k_\nu D^l(k^2)\,, \tag{6.123}$$

где $D(k^2)$ и $D^l(k^2)$ — компоненты Фурье функций $D(\xi^2)$ и $D^l(\xi^2)$.

В выражениях для амплитуд рассеяния фотонная функция Грина всегда входит умноженной на матричные элементы токов переходов двух электронов, т.е. в комбинациях вида $j^\mu_{21}D_{\mu\nu}j^\nu_{43}$, что видно, например, из (6.78). В силу закона сохранения тока имеем $\partial_\mu j^\mu = 0$, так что матричные элементы тока удовлетворяют условию четырехмерной поперечности:

$$k_\mu j^\mu_{21} = 0\,, \tag{6.124}$$

где $k = p_2 - p_1$. Поэтому, физические результаты не изменятся при замене:

$$D_{\mu\nu} \to D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu\,, \tag{6.125}$$

где χ_μ — произвольные функции k. Этот произвол, фактически, соответствует произволу в выборе калибровки операторов поля. Поэтому, выбор функции $D^l(k^2)$ в (6.123) фактически произволен[9] и может производиться из соображений удобства. Нахождение функции Грина сводится, таким образом, к определению всего одной калибровочно инвариантной функции $D(k^2)$. Если рассмотреть заданное значение k^2 и выбрать ось z вдоль направления $\mathbf{k}$, то преобразования (6.125) не будут затрагивать $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$. Поэтому нам достаточно вычислить всего одну компоненту D_{xx}, пользуясь любой калибровкой потенциалов.

Удобно воспользоваться, как и выше, кулоновской калибровкой $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$, когда оператор $\mathbf{A}$ дается разложением:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\Big(c_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)}e^{-ikx} + c^+_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)*}e^{ikx}\Big)\,, \tag{6.126}$$

где $\omega = |\mathbf{k}|$, а $\alpha = 1, 2$ нумерует поляризации. Из всех средних по вакууму значений произведения операторов c, c^+ отличны от нуля лишь

$$\langle 0|c_{\mathbf{k}\alpha}c^+_{\mathbf{k}\alpha}|0\rangle = 1\,. \tag{6.127}$$

[9]Пусть $\delta D^l(k^2)$ — произвольное изменение функции $D^l(k^2)$. Тогда возникает $\delta D_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu \delta D^l \equiv k_\mu\chi_\nu$, где $\chi_\nu = k_\nu\delta D^l(k^2)$.

Тогда из определения (6.121) получаем:

$$D_{ik}(\xi) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{2\pi i}{\omega}\left(\sum_\alpha e_i^{(\alpha)}e_k^{(\alpha)*}\right)e^{-i\omega|\tau|+i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}}\,, \tag{6.128}$$

где i, k — трехмерные векторные индексы. Наличие в показателе экспоненты модуля $\tau = t - t'$ является следствием T-упорядочения полевых операторов в (6.121). Из (6.128) ясно, что подинтегральное выражение без множителя $e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}}$ является фурье - компонентой функции $D_{ik}(\mathbf{r}t)$. Для $D_{xx} = -D$ она равна:

$$\frac{2\pi i}{\omega}e^{-i\omega|\tau|}\sum_\alpha |e_x^{(\alpha)}|^2 = \frac{2\pi i}{\omega}e^{-i\omega|\tau|}\,. \tag{6.129}$$

Для нахождения $D_{xx}(k^2)$ осталось разложить эту функцию в интеграл Фурье по времени. Это разложение дается формулой:

$$\frac{2\pi i}{\omega}e^{-i\omega|\tau|} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{4\pi}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i0}e^{-ik_0\tau}\,. \tag{6.130}$$

Как показывалось выше, такое интегрирование подразумевает обход полюсов $k_0 = \pm|\mathbf{k}| = \pm\omega$ соответственно снизу и сверху, при этом при $\tau > 0$ интеграл определяется вычетом в полюсе $k_0 = +\omega$, а при $\tau < 0$ — вычетом в полюсе $k_0 = -\omega$. Таким образом находим окончательно:

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}\,. \tag{6.131}$$

Отсюда очевидно, что соответствующая функция в координатном представлении удовлетворяет уравнению:

$$\Box D(x - x') = -4\pi\delta(x - x')\,, \tag{6.132}$$

т.е. является функцией Грина волнового уравнения.

В большинстве случаев удобно выбрать $D^l = 0$, тогда фотонный пропагатор имеет вид:

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}g_{\mu\nu}\,, \tag{6.133}$$

что совпадает с результатом, полученным в Главе 4 и соответствует так называемой калибровке Фейнмана.

Иногда оказывается удобным положить $D^l = -D(k^2)/k^2$, так что

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\,, \tag{6.134}$$

что соответствует так называемой калибровке Ландау. При этом $D_{\mu\nu}k^\nu = 0$ и такой выбор аналогичен калибровке Лоренца, когда $k^\mu A_\mu = 0$.

Калибровке $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ аналогична калибровка пропагатора условием:

$$D_{ii}k^l = 0\,, \qquad D_{0l}k^l = 0\,, \tag{6.135}$$

что вместе с $D_{xx} = -D = -4\pi/k^2$ дает:

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \mathbf{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\mathbf{k}^2}\right)\,, \qquad D_{00} = -\frac{4\pi}{\mathbf{k}^2}\,, \qquad D_{0i} = 0\,, \tag{6.136}$$

так что D_{00} просто равно фурье-образу кулоновского потенциала.

Для массивных частиц спина $s = 1$ калибровочная инвариантность отсутствует и выбор пропагатора однозначен. Подставляя соответствующие операторы ψ_μ в определение:

$$G_{\mu\nu}(x - x') = -i\langle 0|T\psi_\mu(x)\psi^+_\nu(x')|0\rangle\,, \tag{6.137}$$

получим выражение, отличающееся от (6.128) только видом суммы по поляризациям, что эквивалентно учету трех независимых поляризаций массивного векторного поля. Опуская технические детали [1] укажем только, что в импульсном представлении пропагатор векторного поля равен:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{p^2 - m^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)\,. \tag{6.138}$$

6.8 Теорема Вика и общие правила диаграммной техники.

В рассмотренных выше простых примерах вычисления матричных элементов матрицы рассеяния уже были видны все принципиальные моменты диаграммного метода. Рассмотрим теперь общий случай. Матричный элемент S для перехода между любыми начальными и конечными состояниями совпадает со средним по вакууму значением от оператора, полученного умножением S справа на операторы рождения всех начальных частиц, а слева — на операторы уничтожения всех конечных частиц. Соответственно, в n-м порядке теории возмущений матричный элемент перехода имеет вид:

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = \frac{1}{n!}(-ie)^n \int d^4x_1...d^4x_n \tag{6.139}$$

$$\times\ \langle 0|...b_{2f}b_{1f}...a_{1f}...c_{1f}T(\bar{\psi}_1\gamma A_1\psi_1)...(\bar{\psi}_n\gamma A_n\psi_n)c^+_{1i}...a^+_{1i}...b^+_{1i}...|0\rangle\,.$$

Индексы $1i, 2i, ...$ нумеруют начальные частицы (отдельно электроны, позитроны и фотоны), а $1f, 2f, ...$ – конечные. Индексы $1, 2, ...$ у операторов ψ и A означают $\psi_1 = \psi(x_1)$ и т. п. Операторы ψ и A представляют собой линейные комбинации операторов рождения и уничтожения соответствующих частиц в различных состояниях. Таким образом в матричном элементе возникают средние по вакууму от произведений операторов рождения и уничтожения и их линейных комбинаций. Все эти операторы взяты в представлении взаимодействия, так что они подчиняются уравнениям движения и коммутационным соотношениям *свободных* частиц. Вычисление таких средних осуществляется с помощью *теоремы Вика*, к рассмотрению которой мы и переходим.

Теорема Вика.

Назовем *нормальным* произведение нескольких операторов

$$N(ABCD...XYZ)\,, \tag{6.140}$$

в котором все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения, а знак соответствует четности перестановки фермиевских операторов, приводящей произведение к такому виду. Вакуумное среднее от нормального произведения операторов, очевидно, равно нулю, кроме случая, когда под знаком нормального произведения стоит просто c-число. Назовем далее "спариванием" двух операторов разность

$$A^{\cdot}B^{\cdot} = T(AB) - N(AB)\,. \tag{6.141}$$

Легко видеть, что это выражение является c-числом, поскольку его правая часть либо равна нулю, либо совпадает с точностью до знака с коммутатором (антикоммутатором) операторов A и B. Теорема Вика утверждает, что T-произведение любого числа операторов можно выразить через всевозможные N-произведения со всеми возможными спариваниями:

$$\begin{aligned} T(ABCD...XYZ) = {} & N(ABCD...XYZ) + N(A^{\cdot}B^{\cdot}CD...XYZ) + \\ & + N(A^{\cdot}BC^{\cdot}D...XYZ) + ... + N(A^{\cdot}B^{\cdot\cdot}C^{\cdot\cdot\cdot}D...X^{\cdot}Y^{\cdot\cdot}Z^{\cdot\cdot\cdot}), \end{aligned} \tag{6.142}$$

т.е. хронологическое произведение операторов равно нормальному произведению плюс сумма нормальных произведений с одним спариванием (при этом пара выбирается всеми возможными способами), плюс сумма нормальных произведений с двумя спариваниями и т. д. Спаривание внутри нормального произведения является c-числом, которое с точностью до ± 1 определяется (6.141). Знак минус выбирается в том случае, когда перестановка, выводящая спаренные операторы из нормального произведения сводится к нечетной перестановке фермиевских операторов.

Для доказательства заметим, что одновременная перестановка операторов в обеих частях равенства (6.143) не нарушает этого соотношения. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что порядок времен операторов соответствуют их расположению в (6.143). Для того чтобы получить из T-произведения N-произведение, надо взять все операторы рождения и последовательно переставить их со всеми операторами уничтожения, стоящими левее их, пользуясь определением (6.141). При этом мы получим сумму N-произведений того типа, который написан в (6.143). Однако в нее будут входить спаривания только тех операторов, у которых порядок в T-произведении отличается от порядка в N-произведении. Но так как спаривания операторов, для которых оба порядка эквивалентны, равны нулю, можно считать, что в правую часть (6.143) входят нормальные произведения со всеми возможными спариваниями. Таким образом, теорема Вика доказана.

Теорема Вика облегчает вычисление средних значений произведения операторов по $|0\rangle$. Среднее значение нормального произведения операторов равно нулю, поэтому не обращающийся в нуль вклад дают только те члены в правой части (6.143), в которых все операторы спарены:

$$\begin{aligned} \langle 0|T(ABCD...XYZ)|0\rangle = {} & \langle 0|T(AB)|0\rangle\langle 0|T(CD)|0\rangle...\langle 0|T(YZ)|0\rangle \pm \\ & \pm \langle 0|T(AC)|0\rangle\langle 0|T(BD)|0\rangle...\langle 0|T(YZ)|0\rangle \pm ... , \end{aligned} \tag{6.143}$$

где мы учли, что

$$\langle 0|A^{\cdot}B^{\cdot}|0\rangle = \langle 0|T(AB)|0\rangle . \tag{6.144}$$

Таким образом среднее разбивается на сумму всех возможных произведений средних по основному состоянию от отдельных T-произведений пар операторов. Знак перед каждым членом соответствует четности перестановки фермиевских операторов. Из (6.143), в частности, следует, что среди операторов $A, B, C, D, ...$ обязательно должно быть четное число операторов каждого поля. Если вспомнить определение функций Грина, то становится ясно, что вакуумное среднее от T-произведения любого числа операторов поля выражается через сумму произведений свободных гриновских функций.

Применяя теорему Вика к матричному элементу (6.140), мы представим его в виде суммы членов, каждый из которых является произведением некоторых попарных средних. Среди них будут встречаться спаривания операторов $\psi, \bar{\psi}$ и A с “внешними” операторами рождения начальных или уничтожения конечных частиц. Эти

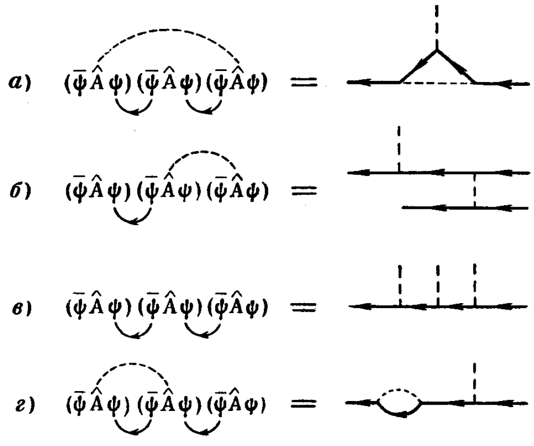


Рис. 6.10:

спаривания могут быть выражены через волновые функции начальных и конечных частиц как:

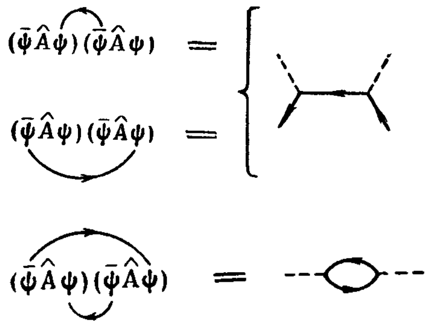
$$\begin{aligned} &\langle 0|Ac_p^+|0\rangle = A_p\,, \qquad &&\langle 0|c_pA|0\rangle = A_p^*\,, \\ &\langle 0|\psi a_p^+|0\rangle = \psi_p\,, \qquad &&\langle 0|a_p\bar\psi|0\rangle = \psi_p^*\,, \\ &\langle 0|b_p\psi|0\rangle = \psi_{-p}\,, \qquad &&\langle 0|\bar\psi b_p^+|0\rangle = \bar\psi_{-p}\,, \end{aligned} \tag{6.145}$$

где A_p, ψ_p — фотонные и электронные волновые функции с импульсом p. Поляризационные индексы для краткости опускаем. Будут встречаться также спаривания "внутренних" операторов, стоящих под знаком T-произведения. Эти спаривания заменяются соответствующими пропагаторами.

Каждый из членов суммы, на которую разбивается матричный элемент S-матрицы в результате его раскрытия по теореме Вика, изображается некоторой диаграммой Фейнмана. В диаграмме n-го приближения имеется n вершин, каждой из которых ставится в соответствие одна из переменных интегрирования $x_1, x_2, ...$. В каждой вершине сходится три линии — две сплошных (электронных) и одна пунктирная (фотонная), которым соответствуют электронные (ψ и $\bar\psi$) и фотонный (A) операторы, как функции одной и той же переменной x. При этом ψ соответствует входящая линия, а $\bar\psi$ — выходящая.

Для иллюстрации приведем несколько примеров соответствия между членами матричного элемента третьего порядка и диаграммами. Опуская знак интеграла и T-упорядочения, а также множители $-ie\gamma$ и не выписывая аргументов у операторов, напишем эти члены в символическом виде, показанном на Рис. 6.10. где спаривания показаны, как это часто делается, линиями, соединяющими соответствующие полевые операторы. Заметим, что для внутренних фотонных сверток направление фотонных линий не имеет значения, что связано с четностью фотонного пропагатора как функции $x - x'$.

Среди получаемых таким образом членов есть эквивалентные, отличающиеся только перестановкой номеров вершин — соответствием между вершинами и номерами переменных $x_1, x_2, ...$, т.е. простым переобозначением переменных интегрирования. Число таких перестановок равно $n!$. Оно сокращает множитель $1/n!$ в (6.140),



caption

Рис. 6.11:

после чего учитывать диаграммы с перестановкой вершин уже не надо. Например, эквивалентны две диаграммы второго порядка, показанные на Рис. 6.8. На Рис. 6.10 и Рис. 6.8 изображены только внутренние спаривания, которым соответствуют внутренние линии диаграмм (виртуальные электроны и фотоны). Оставшиеся свободными операторы спариваются с теми или иными внешними операторами, в результате чего устанавливается соответствие между свободными концами диаграмм и теми или иными начальными и конечными частицами. Например, $\bar{\psi}$, спариваясь с операторами a_f или b_i^+, дает линию конечного электрона или начального позитрона, а ψ, спариваясь с a_i^+ или b_f, — линию начального электрона или конечного позитрона. Свободный оператор A, спариваясь с c_i^+ или с c_f, может соответствовать как начальному, так и конечному фотону. Таким образом получается несколько топологически одинаковых (т.е. состоящих из одинакового числа одинаково расположенных линий) диаграмм, отличающихся только перестановками начальных и конечных частиц по входящим и выходящим свободным концам. Любая такая перестановка эквивалентна определенной перестановке внешних операторов $a, b, ...$. Ясно, что если среди начальных или конечных частиц имеются тождественные фермионы, то относительный знак диаграмм, отличающихся нечетным числом перестановок свободных концов, должен быть противоположным.

Неперекрывающаяся последовательность сплошных линий на диаграммах составляет электронную линию, вдоль которой стрелки сохраняют непрерывное направление. У нее может быть либо два свободных конца, либо она может образовать петлю, как это показано на Рис. 6.11. Сохранение направления вдоль электронной линии является графическим выражением закона сохранения заряда: "входящий" в каждую вершину заряд равен "выходящему". Расположение биспинорных индексов вдоль непрерывной электронной линии соответствует записи матриц слева направо при движении против стрелок. Биспинорные индексы разных электронных линий никогда не перепутываются. Вдоль незамкнутой линии последовательность индексов заканчивается у свободных концов на электронных (или позитронных) волновых функциях. На замкнутой петле последовательность индексов тоже замыкается, так что петле соответствует след произведения расположенных вдоль нее матриц. Легко видеть, что этот след всегда надо брать со знаком минус. В самом деле, петле с k вершинами отвечает совокупность k спариваний:

$$(\bar{\psi}^{\cdot} A\psi^{\cdot\cdot})(\bar{\psi}^{\cdot\cdot} A\psi^{\cdot\cdot\cdot})...(\bar{\psi}^{\cdot\cdot\cdot} A\psi^{\cdot}) \tag{6.146}$$

или другая эквивалентная, отличающаяся перестановкой вершин. В $(k-1)$-й свертке операторы ψ и $\bar{\psi}$ уже стоят рядом в том порядке ($\bar{\psi}$ справа от ψ), в котором они должны стоять в электронном пропагаторе. Операторы же, стоящие по краям, приводятся в соседство с помощью четного числа перестановок с другими ψ-операторами и после этого оказываются расположенными в порядке $\bar{\psi}\psi$. Поскольку $\langle 0|T\bar{\psi}'\psi|0\rangle = -\langle 0|T\psi\bar{\psi}'|0\rangle$, то замена этого спаривания соответствующим пропагатором связана с изменением общего знака всего выражения.

Переход к импульсному представлению приводит к тому, что наряду с общим законом сохранения 4-импульса, должен соблюдаться также и закон сохранения в каждой вершине. Однако этих законов может оказаться *недостаточно* для однозначного определения импульсов всех внутренних линий диаграмм. В таких случаях по всем оставшимся неопределенными внутренним импульсам проводятся интегрирования $d^4p/(2\pi)^4$.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда в задаче фигурирует внешнее электромагнитное поле (ср. Главу 4), т.е. поле, создаваемое "пассивными" частицами, состояние которых в процессе рассеяния не изменяется (это могут быть тяжелые "классические" заряды). Пусть $A^{(e)}(x)$ — 4-потенциал внешнего поля. Он входит в лагранжиан взаимодействия вместе с фотонным оператором A в виде суммы $A + A^{(e)}$. Поскольку $A^{(e)}$ является классическим c-числовым полем, то оно не содержит никаких операторов и не может спариваться с другими операторами. Поэтому, внешнему полю в диаграммах Фейнмана будут соответствовать только внешние линии. Представим $A^{(e)}$ в виде интеграла Фурье:

$$A^{(e)}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} A^{(e)}(q)\,, \qquad A^{(e)}(q) = \int d^4x e^{iqx} A^{(e)}(x)\,. \tag{6.147}$$

В выражениях для матричных элементов в импульсном представлении 4-вектор q будет фигурировать наряду с 4-импульсами других внешних линий, отвечающих реальным частицам. Каждой такой линии внешнего поля сопоставляется множитель $A^{(e)}(q)$, причем линию нужно рассматривать как "входящую" в соответствии со знаком в показателе e^{-iqx}, с которым $A^{(e)}(q)$ входит в интеграл Фурье ("выходящей" линии надо было бы сопоставить $A^{(e)*}(q)$). Если при этом закон сохранения 4-импульса, при заданных 4-импульсах всех реальных частиц, не фиксирует однозначно 4-импульсы всех линий внешнего поля, то по оставшимся "свободными" q производится интегрирование $d^4q/(2\pi)^4$, как и по всем другим не фиксированным 4-импульсам данной диаграммы.

Если внешнее поле не зависит от времени, то

$$A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0)A^{(e)}(\mathbf{q})\,, \tag{6.148}$$

где $A^{(e)}(\mathbf{q})$ — трехмерная компонента Фурье:

$$A^{(e)}(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{r} A^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\,. \tag{6.149}$$

Внешней линии тогда сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q})$ и ей приписывается 4-импульс $q^\mu = (0, \mathbf{q})$. Энергии электронных линий, пересекающихся (вместе с линией внешнего поля) в вершине, при этом одинаковы в силу закона сохранения. По всем оставшимся нефиксированными трехмерным импульсам $\mathbf{p}$ внутренних линий производится интегрирование $d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3$.

Дадим теперь сводку окончательных правил диаграммной техники, по которым в квантовой электродинамике составляется выражение для амплитуды рассеяния (точнее для iM_{fi}) в импульсном представлении:

1. Вкладу n-го порядка теории возмущений отвечают диаграммы с n вершинами, в каждой из которых сходятся одна входящая и одна выходящая электронные (сплошные) линии и одна фотонная (пунктирная) линия. В амплитуду процесса рассеяния входят все диаграммы, имеющие свободные концы (внешние линии), соответствующие начальным и конечным частицам.

2. Каждой внешней входящей сплошной линии сопоставляется амплитуда начального электрона $u(p)$ или конечного позитрона $u(-p)$. Каждой выходящей сплошной линии сопоставляется амплитуда конечного электрона $\bar{u}(p)$ или начального позитрона $\bar{u}(-p)$.

3. Каждой вершине сопоставляется 4-вектор $-ie\gamma^\mu$.

4. Каждой внешней входящей пунктирной линии сопоставляется амплитуда начального фотона $\sqrt{4\pi}e_\mu$, а выходящей линии — амплитуда $\sqrt{4\pi}e_\mu^*$ конечного фотона. Векторный индекс μ совпадает с индексом матрицы γ^μ в соответствующей вершине, так что возникает скалярное произведение.

5. Каждой внутренней сплошной линии сопоставляется множитель $iG(p)$, а внутренней пунктирной линии — множитель $-iD_{\mu\nu}(p)$. Тензорные индексы $\mu\nu$ совпадают с индексами матриц γ^μ, γ^ν в вершинах, соединяемых пунктирной линией.

6. Вдоль каждой непрерывной последовательности электронных линий стрелки имеют неизменное направление, а расположение биспинорных индексов вдоль них соответствует записи матриц слева направо при движении против стрелок. Замкнутой электронной петле отвечает шпур произведения расположенных вдоль нее матриц.

7. В каждой вершине 4-импульсы пересекающихся в ней линий удовлетворяют закону сохранения, т.е. сумма импульсов входящих линий равна сумме импульсов выходящих линий. Импульсы свободных концов — заданные (с соблюдением общего закона сохранения) величины, причем позитронной линии приписывается импульс $-p$. По импульсам внутренних линий, остающихся нефиксированными после учета законов сохранения во всех вершинах, производится интегрирование $d^4p/(2\pi)^4$.

8. Входящему свободному концу, отвечающему внешнему полю, сопоставляется множитель $A^{(e)}(q)$, при этом 4-вектор q связан с 4-импульсами других линий законом сохранения в вершине. Если поле не зависит от времени, то свободному концу сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q})$, а по оставшимся нефиксированными трехмерным импульсам внутренних линий проводится интегрирование $d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3$.

9. Каждой замкнутой фермионной петле сопоставляется дополнительный множитель (-1). Если среди начальных или конечных частиц имеется несколько электронов или позитронов, то относительный знак диаграмм, отличающихся нечетным числом перестановок пар тождественных частиц (т.е. соответствующих им внешних концов), должен быть противоположным.

Напомним, что при наличии тождественных фермионов общий знак амплитуды условен.

Глава 7

ТОЧНЫЕ ПРОПАГАТОРЫ И ВЕРШИННЫЕ ЧАСТИ

7.1 Операторы полей в гейзенберговском представлении, связь с представлением взаимодействия.

Выше последовательные члены ряда теории возмущений выражались через операторы полей в представлении взаимодействия, временная зависимость которых определяется гамильтонианом системы свободных частиц H_0. Точные амплитуды рассеяния удобнее выражать через полевые операторы в гейзенберговском представлении, в котором зависимость от времени определяется полным гамильтонианом системы взаимодействующих частиц $H = H_0 + H_I$. По общему правилу составления гейзенберговских операторов имеем:

$$\psi(x) \equiv \psi(\mathbf{r}t) = \exp(iHt)\psi(\mathbf{r})\exp(-iHt) \tag{7.1}$$

и аналогично для $\bar{\psi}(x)$ и $A_\mu(x)$, причем здесь $\psi(\mathbf{r})$ – не зависящие от времени (шредингеровские) операторы. Гейзенберговские операторы, взятые в одинаковые моменты времени удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и операторы в шредингеровском представлении и представлении взаимодействия. В самом деле, имеем, например:

$$\left\{\psi(\mathbf{r}t), \bar{\psi}(\mathbf{r}'t)\right\}_+ = \exp(iHt)\left\{\psi(\mathbf{r}), \bar{\psi}(\mathbf{r}')\right\}_+ \exp(-iHt) = \gamma^0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,. \tag{7.2}$$

Аналогичным образом $\psi(\mathbf{r}t)$ и $A_\mu(\mathbf{r}t)$ коммутируют:

$$[\psi(\mathbf{r}t), A_\mu(\mathbf{r}'t)] = 0\,. \tag{7.3}$$

В различные моменты времени все это отнюдь не так!

Уравнение движение для гейзенберговского ψ-оператора имеет вид:

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi(x) - \psi(x)H \equiv [H, \psi(x)]\,. \tag{7.4}$$

Для самого гамильтониана шредингеровское и гейзенберговское представления совпадают и гамильтониан выражается одинаковым образом через полевые операторы в обоих этих представлениях.

При вычислении правой части (7.4) можно опустить в гамильтониане часть, зависящую только от оператора $A_\mu(x)$ (гамильтониан свободного электромагнитного поля), поскольку она коммутирует с ψ. Тогда:

$$H = \int d^3\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r}t)(\alpha\mathbf{p} + \beta m)\psi(\mathbf{r}t) + e\int d^3\mathbf{r}\bar{\psi}(\mathbf{r}t)\gamma^\mu A_\mu(\mathbf{r}t)\psi(\mathbf{r}t) =$$
$$= \int d^3\mathbf{r}\bar{\psi}(\mathbf{r}t)[\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m + e\gamma^\mu A_\mu(\mathbf{r}t)]\psi(\mathbf{r}t)\,. \tag{7.5}$$

Вычисляя коммутатор $[H,\psi(x)]$ с помощью (7.2) и устраняя δ-функцию интегрированием по $d^3\mathbf{r}$, получим уравнение движения для оператора ψ в явном виде:

$$(\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(\mathbf{r}t) = 0\,, \tag{7.6}$$

которое, естественно, совпадает с уравнением Дирака в электромагнитном поле.

Уравнения движения для электромагнитного потенциала $A_\mu(\mathbf{r}t)$ заранее очевидны из соответствия с классикой (большие числа заполнения), когда операторное уравнение должно перейти в обычные уравнения Максвелла для потенциалов, так что в произвольной калибровке имеем:

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu(x) = 4\pi e j^\nu(x)\,, \tag{7.7}$$

где $j^\nu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$ — оператор тока, удовлетворяющий уравнению непрерывности:

$$\partial_\nu j^\nu = 0\,. \tag{7.8}$$

Система уравнений (7.6) и (7.7) инвариантна относительно калибровочных преобразований:

$$A_\mu \to A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)\,, \qquad \psi(x) \to \psi(x)e^{ie\chi(x)}\,, \qquad \bar{\psi}(x) \to e^{-ie\chi(x)}\bar{\psi}(x)\,, \tag{7.9}$$

где $\chi(x)$ — произвольный эрмитов оператор, коммутирующий (в один и тот же момент времени) с ψ. Здесь речь идет именно о гейзенберговских операторах. В представлении взаимодействия калибровочное преобразование электромагнитного потенциала вообще не затрагивает ψ операторы!

Установим теперь связь между операторами в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия. В соответствии с адиабатической гипотезой предположим, что взаимодействие $H_I(t)$ медленно "включается" от момента $t = -\infty$ к конечным временам. Тогда при $t \to -\infty$ оба представления (гейзенберговское и взаимодействия) просто совпадают. Совпадают и соответствующие волновые функции (вектора состояний) Φ и Φ_{int}:

$$\Phi_{int}(t = -\infty) = \Phi\,. \tag{7.10}$$

С другой стороны, волновая функция в гейзенберговском представлении от времени вообще не зависит (вся временная зависимость на операторах!), а в представлении взаимодействия зависимость волновой функции от времени имеет, как мы видели, вид:

$$\Phi_{int}(t) = S(t,-\infty)\Phi_{int}(-\infty)\,, \tag{7.11}$$

где[1]

$$S(t_2,t_1) = T\exp\left\{-i\int_{t_1}^{t_2} dt\, H_I(t)\right\} \tag{7.12}$$

с очевидными свойствами:

$$S(t,t_1)S(t_1,t_0) = S(t,t_0)\,, \qquad S^{-1}(t,t_1) = S(t_1,t)\,. \tag{7.13}$$

Сравнивая (7.11) и (7.10) находим:

$$\Phi_{int}(t) = S(t,-\infty)\Phi\,, \tag{7.14}$$

[1] Заметим, что аналогичный оператор в предыдущей главе обозначался как $U(t_2,t_1)$.

что устанавливает связь волновых функций в обоих представлениях. Соответствующая формула преобразования операторов имеет вид:

$$\psi(\mathbf{r}t) = S^{-1}(t,-\infty)\psi_{int}(\mathbf{r}t)S(t,-\infty) = S(-\infty,t)\psi_{int}(\mathbf{r}t)S(t,-\infty) \tag{7.15}$$

и аналогично для $\bar{\psi}$ и A_μ. Эти формулы решают поставленную задачу.

7.2 Точный фотонный пропагатор.

Точный фотонный пропагатор определяется формулой:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle\,, \tag{7.16}$$

в которой $A_\mu(x)$ — гейзенберговские операторы поля, тогда как выше мы, фактически, рассматривали выражение:

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|TA^{int}_\mu(x)A^{int}_\nu(x')|0\rangle\,, \tag{7.17}$$

в которое входили операторы в представлении взаимодействия. Величину (7.17) обычно называют пропагатором свободных фотонов ("нулевой" функцией Грина).

Выразим теперь точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ через операторы в представлении взаимодействия. Пусть $t > t'$, тогда используя связь A_μ и A^{int}_μ типа (7.15) имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') &= i\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle = \\ &= i\langle 0|S(-\infty,t)A^{int}_\mu(x)S(t,-\infty)S(-\infty,t')A^{int}_\nu(x')S(t',-\infty)|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{7.18}$$

Используя (7.13) имеем:

$$S(t,-\infty)S(-\infty,t') = S(t,t')\,, \qquad S(-\infty,t) = S(-\infty,+\infty)S(\infty,t)\,. \tag{7.19}$$

Тогда (7.19) записывается как:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|S^{-1}[S(\infty,t)A^{int}_\mu(x)S(t,t')A^{int}_\nu(x')S(t',-\infty)]|0\rangle\,, \tag{7.20}$$

где для краткости обозначено:

$$S = S(+\infty,-\infty) \tag{7.21}$$

и мы учли, что $S^{-1}(\infty,-\infty)S(\infty,t) = S(-\infty,t)$. Поскольку $S(t_2,t_1)$ содержит только операторы в моменты времени между t_1 и t_2, расположенные в хронологическом порядке, то очевидно, что вообще все операторные множители в квадратной скобке в (7.20) расположены в порядке убывания времен слева направо. Поставив перед скобкой символ T-упорядочения, можно потом произвольно переставлять порядок множителей, поскольку T-упорядочение все равно расставит их в нужном порядке. Тогда можно переписать эту скобку в виде:

$$T\left[A^{int}_\mu(x)A^{int}_\nu(x')S(\infty,t)S(t,t')S(t',-\infty)\right] = T\left[A^{int}_\mu(x)A^{int}_\nu(x')S\right]. \tag{7.22}$$

Таким образом получаем:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|S^{-1}TA^{int}_\mu(x)A^{int}_\nu(x')S|0\rangle\,. \tag{7.23}$$

Повторяя все рассуждения нетрудно убедиться, что эта формула справедлива и для $t < t'$.

Можно показать, что множитель S^{-1} выносится из под знака усреднения по вакууму в виде некоторого фазового множителя. Действительно, гейзенберговская волновая функция вакуума Φ^0 (как и всякая другая гейзенберговская функция) совпадает, согласно (7.10), со значением $\Phi^0_{int}(-\infty)$ волновой функции вакуума в представлении взаимодействия. С другой стороны, имеем:

$$S\Phi^0_{int}(-\infty) \equiv S(+\infty,-\infty)\Phi^0_{int}(-\infty) = \Phi^0_{int}(+\infty)\,. \tag{7.24}$$

Но вакуум (основное состояние), в устойчивой системе, представляет собой строго стационарное состояние, в нем невозможны самопроизвольные процессы рождения и уничтожения частиц. Иначе говоря, с течением времени вакуум остается вакуумом. Это означает, что $\Phi^0_{int}(+\infty)$ может отличаться от $\Phi^0_{int}(-\infty)$ только некоторым фазовым множителем $e^{i\alpha}$. Тогда:

$$S\Phi^0_{int}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi^0_{int}(-\infty) = \langle 0|S|0\rangle\Phi^0_{int}(-\infty) \tag{7.25}$$

или, производя комплексное сопряжение и учитывая унитарность S:

$$\Phi^{0*}_{int}(-\infty)S^{-1} = \langle 0|S|0\rangle^{-1}\Phi^{0*}_{int}(-\infty) \tag{7.26}$$

Отсюда ясно, что (7.23) может быть переписано в виде:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\frac{\langle 0|TA^{int}_\mu(x)A^{int}_\nu(x')S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}\,. \tag{7.27}$$

Подставляя сюда в числитель и знаменатель разложение S-матрицы в ряд теории возмущений, определяемое из (6.55), и проводя усреднение с помощью теоремы Вика, можно получить разложение $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по степеням константы связи e^2.

В числителе (7.27) усредняемые выражения отличаются от матричных элементов матрицы рассеяния, рассмотренных в предыдущей главе, лишь тем, что вместо "внешних" операторов рождения или уничтожения фотонов в них стоят операторы $A^{int}_\mu(x)$ и $A^{int}_\nu(x')$. Поскольку все множители в усредняемых произведениях стоят под знаком T-произведения, то попарные свертки этих операторов с "внутренними" операторами $A^{int}_\mu(x_1), A^{int}_\nu(x_2)$ будут давать фотонные пропагаторы $D_{\mu\nu}$. Таким образом, результаты усреднения выразятся совокупностями диаграмм с двумя внешними концами, составленными по приведенным в предыдущей главе правилам, с той разницей, что внешним (как и внутренним) фотонным линиям диаграммы отвечают теперь пропагаторы $D_{\mu\nu}$, вместо амплитуд реальных фотонов. В нулевом приближении, когда $S=1$, числитель (7.27) просто совпадает с $D_{\mu\nu}(x-x')$. Следующие отличные от нуля члены имеют порядок $\sim e^2$. Они изображаются диаграммами, содержащими два внешних конца и две вершины, показанными на Рис. 7.1. Вторая из этих диаграмм состоит из двух не связанных между собой частей: пунктирной линии (которой отвечает $-iD_{\mu\nu}$) и замкнутой петли. Это означает, что соответствующее данной диаграмме аналитическое выражение распадается на два независимых множителя. Прибавив к диаграммам Рис. 7.1 пунктирную линию нулевого приближения и "вынеся ее за скобку" получим, что с точностью до членов $\sim e^2$ числитель (7.27) изображается диаграммами Рис. 7.2. Выражение $\langle 0|S|0\rangle$ в знаменателе (7.27) представляет собой амплитуду "перехода" вакуум – вакуум. Его разложение в ряд

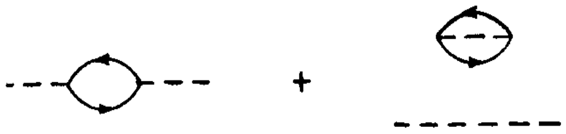


Рис. 7.1:

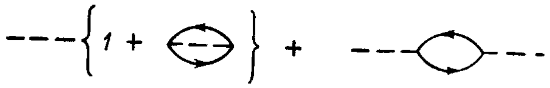


Рис. 7.2:

теории возмущений содержит поэтому лишь диаграммы без внешних концов. В нулевом приближении $\langle 0|S|0\rangle = 1$, а с точностью до членов $\sim e^2$ эта амплитуда выражается графически, как это показано на Рис. 7.3. Разделив с той же точностью $\sim e^2$ числитель (7.27) на знаменатель получим диаграммы, показанные на Рис. 7.4. так что вклад "вакуумных" членов (выделенных на рисунках фигурной скобкой) полностью сокращается. Таким образом несвязная диаграмма Рис. 7.1(б) выпадает из ответа. Этот результат имеет, на самом деле, общий характер. Поразбирая подробнее способ построения диаграмм, сопоставляемых числителю и знаменателю в (7.27), можно понять, что роль знаменателя $\langle 0|S|0\rangle$ сводится к тому, что в любом порядке теории возмущений точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ изображается только диаграммами, не содержащими отделенных друг от друга частей, или, как принято говорить, только *связными* диаграммами.

Заметим, что диаграммы без внешних концов (замкнутые петли) вообще не имеют физического смысла, поскольку такие петли представляют собой радиационные поправки к диагональному элементу S-матрицы, описывающему переходы вакуум - вакуум, тогда как мы уже отмечали, что сумма всех таких петель (вместе с 1 из нулевого приближения) дает лишь несущественный фазовый множитель, который не отражается на физических результатах.

Переход от координатного к импульсному представлению производится как обычно. Например, в порядке e^2, пропагатор $-i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$ дается графиками, показанными на Рис. 7.5, где сам этот пропагатор изображен жирным пунктиром в левой части. Аналитическое выражение, соответствующее этим диаграммам имеет вид:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + ie^2 D_{\mu\lambda}(k)\left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\gamma^\lambda G(p+k)\gamma^\rho G(p)\right] D_{\rho\nu}(k)\,. \tag{7.28}$$

Члены следующих порядков строятся аналогично и изображаются диаграммами с двумя внешними фотонными концами и нужным числом вершин, соответствующим

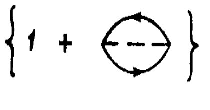


Рис. 7.3:

Рис. 7.4:

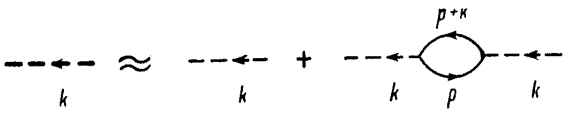


Рис. 7.5:

рассматриваемому порядку теории возмущений. Например, членам $\sim e^4$ отвечают диаграммы с четырьмя вершинами, показанные на Рис. 7.6. Четырьмя вершинами обладает также диаграмма, показанная на Рис. 7.7, в верхней части которой содержится электронная петля, образованная одной замкнутой "на себя" сплошной линией. Такая петля отвечает спариванию $\bar{\psi}(x)\gamma\psi(x)$, т.е. просто вакуумному среднему от тока: $\langle 0|j(x)|0\rangle$. Уже по самому определению вакуума эта величина должна тождественно обращаться в нуль, причем это тождество не может быть изменено никакими радиационными поправками к такой петле (хотя, кстати, прямое вычисление этой петли дает бесконечный результат!). Поэтому вообще никакие диаграммы с "замкнутыми" на себя электронными линиями не должны учитываться ни в каком порядке теории возмущений.

Часть диаграммы ("блок"), заключенную между двумя фотонными линиями (внешними или внутренними), называют фотонной *собственно-энергетической частью.* В общем случае такой блок еще сам может быть разделен на части, соединенные одной фотонной линией, как показано на Рис. 7.8, где кружки обозначают блоки, которые уже нельзя дальше разделить таким образом. Такие блоки называют *неприводимыми* (или одночастично неприводимыми). Обозначим сумму (бесконечного числа!) всех неприводимых фотонных собственно- энергетических частей как $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ и назовем ее *поляризационным оператором.* Классифицируя диаграммы по числу содержащихся в них полных неприводимых собственно-энергетических частей (поляризационных операторов), можно представить точный фотонный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в виде диаграммного ряда, показанного на Рис. 7.9, где каждому заштрихованному кружку сопоставляется $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$. В аналитическом виде это записывается

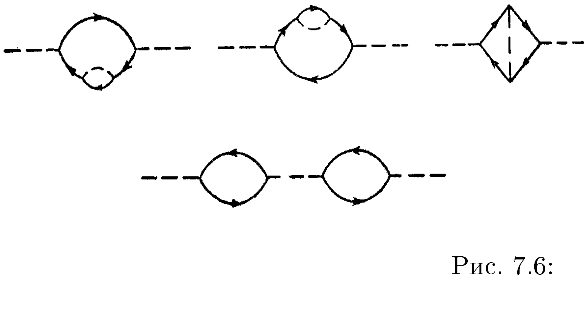


Рис. 7.6:

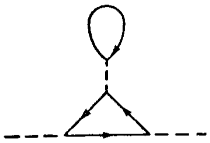


Рис. 7.7:

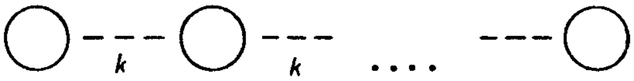


Рис. 7.8:

как:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + ... = \\ &= D\left\{1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi}\left[D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + ...\right]\right\}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Видим, что ряд в квадратных скобках снова дает полный ряд для $\mathcal{D}$. Поэтому получаем:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi}\mathcal{D}_{\rho\nu}(k). \tag{7.30}$$

Умножая это равенство слева на обратный тензор $(D^{-1})^{\tau\mu}$ и справа на $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$, получим:

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}_{\mu\nu}. \tag{7.31}$$

Все сказанное в предыдущей главе относительно тензорной структуры и калибровочной неоднозначности нулевого пропагатора $D_{\mu\nu}$ относится и к точному пропагатору $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Запишем его общий вид в форме:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \mathcal{D}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \mathcal{D}^l(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \tag{7.32}$$

где $\mathcal{D}^l(k^2)$ — произвольная функция, определяющаяся выбором калибровки. Для нулевого пропагатора аналогично можно написать:

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + D^l(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \tag{7.33}$$

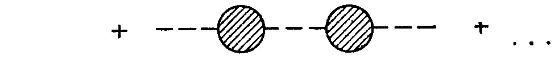


Рис. 7.9:

Рис. 7.10:

что формально отличается от вида, использовавшегося в предыдущей главе, но эквивалентно ему по сути, отличаясь лишь определением $D^l(k^2)$. Продольная часть пропагатора (второе слагаемое в этих формулах) связана с не имеющей физического смысла продольной частью 4-потенциала поля и не участвует во взаимодействии. Поэтому взаимодействие ее и не меняет, так что всегда можно считать, что

$$\mathcal{D}^l(k^2) = D^l(k^2)\,. \tag{7.34}$$

Введем теперь обратные тензоры, удовлетворяющие равенствам:

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\nu\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu}\,, \qquad D^{-1}_{\mu\nu}D^{\nu\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu}\,. \tag{7.35}$$

Для (7.32) и (7.33) обратные тензоры, с учетом (7.34), имеют вид:

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathcal{D}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^l}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\,, \tag{7.36}$$

$$D^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{D}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^l}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\,. \tag{7.37}$$

Отсюда следует, что поляризационный оператор представляет собой поперечный тензор:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\,,\right) \tag{7.38}$$

где $\mathcal{P}(k^2) = k^2 - 4\pi/\mathcal{D}(k^2)$, так что[2]

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2[1 - \mathcal{P}(k^2)/k^2]}\,. \tag{7.39}$$

Таким образом, в отличие от фотонного пропагатора, поляризационный оператор является калибровочно инвариантной величиной.

Иногда полезно ввести собственно-энергетическую часть фотона, определяемую как сумму всех, а не только неприводимых, графиков. Обозначим ее $i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$, тогда имеем:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda}\frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi}D_{\rho\nu}\,, \tag{7.40}$$

что изображается графиками Рис. 7.10. Выразив отсюда $\Pi_{\mu\lambda}$, получим:

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\lambda}\mathcal{D}^{\lambda\rho}D^{-1}_{\rho\nu} - D^{-1}_{\mu\nu} \tag{7.41}$$

и используя (7.32), (7.33), (7.36) и (7.37), получим:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\,, \qquad \Pi = \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}/k^2}\,. \tag{7.42}$$

Отсюда видно, что $\Pi_{\mu\nu}$, как и $\mathcal{P}_{\mu\nu}$, является калибровочно инвариантным тензором.

[2]Полезно заметить, что $\mathcal{P}(k^2) = \mathcal{P}^{\mu}_{\mu}(k^2)/3$.

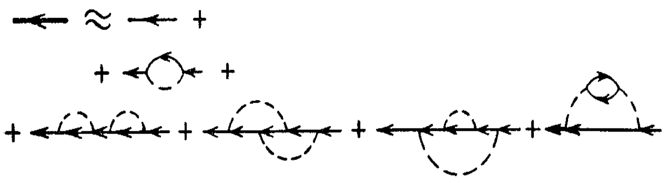


Рис. 7.11:

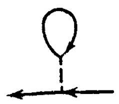


Рис. 7.12:

7.3 Точный электронный пропагатор.

Точный электронный пропагатор определяется формулой:

$$\mathcal{G}(x-x') = -i\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle\,, \tag{7.43}$$

отличающейся от пропагатора свободных частиц:

$$G(x-x') = -i\langle 0|T\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')|0\rangle \tag{7.44}$$

заменой ψ-операторов в представлении взаимодействия на гейзенберговские. Как мы видели выше на примере фотонного пропагатора, выражение (7.43) можно преобразовать к виду:

$$\mathcal{G}(x-x') = -i\frac{\langle 0|T\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}\,. \tag{7.45}$$

Разложение этого выражения по степеням e^2 приводит к представлению $\mathcal{G}$-функции в виде диаграммного ряда с двумя внешними электронными линиями и различным числом вершин. Роль знаменателя в (7.45) снова сводится к необходимости учитывать только диаграммы без изолированных вакуумных петель. С точностью до членов $\sim e^4$ графическое представление $\mathcal{G}$ показано на Рис. 7.11, где сам точный пропагатор обозначен жирной сплошной линией. Диаграммы типа Рис. 7.12 с замкнутыми "на себя" линиями, как отмечалось выше, учитывать не надо. В импульсном представлении жирной сплошной линии сопоставляется $i\mathcal{G}(p)$, а сплошным и пунктирным линиям — пропагаторы свободных частиц $iG(p)$ и $-iD(k)$.

Приведем формальное доказательство сокращения вакуумных диаграмм. Рассмотрим поправку n-го порядка к гриновской функции электрона (пропагатору), которой соответствует какая-то несвязная диаграмма. Она, очевидно, состоит из двух множителей. Первый из них включает все H_I, связанные с $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')$, т.е. соответствует связному блоку с внешними концами. Второй множитель описывает остальную часть диаграммы. Таким образом, выражение для рассматриваемой поправки равно:

$$-i\frac{(-i)^n}{n!}\int dt_1...\int dt_m\langle 0|T\left[\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')H_I(t_1)...H_I(t_m)\right]|0\rangle_c\,\times$$
$$\times\int dt_{m+1}...\int dt_n\langle 0|T(H_I(t_{m+1})...H_I(t_n))|0\rangle\,. \tag{7.46}$$

Здесь $\langle 0|...|0\rangle_c$ и $\langle 0|...|0\rangle$ соответствует некоторый вполне определенный набор спариваний по теореме Вика, причем символ $\langle ...\rangle_c$ означает, что в этом выражении спаривания дают связную диаграмму.

Нетрудно видеть, что среди диаграмм имеются такие, которые дают в точности одинаковый вклад. Действительно, если мы изменим спаривания так, что дело сведется просто к перестановке различных H_I между скобками $\langle ...\rangle_c$ и $\langle ...\rangle$, то это будет соответствовать просто переобозначению переменных интегрирования и не изменит величину поправки к $\mathcal{G}$. Число таких диаграмм равно числу разбиений n операторов H_I на группы из m и $n-m$ операторов, т.е. будет равно $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Полный вклад всех таких диаграмм будет равен:

$$-i\frac{(-i)^m}{m!}\int dt_1...\int dt_m\langle 0|T(\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')H_I(t_1)...H_I(t_m))|0\rangle_c\times$$
$$\times\frac{(-i)^{n-m}}{(n-m)!}\int dt_{m+1}...\int dt_n\langle 0|T(H_I(t_{m+1})...H_I(t_n))|0\rangle\,. \tag{7.47}$$

Просуммируем вклады от всех диаграмм, любых порядков, содержащих определенную связную часть и любые несвязные части. Очевидно, при этом получим:

$$-i\frac{(-i)^m}{m!}\int dt_1...\int dt_m\langle 0|T(\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')H_I(t_1)...H_I(t_m))|0\rangle_c\times$$
$$\times\left\{1-i\int dt_{m+1}\langle 0|H_I(t_{m+1})|0\rangle-\frac{1}{2}\int dt_{m+1}\int dt_{m+2}\langle 0|T(H_I(t_{m+1})H_I(t_{m+2}))|0\rangle+...\right.$$
$$\left....+\frac{(-i)^k}{k!}\int dt_{m+1}...\int dt_{m+k}\langle 0|T(H_I(t_{m+1})...H_I(t_{m+k}))|0\rangle+...\right\}\,. \tag{7.48}$$

Вернемся теперь к исходной формуле (7.45). Если разложить стоящую в знаменателе величину $\langle 0|S|0\rangle$ в ряд по степеням H_I, то получится в точности то же самое выражение, которое заключено в фигурные скобки в (7.48). Таким образом:

$$\langle 0|T\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')S|0\rangle=\langle 0|T\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')S|0\rangle_c\langle 0|S|0\rangle\,, \tag{7.49}$$

так что, согласно (7.45)

$$\mathcal{G}(x-x')=-i\langle 0|T\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')S|0\rangle_c\,, \tag{7.50}$$

что и требовалось доказать! Полученное правило справедливо при вычислении любого выражения типа (7.27) или (7.45) с произвольным количеством полевых операторов. На практике это означает, что можно вообще опустить множитель $\langle 0|S|0\rangle$ в знаменателе, если сразу договориться не учитывать несвязные диаграммы.

Дальнейшие упрощения возникают вследствие того, что все типы спариваний в выражении

$$-i\frac{(-i)^m}{m!}\int dt_1...\int dt_m\langle 0|T(\psi^{int}(x)\bar{\psi}^{int}(x')H_I(t_1)...H_I(t_m))|0\rangle_c\,, \tag{7.51}$$

отличающиеся только перестановкой H_I, дают одинаковый вклад. Благодаря этому можно опустить множитель $1/m!$ и учитывать только такие спаривания, которые приводят к *топологически* неэквивалентным диаграммам, т.е. таким, которые нельзя получить друг их друга перестановкой операторов H_I. Вклад от каждой такой диаграммы уже не содержит множителя, существенно зависящего от порядка диаграммы m. Благодаря этому каждая диаграмма может быть разбита на элементы, которые можно рассматривать отдельно как поправку к той или иной гриновской функции. К числу несущественных зависимостей от m относится, очевидно, множитель λ^m, где λ — константа. Такой множитель не мешает разбиению диаграммы на элементы (блоки). Наоборот, появление множителя типа $1/m$ уже препятствует такому разбиению и суммированию частей диаграммы по отдельности.

Блок, заключенный между двумя электронными линиями, называется *электронной собственно-энергетической частью.* Как и в фотонном случае, ее называют *неприводимой* (или одночастично неприводимой), если она не может быть разрезана на две другие собственно-энергетические части путем рассечения одной электронной линии. Сумму всех неприводимых собственно-энергетических частей обозначим $-i\mathcal{M}(p)$, эту величину называют еще *массовым оператором.* С точностью до членов $\sim e^4$ массовый оператор изображается графиками, показанными на Рис. 7.13. Путем

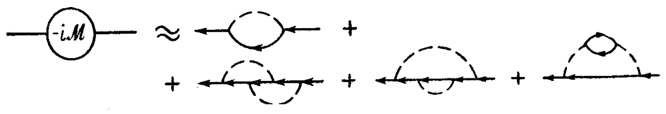


Рис. 7.13:

суммирования, аналогичного проведенному при выводе (7.30), получаем *уравнение Дайсона*:

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p)\mathcal{M}(p)\mathcal{G}(p) \tag{7.52}$$

или, для обратных матриц:

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{M}(p) = \gamma^\mu p_\mu - m - \mathcal{M}(p)\,. \tag{7.53}$$

Уравнение (7.30) также можно назвать уравнением Дайсона для фотонного пропагатора. Ниже мы еще не раз вернемся к обсуждению этих уравнений.

Гейзенберговские ψ-операторы (в отличие от ψ-операторов в представлении взаимодействия), как отмечалось выше *меняются* при калибровочных преобразованиях. Вместе с ними *не* является калибровочно инвариантным и точный электронный пропагатор $\mathcal{G}$. Ясно, что изменение $\mathcal{G}$ при калибровочных преобразованиях должно выражаться через ту же произвольную функцию D^l, которая добавляется при этом к фотонному пропагатору. Это ясно из того, что при вычислении $\mathcal{G}$ из диаграммного ряда теории возмущений, любой член ряда выражается через функции D и никаких других величин, связанных с электромагнитным полем в них просто нет. Мы можем делать любые предположения о свойствах оператора χ в (7.9), лишь бы ответ выражался через D^l. В результате преобразования (7.9) пропагаторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{G}$ переходят в:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to i\langle 0|T[A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)][A_\nu - \partial'_\nu\chi(x')]|0\rangle\,, \tag{7.54}$$

$$\mathcal{G} \to -i\langle 0|T\psi(x)e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}\bar{\psi}(x')|0\rangle\,. \tag{7.55}$$

Будем полагать, что операторы χ усредняются по вакууму независимо от остальных, что, естественно, основано на том, что в силу калибровочной инвариантности электродинамики “поле” χ не принимает никакого участия во взаимодействии. Положим также $\langle 0|\chi(x)|0\rangle = 0$. Тогда в (7.55) и (7.55) члены, содержащие χ, отделяются и мы получаем:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + i\langle 0|T\partial_\mu\chi(x)\partial'_\nu\chi(x')|0\rangle\,, \tag{7.56}$$

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}\langle 0|Te^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}|0\rangle\,. \tag{7.57}$$

Подчеркнем еще раз, что величины χ здесь являются *операторами.* Далее рассмотрим случай бесконечно малых калибровочных преобразований и введем $\delta\chi$ вместо χ. Преобразование (7.57), независимо от малости $\delta\chi$, можно записать в виде:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + \delta\mathcal{D}_{\mu\nu}\,, \qquad \delta\mathcal{D}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial'_\nu d^l(x-x')\,, \tag{7.58}$$

где

$$d^l(x-x') = i\langle 0|T\delta\chi(x)\delta\chi(x')|0\rangle\,. \tag{7.59}$$

Отсюда видно, что d^l определяет изменение при калибровочном преобразовании продольной части фотонного пропагатора $\mathcal{D}^l$.

В преобразовании (7.57) разложим экспоненты по степеням $\delta\chi$ с точностью до квадратичных членов, тогда:

$$\langle 0|Te^{ie\delta\chi(x)}e^{-ie\delta\chi(x')}|0\rangle \approx 1 - \frac{1}{2}e^2\langle 0|\delta\chi^2(x) + \delta\chi^2(x') - 2T\delta\chi(x)\delta\chi(x')|0\rangle\,. \tag{7.60}$$

С учетом определения (7.59) получаем:

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G} + \delta\mathcal{G}\,, \qquad \delta\mathcal{G} = ie^2\mathcal{G}(x - x')[d^l(0) - d^l(x - x')]\,. \tag{7.61}$$

В импульсном представлении это дает:

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}[\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p - q)]d^l(q)\,, \tag{7.62}$$

причем

$$q^2d^l(q) = \delta\mathcal{D}^l(q)\,. \tag{7.63}$$

Эти формулы дают общие правила калибровочных преобразований точных пропагаторов в квантовой электродинамике.

7.4 Вершинные части.

В сложных диаграммах можно, наряду с собственно-энергетическими частями, выделить также и не сводящиеся к ним блоки другого вида. Рассмотрим функцию:

$$K^\mu(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|TA^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)|0\rangle\,. \tag{7.64}$$

В силу однородности пространства-времени она зависит только от разностей своих аргументов. После перехода к представлению взаимодействия имеем:

$$K^\mu(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle 0|TA^\mu_{int}(x_1)\psi^{int}(x_2)\bar{\psi}^{int}(x_3)S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}\,. \tag{7.65}$$

В импульсном представлении можно написать:

$$K^\mu(p_2, p_1; k)(2\pi)^4\delta(p_1 + k - p_2) = \int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_3 e^{-ikx_1 + ip_2x_2 - ip_1x_3}K^\mu(x_1, x_2, x_3)\,. \tag{7.66}$$

В диаграммной технике функция K^μ описывается “треххвосткой”, показанной на Рис. 7.14, с одним фотонным и двумя электронными концами, 4-импульсы которых связаны законом сохранения:

$$p_1 + k = p_2\,. \tag{7.67}$$

Член нулевого порядка в разложении этой функции в ряд теории возмущений обращается в нуль, а член первого порядка в координатном представлении:

$$K^\mu(x_1, x_2, x_3) = e\int d^4xG(x_2 - x)\gamma_\nu G(x - x_3)D^{\nu\mu}(x_1 - x) \tag{7.68}$$

или, в импульсном представлении:

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = eG(p_2)\gamma_\nu G(p_1)D^{\nu\mu}(k)\,, \tag{7.69}$$

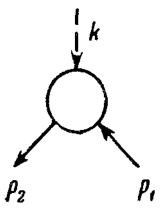


Рис. 7.14:

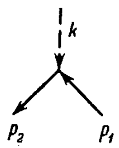


Рис. 7.15:

что изображается диаграммой Рис. 7.15.

В следующих порядках диаграммы усложняются за счет добавления новых вершин. Например в третьем порядке возникают диаграммы, показанные на Рис. 7.16. В первых трех диаграммах Рис. 7.16 выделяются очевидные собственно- энергетические части фотона и электронов. Но в четвертой диаграмме таких блоков нет. Это общая ситуация — поправки типа собственно-энергетических частей просто приводят к замене в (7.69) функций Грина G и D на $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$. Остальные члены разложения в сумме дают величину, изменяющую в (7.69) множитель γ^μ. Обозначая соответствующую величину через Γ^μ имеем, по определению:

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2)[-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)]i\mathcal{G}(p_1)\}\,[-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]\,. \tag{7.70}$$

Блок, соединенный с другими частями диаграммы одной фотонной и двумя электронными линиями называется *вершинной частью*, если этот блок нельзя разделить на части, соединенные между собой одной (электронной или фотонной) линией. Введенный выше блок Γ^μ представляет собой сумму всего множества вершинных частей, включая простую вершину γ^μ, называется вершинным оператором (или вершинной функцией). С точностью до членов пятого порядка он изображается диаграммами, показанными на Рис. 7.17. Все три импульса тут не могут одновременно относиться к реальным частицам: мы уже видели, что поглощение (излучение) фотона свободным электроном невозможно из-за законов сохранения 4-импульса.

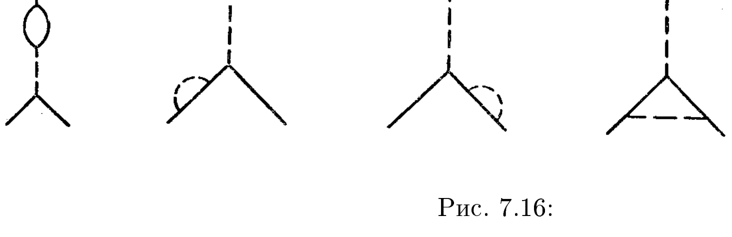


Рис. 7.16:

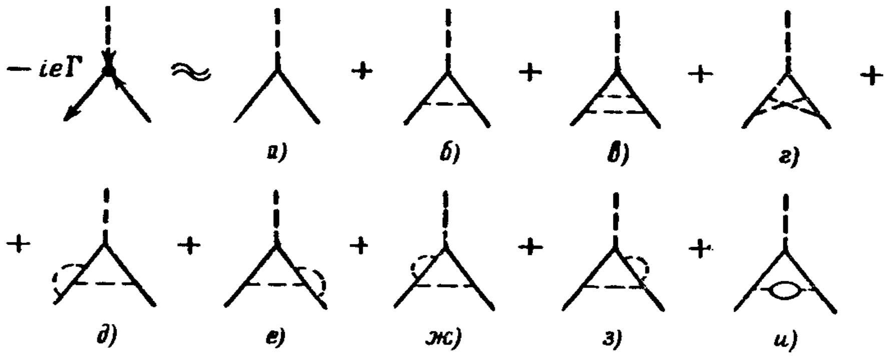


Рис. 7.17:

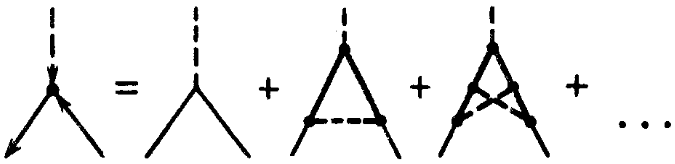


Рис. 7.18:

Поэтому, один из концов здесь заведомо должен относиться к виртуальной частице (или внешнему полю).

Можно ввести понятие компактной и некомпактной вершинной части. Компактными называются те, которые не содержат собственно-энергетических поправок к внутренним линиям, и в которых нельзя выделить частей, представляющих собой поправки к внутренним вершинам. Из графиков, показанных на Рис. 7.17, компактными являются только диаграммы (б) и (г). Графики (ж,з,и) содержат собственно-энергетические поправки к электронным или фотонным линиям. В диаграмме (в) верхний горизонтальный пунктир можно рассматривать как поправку к верхней вершине, а боковые пунктирные линии на диаграммах (д) и (е) можно считать поправками к боковым вершинам. Заменив в компактных диаграммах внутренние линии на жирные, а вершины заштрихованными кружками получим разложение вершинного оператора в виде, показанном на Рис. 7.18, который иногда называют разложением по "скелетным" диаграммам. Это разложение, фактически, дает интегральное уравнение для Γ, но с бесконечным числом членов в правой части — для вершин нельзя получить замкнутый аналог уравнений Дайсона, которые имеют место для функций Грина (пропагаторов).

Можно ввести также вершины с большим количеством внешних концов, например "четыреххвостку", показанную на Рис. 7.19. К такой диаграмме можно прийти рассмотрев функцию:

$$K(x_1, x_2; x_3, x_4) = \langle 0|T\psi(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\bar{\psi}(x_4)|0\rangle\,, \tag{7.71}$$

которую обычно называют *двухчастичной* функцией Грина. Она опять зависит только от разностей своих аргументов. Ее преобразование Фурье записывается в

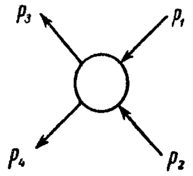


Рис. 7.19:

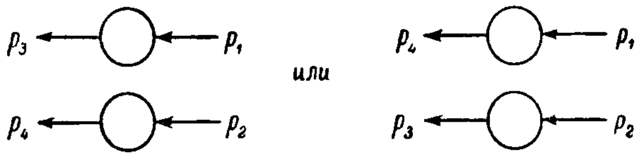


Рис. 7.20:

виде:

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 K(x_1,x_2;x_3,x_4) e^{i(p_3x_1+p_4x_2-p_1x_3-p_2x_4)} = \\ = (2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)K(p_3,p_4;p_1,p_2)\,, \qquad (7.72)$$

причем:

$$K(p_3,p_4;p_1,p_2) = (2\pi)^4\delta(p_1-p_3)\mathcal{G}(p_1)\mathcal{G}(p_2) - (2\pi)^4\delta(p_2-p_3)\mathcal{G}(p_1)\mathcal{G}(p_2) + \\ +\mathcal{G}(p_3)\mathcal{G}(p_4)[-i\Gamma(p_3,p_4;p_1,p_2)]\mathcal{G}(p_1)\mathcal{G}(p_2)\,. \qquad (7.73)$$

Первые два слагаемых здесь исключают из определения $\Gamma(p_3,p_4;p_1,p_2)$ графики типа показанных на Рис. 7.20. В третьем члене (7.73) множители $\mathcal{G}$ исключают из определения вершины Γ те диаграммы, которые представляют собой поправки к внешним электронным линиям. По свойствам T-произведения фермиевских операторов, вершина $\Gamma(p_3,p_4;p_1,p_2)$ обладает очевидными свойствами антисимметрии:

$$\Gamma(p_3,p_4;p_1,p_2) = -\Gamma(p_4,p_3;p_1,p_2) = -\Gamma(p_3,p_4;p_2,p_1)\,. \qquad (7.74)$$

Эта вершина может описывает процесс рассеяния двух электронов, его амплитуду можно найти, сопоставив внешним концам амплитуды начальных и конечных частиц (вместо пропагаторов $\mathcal{G}$):

$$iM_{fi} = \bar{u}(p_3)\bar{u}(p_4)[-ie\Gamma(p_3,p_4;p_1,p_2)]u(p_1)u(p_2)\,, \qquad (7.75)$$

причем Γ описывает все возможные процессы взаимодействия двух частиц во всех порядках теории возмущений.

7.5 Уравнения Дайсона.

Точные пропагаторы и вершинные части связаны между собой, как мы уже видели, определенными интегральными соотношениями. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

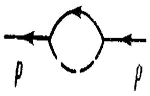


Рис. 7.21:

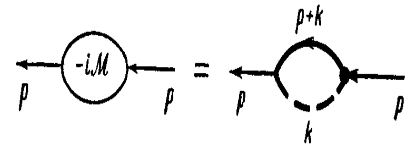


Рис. 7.22:

Рассмотрим графики для неприводимых собственно-энергетических частей электрона. Нетрудно сообразить, что из бесконечного множества этих диаграмм только одна, показанная на Рис. 7.21, является компактной в обсуждавшемся в предыдущем параграфе смысле, а любое ее усложнение может рассматриваться как введение поправок к одной из ее вершин. Ясно, что все вершинные поправки достаточно приписывать именно к одной (любой из двух) из ее вершин, оставляя другую "голой". Соответственно, сумма всех неприводимых собственно-энергетических частей (т.е. массовый оператор) можно изобразить всего одной скелетной диаграммой, показанной на Рис. 7.22. Соответствующее выражение в аналитическом виде имеет вид:

$$\mathcal{M}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{G}^{-1}(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k)\,. \tag{7.76}$$

Аналогичное выражение можно написать и для поляризационного оператора. Среди неприводимых фотонных собственно-энергетических частей также только одна является компактной, и поляризационный оператор представляется скелетной диаграммой, показанной на Рис. 7.23. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид:

$$\frac{1}{4\pi}\mathcal{P}_{\mu\nu}(k) = D^{-1}_{\mu\nu}(k) - \mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu}(k) = ie^2 Sp \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma_\nu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p)\,. \tag{7.77}$$

Уравнения (7.76) и (7.77) представляют собой одну из явных форм записи уравнений Дайсона (7.52) и (7.30), представляющих собой интегральные уравнения для точных пропагаторов и выражающие их через точные вершинные функции. Поскольку для вершинных частей аналогичные "замкнутые" интегральные уравнения

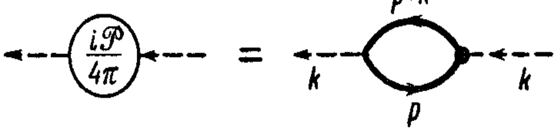


Рис. 7.23:

отсутствуют, то в практических случаях уравнения Дайсона можно решать, используя какие - либо аппроксимации для вершин, основанные, например, на том или ином выборочном суммировании фейнмановских диаграмм.

7.6 Тождество Уорда.

Существуют точные соотношения между пропагаторами и вершинными частями, более простые, чем уравнения Дайсона. Рассмотрим электронный пропагатор. Совершим калибровочное преобразование (7.9), полагая $\chi(x) = \delta\chi(x)$, где $\delta\chi(x)$ бесконечно малая *неоператорная* функция координат x. Тогда электронный пропагатор изменится на величину:

$$\delta\mathcal{G}(x,x') = ie\mathcal{G}(x-x')[\delta\chi(x) - \delta\chi(x')]\,. \tag{7.78}$$

Такое калибровочное преобразование нарушает однородность пространства-времени и функция $\delta\mathcal{G}$ зависит уже от x и x' по отдельности, а не только от $x - x'$. Ее разложение Фурье происходит поэтому по x и x' в отдельности, так что в импульсном представлении $\delta\mathcal{G}$ является функцией двух 4-импульсов:

$$\delta\mathcal{G}(p_2,p_1) = \int d^4x \int d^4x' \delta\mathcal{G}(x,x') e^{ip_2x - ip_1x'}\,. \tag{7.79}$$

Подставляя сюда (7.78) и интегрируя по $d^4xd^4\xi$ или $d^4x'd^4\xi$, где $\xi = x - x'$, получаем:

$$\delta\mathcal{G}(p+q,p) = ie\delta\chi(q)[\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p+q)]\,. \tag{7.80}$$

С другой стороны при том же калибровочном преобразовании к оператору вектор-потенциала электромагнитного поля $A_\mu(x)$ добавляется функция:

$$\delta A^{(e)}_\mu(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\chi\,, \tag{7.81}$$

которую можно рассмотреть как бесконечно малое *внешнее поле*. В импульсном представлении имеем:

$$\delta A^{(e)}_\mu(q) = iq_\mu\delta\chi(q)\,. \tag{7.82}$$

Величину $\delta\mathcal{G}$ можно вычислить и как изменение пропагатора под действием этого поля. С точностью до величин первого порядка по $\delta\chi$ это изменение изобразится одной скелетной диаграммой, показанной на Рис. 7.24, где жирный пунктир обозначает эффективную линию внешнего поля, которой сопоставляется множитель:

$$\delta A^{(e)}_\mu(q) + \delta A^{(e)}_\lambda(q)\frac{1}{4\pi}\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)\mathcal{D}_{\nu\mu}(q)\,, \tag{7.83}$$

учитывающий введение в нее собственно-энергетических поправок. Но 4-вектор $\delta A^{(e)}_\lambda(q)$ продолен (по отношению к q), а тензор $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$ поперечен (ср. (7.38, (7.42)). Поэтому второй член здесь просто обращается в нуль, так что фактически остается только вклад графика, показанного на Рис. 7.24, в котором линию внешнего поля можно считать "тонкой" и равной просто $\delta A^{(e)}_\mu(q)$. В аналитическом виде имеем:

$$\delta\mathcal{G}(p+q,p) = e\mathcal{G}(p+q)\Gamma^\mu(p+q,p;q)\mathcal{G}(p)\delta A^{(e)}_\mu(q)\,. \tag{7.84}$$

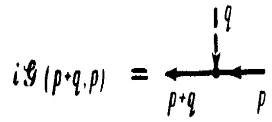


Рис. 7.24:

Подставляя сюда (7.82) и сравнивая с (7.80), находим:

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)q_\mu\Gamma^\mu(p+q,p;q)\mathcal{G}(p) \tag{7.85}$$

или, для обратных матриц:

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_\mu\Gamma^\mu(p+q,p;q)\,. \tag{7.86}$$

При $q \to 0$, сравнивая коэффициенты при бесконечно малом q_μ в обеих частях равенства, получим:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p,p;0) \tag{7.87}$$

— так называемое *тождество Уорда* в дифференциальной форме. Соотношение (7.86) представляет собой тождество Уорда для конечных q. Из (7.87) видно, что производная $\mathcal{G}^{-1}(p)$ по импульсу совпадает с вершинным оператором с нулевой передачей импульса. Производная от самой функции Грина $\mathcal{G}(p)$ равна:

$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu}i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p)[-i\Gamma^\mu(p,p;0)]i\mathcal{G}(p) \tag{7.88}$$

В нулевом приближении это тождество вообще очевидно, поскольку из $G^{-1} = \gamma^\mu p_\mu - m$ сразу следует $\frac{\partial G^{-1}}{\partial p_\mu} = \gamma^\mu$. Отсюда нетрудно получить и графический вывод этого тождества — из уравнения Дайсона (7.53) легко видеть, что дифференцирование обратной функции Грина по импульсу эквивалентно всевозможным вставкам линий фиктивного внешнего поля с нулевым передаваемым импульсом во все графики для неприводимой собственно-энергетической части, что генерирует все графики для соответствующей вершинной части. Тождество Уорда имеет огромное значение для проверки согласованности конкретных приближений в задачах квантовой теории поля.

Несколько более громоздким является вывод аналогичных тождеств для точной фотонной функции Грина (поляризационного оператора). Соответствующие детали можно найти в [1].

Глава 8

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

8.1 Рассеяние электрона на статическом заряде: поправки высших порядков.

В этой главе мы рассмотрим примеры расчета некоторых конкретных эффектов в рамках квантовой электродинамики, также как и ряд вопросов принципиального характера, относящихся к основам этой теории. Нужно заметить, что квантовая электродинамика является образцом чрезвычайно успешной теории взаимодействия элементарных частиц. Она дает возможность поразительно точных расчетов эффектов электромагнитного взаимодействия, результаты которых находятся в идеальном соответствии с современными экспериментами. Примеры детального анализа множества квантовоэлектродинамических задач можно найти в книгах [1, 2], здесь мы, в соответствии с характером нашего курса, ограничимся только рядом избранных вопросов. При этом детали вычислений, которые легко найти в литературе, будут по большей части просто опускаться. Выделяться будет только качественная сторона дела.

В качестве первого примера вернемся к уже рассматривавшейся в Главе 4 задаче о рассеянии электрона на статическом заряде ядра (резерфордовское рассеяние). В первом порядке теории возмущений этот процесс изображается графиком Рис. 8.1(a)[1], где статический заряд обозначен крестиком. В соответствии с общими правилами диаграммной техники, амплитуда этого процесса записывается в виде:

$$M_{fi} = -i\int d^4x \langle f|j_\mu(x)|i\rangle A^\mu(x)\,, \tag{8.1}$$

где матричный элемент тока перехода есть:

$$\langle f|j_\mu(x)|i\rangle = e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i e^{-iqx}\,, \tag{8.2}$$

[1]В первой половине данной главы, также, как в Главе 4, мы будем обозначать фотоны волнистыми линиями

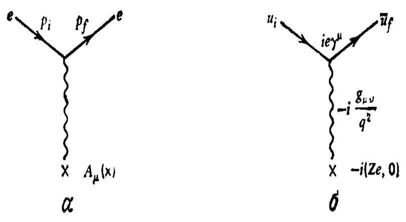


Рис. 8.1:

где $q = p_i - p_f$ и введены спиноры начального и конечного состояний электрона. Вектор-потенциал $A_\mu(x)$ описывает электромагнитное поле статического заряда. Соответственно, можно написать:

$$M_{fi} = -ie\bar{u}_f\gamma_\mu u_i A^\mu(q)\,, \tag{8.3}$$

где

$$A^\mu(q) = \int d^4x\, e^{-iqx} A^\mu(x)\,. \tag{8.4}$$

В случае статического заряда величина $A^\mu(x)$ не зависит от времени, поэтому:

$$A^\mu(q) = \int dt\, e^{-i(E_i - E_f)t} \int d^3\mathbf{r}\, e^{i\mathbf{qr}} A_\mu(\mathbf{r}) = 2\pi\delta(E_f - E_i)A^\mu(\mathbf{q})\,. \tag{8.5}$$

Статические уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla^2 A^\mu(\mathbf{r}) = -4\pi j^\mu(\mathbf{r})\,. \tag{8.6}$$

Тогда имеем:

$$A^\mu(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} j^\mu(\mathbf{q})\,. \tag{8.7}$$

Соответственно, из (8.3) и (8.5) получаем:

$$M_{fi} = -2\pi i\delta(E_f - E_i)e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} j^\mu(\mathbf{q})\,. \tag{8.8}$$

Чтобы не загромождать дальнейшие оценки, опустим δ-функцию закона сохранения энергии и определим амплитуду M как:

$$-iM = ie\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} j^\mu(\mathbf{q})\,. \tag{8.9}$$

При рассеянии на статическом заряде электрон испытывает отдачу и $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_f$, но энергия сохраняется и $E_i = E_f$, или $q_0 = 0$. Поэтому:

$$q^2 = -|\mathbf{q}|^2 < 0 \tag{8.10}$$

— пространственно подобный вектор рассеяния, а (8.9) переписывается в виде:

$$-iM = (ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i)\left(\frac{-4\pi i g_{\mu\nu}}{q^2}\right)(-ij^\nu(\mathbf{q}))\,. \tag{8.11}$$

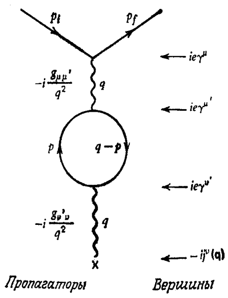


Рис. 8.2:

Здесь первый множитель описывает вершинную часть, а второй — фотонный пропагатор. Для статического ядра с зарядом Ze имеем:

$$j^0(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) = Ze\delta(\mathbf{r})\,, \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0\,, \tag{8.12}$$

так что

$$-iM = (ie\bar{u}_f\gamma^0 u_i)\left(\frac{-4\pi i}{q^2}\right)(-iZe)\,, \tag{8.13}$$

что изображается диаграммой Рис. 8.1(б) и, по сути дела, совпадает с (4.74). Эти формулы и описывают резерфордовское рассеяние, сечение которого (4.78):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |M|^2 \sim q^{-4} \sim \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\,, \tag{8.14}$$

где θ — угол рассеяния, который определяется из кинематики:

$$q^2 = (p_i - p_f)^2 \approx -2k^2(1-\cos\theta) = -4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,, \tag{8.15}$$

где мы пренебрегли массой электрона (по сравнению с массой ядра) и ввели $k \equiv |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$.

Такова картина рассеяния в первом порядке теории возмущений. Посмотрим к чему приводят высшие порядки (радиационные поправки). В качестве примера рассмотрим диаграмму третьего порядка, показанную на Рис. 8.2. Используя общие правила диаграммной техники нетрудно убедиться, что ей соответствует:

$$\begin{aligned} -iM \;&=\; (-1)(ie\bar{u}_f\gamma^{\mu}u_i)\left(-i\frac{4\pi g_{\mu\mu'}}{q^2}\right)\times \\ &\times \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}Sp\left\{(ie\gamma^{\mu'})\frac{i(\hat{p}+m)}{p^2-m^2}(ie\gamma^{\nu'})\frac{i(\hat{q}-\hat{p}+m)}{(q-p)^2-m^2}\right\}\left(-i\frac{4\pi g_{\nu'\nu}}{q^2}\right)(-ij^{\nu}(\mathbf{q}))\,. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Видно, что по сравнению с результатом первого порядка (8.11) здесь произошла очевидная модификация фотонного пропагатора, в котором появилась однопетлевая поляризационная "вставка", так что

$$\begin{aligned} -i\frac{4\pi g_{\mu\nu}}{q^2} \to -i\frac{4\pi g_{\mu\nu}}{q^2} + \left(-i\frac{4\pi g_{\mu\mu'}}{q^2}\right)I^{\mu'\nu'}\left(-i\frac{4\pi g_{\nu'\nu}}{q^2}\right) = \\ = -i\frac{4\pi g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{(-4\pi i)}{q^2}I_{\mu\nu}(q^2)\frac{(-4\pi i)}{q^2}\,, \end{aligned} \tag{8.17}$$

где

$$I_{\mu\nu}(q^2) = (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp \left\{ (ie\gamma^\mu) \frac{i(\hat{p}+m)}{p^2-m^2} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\hat{q}-\hat{p}+m)}{(q-p)^2-m^2} \right\} . \tag{8.18}$$

Сразу же видно, что при $|p| \to \infty$ интеграл в $I_{\mu\nu}$ содержит вклад (от поляризационной петли) вида $\int dp \frac{p^3}{p^2}$, казалось бы квадратично расходящийся на верхнем пределе. Это пример типичной расходимости, появляющейся в высших порядках теории возмущений практически в любой модели квантовой теории поля. Физическая природа расходимости связана, естественно, с точечным (локальным) характером взаимодействия полей в релятивистской теории. Фактически, эта расходимость здесь более слабая (логарифмическая), но проблема остается. Ниже мы сначала обсудим качественную сторону дела.

Прямые, но довольно громоздкие вычисления показывают [2], что $I_{\mu\nu}$ можно записать в виде:

$$I_{\mu\nu}(q^2) = -ig_{\mu\nu} q^2 I(q^2) + \ldots , \tag{8.19}$$

где

$$I(q^2) = \frac{e^2}{3\pi} \int\limits_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2e^2}{\pi} \int\limits_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right] , \tag{8.20}$$

а многоточием в (8.19) заменены члены пропорциональные $q_\mu q_\nu$, которые обращаются в нуль при вычислении тензорной свертки фотонного пропагатора с внешними зарядами (токами). Первое слагаемое в (8.19) как раз и выделяет логарифмическую расходимость поляризационной поправки [2].

Полезно выписать выражения для $I(q^2)$ в пределе больших и малых $(-q)^2$. Для придания определенного значения интегралу введем в первом члене (8.20) ***параметр обрезания*** Λ^2 (размерности квадрата импульса (массы), $\Lambda^2 \gg m^2$) на верхнем пределе. Тогда при $(-q^2) \ll m^2$ имеем:

$$\ln \left[1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right] \approx -\frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \tag{8.21}$$

и соответственно:

$$I(q^2) \approx \frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \frac{e^2}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} . \tag{8.22}$$

При $(-q^2) \gg m^2$ имеем:

$$\ln \left[1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right] \approx \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) , \tag{8.23}$$

так что:

$$I(q^2) \approx \frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) = \frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) . \tag{8.24}$$

Тогда амплитуду рассеяния с учетом однопетлевой поправки можно записать при $(-q^2) \ll m^2$ в следующем виде[3]:

$$-iM = (ie\bar{u}_f \gamma_0 u_i) \left(-\frac{4\pi i}{q^2} \right) \left[1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{e^2}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + O(e^4) \right] (-iZe) . \tag{8.25}$$

---

[2]Логарифмический, а не квадратичный, характер расходимости связан здесь с некоторой "скрытой" алгеброй подинтегрального выражения [2].

[3]Напомним, что разложение в ряд теории возмущений идет здесь по безразмерному параметру $e^2 \to \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$.

Это выражение можно *с той же точностью* переписать как:

$$-iM = (ie_R\bar{u}_f\gamma_0 u_i)\left(-\frac{4\pi i}{q^2}\right)\left[1-\frac{e_R^2}{15\pi}\frac{q^2}{m^2}\right](-iZe_R)\,, \tag{8.26}$$

где введен *перенормированный* заряд:

$$e_R = e\left(1-\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)^{1/2}. \tag{8.27}$$

Предположим, что величина e_R из (8.27) представляет собой "истинный" (экспериментально измеряемый) электрический заряд. Тогда амплитуда рассеяния (8.26) становится *конечной*, расходимость "убралась" в e_R, который берется из эксперимента и не подлежит вычислению в рамках рассматриваемой теории. Таким образом, нам удалось в явном виде провести *перенормировку* расходящейся радиационной поправки. В дальнейшем мы увидим, что в квантовой электродинамике все расходимости, возникающие в высших порядках теории возмущений, удается аналогичным образом "спрятать" в *конечное* число параметров, подлежащих определению из эксперимента. В этом проявляется фундаментальное свойство *перенормируемости* этой теории. Только перенормируемым моделям квантовой теории поля может быть придан физический смысл.

8.2 Лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент.

Первое слагаемое в формуле (8.26) очевидным образом связано с кулоновским потенциалом:

$$V_0(r) = -Ze_R^2\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{qr}}\frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} = -\frac{Ze_R^2}{r}\,. \tag{8.28}$$

Второе слагаемое в (8.26) соответствует квантовым поправкам к кулоновскому потенциалу, связанным с возможностью рождения виртуальных e^+e^--пар. Содержащийся в нем множитель $|\mathbf{q}|^2$ при переходе к координатному представлению заменяется на $-\nabla^2$. Тогда с учетом (8.28) и фурье-разложения δ-функции

$$\delta(\mathbf{r}) = \int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{qr}} \tag{8.29}$$

или, вспоминая известное соотношение [25] $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$, видим, что формула (8.26) в координатном представлении соответствует взаимодействию вида:

$$V(r) = -Ze_R^2\left(1-\frac{e_R^2}{60\pi^2m^2}\nabla^2\right)\frac{1}{r} = -\frac{Ze_R^2}{r}-\frac{Ze_R^4}{15\pi m^2}\delta(\mathbf{r})\,. \tag{8.30}$$

Таким образом рождение виртуальных e^+e^--пар (поляризация вакуума) приводит к модификации кулоновского взаимодействия на малых расстояниях — возникает дополнительное притяжение к ядру. Конечно, эти формулы не вполне корректны, поскольку они получены из асимптотики однопетлевого вклада в пределе $(-q)^2 \ll m^2$. Однако для простых оценок они вполне достаточны.

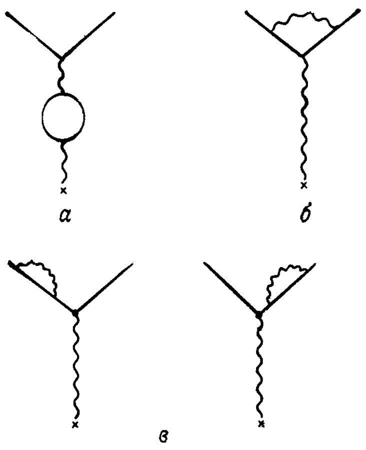


Рис. 8.3:

Рассмотрим случай $Z = 1$ (протон). Ясно, что второе слагаемое в (8.30) может дать вклад в энергетические уровни атома водорода E_{nl}. Рассматривая его как возмущение, получаем соответствующий вклад в сдвиг уровней в виде:

$$\Delta E_{nl} = -\frac{e_R^4}{15\pi m^2}|\psi_{nl}(0)|^2\delta_{l0} = -\frac{8e_R^6}{15\pi n^3}\ \mathrm{Ry}\ \delta_{l0}\,, \tag{8.31}$$

где $\psi_{nl}(0)$ — волновая функция атома водорода, соответствующая главному квантовому числу n и орбитальному моменту l, $\mathrm{Ry} = me^4/2$ — постоянная Ридберга ($\mathrm{Ry} \approx 13.6$ eV). Из-за точечного характера дополнительного взаимодействия в (8.30), оно действует лишь на волновые функции, отличные от нуля в начале координат, т.е. на s-состояния ($l = 0$). Соответствующий (лэмбовский) сдвиг уровней наблюдается экспериментально и измеряется с весьма высокой точностью. В первых экспериментах Лэмба измерялась разница энергий уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, которые являются вырожденными в рамках теории Шредингера – Дирака, не учитывающей радиационных поправок. Оказалось, что величина сдвига равна $+1057$ MHz. Расчет по формуле (8.31) дает величину -27 MHz. Однако петля поляризации вакуума отвечает только за часть сдвига уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$. Полный набор фейнмановских диаграмм, ответственных за лэмбовский сдвиг в рассматриваемом порядке теории возмущений ($\sim e^3$) показан на Рис. 8.3. Все возникающие в этих диаграммах расходимости могут быть "спрятаны" в перенормировку заряда, массы и волновой функции электрона. Таким образом удается рассчитать полную величину лэмбовского сдвига, которая оказывается в идеальном соответствии с экспериментом[4]. В свое время это был триумф теории перенормировок в квантовой электродинамике. Поскольку величина сдвига известна с точностью $\sim$0.01%, то нетрудно убедиться в существенности вкладов каждой из диаграмм Рис. 8.3, в том числе и рассмотренного выше относительно малого вклада поляризации вакуума, связанного с диаграммой Рис. 8.3(а). Основной вклад в сдвиг связан с перенормировкой массы электрона (диаграммы Рис. 8.3(в)). Физически этот эффект связан с тем, что величина (бесконечная) радиационных поправок к массе свободного электрона отличается от (также

[4]Соответствующие расчеты весьма громоздки и мы отсылаем читателя за деталями к книгам [1, 2]

бесконечной) их величины для электрона, связанного в атоме. Разность этих двух бесконечных величин *конечна* [5,31] и дает основной вклад в сдвиг атомных уровней.

Рассмотрим подробнее эффекты, связанные с диаграммой Рис. 8.3(б). Фактически, эта диаграмма модифицирует структуру электронного тока перехода (вершину) $-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i$. Вычисление конечной части этой диаграммы в пределе малых $(-q^2)$ дает [2,25,31]:

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \to -e\bar{u}_f\left\{\gamma_\mu\left[1+\frac{e^2}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{m_\gamma}-\frac{3}{8}\right)\right]-\left[\frac{e^2}{2\pi}\frac{1}{2m}i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]\right\}u_i\,, \tag{8.32}$$

где $\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$. Выражение в первых квадратных скобках здесь дает соответствующий вклад в лэмбовский сдвиг, поскольку этот член по форме аналогичен (8.26). Но при этом мы сталкиваемся еще и с расходимостью на *малых* импульсах, что формально обходится в (8.32) введением малой фиктивной массы фотона m_γ. Это так называемая *инфракрасная катастрофа*. Фактически вклад, связанный с фиктивной массой m_γ, полностью *сокращается* с аналогичными вкладами, возникающими от диаграмм Рис. 8.3(в). Инфракрасные расходимости, возникающие в квантовой электродинамике, не носят столь принципиального характера, как обсуждавшиеся выше *ультрафиолетовые* (т.е. возникающие от расходимостей фейнмановских интегралов на верхнем пределе). Физически инфракрасная катастрофа связана с всегда существующей (для любых электродинамических процессов) возможностью излучения большого числа “мягких” фотонов с очень малой энергией (частотой). Поэтому инфракрасная расходимость является следствием не вполне корректной постановки вопроса: какова амплитуда вероятности рассеяния электрона на статическом ядре без излучения фотона? Фактически нужно определить амплитуду рассеяния электрона без излучения фотона, а также вероятности излучения одного, двух и т.д. “мягких” фотонов с энергией меньше m_γ. Каждая из этих амплитуд по отдельности расходится, но искусственное введение m_γ делает их конечными. Сумма же этих вероятностей не расходится, а параметр m_γ в ответе сокращается. Эта проблема была детально проанализирована и решена еще на раннем этапе развития квантовой электродинамики [1,2,31]. Для нас сейчас интересен второй член в квадратных скобках (8.32), который модифицирует величину γ_μ, т.е. лоренцеву структуру тока.

Фактически, можно убедиться [1,2,31], что вклад типа $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ описывает магнитный момент электрона $\boldsymbol{\mu}=-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}$, который обычно записывают в виде $\boldsymbol{\mu}=-g\frac{e}{2m}\mathbf{s}$, где спин $\mathbf{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, а g — гиромагнитное отношение электрона (в теории Дирака $g=2$). Соответственно, второй член в (8.32) описывает дополнительный вклад в магнитный момент электрона, так что

$$\boldsymbol{\mu}=-\frac{e}{2m}\left(1+\frac{e^2}{2\pi}\right)\boldsymbol{\sigma} \tag{8.33}$$

или

$$g=2+\frac{e^2}{\pi}\,. \tag{8.34}$$

Таким образом, дополнительно к дираковскому магнитному моменту электрона возникает *аномальный* магнитный момент $e^2/2\pi$. Более точное выражение для аномального вклада в гиромагнитное отношение, получающееся помощью весьма громоздких вычислений с точностью до членов $\sim e^6$ имеет вид:

$$\frac{g-2}{2}=\frac{1}{2}\frac{e^2}{\pi}-0.32848\left(\frac{e^2}{\pi}\right)^2+(1.49\pm0.2)\left(\frac{e^2}{\pi}\right)^3+...=(1159655.4\pm3.3)\cdot10^{-9}\,. \tag{8.35}$$

Указанная здесь ошибка связана с трудностями *вычислений* большого числа диаграмм $\sim e^6$. *Экспериментальное* значение аномального магнитного момента электрона равно:

$$\left.\frac{g-2}{2}\right|_{exp} = (1159657.7 \pm 3.5) \cdot 10^{-9} \,. \tag{8.36}$$

Вот поэтому квантовая электродинамика и считается, пожалуй, самой точной из имеющихся теорий фундаментальных взаимодействий элементарных частиц. Насколько известно автору, до сих пор не обнаружено никаких расхождений между ее предсказаниями и экспериментом, в тех случаях, когда речь идет о чисто электродинамических явлениях.

Рассмотрение радиационных поправок на основе фейнмановского формализма является достаточно сложным и громоздким. Для понимания физики этих явлений полезно рассмотреть качественный подход, предложенный Вельтоном, и позволяющий дать простую качественную их интерпретацию, основанную на картине вакуумных флуктуаций электромагнитного поля и роли электрон-позитронного вакуума.

Обсудим, прежде всего вопрос о том, какое значение имеет среднеквадратичное значение напряженности электромагнитного поля в произвольной точке физического вакуума. Рассмотрим поле в некотором нормировочном объеме V. Нулевое колебание с частотой ω имеет энергию $\frac{\hbar\omega}{2}$. Можно написать очевидное равенство:

$$\frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1}{8\pi}\overline{\int dV(\mathbf{E}_\omega^2 + \mathbf{H}_\omega^2)} = \frac{1}{4\pi}\overline{\int dV \mathbf{E}_\omega^2} = \frac{\mathbf{E}_{0\omega}^2}{8\pi} V \,, \tag{8.37}$$

где $\mathbf{E}_{0\omega}$ — амплитуда напряженности электрического поля в вакууме, отвечающего рассматриваемым нулевым колебаниям с частотой ω, а черта обозначает усреднение по периоду колебаний. Из (8.37) находим среднеквадратичную амплитуду нулевых колебаний поля с частотой ω:

$$\mathbf{E}_{0\omega}^2 = \frac{4\pi\hbar\omega}{V} \,. \tag{8.38}$$

Рассмотрим электрон в атоме. На этот электрон действует кулоновское поле ядра и флуктуации нулевых колебаний поля в вакууме. Поэтому на орбитальное движение электрона налагается хаотическое движение под действием этих вакуумных флуктуаций. Пусть $V(\mathbf{r})$ обозначает потенциальную энергию электрона, находящегося в точке $\mathbf{r}$. Предположим, что координату электрона можно написать как $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$, где $\mathbf{r}_0$ — обычное значение координаты электрона, более или менее плавно меняющееся при его орбитальном движении, а $\mathbf{r}'$ — его малое смещение под действием случайной силы со стороны флуктуирующего вакуумного поля. Тогда можно записать следующее изменение средней потенциальной энергии электрона, испытывающего случайные смещения:

$$\begin{aligned}\langle \Delta V(\mathbf{r})\rangle = \langle V(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') - V(\mathbf{r}_0)\rangle \approx \left\langle x_i' \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}(x_i' x_k')\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\right\rangle = \\ = \frac{1}{2}\nabla^2 V \langle (x_i')^2\rangle = \frac{1}{6}\nabla^2 V\langle(\mathbf{r}')^2\rangle \,.\end{aligned} \tag{8.39}$$

Угловые скобки здесь обозначают среднее по всем возможным значениям случайной величины $\mathbf{r}'$. При усреднении учтено, что $\langle x_i'\rangle = 0$, а в силу пространственной изотропии случайных смещений $\langle x_i' x_k'\rangle = \frac{1}{3}\langle(\mathbf{r}')^2\rangle$.

В кулоновском поле протона

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}_0) = 4\pi e^2 \delta(\mathbf{r}_0) \,, \tag{8.40}$$

так что

$$\langle V(\mathbf{r})\rangle = V(\mathbf{r}_0) + \frac{2\pi e^2}{3}\delta(\mathbf{r}_0)\langle \mathbf{r}'^2\rangle \,. \tag{8.41}$$

Для получения лэмбовского сдвига атомного уровня нужно усреднить (8.41) по состоянию электрона в атоме, тогда имеем:

$$\Delta E_{Lamb} = \frac{2\pi}{3}e^2 \int dV |\psi_n(\mathbf{r}_0)|^2 \delta(\mathbf{r}_0)\langle\mathbf{r}'^2\rangle = \frac{2\pi}{3} e^2 |\psi_n(0)|^2 \langle \mathbf{r}'^2\rangle \,, \tag{8.42}$$

где ψ_n — волновая функция рассматриваемого состояния.

Для вычисления $\langle \mathbf{r'}^2 \rangle$ предположим, что смещение электрона под действием флуктуаций поля происходит независимо от его орбитального движения. Напишем классическое уравнение движения:

$$m\frac{d^2\mathbf{r'}_\omega}{dt^2} = e\mathbf{E}_\omega = e\mathbf{E}_{0\omega}\sin(\mathbf{kr}-\omega t)\,, \tag{8.43}$$

откуда получим:

$$\mathbf{r'}_\omega = -\frac{e\mathbf{E}_{0\omega}}{m\omega^2}\sin(\mathbf{kr}-\omega t)\,. \tag{8.44}$$

Соответственно:

$$\overline{\langle(\mathbf{r'}_\omega)^2\rangle} = \frac{e^2}{2m^2\omega^4}\mathbf{E}^2_{0\omega} = \frac{2\pi e^2\hbar}{m^2\omega^3 V}\,, \tag{8.45}$$

где черта снова означает усреднение по времени, а для получения последнего равенства воспользовались (8.38).

Поскольку нулевые колебания с разными частотами являются независимыми, их вклад в полное среднеквадратичное смещение электрона можно найти простым суммированием:

$$\langle \mathbf{r'}^2\rangle = \frac{V}{\pi^2c^3}\int d\omega\omega^2\overline{\langle(\mathbf{r'}_\omega)^2\rangle} = \frac{2e^2\hbar}{\pi c^3 m^2}\int\limits_{\omega_{min}}^{\omega_{max}}\frac{d\omega}{\omega}\,. \tag{8.46}$$

Если бы не существовало электрон-позитронного вакуума, то верхний предел здесь мог бы принимать любые значения и мы имели бы расходящийся результат. Однако, при частотах порядка $mc^2/\hbar$ возникает взаимодействие между нулевыми колебаниями поля и заполненным фоном отрицательных энергий фермионов. Наглядно можно представить дело так, что взаимодействуют флуктуации токов, связанных со случайными смещениями электрона с положительной энергией и аналогичные токи, связанные со случайными смещениями электронов фона заполненных состояний. Поскольку в силу принципа Паули все электроны стремятся находиться в удалении друг от друга, эти флуктуации токов будут происходить в противофазе, что приведет к их взаимному погашению. В результате все сводится к возникновению эффективного обрезания (8.46) при $\omega_{max} \sim mc^2$. Величина обрезания (8.46) на нижнем пределе определяется некоторой средней частотой возбуждения электрона в атоме, масштаб которой определяется ридберговской частотой: $\omega_{min} = \omega_0 \sim \frac{\mathrm{Ry}}{\hbar} = \frac{me^4}{2\hbar^3}$. Тогда (8.46) сводится к:

$$\langle(\mathbf{r'}^2)\rangle = \frac{2e^2\hbar}{\pi c^3 m^2}\ln\frac{mc^2}{\hbar\omega_0} = \frac{2}{\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\ln\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\,. \tag{8.47}$$

Тогда для величины лэмбовского сдвига (8.42) получаем:

$$\Delta E_{Lamb} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2|\psi_n(0)|^2\ln\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\,. \tag{8.48}$$

Этот сдвиг всегда положителен — s-уровень всегда лежит по энергии выше, чем это предсказывается теорией Шредингера – Дирака. С учетом того, что в атоме водорода:

$$|\psi_n(0)|^2 = \left(\frac{1}{na\pi^{1/3}}\right)^3\,, \tag{8.49}$$

где $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ — боровский радиус, получаем

$$\Delta E_{Lamb} = \frac{8}{3\pi}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3\frac{\mathrm{Ry}}{n^3}\ln\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\,. \tag{8.50}$$

Специальные расчеты, проведенные Бете, дали уточненное значение $\hbar\omega_0 \approx 18$ Ry. Тогда из (8.50) следует значение сдвига для $2s$-состояния водорода $\Delta E_{Lamb}(2s) \approx 1040$ MHz, что очень близко к результату точных расчетов на основе общего формализма квантовой электродинамики и теории перенормировок. Таким образом, лэмбовский сдвиг является еще одним подтверждением реальности физического "вакуума" квантовой теории поля.

8.3 Перенормировка — как это "работает".

В рассмотренных выше примерах расчетов радиационных поправок в квантовой электродинамике мы видели определяющую роль процедуры перенормировки, ко-

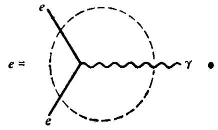


Рис. 8.4:

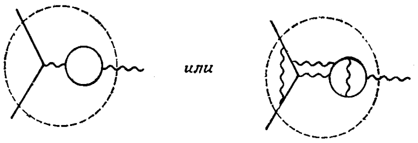


Рис. 8.5:

торая позволяет избавиться от неизбежно возникающих расходимостей фейнмановских интегралов в высших порядках теории возмущений. Именно благодаря развитию теории перенормировок в квантовой электродинамике возникли реально работающие расчетные методы, позволившие проводить как расчеты практически любых конкретных эффектов, так и проанализировать некоторые принципиальные вопросы теории. Понятие *перенормируемости* играет определяющую роль в современной квантовой теории поля. Модели взаимодействий не обладающие этим свойством обычно считаются нефизическими. Прежде чем переходить к последовательному анализу процедуры перенормировок, мы рассмотрим качественную сторону дела на примере уже известной нам перенормировки заряда в однопетлевом приближении.

Вернемся к формуле (8.27), содержащей расходимость вида $\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}$. Величина электрического заряда входит в теорию через график для элементарной вершины, показанный на Рис. 8.4. Но к этой вершине имеется множество поправок, примеры которых показаны на Рис. 8.5, которые, фактически, изменяют величину заряда. *Физический* заряд определяется всеми диаграммами такого типа, именно результат суммирования *всех* диаграмм для вершины измеряется экспериментально как заряд электрона. Назовем “исходный” заряд, сопоставляемый элементарной вершине Рис. 8.4, “голым” зарядом e_0. Тогда для “истинного” или “одетого” заряда e можно записать, например, разложение в ряд теории возмущений по “голому” заряду, построенное на однопетлевых поляризационных поправках, представленное диаграммами Рис. 8.6, где многоточием заменены аналогичные диаграммы высших порядков. Соотношение между e^2 и e_0^2 нужно определить, как это и показано на Рис. 8.6, при некотором специальном, подходящим с точки зрения эксперимента, значении передаваемого (фотонной линей) импульса [5] $q^2 \equiv -Q^2 = -\mu^2$. Например, во всех традиционных методах определения заряда речь идет о низкоэнергетическом пределе $Q^2 \ll m^2$. В результате, разложение, показанное на Рис. 8.6, можно схематически записать как:

$$e^2 = e_0^2[1 - I(Q^2 = \mu^2) + O(e_0^4)]\,, \tag{8.51}$$

где величина $I(Q^2)$ определяется формулами (8.17) – (8.20), т.е. однопетлевым при-

[5] Величина Q^2 введена вместо $(-q^2)$, для удобства, чтобы работать с $Q^2 > 0$.

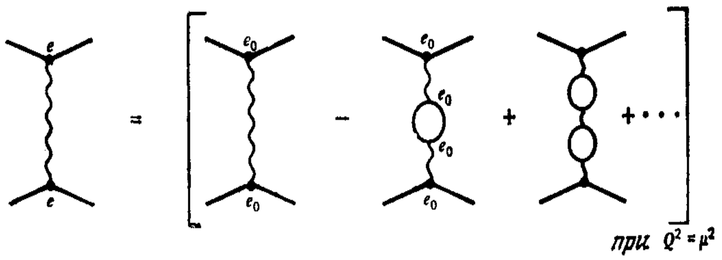


Рис. 8.6:

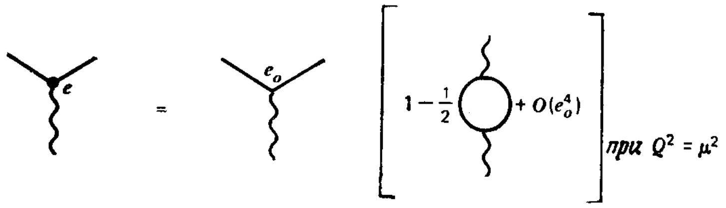


Рис. 8.7:

ближением $\sim e_0^2$. Извлекая из обеих сторон (8.51) квадратный корень, получим:

$$e = e_0\left[1 - \frac{1}{2}I(Q^2 = \mu^2) + O(e_0^4)\right], \tag{8.52}$$

что совпадает с (8.27) после разложения корня. В диаграммном виде разложение (8.52) показано на Рис. 8.7. Соответственно, с учетом всех порядков имеем:

$$e = e_0[1 + e_0^2 A_1(Q^2) + e_0^4 A_2(Q^2) + ...]_{Q^2=\mu^2}. \tag{8.53}$$

Ясно, что $A_1(Q^2), A_2(Q^2), ...$ бесконечны при $\Lambda^2 \to \infty$. Рассмотрим какой-либо физический процесс рассеяния, например изображаемый диаграммами Рис. 8.8. В аналитическом виде:

$$-iM(e_0^2) = e_0^2[F_1(Q^2) + e_0^2 F_2(Q^2) + O(e_0^4)]. \tag{8.54}$$

Здесь все выражения тоже расходятся. Но теперь наступает решающий момент. Давайте репараметризуем (перенормируем) величину $-iM(e_0^2)$, выразив e_0 через e,

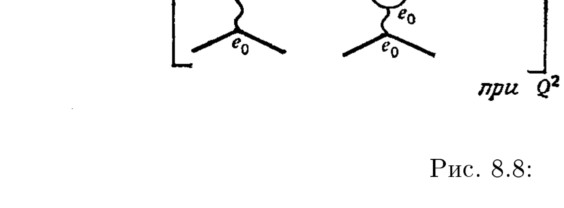


Рис. 8.8:

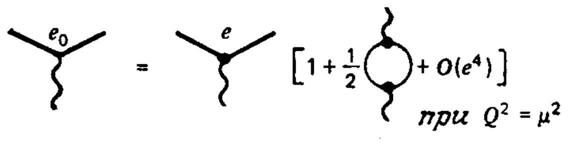


Рис. 8.9:

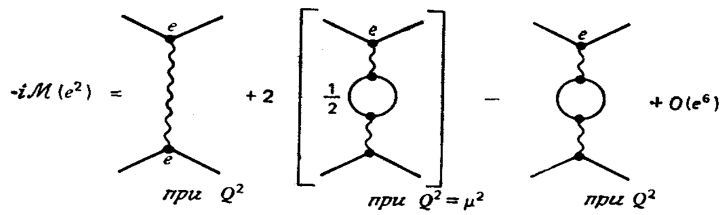


Рис. 8.10:

обратив (8.52), или, иначе говоря, перестроив графики Рис. 8.7, с той же точностью, как это показано на Рис. 8.9, и воспользовавшись эти разложением, подставив его в вершины графиков Рис. 8.8. Тогда получим диаграммное разложение, показанное на Рис. 8.10. Две первые диаграммы этого разложения происходят из первой диаграммы Рис. 8.8, множитель 2 возникает из-за того, что мы должны выразить e_0 через e в каждой вершине. В оставшейся диаграмме Рис. 8.8 можно просто заменить e_0 на e, поскольку возникающая при этом разница выражений порядка e^6. Теперь разложение Рис. 8.10 можно переписать, как это показано на Рис. 8.11. В аналитическом виде это разложение имеет вид:

$$-iM(e^2) = e^2[F_1'(Q^2) + e^2 F_2'(Q^2) + O(e^4)]\,. \tag{8.55}$$

Вот теперь мы достигли желаемого — сравнивая (8.54) и (8.55) видим, что получено новое выражение для амплитуды рассеяния, в которое входит "экспериментальный" заряд e, определенный согласно (8.53) и измеряемый при $Q^2 = \mu^2$. При этом мы ничего не добавили и ничего не выбросили, а просто репараметризовали (8.54), соответственно $M(e^2) = M(e_0^2)$. В то же время член $\sim e_0^4$ в (8.54) бесконечен, а член $\sim e^4$ в (8.55) *конечен*! Это ясно из того, что "экспериментальный" заряд e конечен по определению, а два слагаемых в скобках на Рис. 8.11 противоположны по знаку

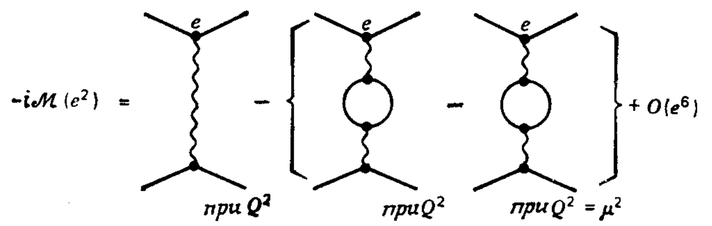


Рис. 8.11:

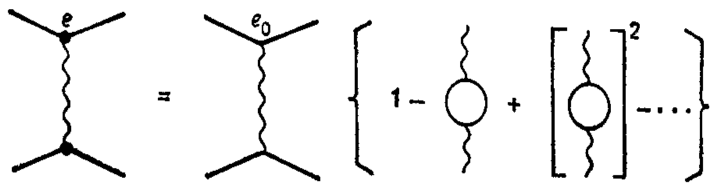


Рис. 8.12:

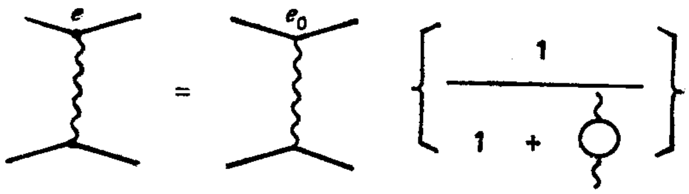


Рис. 8.13:

и дают в сумме:

$$\left[\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{Q^2}-\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right]=\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\mu^2}{Q^2}\,, \tag{8.56}$$

что *не зависит* от параметра обрезания Λ^2. Разный выбор параметра μ^2 (точки перенормировки) приводит к разным разложениям (8.55). Однако наблюдаемая величина $|M|^2$ не должна зависеть от выбора μ. Это требование можно записать в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\mu\frac{dM}{d\mu}=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial e}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial e}\right)M=0\,. \tag{8.57}$$

Это означает, что явная зависимость M от μ, которая дается коэффициентами $F_i'(Q^2,\mu^2)$ в разложении (8.55), компенсируется соответствующей μ^2 зависимостью $e^2(\mu^2)$. Уравнение (8.57) представляет собой дифференциальное уравнение ***ренормгруппы*** (или группы перенормировок), играющей огромную роль в квантовой теории поля. Ниже мы еще не раз вернемся к обсуждению этой (ренормгрупповой) инвариантности теории, которая позволяет проанализировать ее принципиальные основы, а также дает эффективный аппарат для проведения расчетов конкретных эффектов.

8.4 "Бегущая" константа связи .

Разложение, показанное на Рис. 8.6, можно перерисовать в виде Рис. 8.12. Если ограничиться только этими (петлевыми) графиками, то здесь возникает геометрическая прогрессия, которая легко суммируется, как это показано на Рис. 8.13. Выше мы видели, что расходимости можно устранить, если работать с физическим (перенормированным) зарядом e, который определяется разложением Рис. 8.13 при

$Q^2 = \mu^2$. Фактически можно использовать любое значение μ^2. Различный выбор $Q^2 = \mu_1^2, \mu_2^2, ...$ соответствует разложению теории возмущений по численно различным значениям физического заряда $e(\mu_i^2)$. В самом деле, из Рис. 8.13 имеем:

$$e^2(Q^2) = \frac{e_0^2}{1 + I(Q^2)}\,, \tag{8.58}$$

так что экспериментально наблюдаемый заряд зависит от величины передаваемого (в процессе рассеяния) импульса Q^2. Величину $e(Q^2)$ называют "бегущей" константой связи. В пределе больших $Q^2 \equiv (-q^2)$ величина $I(q^2)$ дается выражением (8.24), так что получаем:

$$e^2(Q^2) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{3\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}\,. \tag{8.59}$$

Чтобы исключить в (8.59) явную зависимость $e^2(Q^2)$ от параметра обрезания Λ, рассмотрим это выражение при $Q^2 = \mu^2$ и выразим e_0 через $e^2(\mu^2)$. В результате, при больших Q^2 можно переписать (8.59) как:

$$e^2(Q^2) = \frac{e^2(\mu^2)}{1 - \frac{e^2(\mu^2)}{3\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}\,. \tag{8.60}$$

Здесь уже все конечно! "Бегущая" константа связи $e(Q^2)$, описывает зависимость эффективного заряда от передаваемого импульса Q^2, т.е. фактически от расстояния между заряженными частицами. Это, как мы увидим в дальнейшем, есть реально *наблюдаемый* эффект, причем соответствующая зависимость носит именно логарифмический характер. В связи с результатом (8.60) возникает ряд принципиальных вопросов относительно непротиворечивости квантовой электродинамики. Дело в том, что из (8.60) видно, что с ростом Q^2 (уменьшением расстояния) величина эффективного заряда *возрастает*, так что рано или поздно теория возмущений становится неприменимой на малых расстояниях, а при

$$Q^2 = \mu^2 \exp\left(\frac{3\pi}{e^2(\mu^2)}\right) \tag{8.61}$$

возникает явно нефизическая расходимость ("ложный" полюс). При Q^2, превышающих это значение, заряд вообще становится мнимым! Возникающая здесь ситуация, по причинам исторического характера, называется "московским нулем". В дальнейшем мы еще не раз вернемся к обсуждению возникающих в связи с этим проблем.

Забегая вперед отметим, что в квантовой хромодинамике ситуация принципиально иная. Там также возникает "бегущая" константа связи кварков и глюонов, выражение для которой (получаемое аналогично (8.60)) имеет вид:

$$g^2(Q^2) = \frac{g^2(\mu)}{1 + \frac{g^2(\mu^2)}{12\pi}(33 - 2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}\,, \tag{8.62}$$

где n_f — число *ароматов* кварков, а константа 33 связана с неабелевым характером калибровочной симметрии хромодинамики (фактически она вычисляется как некоторая константа, связанная со свойствами матриц генераторов цветовой группы $SU(3)$). Только в мире, где $n_f > 16$ знак в знаменателе (8.62) был бы таким же, как в квантовой электродинамике. В реальном мире $n_f = 6$. Поэтому эффективный заряд КХД не растет, а *падает* с ростом Q^2 и становится малым на малых расстояниях! Это ситуация так называемой "асимптотической свободы". При достаточно малых

Q^2 (на больших расстояниях между кварками) эффективная константа связи наоборот становится большой, что экспериментально проявляется в явлении *конфайнмента* (“инфракрасная тюрьма”). Для значения Q^2, при котором возникает (опять таки “ложный”!) полюс в (8.62), примем обозначение Λ^2:

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left[-\frac{12\pi}{(33-2n_f)g^2(\mu^2)}\right] . \tag{8.63}$$

Тогда (8.62) переписывается как:

$$g^2(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} . \tag{8.64}$$

При $Q^2 \gg \Lambda^2$ эффективная константа связи мала и взаимодействие кварков и глюонов (на малых расстояниях или при больших импульсах) можно описывать по теории возмущений, аналогично взаимодействию электронов и фотонов в КЭД (на больших расстояниях или малых импульсах). При $Q^2 \sim \Lambda^2$ такое описание становится невозможным, а кварки и глюоны объединяются в сильно взаимодействующие кластеры — адроны. Экспериментальное значение Λ лежит в интервале от 0.1 до 0.5 GeV. Тогда для экспериментов, проводимых при $Q^2 \sim (30\text{ GeV})^2$ из (8.64) получаем $g^2 \sim 0.1$, так что теория возмущения явно применима, как в КЭД. В пределе больших Q^2 всеми массами кварков можно пренебречь, однако в теорию все равно органически входит массовый масштаб μ^2, возникший в процессе перенормировки.

8.5 Аннигиляция e^+e^- в адроны — доказательство существования кварков.

В качестве интересной иллюстрации применений КЭД покажем, как из чисто электродинамических экспериментов можно убедиться в существовании кварков [18]. Это оказывается возможным при изучении процессов аннигиляции электронов и позитронов высоких энергий, когда в качестве конечных продуктов реакции возникают всевозможные адроны. Фактически, такие реакции идут через процессы рождения пар кварк – антикварк, т.е. $e^+e^- \to q\bar{q}$, которые в дальнейшем объединяются в адроны. Оказывается, что сечение таких процессов можно получить из легко рассчитываемого в рамках КЭД сечения процесса аннигиляции электрон-позитронных пар в мюоны: $e^+e^- \to \mu\bar{\mu}$. Для расчета сечения такого процесса в КЭД достаточно рассмотреть вторую из фейнмановских диаграмм, показанных на Рис. 6.6, в которой, в качестве конечных продуктов реакции, фигурирует пара $\mu\bar{\mu}$.[6] Стандартный расчет по правилам диаграммной техники КЭД дает для полного сечения такого процесса [18]:

$$\sigma(e^+e^- \to \mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi e^2}{3Q^2} , \tag{8.65}$$

где $Q^2 = 4E^2$ — квадрат энергии в систем центра масс (переменная Манделстама s). Интересующее нас сечение аннигиляции в пару кварк – антикварк равно:

$$\sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) = 3e_q^2\sigma(e^+e^- \to \mu\bar{\mu}) , \tag{8.66}$$

где e_q – заряд кварка. Дополнительный множитель 3 возникает здесь из-за того, что мы имеем по одной и той же диаграмме для кварков каждого цвета, так что соответствующие сечения нужно просто сложить. Чтобы найти теперь сечение рождения всех возможных адронов, необходимо просуммировать по всем кварковым ароматам

[6] Напомним, что мюоны ничем не отличаются от электронов, кроме большего (примерно в 200 раз) значения массы покоя.

$q = u, d, s, ...$, поэтому:

$$\sigma(e^+e^- \to hadrons) = \sum_q \sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) = 3\sum_q e_q^2 \sigma(e^+e^- \to \mu\bar{\mu})\,. \tag{8.67}$$

Таким образом, эти вычисления приводят к очень существенному предсказанию:

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to hadrons)}{\sigma(e^+e^- \to \mu\bar{\mu})} = 3\sum_q e_q^2\,. \tag{8.68}$$

Так как сечение $\sigma(e^+e^- \to \mu\bar{\mu})$ хорошо изучено экспериментально (и прекрасно описывается формулой (8.65)), то измеренное на эксперименте сечение e^+e^--аннигиляции в адроны непосредственно дает информацию о числе кварков, их ароматах и цветах. Имеем:

$$R = \begin{cases} 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 2 & \text{для} \quad u, d, s\,. \\ 2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} & \text{для} \quad u, d, s, c\,, \\ \frac{10}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3} & \text{для} \quad u, d, s, c, b \quad \text{и т. д.}\,. \end{cases} \tag{8.69}$$

Эти предсказания прекрасно согласуются с экспериментом! Значение $R = 2$ наблюдается при $Q < 2(m_c + m_u) \approx 3.7$ GeV, т.е. ниже порога рождения c-частиц. Выше порога рождения пяти кварковых ароматов, т.е. при $Q > 2m_b \approx 10$ GeV экспериментально наблюдается значение $R = 11/3$. Эти эксперименты непосредственно подтверждают, что имеется три цвета кварков с надлежащими (дробными!) значениями электрического заряда.

В рамках КХД можно учесть также вклады диаграмм, в которых кварк или антикварк испускает глюоны [18]. В первом порядке по g^2 формула (8.68) модифицируется как:

$$R = 3\sum_q e_q^2 \left(1 + \frac{g^2(Q^2)}{\pi}\right)\,, \tag{8.70}$$

так, что в экспериментах проявляется даже слабая (логарифмическая) зависимость R от Q^2.

8.6 Физические условия перенормировки.

Перейдем к более последовательному изложению теории перенормировок в КЭД. Ясно, что излагавшаяся выше схема построения инвариантной теории возмущений и диаграммных уравнений для точных пропагаторов, носила в значительной мере формальный характер. Мы оперировали со всеми величинами так, как если бы они были конечными, тогда как фактически при вычислении $\mathcal{D}, \mathcal{G}, \Gamma$ по теории возмущений возникают расходящиеся интегралы. Как мы покажем ниже, в теории можно сформулировать определенные предписания, позволяющие однозначным образом производить “вычитание” бесконечностей и получать конечные выражения для всех величин, имеющих непосредственный физический смысл. В основе этих предписаний лежат очевидные физические требования, чтобы масса фотона была равна нулю, а заряд и масса электрона равнялись их наблюдаемым значениям. Наше изложение будет носить несколько схематический характер, дальнейшие подробности можно найти в [1] и, в особенности, в исчерпывающей монографии [2].

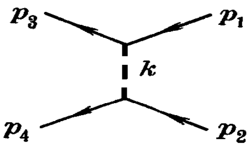


Рис. 8.14:

Физический фотон имеет нулевую массу и, соответственно, для него всегда $k^2 = 0$. Это означает, что точный фотонный пропагатор должен иметь полюс при $k^2 = 0$, так что

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} Z \qquad \text{при} \quad k^2 \to 0\,, \tag{8.71}$$

где Z — постоянная. Поскольку согласно (7.39) общий вид пропагатора определяется через поляризационный оператор как

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2(1 - \mathcal{P}(k^2)/k^2)}\,, \tag{8.72}$$

то из (8.71) для поляризационного оператора следует:

$$\mathcal{P}(0) = 0\,. \tag{8.73}$$

Аналогичным образом, постоянная Z в (8.71) может быть определена как:

$$\frac{1}{Z} = 1 - \left.\frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2}\right|_{k^2 \to 0}\,. \tag{8.74}$$

Дальнейшие ограничения на $\mathcal{P}(k^2)$ можно получить из анализа физического определения электрического заряда частицы. Две классические (сколь угодно тяжелые) частицы, покоящиеся на большом расстоянии ($r \gg m^{-1}$, где m — масса электрона) друг от друга, должны взаимодействовать по закону Кулона: $V(r) = e^2/r$. С другой стороны, это взаимодействие выражается диаграммой, показанной на Рис. 8.14, где жирная волнистая линия обозначает точный пропагатор виртуального фотона, а верхние и нижние линии соответствуют классическим частицам. Фотонные собственно-энергетические поправки учтены в точном пропагаторе виртуального фотона. Всякие другие поправки, затрагивающие линии тяжелых частиц, приводят к обращению соответствующих диаграмм в нуль. Действительно, добавление еще какой-либо внутренней линии в диаграмму Рис. 8.14, например, соединение 1 и 3 или 1 и 2 фотонной линией, приводит к появлению в соответствующей диаграмме тяжелых виртуальных частиц (соответствующих сплошным линиям, оказавшимся под дополнительной фотонной линией), пропагатор которых содержит большую массу M классической частицы в знаменателе и обращается в нуль при $M \to \infty$. Тогда ясно, что множитель $e^2\mathcal{D}(k^2)$ в диаграмме Рис. 8.14 представляет собой (с точностью до знака) фурье-образ потенциала взаимодействия рассматриваемых частиц.

Статичность взаимодействия (покоящиеся частицы!) означает, что частота виртуального фотона $\omega = 0$, а большим расстояниям отвечают малые волновые вектора $\mathbf{k}$. Поскольку $\mathcal{D}$ зависит только от $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$, то приходим к условию

$$e^2\mathcal{D} \to \frac{4\pi e^2}{k^2} \qquad \text{при} \quad k^2 \to 0\,, \tag{8.75}$$

так что, фактически, в (8.71) мы должны положить $Z = 1$. Тогда из (8.74) немедленно следует:

$$\frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2} \to 0 \qquad \text{при} \quad k^2 \to 0\,. \tag{8.76}$$

Помимо уже известного нам условия (8.73) отсюда следует:

$$\mathcal{P}'(0) \equiv \left.\frac{d\mathcal{P}(k^2)}{dk^2}\right|_{k^2=0} = 0\,. \tag{8.77}$$

Заметим, что эффективной внешней линии реального фотона, в принципе, надо было бы сопоставлять множитель $\sqrt{4\pi}[1 + \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}(k^2)\mathcal{D}(k^2)]e_\mu$. Однако для реального фотона всегда $k^2 = 0$, тогда в силу (8.76) видим, что в линиях внешних фотонов радиационные поправки вообще не нужно учитывать.

Таким образом, естественные физические требования приводят к установлению определенных (равных нулю!) значений $\mathcal{P}(0)$ и $\mathcal{P}'(0)$. В тоже время, непосредственное вычисление этих величин по диаграммам теории возмущений приводит к расходящимся интегралам. Способ устранения этих бесконечностей состоит в приписывании расходящимся выражениям наперед заданных значений, устанавливаемых физическими требованиями. Такая процедура и называется перенормировкой. Способ проведения этой операции можно сформулировать и иначе. Можно ввести нефизический "затравочный" заряд e_0 , как параметр, который входит в выражение для исходного оператора электромагнитного взаимодействия, фигурирующего в формальной теории возмущений. После этого, условие перенормировки формулируется как требование

$$e_0^2\mathcal{D}(k^2) \to \frac{4\pi e^2}{k^2} \qquad \text{при} \quad k^2 \to 0\,, \tag{8.78}$$

где e — истинный (физический) заряд частицы. Отсюда находим связь:

$$e^2 = Ze_0^2 \tag{8.79}$$

и с ее помощью нефизическая величина e_0 устраняется из формул, определяющих физические эффекты (а расходимость "загоняется" в фактор перенормировки Z). Потребовав сразу $Z = 1$ мы производим перенормировку "на ходу" [1] и избавляемся от необходимости введения фиктивных величин в промежуточных выкладках.

Перейдем теперь к рассмотрению условий перенормировки электронного пропагатора. Очевидно, что точный пропагатор $\mathcal{G}(p)$ должен иметь полюс при $p^2 = m^2$, где m — масса физического электрона. Соответственно, можно написать предельное выражение:

$$\mathcal{G}(p) \approx Z_1\frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i0} + g(p) \qquad \text{при} \quad p^2 \to m^2\,, \tag{8.80}$$

где Z_1 — скалярная постоянная (фактор перенормировки), а $g(p)$ конечно при $p^2 \to m^2$. Из (8.80) непосредственно следует и вид обратного пропагатора:

$$\mathcal{G}^{-1}(p) \approx \frac{1}{Z_1}(\gamma^\mu p_\mu - m) - (\gamma^\mu p_\mu - m)g(p)(\gamma^\mu p_\mu - m) \quad \text{при} \quad p^2 \to m^2\,. \tag{8.81}$$

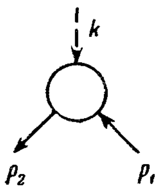


Рис. 8.15:

Массовый оператор имеет тогда при $p^2 \to m^2$ следующий вид:

$$\mathcal{M}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{G}^{-1}(p) \approx \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right)(\gamma^\mu p_\mu - m) + (\gamma^\mu p_\mu - m) g(p) (\gamma^\mu p_\mu - m)\,. \quad (8.82)$$

Эффективной внешней электронной линии (например входящей) в диаграмме рассеяния должен очевидно сопоставляться множитель:

$$\mathcal{U}(p) = u(p) + \mathcal{G}(p)\mathcal{M}(p)u(p)\,, \quad (8.83)$$

где $u(p)$ — обычный электронный биспинор, удовлетворяющий уравнению Дирака $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$. В силу условий релятивистской инвариантности ($\mathcal{U}$ тоже биспинор) предельное значение $\mathcal{U}$(p) при $p^2 \to m^2$ может отличаться от $u(p)$ лишь постоянным скалярным множителем (перенормировка волновой функции):

$$\mathcal{U}(p) = Z' u(p)\,. \quad (8.84)$$

Нетрудно показать [1], что существует простая связь

$$Z' = \sqrt{Z_1}\,. \quad (8.85)$$

Это почти очевидно из того, что функция Грина (пропагатор) квадратична по операторам электронного поля.

Теперь можно убедиться, что после установления предельного вида электронного пропагатора уже нет необходимости в каких-либо дополнительных условиях для вершинного оператора. Рассмотрим диаграмму, показанную на Рис. 8.15 и будем считать, что она описывает рассеяние электрона на внешнем поле $A_\mu^{(e)}(k)$ в первом порядке по этому полю, но с учетом всех радиационных поправок. В пределе $k \to 0$ имеем $p_2 \to p_1 \equiv p$ радиационные поправки к линии внешнего поля исчезают (выше мы отмечали, что они исчезают вообще при всяком $k^2 = 0$). Тогда рассматриваемой диаграмме соответствует амплитуда:

$$M_{fi} = -e\bar{\mathcal{U}}(p)\Gamma^\mu(p,p;0)\mathcal{U}(p)A_\mu^{(e)}(k \to 0)\,. \quad (8.86)$$

Но при $k \to 0$ потенциал $A_\mu^{(e)}(k)$ сводится к не зависящей от координат и времени константе. Такому потенциалу не соответствует никакое физическое поле, так что он не может вызвать никакого изменения электронного тока перехода. Другими словами, в этом пределе ток перехода $\bar{\mathcal{U}}\Gamma^\mu\mathcal{U}$ должен просто совпадать со свободным током $\bar{u}\gamma^\mu u$:

$$\bar{\mathcal{U}}(p)\Gamma^\mu(p,p;0)\mathcal{U}(p) = Z_1\bar{u}(p)\Gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p)\,. \quad (8.87)$$

Это соотношение автоматически выполняется в силу тождества Уорда, независимо от величины Z_1. В самом деле, подставляя $\mathcal{G}^{-1}(p)$ из (8.81) в (7.87), получаем:

$$\Gamma^\mu(p,p;0) = \frac{1}{Z_1}\gamma^\mu - \gamma^\mu g(p)(\gamma^\mu p_\mu - m) - (\gamma^\mu p_\mu - m)g(p)\gamma^\mu \tag{8.88}$$

и равенство (8.87) удовлетворяется в силу $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$ и $\bar{u}(p)(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0$. Все это, по существу, опять дает определение физического заряда электрона. Видим, что при составлении амплитуды физического процесса пернормировочный фактор Z_1 вообще выпадает. Мы можем просто потребовать:

$$\bar{u}(p)\Gamma^\mu(p,p;0)u(p) = \bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \qquad \text{при} \quad p^2 = m^2\,, \tag{8.89}$$

т.е. положить $Z_1 = 1$. Удобство такого определения состоит в том, что отпадает необходимость введения поправок во внешние электронные линии и мы просто имеем $\mathcal{U}(p) = u(p)$. Это ясно и из того, что при $Z_1 = 1$ для массового оператора (8.82) имеем:

$$\mathcal{M}(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m)g(p)(\gamma^\mu p_\mu - m)\,, \tag{8.90}$$

так что второй член в (8.83) очевидным образом обращается в нуль. Таким образом не требуют перенормировки внешние линии всех реальных частиц — как фотонов, так и электронов.

8.7 Классификация и устранение расходимостей.

Рассмотренные выше физические условия перенормировки позволяют, в принципе, получить однозначным образом конечное значение для амплитуды всякого процесса КЭД в любом порядке теории возмущений.

Рассмотрим сначала характер расходимостей, возникающих в различных интегралах Фейнмана. Прежде всего произведем подсчет степеней виртуальных 4-импульсов, входящих в подинтегральные выражения. Рассмотрим произвольную диаграмму n-го порядка (n — число вершин!), имеющую N_e электронных и N_γ фотонных внешних линий. Число N_e всегда четно. Полное число электронных линий равно $2n$, но из них N_e внешних, а скажем I_e внутренних. При подсчете числа линий внутренние линии учитываются дважды, поскольку они связывают две вершины, так что:

$$2n = N_e + 2I_e\,. \tag{8.91}$$

Соответственно, полное число внутренних электронных линий в диаграмме:

$$I_e = n - \frac{N_e}{2}\,. \tag{8.92}$$

В каждую вершину входит одна фотонная линия, при этом в N_γ вершинах эта линия внешняя, а в оставшихся $n - N_\gamma$ — внутренняя. Поскольку каждая внутренняя фотонная линия связывает две вершины, то полное число таких линий равно

$$\frac{n - N_\gamma}{2}\,. \tag{8.93}$$

Каждой внутренней фотонной линии сопоставляется множитель $D(k)$, содержащий k в степени -2. Каждой внутренней электронной линии сопоставляется $G(p)$, содержащая p в степени -1 (при $p^2 \gg m^2$). Таким образом, суммарная степень 4-импульсов в знаменателе диаграммы равна:

$$2\frac{n-N_\gamma}{2}+n-\frac{N_e}{2}=2n-\frac{N_e}{2}-N_\gamma\,. \tag{8.94}$$

Число же интегрирований по d^4p и d^4k в диаграмме равно числу внутренних линий, однако в каждой вершине выполняется закон сохранения 4-импульса, что накладывает $n-1$ дополнительное условие на импульсы интегрирования (один из этих n законов сохранения относится к внешним импульсам диаграммы — он соответствует общему закону сохранения в реакции, описываемой данной диаграммой). Соответственно, с учетом (8.92) и (8.93), получаем, что полное число внутренних линий диаграммы (электронных и фотонных) равно:

$$n-\frac{N_e}{2}+\frac{n}{2}-\frac{N_\gamma}{2}=\frac{3}{2}n-\frac{N_e}{2}-\frac{N_\gamma}{2}\,, \tag{8.95}$$

что дает число импульсов интегрирования без учета законов сохранения. Тогда вычитая отсюда $n-1$, имеем для числа независимых импульсов интегрирования

$$\frac{3}{2}n-\frac{N_e}{2}-\frac{N_\gamma}{2}-n+1=\frac{n}{2}+1-\frac{N_e}{2}-\frac{N_\gamma}{2}\,. \tag{8.96}$$

Учетверяя это число получаем полное число интегрирований:

$$2(n-N_e-N_\gamma+2)\,. \tag{8.97}$$

Тогда разность между числом интегрирований и степенью импульсов в знаменателе подинтегрального выражения для данной диаграммы равна разности (8.97) и (8.94):

$$r=4-\frac{3}{2}N_e-N_\gamma\,. \tag{8.98}$$

Это число и определяет является ли соответствующий фейнмановский интеграл сходящимся или расходящимся[7]. Дело, правда, усложняется тем обстоятельством, что условия $r<0$ для диаграммы в целом еще недостаточно для вывода о ее сходимости. Необходимо, чтобы были отрицательными аналогичные числа r' для всех внутренних блоков, которые можно из нее выделить. Наличие внутренних блоков с $r'>0$ приведет к расходимости диаграммы в целом, хотя остальные интегрирования могут сходиться с избытком. Условия $r<0$, однако, достаточно для сходимости простейших диаграмм.

Если же $r\geq 0$, то интеграл во всяком случае расходится. При этом степень расходимости не менее r, если число r четно, и не менее $r-1$, если r нечетно (уменьшение степени расходимости на 1 в последнем случае связано с обращением в нуль интеграла от произведений нечетного числа 4-векторов при интегрировании по всему 4-пространству). Степень расходимости может и увеличиться при наличии внутренних блоков с $r'>0$.

Заметим, что степень расходимости диаграммы r согласно (8.98) не зависит от порядка диаграммы n. Именно это замечательное обстоятельство, как мы еще увидим позднее, и делает теорию *перенормируемой*. Коротко говоря, дело тут в том, что

[7]Напомним, что речь все время идет о расходимости интегралов на верхнем пределе!

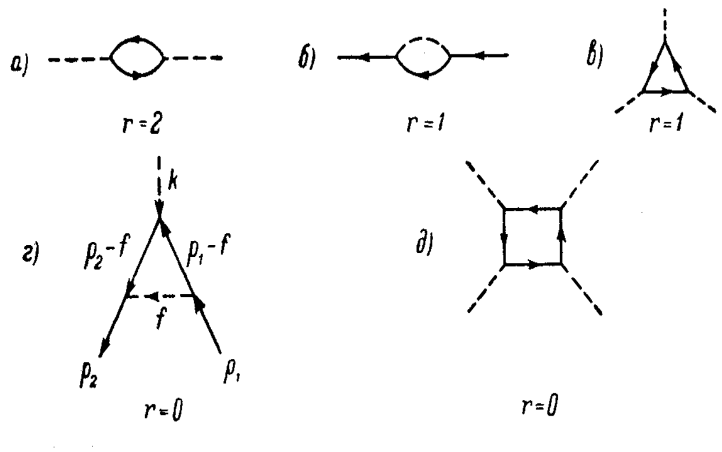


Рис. 8.16:

из (8.98) сразу ясно, что в такой теории существует конечное число типов расходимостей , поскольку из положительности целых чисел N_e и N_γ видно, что существует лишь несколько пар их значений, при которых $r \geq 0$, и конечное число простейших *примитивно расходящихся* диаграмм. Соответственно, в теории достаточно ввести конечное число параметров (определяемых из эксперимента), в которые и "загоняются" все расходимости. Если бы в (8.98) входила (со знаком плюс) величина n, то число типов расходимостей росло бы с ростом n и ситуация оказалась бы совершенно безнадежной! В КЭД легко перечислить все примитивно расходящиеся диаграммы в явном виде. Сразу же исключим из них случаи $N_e = N_\gamma = 0$ (вакуумные петли) и $N_e = 0, N_\gamma = 1$ (среднее значение вакуумного тока). Остальные случаи показаны на Рис. 8.16. В первой из этих диаграмм $r = 2$ и расходимость формально квадратичная, в остальных случаях $r = 0$ или $r = 1$ и расходимость логарифмическая.

Диаграмма Рис. 8.16(г) представляет собой первую поправку к вершинному оператору. Она должна удовлетворять условию (8.89), которое запишем в виде:

$$\bar{u}(p)\Lambda^\mu(p,p;0)u(p) = 0 \qquad \text{при} \quad p^2 = m^2\,, \tag{8.99}$$

где

$$\Lambda^\mu = \Gamma^\mu - \gamma^\mu\,. \tag{8.100}$$

Обозначим интеграл Фейнмана, записанный прямо по диаграммным правилам, как $\bar{\Lambda}^\mu(p_2,p_1;k)$. Этот интеграл логарифмически расходится и сам по себе условию (8.99) не удовлетворяет. Мы, однако, получим величину, удовлетворяющую этому условию, образовав разность:

$$\Lambda^\mu(p_2,p_2;k) = \bar{\Lambda}^\mu(p_2,p_1;k) - \bar{\Lambda}^\mu(p_1,p_1;0)\big|_{p_1^2=m^2}\,. \tag{8.101}$$

Расходимость в интеграле для $\bar{\Lambda}^\mu(p_2,p_1;k)$ можно выделить рассмотрев в подинтегральном выражении сколь угодно большой 4-импульс виртуального фотона f. Тогда имеем:

$$-4\pi i e^2\int\frac{d^4f}{(2\pi)^4}\gamma^\nu G(p_2-f)\gamma^\mu G(p_1-f)\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(f) \sim -4\pi i e^2\int\frac{d^4f}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\nu(\gamma^\kappa f_\kappa)\gamma^\mu(\gamma_\rho f_\rho)\gamma_\nu}{f^2f^2f^2}\,, \tag{8.102}$$

что не зависит от значений 4-импульсов внешних линий. Поэтому в разности (8.101) расходимость сокращается и получается конечное выражение.

О такой процедуре устранения расходимостей говорят как о перенормировке с помощью вычитаний. Подчеркнем, что возможность устранения расходимости из интеграла $\bar{\Lambda}^{\mu}(p_2, p_1; k)$ путем только одного вычитания обеспечивается тем, что в данном случае расходимость лишь логарифмическая, т.е. наименьшая из всех возможных.

После определения первой поправки в Γ^{μ} (т.е. первого члена разложения Λ^{μ}) первая поправка в электронном пропагаторе (диаграмма Рис. 8.16(б)) может быть рассчитана с помощью тождества Уорда (7.87), которое можно переписать как:

$$-\frac{\partial \mathcal{M}(p)}{\partial p_{\mu}} = \Lambda^{\mu}(p, p; 0)\,, \tag{8.103}$$

введя массовый оператор $\mathcal{M}$ вместо $\mathcal{G}$ и Λ^{μ} вместо Γ^{μ}. Это уравнение может быть просто проинтегрировано с граничным условием:

$$\bar{u}(p)\mathcal{M}(p)u(p) = 0 \qquad \text{при} \quad p^2 = m^2\,, \tag{8.104}$$

следующим из (8.90).

В принципе, аналогичным способом (хотя и несколько более громоздким) можно устранить расходимости и из поляризационного оператора Рис. 8.16(а) [1, 2]. здесь требуется произвести два вычитания:

$$\mathcal{P}(k^2) = \bar{\mathcal{P}}(k^2) - \bar{\mathcal{P}}(0) - k^2\bar{\mathcal{P}}'(0)\,, \tag{8.105}$$

где через $\bar{\mathcal{P}}$ обозначен фейнмановский интеграл, соответствующий рассматриваемой диаграмме. Очевидно, что (8.105) удовлетворяет рассмотренным выше физическим условиям (8.73) и (8.77).

В следующем порядке теории возмущений поправка к вершинному оператору $\Lambda_{\mu}^{(2)}$ определяется диаграммами, показанными на Рис. 7.17(в–и). Из них компактными являются только показанные на Рис. 7.17(г–е), и они могут быть вычислены в конечном виде опять с помощью одного вычитания (8.101). Содержащиеся же в некомпактных диаграммах внутренние собственно-энергетические и вершинные части более низкого порядка сразу заменяются уже известными (перенормированными) величинами первого порядка $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{M}^{(1)}, \Lambda_{\mu}^{(1)}$, после чего интегралы опять таки делаются конечными с помощью вычитания (8.101). Поправки $\mathcal{M}^{(2)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ затем вычисляются из тождества Уорда (8.103) и из (8.105). Описанная систематическая процедура дает, в принципе, способ получения конечных выражений для $\mathcal{P}, \mathcal{M}$ и Λ_{μ} в любом порядке теории возмущений [1, 2]. Тем самым становится возможным и вычисление амплитуд физических процессов рассеяния, в которые блоки $\mathcal{P}, \mathcal{M}$ и Λ_{μ} входят как составные части. Таким образом, установленные выше физические условия перенормировки оказываются достаточными для устранения расходимостей из всех интегралов Фейнмана. В этом и проявляется весьма нетривиальное свойство *перенормируемости* квантовой электродинамики. В дальнейшем мы еще вернемся к общему обсуждению понятия перенормируемости и его использованию в других моделях квантовой теории поля.

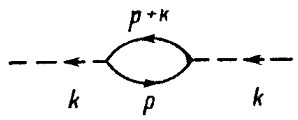


Рис. 8.17:

8.8 Асимптотическое поведение фотонного пропагатора при больших импульсах.

Рассмотрим важный, с принципиальной точки зрения, вопрос об асимптотике фотонного пропагатора в области больших импульсов $|k^2| \gg m^2$. В первом приближении теории возмущений поляризационный оператор определяется простой петлевой диаграммой, показанной на Рис. 8.17. При прямом вычислении он определяется фейнмановским интегралом вида:

$$\frac{i}{4\pi}\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\gamma^\mu G(p)\gamma^\nu G(p-k)\,. \tag{8.106}$$

Однако этот интеграл, взятый по всему четырехмерному p-пространству, расходится (квадратично, согласно простому подсчету степеней предыдущего раздела, а на самом деле логарифмически из-за "скрытой" алгебры подинтегрального выражения). Эти бесконечности нужно устранить по рецептам перенормировки, обсуждавшимся в предыдущих разделах. Прямые вычисления возможны, но весьма громоздки [2]. Рассмотрение сильно упрощается в асимптотическом пределе $|k^2| \gg m^2$, который нам только и интересен. Как мы увидим чуть ниже, в этом пределе нетрудно получить, что после перенормировки (8.106), сводится к:

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{e^2}{3\pi} k^2 \ln\frac{|k|^2}{m^2}\,. \tag{8.107}$$

По сути дела это есть поправка первого приближения к пропагатору $4\pi D^{-1} = k^2$ и ей можно пользоваться пока выполнено условие:

$$\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2} \ll 1\,, \tag{8.108}$$

что ограничивает область применимости со стороны интересующих нас больших $|k|^2$. В действительности, выражение (8.107) остается справедливым при гораздо более слабом условии:

$$\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2} \lesssim 1\,. \tag{8.109}$$

Схема доказательства этого утверждения, по ходу которого мы заодно получим и сам результат (8.107), состоит в следующем [1]. Прежде всего заметим, что хотя при условии (8.109) в $\mathcal{P}(k^2)$ могут возникать вклады от членов всех порядков теории возмущений, в n-м порядке достаточно учитывать только члены $\sim (e^2)^n \ln^n\left(\frac{|k|^2}{m^2}\right)$, содержащие большой логарифм в интересующем нас пределе $|k^2| \gg m^2$. При этом логарифм должен входить именно в той же степени, что и e^2, поскольку члены с более низкими степенями логарифма заведомо малы в силу неравенства $e^2 \ll 1$. Это называют приближением главных логарифмов.

Рассмотрим теперь уравнение Дайсона для поляризационного оператора (7.77):

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{4\pi i e^2}{3} Sp \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \mathcal{G}(p+k)\Gamma_\mu(p+k,p;k)\mathcal{G}(p)\,. \tag{8.110}$$

Поскольку, как было показано выше, функция $\mathcal{P}(k^2)$ калибровочно инвариантна, то при вычислении ее из диаграмм Фейнмана можно использовать любую калибровку для пропагаторов и вершин. В данном случае наиболее удобной оказывается калибровка Ландау, в которой пропагатор фотонов имеет вид ($D^l = 0$):

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \tag{8.111}$$

Детальный анализ поправочных диаграмм для (8.106), который можно найти в [1], показывает, что в такой калибровке ряды теории возмущений вообще не содержат членов с нужными степенями логарифма.

Поэтому в (8.110) достаточно подставить нулевые приближения $\mathcal{G} = G$ и $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Тогда (8.110) сводится к интегралу:

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{4\pi i e^2}{3} Sp \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu G(p+k)\gamma_\mu G(p)\,, \tag{8.112}$$

такому же как в (8.106). Проследим, прежде всего, за происхождением логарифма в этом интеграле. Легко видеть, что логарифмический вклад возникает от области интегрирования:

$$p^2 \gg |k^2| \qquad \text{при} \qquad |k^2| \gg m^2\,. \tag{8.113}$$

Действительно, в этом пределе можем написать[8]:

$$G(p) \approx \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu} = \frac{\gamma^\mu p_\mu}{p^2}\,, \tag{8.114}$$

$$\begin{aligned} G(p-k) &\approx \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - \gamma^\mu k_\mu} = \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu} + \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu}\gamma^\nu k_\nu \frac{1}{\gamma^\alpha p_\alpha} + \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu}\gamma^\nu k_\nu \frac{1}{\gamma^\alpha p_\alpha}\gamma^\rho k_\rho \frac{1}{\gamma^\beta p_\beta} + ... \\ &= \frac{\gamma^\mu p_\mu}{p^2} + \frac{(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu k_\nu)(\gamma^\alpha p_\alpha)}{(p^2)^2} + \frac{(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu k_\nu)(\gamma^\alpha p_\alpha)(\gamma^\rho k_\rho)(\gamma^\beta p_\beta)}{(p^2)^3} + ...\,. \end{aligned} \tag{8.115}$$

При подстановке этих выражений в (8.112) первый член, не зависящий от k, выпадает в результате перенормировки, в соответствии с условием $\mathcal{P}(0) = 0$ (первое

[8]Знаки здесь определяются свойствами γ-матриц.

вычитание в (8.105)). Второй член обращается в нуль при интегрировании по направлениям p. Третий же интеграл логарифмически расходится по p^2, его легко оценить проводя интегрирование в пределах от $p^2 \sim |k^2|$ (нижний предел области (8.113)) до некоторого "параметра обрезания" Λ^2:

$$\int d^4p \frac{p^4}{p^8} \sim \int dp\, p^3 \frac{p^4}{p^8} \sim \int\limits_{|k^2|}^{\Lambda^2} dp^2\, p^2 \frac{p^4}{p^8} \sim \int\limits_{|k^2|}^{\Lambda^2} dp^2 \frac{1}{p^2} \sim \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}\,. \tag{8.116}$$

В итоге получаем:

$$\mathcal{P}(k^2) = -\frac{e^2}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}\,. \tag{8.117}$$

Но это еще не все, для окончательного устранения расходимости ($\Lambda \to \infty$) нужно еще вычесть из $\mathcal{P}(k^2)/k^2$ его значение при $k^2 = 0$ (второе вычитание в (8.105)). Но поскольку логарифмическая точность наших вычислений предполагает $|k^2| \gg m^2$, то при вычислении с этой точностью вычесть нужно значение (8.117) при $|k^2| \sim m^2$, в результате чего Λ^2 в аргументе логарифма заменяется на m^2, и мы получаем искомый результат (8.107). А поскольку в калибровке Ландау не возникает поправок к $\mathcal{G}$ и Γ с "нужными" степенями логарифма, то выражение (8.107) действительно справедливо и при условии (8.109).

Функция $\mathcal{D}(k^2)$, соответствующая поляризационному оператору (8.107), имеет вид:

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}}\,. \tag{8.118}$$

В силу (8.109) это выражение можно не разлагать по степеням e^2. Однако применимость (8.118) ограничена со стороны больших $|k^2|$ в связи с уменьшением ее знаменателя. Вывод (8.118) основан на логарифмическом приближении и пренебрежении бесконечными последовательностями диаграмм высших порядков, не содержащих доминирующих логарифмов. Согласно (8.118) добавление каждой новой жирной фотонной линии привносит в диаграмму множитель $e^2\mathcal{D}$, а роль малого параметра теории возмущений вместо e^2 играет величина:

$$\frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2}} \ll 1\,, \tag{8.119}$$

совпадающая с обсуждавшейся выше "бегущей" константой связи (8.60). Когда, по мере возрастания $|k^2|$, эта величина по порядку сравнивается с единицей, из теории, по существу, вообще исчезает малый параметр и теория возмущений становится неприменимой.

8.9 Связь между "затравочным" и истинным зарядом.

Ситуацию с (8.118), (8.119) можно понять более ясно, если при выводе (8.118) делать перенормировку не "на ходу", а путем предварительного введения "затравочного" или "голого" заряда e_0, который в дальнейшем подбирается так, чтобы привести к правильному наблюдаемому значению заряда e (или e_R, в обозначениях, использовавшихся выше). Если расходящийся логарифмический интеграл обрезается на вспомогательном Λ^2 (выше мы также использовали для параметра обрезания обозначение M^2), то затравочный заряд можно считать его функцией: $e_0 = e_0(\Lambda^2)$, а в заключение нужно переходить к пределу $\Lambda \to \infty$. При таком подходе поляризационный оператор имеет вид (8.117):

$$\mathcal{P}(k^2) = -\frac{e_0^2}{3\pi} k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}\,. \tag{8.120}$$

Соответственно получим:

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{e_0^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}\,. \tag{8.121}$$

Определим теперь физический заряд e согласно:

$$e_0^2 \mathcal{D}(k^2) \to \frac{4\pi e^2}{k^2} \qquad \text{при} \quad k^2 \to m^2\,, \tag{8.122}$$

т.е. на расстояниях порядка m^{-1} (т.е. комптоновской длины волны электрона $\hbar/mc$, определяющей его эффективный радиус в квантовой теории). Тогда получим:

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \frac{e_0^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}\,, \tag{8.123}$$

что фактически совпадает с (8.59) при выборе точки нормировки $\mu^2 = m^2$. Отсюда

$$e_0^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}\,. \tag{8.124}$$

Если теперь формально перейти в (8.123) к пределу точечного заряда $\Lambda \to \infty$, то $e \to 0$, независимо от вида функции $e_0^2(\Lambda)$. Эта ситуация и называется "московским нулем". Она впервые была отмечена в работах Ландау – Померанчука и Фрадкина в середине 50-х годов. По мнению Ландау [30] такая ситуация означала бы невозможность строгого проведения перенормировки и внутреннюю противоречивость КЭД (и, как тогда считалось, любой другой модели квантовой теории поля).

Приведем аргументацию Ландау и Померанчука, с помощью которой они обосновывали свои выводы. Пусть отношение $\frac{\Lambda^2}{|k^2|}$ настолько велико, что

$$\frac{e_0^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|} \gg 1\,, \tag{8.125}$$

но, в тоже время, еще $e_0 \ll 1$. Тогда в (8.121) можно пренебречь единицей в знаменателе, так что

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 e_0^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}} \tag{8.126}$$

и, соответственно, из (8.122) имеем:

$$e^2 = \frac{3\pi}{\nu \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}\,, \tag{8.127}$$

что *не зависит* от величины затравочного заряда e_0. Заметим, что здесь мы еще дополнительно поделили (8.127) на параметр ν — число типов фундаментальных фермионов, дающих вклад в поляризацию вакуума (соответствующие им вклады в поляризационные петли просто складываются!).

Введем теперь вместо оператора 4-потенциала электромагнитного поля A^μ, 4-вектор $\mathcal{A}^\mu = e_0 A^\mu$. тогда гамильтониан взаимодействия H_I не будет содержать затравочного заряда e_0, а гамильтониан свободного электромагнитного поля H_0 (квадратичный по A^μ) будет содержать e_0^2 в знаменателе. Функция же $\tilde{\mathcal{D}}(k^2)$, определенная с помощью $\mathcal{A}^\mu$ также, как $\mathcal{D}(k^2)$ определяется с помощью A^μ, будет равна:

$$\tilde{\mathcal{D}}(k^2) = e_0^2 \mathcal{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 \ln \frac{\Lambda^2}{|k^2|}} \,. \tag{8.128}$$

Это выражение не содержит e_0, а это означает, что оно соответствует пренебрежению в гамильтониане $H = H_0 + H_I$ зависящим от e_0 членом H_0. Но если пренебрежение H_0 по сравнению с H_I возможно (при больших Λ) уже при $e_0^2 \ll 1$, то естественно думать, что оно тем более законно при не малых e_0^2. Таким образом (8.126), а с ней и (8.127) перестают быть связанными с условием $e_0^2 \ll 1$ и переход к пределу $\Lambda \to \infty$ становится возможным. При этом $e^2 \to 0$ вне зависимости от вида функции $e_0(\Lambda)$.

Параметр обрезания Λ, при котором выполняется соотношение (8.127), во всяком случае очень велик. На соответствующих (крайне малых!) расстояниях эффекты гравитационного взаимодействия могут превышать электромагнитные. Весьма соблазнительна идея, что "кризис" электродинамики происходит именно на тех расстояниях (энергиях), когда гравитационное взаимодействие сравнивается с электромагнитным. Выбирая импульс обрезания порядка обратной планковской длины, имеем:

$$G_N \Lambda^2 \sim 1 \,, \tag{8.129}$$

где G_N — ньютоновская гравитационная постоянная. При такой точке зрения величина физического заряда e автоматически определялась бы из теории по формулам (8.127) и (8.129), что дает $\nu \approx 12$. Если $\nu < 12$, гравитационные эффекты наступят значительно раньше, чем эффективный заряд станет порядка единицы. Напротив, при $\nu > 12$ гравитационные эффекты не "спасут" электродинамики, так как они наступят слишком "поздно". Занятно, что согласно современным представлениям о мире элементарных частиц, изложенным в Главе 1, в Природе существует как раз 12 фундаментальных фермионов!

Нужно, впрочем, подчеркнуть, что, согласно мнению большинства других исследователей переход к пределу $\Lambda \to \infty$ в выражениях типа (8.123) и (8.124) выполнять нельзя, не нарушив предположений, сделанных при их выводе. Из (8.124) видно, что по мере увеличения Λ (при заданном значении e^2) величина e_0^2 растет, и уже при $e_0^2 \sim 1$ эти формулы теряют свою применимость, поскольку их вывод был основан на предположении $e_0^2 \ll 1$, как условии применимости теории возмущений к затравочному взаимодействию.

Заметим, что в применении к КЭД все эти трудности имеют довольно "академическое" значение, поскольку они возникают при фантастических энергиях, не представляющих никакого реального интереса: равенство $\frac{e^2}{\pi} \ln\left(\frac{E^2}{m^2}\right) = 1$ достигается при $E \sim 10^{93} m$, что конечно же, связано с малой величиной $e^2 = \frac{1}{137}$. Несравненно раньше, как мы увидим далее, электромагнитные взаимодействия "запутываются" со слабыми и сильными взаимодействиями и "чистая" электродинамика теряет смысл. Мы еще вернемся к обсуждению проблем последовательного описания асимптотических свойств квантовой теории поля в конце нашего курса.

Для лучшего понимания обсуждаемых проблем приведем еще простые качественные рассуждения в координатном пространстве [34]. К "координатному представлению" в рассматриваемых асимптотических формулах КЭД можно перейти с помощью очевидной (из соображений размерности) замены: $m \to r^{-1}$ и $\Lambda \to r_0^{-1}$, где r – характерное расстояние электрона от центра электрона (его можно взять порядка его комптоновской длины волны), а r_0 – некоторая фундаментальная длина, характеризующая геометрический размер затравочного заряда, который можно представлять себе в виде шарика с радиусом r_0. Тогда выражение (8.123) можно записать так:

$$e^2(r) = \frac{e^2(r_0)}{1 + \frac{2e^2(r_0)}{3\pi^2} \ln \frac{r}{r_0}} \,. \tag{8.130}$$

Пусть величина затравочного заряда $e^2(r_0)$ фиксирована. Мы хотим перейти к точечному затравочному заряду и начинаем уменьшать r_0, сохраняя $e_0^2(r_0)$ неизменным. Тогда, рано или поздно, получим $\frac{2e^2(r_0)}{3\pi^2} \ln \frac{r}{r_0} \gg 1$ и в знаменателе (8.130) можно пренебречь единицей. Соответственно:

$$e^2(r) = \frac{1}{\frac{2}{3\pi^2} \ln \frac{r}{r_0}} \,. \tag{8.131}$$

Но теперь, при дальнейшем уменьшении r_0 получаем $e^2(r) \to 0$ при $r_0 \to 0$. Это и есть “московский нуль”. Как писали Ландау и Померанчук[9]: “Мы приходим к фундаментальному выводу, что из формальной квантовой электродинамики, по-видимому, следует равенство нулю заряда электрона. Оговорка “по-видимому” относится к некоторой нестрогости изложенной выше аргументации”. Физика дела состоит здесь в том, что в рассматриваемом приближении, поляризация вакуума (за счет рождения виртуальных электрон-позитронных пар) оказывается на малых расстояниях столь сильной, что на некотором расстоянии остаточный заряд уже не зависит от первоначального (затравочного). В пределе же точечного затравочного заряда от него ничего не остается на любом конечном расстоянии — происходит полная экранировка. Заметим, что эта физика вполне прозрачна, явление экранировки хорошо известно в физике плазмы и твердого тела [35], оно и описывается совершенно аналогичными расчетами поляризационного оператора в многочастичной системе [13]. Как же тогда понимать практические успехи квантовой электродинамики?

Запишем (8.130) в виде, разрешенном относительно $e^2(r_0)$ и положим $r = \lambda_e = m^{-1}$ (комптоновской длине электрона):

$$e^2(r_0) = \frac{e^2(\lambda_e)}{1 - \frac{2e^2(\lambda_e)}{3\pi^2} \ln \frac{\lambda_e}{r_0}} \,. \tag{8.132}$$

Здесь $e^2(\lambda_e)$ следует понимать как “физический” заряд электрона, т.е. тот, который проявляется на больших расстояниях (порядка λ_e) вне эффективной области поляризации вакуума (экранировки). Когда мы “входим” внутрь этой области ($r_0 < \lambda_e$), то заряд увеличивается — экранировка ослабевает, когда мы входим внутрь “шубы” из электрон-позитронных пар[10]. Однако достичь предельно больших значений этого заряда мы не можем из-за ложного полюса, вблизи которого формула (8.132) просто теряет смысл. Практически это не актуально, так как речь идет об области $r_0 \sim \lambda_e \exp[-(137)(3\pi^2)/2]$. КЭД практически пригодна именно потому, что мы пользуемся не точными решениями с точечным взаимодействием, оставляя открытым вопрос о том, что делается на малых расстояниях, где несомненно существенны другие взаимодействия. Да и кто сказал, что на малых расстояниях не работает какой-то физический механизм обрезания расходимостей (например, связанный с гравитацией — ср.(8.129)!), который нам пока не известен, но который делает взаимодействие в теории поля эффективно неточечным? Таким образом, “прагматическая” точка зрения (большинства!) состоит в том, что эмпирически задан “физический” заряд $e(\lambda_e)$, тогда есть решения в виде рядов теории возмущений, но к малым расстояниям современная теория неприменима. Соответственно, на сегодняшний день, проблема асимптотического поведения КЭД остается нерешенной.

В асимптотически свободных теориях поля, например в КХД, ситуация, как уже обсуждалось выше, иная. Поскольку знак в знаменателе формул типа (8.130) и (8.132) там противоположный случаю КЭД, то и асимптотическое поведение “константы” взаимодействия (заряда) другое: $g^2(r_0) \to 0$ при $r_0 \to 0$. Теперь не заряд на конечном расстоянии обращается в нуль при любом значении затравочного точечного заряда, а нулевой точечный заряд отвечает конечному заряду на конечном расстоянии: $g^2(r)$ растет с ростом r. В КХД имеет место эффективная “антиэкранировка” заряда. Мы не знаем, однако, какое r_0 и $g(r_0)$ следует зафиксировать и до каких r можно пользоваться логарифмической формулой типа (8.130). Ясно, что не безгранично, поскольку при уменьшении знаменателя (с ростом r) мы снова выходим за область применимости теории возмущений. Качественно, однако, очевидно, что заряд растет с расстоянием, что, по-видимому, и ведет к конфайнменту кварков. По существу, эти зависимости также сейчас измеряются на эксперименте. В конце курса мы еще вернемся к обсуждению физической природы явления асимптотической свободы в КХД и его значения в физике частиц.

---

[9] ДАН **102**, 489 (1955)

[10] Фактически это означает, например, зависимость “постоянной тонкой структуры” от передаваемого в реакции импульса. Как уже отмечалось, этот эффект реально наблюдается!

8.10 Группа перенормировки в КЭД.

Покажем теперь, как формулы (8.130) и (8.124) могут быть получены с помощью простых рассуждений, основанных на смысле понятия перенормировки и соображениях размерности, составляющих основу представлений о группе перенормировки (ренорм-группе), и введенных в КЭД Гелл-Манном и Лоу. Рассмотрим снова квадрат затравочного заряда как функцию параметра обрезания $e_0^2(\Lambda)$, и введем функцию d, определяющую соотношение между значениями e_0^2 при двух значениях ее аргумента:

$$e_0^2(\Lambda_2^2) = e_0^2(\Lambda_1^2) d\,. \tag{8.133}$$

При $\Lambda_1^2, \Lambda_2^2 \gg m^2$ функция d не зависит от m и, будучи безразмерной величиной, может зависеть только от безразмерных же величин $e_0^2(\Lambda_1^2)$ и Λ_2^2/Λ_1^2, так что можно записать:

$$e_0^2(\Lambda_2^2) = e_0^2(\Lambda_1^2) d\left(e_0^2(\Lambda_1^2), \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}\right)\,. \tag{8.134}$$

Это и есть преобразование группы перенормировки. Смысл его прост — в перенормируемой теории изменение параметра обрезания может быть скомпенсировано соответствующим изменением затравочного заряда без изменения физических результатов (в данном случае — величины физического заряда). От функционального уравнения (8.134) удобно перейти к дифференциальному. Для этого рассмотрим бесконечно близкие значения Λ_1^2 и Λ_2^2. Обозначим $\Lambda_1^2 = \xi$ и $\Lambda_2^2 = \xi + d\xi$. Тогда из (8.134) получаем:

$$\begin{aligned} e_0^2(\xi + d\xi) = e_0^2(\xi) + de_0^2(\xi) = e_0^2(\xi) d\left(e_0^2(\xi), 1 + \frac{d\xi}{\xi}\right) = \\ = e_0^2(\xi)\left[d(e_0^2(\xi), 1) + \left.\frac{\partial d(e_0^2(\xi), x)}{\partial x}\right|_{x=1} \frac{d\xi}{\xi}\right]\,, \end{aligned} \tag{8.135}$$

откуда, с учетом $d(e_0^2(\xi), 1) = 1$, имеем:

$$de_0^2(\xi) = e_0^2(\xi) \left.\frac{\partial d(e_0^2(\xi), x)}{\partial x}\right|_{x=1} \frac{d\xi}{\xi}\,, \tag{8.136}$$

что и дает дифференциальное уравнение Гелл-Манна – Лоу:

$$\frac{de_0^2}{d\ln\xi} = \psi(e_0^2)\,, \tag{8.137}$$

где введена функция Гелл-Манна – Лоу:

$$\psi(e_0^2) = e_0^2 \left[\frac{\partial d(e_0^2, x)}{\partial x}\right]_{x=1}\,. \tag{8.138}$$

Записывая (8.137) в виде $\frac{de_0^2}{\psi(e_0^2)} = \frac{d\xi}{\xi}$ и интегрируя его от $\xi = \Lambda_1^2$ до $\xi = \Lambda_2^2$, получим:

$$\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2} = \int\limits_{e_0^2(\Lambda_1^2)}^{e_0^2(\Lambda_2^2)} \frac{de^2}{\psi(e^2)}\,. \tag{8.139}$$

Если во всей области интегрирования величина e_0^2 мала, мы можем воспользоваться для $\psi(e^2)$ выражением, получающимся из первого приближения теории возмущений. Из общего выражения $\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2}\left(1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2}\right)^{-1}$ ясно, что поправки к затравочному заряду e_0^2 даются величиной $e_0^2 k^{-2}\mathcal{P}(k^2)$. Тогда, используя для поляризационного оператора его выражение первого приближения (8.120), найдем (ср. (8.123)):

$$e^2 = e_0^2(\Lambda_1^2)\left[1 - \frac{e_0^2(\Lambda_1^2)}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_1^2}{|k^2|}\right] = e_0^2(\Lambda_2^2)\left[1 - \frac{e_0^2(\Lambda_2^2)}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{|k^2|}\right]. \tag{8.140}$$

Отсюда:

$$d\left(e_0^2, \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}\right) = \frac{1 - \frac{e_0^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_1^2}{|k^2|}}{1 - \frac{e_0^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{|k^2|}} \approx 1 + \frac{e_0^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}. \tag{8.141}$$

Соответственно, используя определение (8.138), получаем:

$$\psi(e_0^2) = \frac{e_0^4}{3\pi}, \tag{8.142}$$

так что функция Гелл-Манна – Лоу квадратично растет с ростом своего аргумента. Теперь интегрирование в (8.139) можно провести в явном виде:

$$\frac{1}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2} = \frac{1}{e_0^2(\Lambda_1^2)} - \frac{1}{e_0^2(\Lambda_2^2)}. \tag{8.143}$$

Если теперь определить физический заряд как $e^2 = \lim_{\Lambda_1^2 \to m^2} e_0^2(\Lambda_1^2)$, то выражение (8.143) сводится к (8.123) и (8.124). Таким образом, расчет функции Гелл-Манна – Лоу в низшем порядке теории возмущений и последующее интегрирование дифференциального уравнения ренорм-группы дают результат, полученный выше суммированием главных логарифмов в диаграммном ряду. В этом смысле, нам удалось "обойти" проблемы полного обоснования описанной выше процедуры суммирования. В связи с этим, иногда говорят, что ренорм-группа дает возможность построения "улучшенной" теории возмущений, в которой роль константы связи играет (8.119). Однако все обсуждавшиеся выше принципиальные вопросы, фактически, остаются. Результат (8.143) получен с помощью приближенного выражения для функции Гелл-Манна – Лоу (8.142), справедливого только при $e_0^2 \ll 1$. Неясно, к чему приведут поправки высших порядков, надежное исследование которых до сих пор не удалось провести. Тем не менее, как мы увидим в дальнейшем, качественный анализ возможностей, следующих из дифференциального уравнения типа (8.137), основанный на тех или иных предположениях о виде функции Гелл-Манна – Лоу при всех значениях ее аргумента, может оказаться весьма полезным.

8.11 Асимптотический характер рядов теории возмущений.

Изложенный выше метод перенормировок устраняет расходимости в отдельных диаграммах, т.е. в отдельных членах разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням заряда электрона, а не сразу во всей матрице рассеяния. Возникает вопрос, будет ли сходящимся ряд теории возмущений, состоящий из перенормируемых слагаемых.

Существует аргументация, принадлежащая Дайсону, из которой следует, что этот ряд является расходящимся и относится к типу так называемых *асимптотических* разложений.

Взаимодействие между двумя электронами, как мы видели, определяется функцией $e_R^2\mathcal{D}(k^2)$, где e_R снова обозначает перенормированный (физический) заряд. Вычислив с помощью этой функции некоторую физическую величину $F(p;e_R^2)$, мы получим бесконечный ряд по степеням e_R^2:

$$F(p;e_R^2) = \sum_{n=0}^{\infty} e_R^{2n} f_n(p)\,, \tag{8.144}$$

где $f_n(p)$ — некоторые функции 4-импульсов частиц. Допустим, что этот ряд, отдельные члены которого перенормированы с помощью описанной выше процедуры, сходится при некотором значении e_R. Тогда $F(p;e_R^2) \equiv F(e_R^2)$ является аналитической функцией e_R^2 при $e_R^2 \sim 0$, а следовательно, и $F(-e_R^2)$ будет аналитической функцией, представимой в виде степенного ряда. Но $F(-e_R^2)$ представляет собой изучаемую нами величину F для того случая, когда взаимодействие двух частиц определяется функцией $-e_R^2\mathcal{D}(k^2)$, что соответствует ситуации притяжения одноименных зарядов вместо отталкивания.

Нетрудно убедиться, что в этом случае обычное определение вакуума не отвечает состоянию с наименьшей энергией! В самом деле, представим себе, что образовалось N электрон-позитронных пар и что все электроны сосредоточены в одной области пространства, а позитроны в другой. Если эти области достаточно малы и достаточно отдалены друг от друга, то при большом N отрицательная кулоновская энергия притягивающихся одноименных зарядов будет больше энергии покоя частиц и их кинетической энергии. Назовем такие состояния "патологическими".

Предполагая, что взаимодействие между зарядами определяется $-e_R^2\mathcal{D}(k^2)$, рассмотрим некоторое обычное состояние, характеризующееся наличием нескольких частиц. В том числе это может быть и обычный вакуум (состояние без частиц). Это состояние отделено потенциальным барьером от "патологического" состояния с такой же энергией, причем высота барьера определяется энергией, необходимой для создания N пар, т.е. энергией покоя N частиц.

В силу квантовомеханического туннельного эффекта существует конечная вероятность перехода из обычного в "патологическое" состояние. Это означает, что каждое физическое состояние является неустойчивым по отношению к спонтанному рождению большого числа частиц. "Патологическое" состояние, в которое перейдет система, не будет стационарным, так как в нем будет образовываться все большее и большее число частиц, т.е. в частности, будет происходить разрушение вакуума, а основного состояния у такой системы вообще не будет! В силу такой "патологии" нельзя предполагать, что КЭД с функцией взаимодействия $-e_R^2\mathcal{D}(k^2)$ приводит к вполне определенным аналитическим функциям. Скорее следует думать, что функция $F(-e_R^2)$ не может быть аналитической, а потому и ряд (8.144) не является сходящимся при $e_R^2 \neq 0$.

В связи с этим снова возникает естественный вопрос — какой же смысл имеет ряд (8.144) и почему КЭД, оперирующая с такими рядами, находится в блестящем соответствии с экспериментальными данными. Ответ на этот вопрос состоит в том, что ряд (8.144) является асимптотическим рядом. Такие ряды, при соблюдении некоторых условий, могут быть использованы для описания функций, которые они представляют с очень большой, но всегда конечной точностью [36]. В отличие от сходящихся рядов, члены асимптотического ряда $e_R^{2n} f_n(p)$ с ростом n сначала падают, но затем, начиная с некоторого номера n_0 начинают расти, причем, вообще говоря, расти неограниченно. При этом максимальная точность, с которой асимптотический ряд может аппроксимировать функцию F, определяется величиной f_{n_0}. Чем эта величина меньше, тем точность больше. В случае КЭД есть основания полагать, что в ряде (8.144) величины f_n будут падать вплоть до n порядка $n_0 \approx \hbar c/e_R^2 = 137$. Так как это значение n_0 весьма велико, то точность, с которой в КЭД ряд (8.144) соответствует реальности очень велика. По-видимому, неточность ряда (8.144) порядка $\exp(-\hbar c/e_R^2)$, что является ничтожно малой величиной. Для практических целей КЭД такой точности более чем достаточно!

Глава 9

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

9.1 Формулировка квантовой механики на основе интегралов по траекториям.

Хорошо известно, что квантовая механика возникла, практически одновременно, в двух эквивалентных формулировках — в виде матричной механики Гейзенберга и волновой механики, основанной на уравнении Шредингера. Существует еще одна форма построения квантовой теории, предложенная существенно позже Фейнманом [37], к краткому изложению изложению которой мы и переходим. Разумеется, все формулировки квантовой механики, по сути дела, тождественны и используются из соображений удобства при решении разных практических задач. В концептуальном плане, они выделяют отдельные стороны квантовой теории, позволяя несколько по разному проводить построение квантовой теории поля. В этом плане, формулировка Фейнмана представляется особенно изящной и удобной для последующих обобщений.

Пусть задана волновая функция частицы $\psi(q_i, t_i)$ в момент времени t_i, где q_i обозначает соответствующую координатную зависимость. Будем, для краткости, рассматривать пока одномерное движение. Тогда, как мы видели в Главе 4, можно записать значение волновой функции в более поздний момент времени t_f в следующем виде:

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i K(q_f t_f; q_i t_i)\psi(q_i t_i)\,, \tag{9.1}$$

где $K(q_f t_f; q_i t_i)$ — соответствующий пропагатор (функция Грина уравнения Шредингера). В соответствии со стандартной интерпретацией $\psi(q_f, t_f)$ представляет собой амплитуду вероятности того, что частица находится в точке пространства q_f в момент времени t_f. Соответственно, пропагатор $K(q_f t_f; q_i t_i)$ представляет собой амплитуду вероятности перехода частицы из начальной точки q_i в момент t_i в ко-

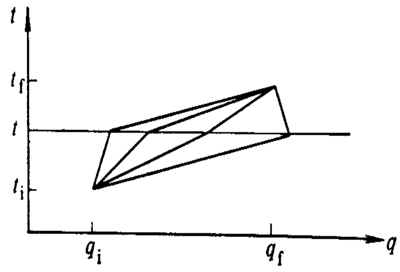


Рис. 9.1:

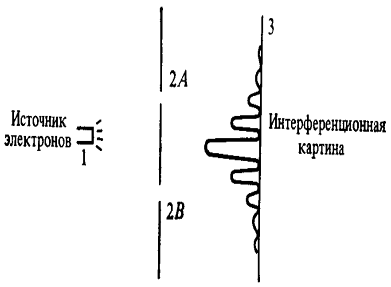


Рис. 9.2:

нечную точку q_f в момент t_f. Вероятность соответствующего перехода есть:

$$P(q_f t_f; q_i t_i) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2 . \tag{9.2}$$

Разделим промежуток времени между моментами t_i и t_f на два промежутка, разделенные моментом t. Повторное применение (9.1) дает:

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i \int dq K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \psi(q_i t_i) , \tag{9.3}$$

так что:

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \int dq K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) . \tag{9.4}$$

Таким образом, переход $q_i t_i \to q_f t_f$ можно рассматривать как переход через все возможные промежуточные точки (состояния), как это показано на Рис.9.1. В качестве примера можно привести известный эксперимент с дифракцией электронов на двух щелях, расположенных в точках 2A и 2B (Рис.9.2). В этом случае аналог (9.4) имеет вид:

$$K(3; 1) = K(3; 2A) K(2A; 1) + K(3; 2B) K(2B; 1) . \tag{9.5}$$

Распределение интенсивности на экране, расположенном в точке 3 определяется из:

$$P(3; 1) = |K(3; 1)|^2 , \tag{9.6}$$

где, с очевидностью, присутствуют интерференционные вклады. Можно говорить, что электрон в таком эксперименте пролетает по обоим путям (траекториям) одновременно (если мы не регистрируем его в одной из щелей, но тогда и интерференционная картина исчезает!).

Введем собственные вектора оператора координаты в дираковских обозначениях:

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle\,. \tag{9.7}$$

Тогда волновая функция нашей частицы может быть записана как:

$$\psi(qt) = \langle q|\psi_t\rangle_S\,, \tag{9.8}$$

где $|\psi_t\rangle_S$ — вектор состояния частицы в шредингеровском представлении, связанный с не зависящим от времени вектором состояния в гейзенберговском представлении $|\psi\rangle_H$ как:

$$|\psi_t\rangle_S = e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle_H\,. \tag{9.9}$$

Определим зависящий от времени вектор

$$|qt\rangle = e^{iHt/\hbar}|q\rangle\,. \tag{9.10}$$

Тогда можно переписать (9.8) как:

$$\psi(qt) = \langle qt|\psi\rangle_H\,. \tag{9.11}$$

Все это простые и известные вещи из основ квантовой механики. Пользуясь условием полноты системы векторов (9.7), (9.10) мы можем теперь написать:

$$\langle q_f t_f|\psi\rangle_H = \int dq_i \langle q_f t_f|q_i t_i\rangle\langle q_i t_i|\psi\rangle_H\,, \tag{9.12}$$

что, с учетом (9.11), сводится к:

$$\psi(q_f t_f) = \int dq_i \langle q_f t_f|q_i t_i\rangle\psi(q_i t_i)\,. \tag{9.13}$$

Сравнивая (9.13) с (9.1) видим, что пропагатор представляется в виде:

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \langle q_f t_f|q_i t_i\rangle\,, \tag{9.14}$$

что, фактически, в несколько иной форме, уже выписывалось нами в Главе 4. Соотношением (9.14) мы будем далее широко пользоваться.

Разделим временной интервал между моментами t_i и t_f на $(n+1)$ равных частей длительностью τ. Тогда распространение частицы из $q_i t_i$ в $q_f t_f$ можно представить как это показано на Рис.9.3, что с многократным использованием (9.4), позволяет записать амплитуду перехода (пропагатор) в виде:

$$\langle q_f t_f|q_i t_i\rangle = \int ... \int dq_1 dq_2 ... dq_n \langle q_f t_f|q_n t_n\rangle\langle q_n t_n|q_{n-1} t_{n-1}\rangle ... \langle q_1 t_1|q_i t_i\rangle\,, \tag{9.15}$$

где многократный интеграл берется по *всем* возможным траекториям, соединяющим начальную точку q_i с конечной q_f. В пределе $n \to \infty$ или $\tau \to 0$ выражение (9.15)

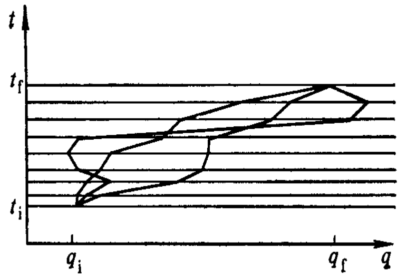


Рис. 9.3:

определяет пропагатор как фейнмановский *интеграл по траекториям* (континуальный или функциональный интеграл). Уже на этом уровне видно основное отличие квантовой механики от классической. Классическая частица распространяется из начальной точки в конечную, двигаясь по *единственной* траектории, определяемой принципом наименьшего действия, а в квантовой механике "работает" континуум всех мыслимых траекторий, соединяющих эти точки!

Нетрудно рассчитать пропагатор на малом сегменте траектории. Из (9.10) имеем:

$$\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle = \langle q_{j+1}|e^{-iH\tau/\hbar}|q_j\rangle = \left\langle q_{j+1}\left|1-\frac{i}{\hbar}H\tau+O(\tau^2)\right|q_j\right\rangle = \tag{9.16}$$

$$= \delta(q_{j+1}-q_j) - \frac{i\tau}{\hbar}\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle = \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)\right] - \frac{i\tau}{\hbar}\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle\,,$$

где мы воспользовались очевидным представлением δ-функции в виде интеграл Фурье. В общем случае, гамильтониан H является некоторой функцией q и p. Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай движения частицы в потенциальном поле, когда, в очевидных обозначениях, имеем:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)\,. \tag{9.17}$$

Тогда для члена кинетической энергии можно написать:

$$\left\langle q_{j+1}\left|\frac{p^2}{2m}\right|q_j\right\rangle = \int dp'\int dp\langle q_{j+1}|p'\rangle\left\langle p'\left|\frac{p^2}{2m}\right|p\right\rangle\langle p|q_j\rangle\,, \tag{9.18}$$

так что используя

$$\langle q_{j+1}|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{ip'q_{j+1}}{\hbar}\right)\,, \qquad \langle p|q_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{ipq_j}{\hbar}\right)\,,$$

получим:

$$\begin{aligned}\left\langle q_{j+1}\left|\frac{p^2}{2m}\right|q_j\right\rangle &= \int\int\frac{dpdp'}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'q_{j+1}-pq_j)\right]\frac{p^2}{2m}\delta(p-p') = \\ &= \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)\right]\frac{p^2}{2m}\,. \end{aligned} \tag{9.19}$$

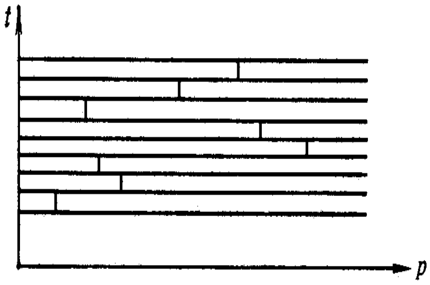


Рис. 9.4:

Обратим внимание, что в левой части этого выражения p представляется оператором, а в правой это уже число! Аналогичным образом нетрудно получить:

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle &= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\langle q_{j+1}|q_j\rangle = V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\delta(q_{j+1}-q_j) = \\ &= \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)\right]V(\bar{q}_j)\,,\end{aligned} \tag{9.20}$$

где $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(q_{j+1}+q_j)$. Объединяя (9.19) и (9.20), имеем:

$$\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle = \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)\right]H(p,\bar{q})\,, \tag{9.21}$$

так что (9.17) переписывается в виде:

$$\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle = \int\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_j(q_{j+1}-q_j)-\tau H(p_j,\bar{q}_j)\right]\right\}\,, \tag{9.22}$$

где p_j – импульс в точке между t_j и t_{j+1} (между q_j и q_{j+1}). Соответствующие сегменты траектории в импульсном пространстве показаны на Рис.9.4. Выражение (9.22) и задает пропагатор на малом сегменте одного из путей (отрезке траектории). Полный пропагатор получается подстановкой (9.22) в (9.15), так что:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n}dq_j\prod_{i=0}^{n}\frac{dp_i}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{l=0}^{n}\left[p_l(q_{l+1}-q_l)-\tau H(p_l,\bar{q}_l)\right]\right\}\,, \tag{9.23}$$

где $q_0 = q_i$ и $q_{n+1} = q_f$. Фактически здесь стоит бесконечнократный интеграл. Обычно (9.23) записывают в следующем символическом виде:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \int\frac{\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\left[p\dot{q}-H(p,q)\right]\right\}\,, \tag{9.24}$$

где $q(t_i) = q_i$ и $q(t_f) = q_f$. Эта запись, формально вводящая меру интегрирования по всем траекториям $(q(t),p(t))$ в *фазовом* пространстве частицы, не имеет никакого иного смысла, кроме введения компактной формы записи (9.23). Ситуация здесь вполне аналогична определению обычного интеграла через предел римановых сумм. Обозначение (9.24) вводит понятие *функционального* (континуального) интеграла по всем траекториям (путям) в фазовом пространстве. При этом входящие в (9.24) переменные $p(t)$ и $q(t)$ представляют собой c-числовые функции.

Определение пропагатора в виде континуального интеграла по всем траекториям в фазовом пространстве (9.24) является совершенно общим и, в частности, остается справедливым для произвольного гамильтониана $H(p,q)$. В случае гамильтониана вида (9.17) можно провести дальнейшие упрощения и перейти к представлению пропагатора в виде континуального интеграла по всем путям в обычном координатном пространстве. Для этого запишем

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{i=0}^{n} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{l=0}^{n} \left[p_l (q_{l+1} - q_l) - \frac{p_l^2}{2m}\tau - V(\bar{q}_l)\tau \right] \right\}. \tag{9.25}$$

Интегралы по p_j здесь легко вычисляются с помощью стандартных формул, которые будут приведены чуть ниже. В результате получаем:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \exp\left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_{l=0}^{n} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{\tau} \right)^2 - V(\bar{q}_l) \right] \right\}, \tag{9.26}$$

так что в непрерывном пределе можно записать:

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right] \right\} = \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q,\dot{q}) \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\}, \end{aligned} \tag{9.27}$$

где $L = T - V$ — классическая функция Лагранжа рассматриваемой частицы, а $S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q,\dot{q})$ — классическое действие, рассчитанное для произвольной траектории $q(t)$, соединяющей начальную точку $q(t_i)$ с конечной $q(t_f)$. Континуальный интеграл (9.27) берется по всем мыслимым траекториям, соединяющим начальную точку с конечной. Введенный здесь множитель $\mathcal{N}$ формально расходится в пределе $n \to \infty$, но это несущественно, поскольку, как мы увидим далее, он всегда сокращается при рассмотрении соответствующим образом нормированных амплитуд перехода.

Замечательный результат (9.27) позволяет, в частности, качественно понять физическое происхождение классического принципа наименьшего действия. В самом деле, классический предел соответствует $\hbar \to 0$. Тогда в фейнмановском интеграле (9.27) возникает континуум вкладов быстро осциллирующих множителей $\exp(iS/\hbar)$, которые в среднем "гасят" друг друга. "Выживает" при этом только вклад наиболее медленно меняющегося множителя, в котором стоит S_{min}, что и соответствует вкладу *единственной* траектории, описываемой принципом наименьшего действия классической механики и уравнениями Ньютона.

Отступление: полезные интегралы.

Приведем некоторые формулы для обычных интегралов, часто встречающихся при практических вычислениях, связанных с функциональным интегрированием. Начнем со всем известного интеграла Пуассона – Гаусса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \qquad a > 0\,. \tag{9.28}$$

Этот результат получается сразу, если заметить, что его можно переписать как:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-a(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{a}\,, \tag{9.29}$$

что, после перехода к полярным координатам в плоскости (x, y), сводится к:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr\, re^{-ar^2} = \pi \int_0^{\infty} d(r^2)\, e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a}\,. \tag{9.30}$$

Последнее равенство очевидно, что и доказывает (9.28).

Рассмотрим теперь интеграл от экспоненты, зависящей от квадратичной формы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+bx+c} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{q(x)}\,, \tag{9.31}$$

где мы полагаем $a > 0$. Тогда имеем $q'(x) = -2ax + b$, $q''(x) = -2a$, $q'''(x) = 0...$, и мы легко находим $\bar{x}$ — значение x, при котором $q(x)$ минимальна:

$$\bar{x} = \frac{b}{2a}\,, \qquad q(\bar{x}) = \frac{b^2}{4a} + c\,. \tag{9.32}$$

Теперь легко представить $q(x)$ в виде (выделяя полный квадрат):

$$q(x) = q(\bar{x}) - a(x - \bar{x})^2\,. \tag{9.33}$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{q(x)} = e^{q(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a(x-\bar{x})^2} = e^{q(\bar{x})}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \tag{9.34}$$

так что окончательно имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{q(x)} = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \tag{9.35}$$

Эта формула и использовалась при получении (9.26), (9.25).

Приведем еще обобщение (9.35) на случай n переменных интегрирования [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left\{i\lambda[(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1)^2 + ... + (b - x_n)^2]\right\} =$$

$$= \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1}(b - a)^2\right]\,, \tag{9.36}$$

что пригодится нам в дальнейшем.

В выражении (9.27), фактически, содержится вся квантовая механика частицы, оно широко используется при решении практических задач [37]. Посмотрим, как из него можно получить обычное уравнение Шредингера. Запишем основное соотношение (9.1) в виде, связывающем волновую функцию в момент времени t_2 с ее значением в момент t_1:

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 K(x_2 t_2; x_1 t_1)\psi(x_1 t_1)\,. \tag{9.37}$$

Пусть моменты t_2 и t_1 очень близки, так что $t_2 = t_1 + \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. Тогда пропагатор определяется вкладом только одного малого сегмента траектории и, пользуясь (9.26), мы можем записать (9.37) в виде:

$$\psi(x, t+\varepsilon) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon}\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}, t\right)\right] \psi(y,t) dy \,, \tag{9.38}$$

где $A = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}$. Из-за наличия первой экспоненты, существенный вклад в интеграл дают только значения y близкие к x. Сделаем замену переменной $y = x + \eta$ и перепишем (9.38) в виде:

$$\psi(x, t+\varepsilon) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}\right) \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar} V\left(x + \frac{\eta}{2}, t\right)\right] \psi(x+\eta, t) d\eta \,. \tag{9.39}$$

С учетом того, что основной вклад тут дают малые значения η, разложим обе части (9.39) в ряд:

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}\right)\left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x,t)\right]\left[\psi(x,t) + \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right] d\eta \,. \tag{9.40}$$

Учтем теперь, что

$$A \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\varepsilon} d\eta = 1 \,,$$

$$A \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\varepsilon} \eta d\eta = 0 \,,$$

$$A \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\varepsilon} \eta^2 d\eta = \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \,.$$

Тогда (9.40) сводится к:

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V\psi - \frac{\hbar\varepsilon}{2im}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \,. \tag{9.41}$$

Это равенство удовлетворяется (при $\varepsilon \to 0$), если ψ удовлетворяет уравнению Шредингера для одномерного движения:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi \,. \tag{9.42}$$

9.2 Теория возмущений.

Пусть потенциал $V(x)$ является малым возмущением. Точнее говоря, пусть мал (по сравнению с $\hbar$) интеграл по времени от $V(x,t)$. Тогда можно написать разложение:

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_i}^{t_f} dt V(x,t)\right\} \approx 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_i}^{t_f} dt V(x,t) - \frac{1}{2!\hbar^2}\left[\int\limits_{t_i}^{t_f} dt V(x,t)\right]^2 + \ldots \,. \tag{9.43}$$

Используя такое разложение в (9.27), мы получим разложение пропагатора $K(x_f t_f; x_i t_i)$ в ряд теории возмущений:

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \ldots \, . \tag{9.44}$$

Член нулевого порядка представляет собой пропагатор свободной частицы:

$$K_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int dt \frac{1}{2} m\dot{x}^2\right) . \tag{9.45}$$

Чтобы сосчитать его в явном виде, вернемся к определению интеграла по траекториям (9.23) и запишем (9.45) в виде предела для многократного интеграла (см. (9.26)):

$$K_0 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} dx_j \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{l=0}^{n}(x_{l+1}-x_l)^2\right] . \tag{9.46}$$

Обозначая стоящий здесь многократный интеграл как I, вычисляем его с помощью (9.36) и получаем:

$$I = \frac{1}{(n+1)^{1/2}}\left(\frac{i2\pi\hbar\tau}{m}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau}(x_f - x_i)^2\right\} . \tag{9.47}$$

Полагая $(n+1)\tau = t_f - t_i$, получаем из (9.46) пропагатор свободной частицы в виде:

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \theta(t_f - t_i)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right\} , \tag{9.48}$$

где мы еще добавили множитель $\theta(t_f - t_i)$, обеспечивающий выполнение принципа причинности. Обобщение этого выражения на случай движения свободной частицы в трехмерном пространстве вполне очевидно: соответствующий пропагатор сводится к произведению пропагаторов свободного распространения (9.48) по всем трем координатным осям x, y, z.

В Главе 4 мы уже видели, что пропагатор частицы удовлетворяет уравнению, редставляющему собой уравнение Шредингера с δ-источником в правой части:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - H(x_f)\right] K(x_f t_f; x_i t_i) = i\hbar\delta(t_f - t_i)\delta(x_f - x_i) \, . \tag{9.49}$$

Для случая одномерного свободного движения $H(x_f) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_f^2}$. Соответственно, свободный пропагатор удовлетворяет уравнению:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_f^2}\right] K_0(x_f t_f; x_i t_i) = i\hbar\delta(t_f - t_i)\delta(x_f - x_i) \, . \tag{9.50}$$

В этом, кстати, можно убедиться непосредственной подстановкой (9.48) в в данное уравнение.

Если в (9.48) и (9.50) сделать замену $t \to -i\hbar t$ и $\frac{\hbar}{2m} \to D$, то уравнение (9.50) перейдет в:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_f} - D\frac{\partial^2}{\partial x_f^2}\right] K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \delta(t_f - t_i)\delta(x_f - x_i) \, , \tag{9.51}$$

так что $K_0(x_f t_f; x_i t_i)$ представляет собой функцию Грина *уравнения диффузии* [32] с коэффициентом диффузии D. При этом все мнимости из (9.48) исчезают и это выражение описывает диффузию частиц из точечного источника. Фактически, континуальные интегралы по траекториям возникли впервые в теории диффузионных процессов, где они называются интегралами Винера. Исчезновение осцилляций в (9.48) (замена их на быстро затухающие экспоненты теории диффузии) чрезвычайно удобно с точки зрения численных расчетов, в частности существенно облегчаются вычисления континульных интегралов методом Монте-Карло. Вообще, формальный переход к мнимому времени часто используется при решении различных задач квантовой механики и квантовой теории поля. Ниже мы еще не раз с этим столкнемся.

Переход к мнимому времени имеет еще один аспект, даже более глубокий с точки зрения физики. Равновесная статистическая механика целиком основана на использовании канонического распределения Гиббса, когда матрица плотности системы имеет вид [35]:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}\,, \tag{9.52}$$

где H — гамильтониан системы, Z — статистическая сумма, а $\beta = \frac{1}{T}$ — обратная температура. Легко видеть, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = -H\rho\,. \tag{9.53}$$

Но (9.53) (называемое иногда уравнением Блоха) получается из обычного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{9.54}$$

после формальной замены $\psi \to \rho$, $t \to -i\hbar\beta$. Поэтому можно сказать, что вся равновесная статистическая механика это та же квантовая механика в "мнимом времени". Вычисление равновесной матрицы плотности системы взаимодействующих частиц можно вести решая уравнение (9.53) и используя при этом формализм пропагаторов (функций Грина) в мнимом ("мацубаровском") времени [13]. При этом можно пользоваться и представлением этих пропагаторов в виде фейнмановских интегралов по траекториям (интегралов Винера), на основе чего можно развить соответствующий общий подход к решению задач статистической физики [38].

Перейдем теперь к вычислению K_1 — поправки первого порядка по потенциалу $V(x)$. Из (9.26) и (9.43) имеем:

$$K_1 = -\frac{i\tau}{\hbar} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \int dx_1 ... dx_n V(x_i, t_i) \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{n} (x_{j+1} - x_j)^2\right\}, \tag{9.55}$$

где мы заменили интегрирование по t суммированием по t_i. Поскольку V здесь зависит от x_i, разобьем сумму под экспонентой на две: одну от $j = 0$ до $j = i - 1$ и вторую от $j = i$ до $j = n$. Выделим также интеграл по x_i. В результате (9.55) перепишется как:

$$\begin{aligned} K_1 \;=\; -\lim_{n\to\infty} \frac{i\tau}{\hbar} \sum_{i=1}^{n} \int dx_i \left\{ \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n-i+1}{2}} \int dx_{i+1} ... dx_n \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=i}^{n} (x_{j+1} - x_j)^2\right]\right\} \times \\ \times \quad V(x_i, t_i) \left\{ \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{i}{2}} \int dx_1 ... dx_{i-1} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} - x_j)^2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Члены в фигурных скобках равны $K_0(x_f t_f; xt)$ и $K_0(xt; x_i t_i)$ соответственно, так что после замены $\tau \sum_i \int dx_i$ на $\int dx \int dt$ выражение (9.56) сводится к:

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_{t_i}^{t_f} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, K_0(x_f t_f; xt) V(x,t) K_0(xt; x_i t_i)\,. \tag{9.57}$$

С учетом того, что $K_0(x_f t_f; xt) = 0$ для $t > t_f$, а $K_0(xt; x_i t_i) = 0$ для $t < t_i$, выражение (9.57) можно записать как:

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, K_0(x_f t_f; xt)V(x,t)K_0(xt; x_i t_i)\,, \tag{9.58}$$

что и дает окончательный вид поправки первого порядка к пропагатору (функции Грина) нашей частицы.

Совершенно аналогично, путем более громоздких вычислений, можно найти и поправку второго порядка:

$$K_2(x_f t_f; x_i t_i) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2$$

$$\times K_0(x_f t_f; x_2 t_2)V(x_2 t_2)K_0(x_2 t_2; x_1 t_1)V(x_1 t_1)K_0(x_1 t_1; x_i t_i)\,. \tag{9.59}$$

Структура членов высших порядков становится теперь очевидной. В результате получаем ряд теории возмущений для пропагатора в виде:

$$K(x_f t_f; x_i t_i) = K_0(x_f t_f; x_i t_i) - \frac{i}{\hbar}\int dt_1 dx_1 K_0(x_f t_f; x_1 t_1)V(x_1, t_1)K_0(x_1 t_1; x_i t_i) -$$
$$-\frac{1}{\hbar^2}\int dt_1 dt_2 dx_1 dx_2 K_0(x_f t_f; x_2 t_2)V(x_2 t_2)K_0(x_2 t_2; x_1 t_1)V(x_1 t_1)K_0(x_1 t_1; x_i t_i) + \ldots\,. \tag{9.60}$$

что просто совпадает с аналогичным разложением, выписанным выше в Главе 4. Заметим, что в выражении (9.59) отсутствует множитель $1/2!$, имеющийся в разложении (9.43). Дело здесь в том, что два взаимодействия с V в разные моменты времени неразличимы и можно написать:

$$\frac{1}{2!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'' V(t')V(t'') =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt''[\theta(t'-t'')V(t')V(t'') + \theta(t''-t')V(t')V(t'') =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 V(t_1)V(t_2)\theta(t_1-t_2)\,. \tag{9.61}$$

По этой же причине в поправке произвольного порядка K_n отсутствует множитель $1/n!$. Ясно, что в разложении (9.60) содержится простейшая диаграммная техника: каждый член ряда можно легко изобразить диаграммой, если сопоставить сплошную линию пропагатору частицы, а волнистыми линиями изобразить действие потенциала в соответствующих точках пространства в соответствующие моменты времени (по которым ведется интегрирование).

Подстановка разложения (9.60) в (9.1) дает:

$$\begin{aligned}\psi(x_f t_f) &= \int dx_i K(x_f t_f; x_i t_i)\psi(x_i t_i) = \\ &= \int dx_i K_0(x_f t_f; x_i t_i)\psi(x_i t_i) - \\ &- \frac{i}{\hbar}\int dt \int dx \int dx_i K_0(x_f t_f; xt) V(x,t) K_0(xt, x_i t_i)\psi(x_i t_i) + \dots \,. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Вклад невыписанных здесь членов высших порядков сводится, очевидно, к замене последнего пропагатора K_0 полным пропагатором K. Соответственно, получаем точное интегральное уравнение для волновой функции:

$$\psi(x_f t_f) = \int dx_i K_0(x_f t_f; x_i t_i)\psi(x_i t_i) - \frac{i}{\hbar}\int dt \int dx K_0(x_f t_f; xt) V(x,t)\psi(xt)\,, \quad (9.63)$$

которое, конечно, вполне эквивалентно уравнению Шредингера в рассматриваемой задаче. Предполагая, что при $t_i \to -\infty$ волновая функция является решением свободного уравнения Шредингера (плоской волной!) и обозначая его как $\varphi(xt)$, можно переписать (9.63) в виде:

$$\psi(x_f t_f) = \varphi(x_f t_f) - \frac{i}{\hbar}\int dt \int dx K_0(x_f t_f; xt) V(x,t)\psi(xt)\,, \quad (9.64)$$

поскольку плоская волна в процессе свободного распространения остается плоской волной.

При решении практических задач часто удобнее пользоваться импульсным представлением. Пусть $K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0)$ — амплитуда вероятности того, что частица, обладавшая импульсом $\mathbf{p}_0$ в момент t_0, будет зарегистрирована в более поздний момент t_1 с импульсом $\mathbf{p}_1$. Эта амплитуда дается выражением:

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = \int d\mathbf{x}_0 \int d\mathbf{x}_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1\right) K(\mathbf{x}_1 t_1; \mathbf{x}_0 t_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_0\mathbf{x}_0\right)\,, \quad (9.65)$$

где свободный пропагатор $K(\mathbf{x}_1 t_1; \mathbf{x}_0 t_0)$ для частицы, движущейся в трехмерном пространстве имеет (в соответствии с замечанием после (9.48)) вид:

$$K_0(\mathbf{x}_1 t_1; \mathbf{x}_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_1 - t_0)}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{im(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right\}\,. \quad (9.66)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) &= \theta(t_1 - t_0)\left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_1 - t_0)}\right]^{3/2} \times \\ &\times \int d\mathbf{x}_0 \int d\mathbf{x}_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_1\mathbf{x}_1)\right] \exp\left[\frac{im(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right]\,. \end{aligned} \quad (9.67)$$

Введем новые переменные интегрирования:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\,, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1\,, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\,, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1\,, \quad (9.68)$$

так что $2(\mathbf{p}_0\mathbf{x}_0-\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1)=\mathbf{P}\mathbf{x}+\mathbf{p}\mathbf{X}$. Якобиан этого преобразования переменных равен $(1/2)^3=1/8$. Соответственно, (9.67) переписывается как:

$$K(\mathbf{p}_1t_1;\mathbf{p}_0t_0)=\theta(t_1-t_0)\left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{8}\int d\mathbf{X}\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\mathbf{X}\right)\int d\mathbf{x}\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mathbf{P}\mathbf{x}\right)e^{i\alpha\mathbf{x}^2}, \tag{9.69}$$

где $\alpha=\frac{m}{2\hbar(t_1-t_0)}$. Первый интеграл здесь равен $8(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p})=8(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)$, так что:

$$K(\mathbf{p}_1t_1;\mathbf{p}_0t_0)=(2\pi\hbar)^3\theta(t_1-t_0)\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2}\int d\mathbf{x}\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mathbf{P}\mathbf{x}+i\alpha\mathbf{x}^2\right) \tag{9.70}$$

и используя (9.35) получаем

$$K(\mathbf{p}_1t_1;\mathbf{p}_0t_0)=(2\pi\hbar)^3\theta(t_1-t_0)\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\exp\left[-\frac{i\mathbf{P}^2(t_1-t_0)}{8m\hbar}\right], \tag{9.71}$$

где δ-функция выражает закон сохранения импульса. Учитывая теперь, что $\mathbf{P}^2=4\mathbf{p}_0^2$, получаем окончательно:

$$K(\mathbf{p}_1t_1;\mathbf{p}_0t_0)=(2\pi\hbar)^3\theta(t_1-t_0)\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\exp\left[-\frac{i\mathbf{p}_0^2(t_1-t_0)}{2m\hbar}\right]. \tag{9.72}$$

Наконец, вычислим еще и фурье-образ пропагатора по временным переменным:

$$\begin{aligned}K(\mathbf{p}_1E_1;\mathbf{p}_0E_0)&=\int dt_0\int dt_1\exp\left(\frac{i}{\hbar}E_1t_1\right)K(\mathbf{p}_1t_1;\mathbf{p}_0t_0)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0t_0\right)=\\&=(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\int dt_0\int dt_1\theta(\tau)\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}_1^2}{2m\hbar}\tau\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1t_1-E_0t_0)\right],\end{aligned} \tag{9.73}$$

где мы ввели $\tau=t_1-t_0$. Рассматривая τ и t_0 как независимые переменные интегрирования, получим:

$$\begin{aligned}K(\mathbf{p}_1E_1;\mathbf{p}_0E_0)=(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\int_{-\infty}^{\infty}dt_0\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t_0\right]\times\\ \times\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\theta(\tau)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1-\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m})\tau\right].\end{aligned} \tag{9.74}$$

Первый интеграл здесь дает $(2\pi\hbar)\delta(E_1-E_0)$, а второй, из-за наличия $\theta(\tau)$, следует понимать как [1]:

$$\lim_{\delta\to+0}\int_0^{\infty}d\tau e^{i(E_1-\mathbf{p}_1^2/2m+i\delta)\tau/\hbar}=\frac{i\hbar}{E_1-\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}+i\delta}. \tag{9.75}$$

[1] Фурье-образ $\theta(t)$ определяется из равенства:

$$\theta(t)=\lim_{\delta\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\frac{i}{\omega+i\delta},$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, проводя интегрирование вдоль вещественной оси и замыкая контур интегрирования в верхней или нижней полуплоскости ω в зависимости от знака t.

Поэтому окончательно имеем:

$$K(\mathbf{p}_1 E_1; \mathbf{p}_0 E_0) = (2\pi\hbar)^4 \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)\delta(E_0 - E_1)\frac{i\hbar}{E_1 - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + i\delta}\,, \quad \delta \to +0\,, \tag{9.76}$$

что представляет собой фурье-образ *запаздывающей* функции Грина свободной частицы, причем δ-функции выражают законы сохранения импульса и энергии. Заметим, что полюс этого выражения, фактически, определяется кинетической энергией частицы, что является проявлением общего свойства функций Грина [13]: их полюсы определяют энергетический спектр соответствующих частиц (квазичастиц).

Если ввести еще и фурье-образ потенциала, записав $V(\mathbf{x}, t)$ в виде:

$$V(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)} V(\mathbf{q}\omega)\,, \tag{9.77}$$

то ряд теории возмущений (9.60) порождает стандартную диаграммную технику в импульсном представлении для функции Грина частицы во внешнем поле [13].

9.3 Функциональное дифференцирование.

Запись функции Грина (пропагатора) частицы в виде фейнмановского интеграла по траекториям

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right] \right\} = \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right\} \end{aligned} \tag{9.78}$$

вводит в наше рассмотрение понятие *функционального интеграла*: интегрирование здесь ведется по всем *функциям* (траекториям) $q(t)$, связывающим начальную и конечную точки. Таким образом, процедура вычисления (9.78) сопоставляет всему множеству функций $q(t)$ некоторое конкретное (комплексное) *число* — амплитуду квантовомеханического перехода, стоящую в левой части. Таким образом, (9.78) является конкретной реализаций математического понятия *функционала* — отображения множества функций в множество чисел:

- *Функционал: функция $\Rightarrow$ число*

В отличие от этого обычная функция задает отображения одного множества чисел в другое множество чисел:

- *Функция: число $\Rightarrow$ число*

В частности, функционал не есть просто функция от функции (это опять просто функция!).

Обычно для функционала F от функции $f(x)$ используется обозначение $F[f(x)]$. Типичный пример функционала – определенный интеграл: $F[f(x)] = \int_a^b dx f(x)$.

Определим теперь понятие *функционального дифференцирования*. По аналогии с обычным дифференцированием, функциональная (или как ее еще называют – вариационная) производная функционала $F[f(x)]$ по функции $f(y)$ определяется как:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F[f(x) + \varepsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\varepsilon}\,. \tag{9.79}$$

Например, для $F[f(x)]$ в виде определенного интеграла:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int dx[f(x) + \varepsilon\delta(x-y)] - \int dx f(x)\right] = \int dx \delta(x-y) = 1\,. \tag{9.80}$$

В качестве еще одного примера рассмотрим функционал:

$$F_x[f] = \int dy f(y) G(x,y)\,, \tag{9.81}$$

где переменная x, от которой зависит левая часть, рассматривается как параметр. Тогда имеем:

$$\frac{\delta F_x[f]}{\delta f(z)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int dy \{G(x,y)[f(y) + \varepsilon\delta(y-z)]\} - \int dy G(x,y) f(y)\right] =$$

$$= \int dy G(x,y)\delta(y-z) = G(x,z)\,. \tag{9.82}$$

Приведенных формул достаточно для понимания всех выражений, связанных с функциональным дифференцированием, которые будут приводиться ниже.

9.4 Некоторые свойства функциональных интегралов.

Итак, амплитуда перехода квантовой частицы из начальной точки $q_i t_i$ в конечную $q_f t_f$ равна:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int\limits_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right]\right\} =$$

$$= \mathcal{N} \int\limits_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_i}^{t_f} dt L(q,\dot{q})\right\}\,. \tag{9.83}$$

Займемся выводом некоторых формальных соотношений, которые окажутся очень полезными при обобщении на случай квантовой теории поля. Добавим к функции Лагранжа нашей квантовой частицы дополнительный член:

$$L \to L + \hbar J(t) q(t) \tag{9.84}$$

где $J(t)$ — некоторая произвольная функция времени, которую будем называть “источником”. Будем считать, что $J(t)$ отлична от нуля на некотором интервале времени

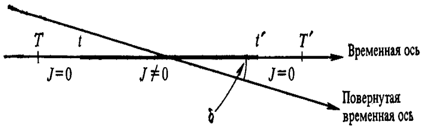


Рис. 9.5:

между моментами t и t' ($t < t'$), выделенном на Рис.9.5. Рассмотрим еще момент времени T, предшествующий t, а также момент T', более поздний, чем t'. Тогда амплитуда перехода системы, взаимодействующей с источником, между произвольными состояниями (точками) в эти моменты времени есть:

$$\langle Q'T'|QT\rangle^J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt \left[L(q,\dot{q}) + \hbar Jq \right] \right\} \tag{9.85}$$

С другой стороны, пользуясь (9.4) можем написать:

$$\langle Q'T'|QT\rangle^J = \int dq' \int dq \langle Q'T'|q't'\rangle \langle q't'|qt\rangle^J \langle qt|QT\rangle\,, \tag{9.86}$$

где, ввиду нашего предположения о виде $J(t)$, от источника зависит только "промежуточный" пропагатор. Используя (9.10) имеем:

$$\begin{aligned}
\langle Q'T'|q't'\rangle &= \left\langle Q' \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} HT'\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht'\right) \right| q' \right\rangle = \\
&= \sum_m \varphi_m(Q')\varphi_m^*(q') \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_m(t'-T')\right]\,,
\end{aligned} \tag{9.87}$$

где $\{\varphi_m(q)\}$ — полный набор собственных функций гамильтониана (оператора энергии). Аналогичным образом получаем:

$$\langle qt|QT\rangle = \sum_n \varphi_n(q)\varphi_n^*(Q) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n(t-T)\right]\,. \tag{9.88}$$

Подставляя (9.87) и (9.88) в (9.86) и заменяя в этом выражении $T' \to T'e^{-i\delta}$ и $T \to Te^{-i\delta}$ ("поворачивая" ось времени на произвольный угол $\delta < \pi/2$ в комплексной плоскости, как это показано на Рис.9.5), перейдем к пределу $T' \to \infty$ и $T \to -\infty$. Тогда за счет фактора "затухания" δ в рассматриваемой амплитуде перехода (9.86) происходит уничтожение вкладов от всех состояний с $E_n > 0, E_m > 0$, а остается только вклад от $E_0 = 0$, т.е. вклад только от *основного* состояния (уровня) нашей частицы в поле $V(q)$ [2]. Тогда получаем:

$$\lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}}\lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}}\langle Q'T'|QT\rangle^J=\varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right]\times$$

$$\times\int dq'\int dq\varphi_0^*(q't')\langle q't'|qt\rangle^J\varphi_0(qt) \qquad (9.89)$$

или

$$\int dq'\int dq\varphi_0^*(q't')\langle q't'|qt\rangle^J\varphi_0(qt)=$$

$$=\lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}}\lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}}\frac{\langle Q'T'|QT\rangle^J}{\varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right]}\,. \qquad (9.90)$$

Левая часть здесь представляет собой амплитуду перехода (в присутствие источника), усредненную по основному состоянию ("вакууму") системы. Теперь можно считать, что и $t'\to\infty$, а $t\to-\infty$ и ввести для нашей усредненной амплитуды перехода (9.90) обозначение $\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J$, подразумевая, что она описывает переход "вакуум - вакуум" за бесконечный интервал времени. Знаменатель в правой части (9.90) есть просто число. Поэтому можем написать:

$$\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle^J\sim\lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}}\lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}}\langle Q'T'|QT\rangle^J\equiv Z[J]\,, \qquad (9.91)$$

где ввели функционал источника:

$$Z[J]=\lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}}\lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}}\mathcal{N}\int\mathcal{D}Q(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_T^{T'}dt[L(Q,\dot Q)+\hbar JQ]\right\}\,. \qquad (9.92)$$

Заметим теперь, что вместо того, чтобы "поворачивать" временную ось в комплексной плоскости, для выделения вклада одного только основного состояния можно дописать маленькую отрицательную мнимую добавку к гамильтониану нашей системы (9.17), которую удобно записать в виде $-\frac{1}{2}i\varepsilon q^2(\varepsilon\to+0)$. Тогда все собственные значения энергии приобретут малые мнимые добавки, что приведет в пределе $T'\to\infty, T\to-\infty$ к тому же эффекту экспоненциального подавления вкладов от $E_n>0$ [3]. В функции Лагранжа L это эквивалентно добавлению $+\frac{1}{2}i\varepsilon q^2$. Тогда можно написать:

$$Z[J]=\mathcal{N}\int\mathcal{D}q(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\left[L(q,\dot q)+\hbar Jq+\frac{1}{2}i\varepsilon q^2\right]\right\}\,,\qquad \varepsilon\to+0\,. \qquad (9.93)$$

---

[2] В этих рассуждениях важно, что собственные значения энергии всегда можно упорядочить: $E_0<E_1<E_2<...<E_n<...$, так что описанная процедура всегда выделяет вклад состояния с наименьшей энергией, которую можно всегда положить равной нулю (но можно и сохранить в явном виде, как дающую наименее убывающий вклад). Кроме того, в рассматриваемой процедуре можно, в конце рассуждений, перейти к пределу $\delta\to+0$, чтобы не смущаться от понятия "комплексного" времени.

[3] Разумеется, введение здесь координатной зависимости $\sim\frac{1}{2}q^2$ совершенно несущественно для этих рассуждений. Удобство введения именно такой зависимости станет ясно чуть позже.

Оказывается, что так определенный функционал $Z[J]$ обладает целым рядом полезных и интересных свойств.

Рассмотрим вместо амплитуды перехода $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ матричный элемент оператора координаты $\langle q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) | q_i t_i \rangle$, где $t_f > t_{n1} > t_i$. По известным нам общим правилам можем написать:

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) | q_i t_i \rangle &= \int dq_1 ... dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle ... \\ &\qquad ..\langle q_{n1} t_{n1} | \hat{q}(t_{n1}) | q_{n1-1} t_{n1-1} \rangle ... .\langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle \end{aligned} \tag{9.94}$$

Очевидно, что

$$\langle q_{n1} t_{n1} | \hat{q}(t_{n1}) | q_{n1-1} t_{n1-1} \rangle = q(t_{n1}) \langle q_{n1} t_{n1} | q_{n1-1} t_{n1-1} \rangle \,, \tag{9.95}$$

где в правой части $q(t_{n1})$ уже не оператор, а c-число (собственное значение). Далее мы можем повторить все рассуждения, проведенные выше при переходе от (9.15) к (9.24) и записать (9.94) в виде фейнмановского интеграла по траекториям:

$$\langle q_f t_f | \hat{q}(t_1) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} q(t_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} . \tag{9.96}$$

Пусть теперь нужно найти матричный элемент $\langle q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) \hat{q}(t_{n2}) | q_i t_i \rangle$. Если $t_{n1} > t_{n2}$, то можно записать:

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) \hat{q}(t_{n2}) | q_i t_i \rangle &= \int dq_1 ... dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle ... \\ ...\langle q_{n1} t_{n1} | \hat{q}(t_{n1}) | q_{n1-1} t_{n1-1} \rangle ... &\langle q_{n2} t_{n2} | \hat{q}(t_{n2}) | q_{n2-1} t_{n2-1} \rangle ... \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle \,, \end{aligned} \tag{9.97}$$

что в пределе дает интеграл по траекториям вида:

$$\langle q_f t_f | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} q(t_1) q(t_2) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} . \tag{9.98}$$

Здесь имелось в виду, что $t_1 > t_2$. Если рассмотреть теперь случай $t_2 > t_1$, то матричные элементы координаты в моменты времени t_1 и t_2 в правой части (9.94) поменяются местами и это выражение, а с ним и интеграл в правой части (9.98), сведется к $\langle q_f t_f | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_i t_i \rangle$. Таким образом, в общем случае, интеграл по траекториям, стоящий в правой части (9.98) определяет матричный элемент от *хронологического* произведения операторов $\langle q_f t_f | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] | q_i t_i \rangle$, где оператор T-упорядочения двух операторов определен как:

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{при} \quad t_1 > t_2 \,, \\ B(t_2)A(t_1) & \text{при} \quad t_2 > t_1 \,. \end{cases} \tag{9.99}$$

В общем случае, таким образом, имеем:

$$\langle q_f t_f | T[\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) ... \hat{q}(t_n)] | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} q(t_1) q(t_2) ... q(t_n) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} , \tag{9.100}$$

что дает общее выражение для среднего от хронологического произведения операторов через функциональный интеграл. Для случая, когда гамильтониан задачи записывается в виде (9.17), можно провести дальнейшие упрощения и записать:

$$\langle q_f t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)...q(t_n)] | q_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q\, q(t_1)q(t_2)...q(t_n) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{t_i}^{t_f} dt L \right\}. \quad (9.101)$$

Из определения функционала $Z[J]$ (9.93) легко видеть, что его функциональная (вариационная) производная по источнику J имеет вид:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} = i\mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t)\, q(t_1) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \left[L(q,\dot{q}) + \hbar J q + \frac{1}{2} i\varepsilon q^2 \right] \right\}. \quad (9.102)$$

В общем случае:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)} = i^n \mathcal{N} \int \mathcal{D}\, q(t) q(t_1)...q(t_n) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \left[L(q,\dot{q}) + \hbar J q + \frac{1}{2} i\varepsilon q^2 \right] \right\}. \quad (9.103)$$

Полагая здесь $J=0$, получим:

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)} \right|_{J=0} = i^n \mathcal{N} \int \mathcal{D}\, q(t) q(t_1)...q(t_n) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \left[L(q,\dot{q}) + \frac{1}{2} i\varepsilon q^2 \right] \right\}. \quad (9.104)$$

Вспоминая теперь, что член $\frac{i}{2}\varepsilon q^2$ позволяет выделить из квантовомеханических средних вклад основного состояния, и используя (9.101), приходим к следующему выражению для "вакуумного" среднего от хронологического произведения операторов:

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)} \right|_{J=0} \sim i^n \langle 0, \infty | T[\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)] | 0, -\infty \rangle. \quad (9.105)$$

Таким образом, многократное функциональное дифференцирование $Z[J]$ по источнику J "генерирует" средние от T-произведений квантовых операторов, причем вспомогательный источник, в конце концов, просто полагается равным нулю. Поэтому функционал $Z[J]$ можно называть *производящим функционалом* для этих средних. Заодно мы получаем и представление таких средних в виде функциональных интегралов по траекториям.

Выше мы видели, что именно вакуумные средние T-произведений полевых операторов определяют набор функций Грина в квантовой теории поля. Переход от квантовой механики к квантовой теории поля сводится к обобщению на случай системы с бесконечным числом степеней свободы, когда операторы координат заменяются полевыми операторами в каждой точке пространства-времени. Поэтому становится ясным, что рассмотренную формулировку квантовой механики на основе интегралов по траекториям, можно использовать для непосредственного построения квантовой теории поля с использованием формализма функциональных интегралов по полевым переменным. Именно это и будет нашей задачей в следующих главах.

Глава 10

КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: СКАЛЯРЫ И СПИНОРЫ

10.1 Производящий функционал для скалярных полей.

Перейдем к обсуждению функциональной формулировки квантовой теории поля. Рассмотрим простейший вариант теории свободного скалярного поля $\varphi(x)$, взаимодействующего с источником $J(x)$. Непосредственно обобщая рассуждения, проведенные в предыдущей Главе, можем ввести производящий функционал:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi(x^\mu) \exp\left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\varphi) + J(x)\varphi(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)] \right\} \sim \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J , \tag{10.1}$$

пропорциональный амплитуде перехода вакуум – вакуум. Здесь $\mathcal{L}(\varphi)$ — лагранжиан Клейна – Гордона, и мы перешли от интегрирования по траекториям частицы к интегрированию по всем возможным конфигурациям поля[1]в пространстве-времени: $\mathcal{D}q(t) \to \mathcal{D}\varphi(x^\mu)$. Смысл такого интегрирования достаточно прост. Разбиваем пространство-время на маленькие четырехмерные кубики объемом δ^4, в каждом из которых заменяем поле на константу (среднее значение внутри кубика): $\varphi \approx \varphi(x_i, y_j, z_k, t_l)$. Производные поля выражаем через конечные разности:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_{i,j,k,l} \approx \frac{1}{\delta}[\varphi(x_i + \delta, y_j, z_k, t_l) - \varphi(x_i, y_j, z_k, t_l)] \tag{10.2}$$

[1]В классической теории поля рассматривается только одна полевая конфигурация в пространстве-времени, а именно та, которая удовлетворяет уравнениям Лагранжа (принципу наименьшего действия). Отличие квантовой теории поля в том, что в ней "работают" все мыслимые конфигурации, но каждая из них входит в теорию с "весом" $\exp\{iS\}$, где S — классическое действие.

и т. д. Заменяя набор (i, j, k, l) одним индексом n, нумерующим ячейки (кубики), запишем:

$$\mathcal{L}(\varphi_n, \partial_\mu \varphi_n) = \mathcal{L}_n\,. \tag{10.3}$$

Если любой из индексов (i, j, k, l) принимает N значений, то индекс n принимает N^4 значений и действие записывается как:

$$S = \int d^4 x \mathcal{L} = \sum_{n=1}^{N^4} \delta^4 \mathcal{L}_n\,. \tag{10.4}$$

Тогда производящий функционал $Z[J]$ приобретает вид:

$$Z[J] = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N^4} d\varphi_n \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{N^4} \delta^4 \left(\mathcal{L}_n + \varphi_n J_n + \frac{i}{2}\varepsilon \varphi_n^2 \right) \right\}, \tag{10.5}$$

что и определяет смысл формального выражения (10.1), вводя в теорию понятие функционального интеграла по полям (вместо траекторий квантовой механики).

Вычислим $Z[J]$ для свободного поля, когда

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \tag{10.6}$$

— лагранжиан Клейна – Гордона. Тогда:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ i \int d^4 x \left[\frac{1}{2}\big(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - (m^2 - i\varepsilon)\varphi^2\big) + \varphi J \right] \right\}. \tag{10.7}$$

Дальнейшие расчеты можно провести и не вычисляя функциональный интеграл в явном виде. Воспользуемся очевидным тождеством $\partial_\mu(\varphi \partial^\mu \varphi) = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi$ и запишем:

$$\int d^4 x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi = \int d^4 x \partial_\mu(\varphi \partial^\mu \varphi) - \int d^4 x \varphi \Box \varphi\,. \tag{10.8}$$

Тогда первый член в правой части преобразуется по теореме Гаусса в поверхностный интеграл, который можно считать равным нулю при выборе этой поверхности на бесконечности (где полагаем $\varphi \to 0$). Тогда:

$$\int d^4 x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi = -\int d^4 x \varphi \Box \varphi \tag{10.9}$$

и производящий функционал переписывается как:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ -i \int d^4 x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J \right] \right\}. \tag{10.10}$$

Подчеркнем, что поле φ в этом выражении является произвольным (переменная интегрирования!) и вовсе не удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона. Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\varphi(x) \to \varphi_0(x) + \varphi(x) \tag{10.11}$$

и воспользуемся соотношением (которое выводится аналогично (10.9)):

$$\int d^4 x \varphi_0 [\Box + m^2 - i\varepsilon]\varphi = \int d^4 x \varphi (\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0\,. \tag{10.12}$$

Тогда имеем:

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right] \to \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi + \right.$$
$$\left. + \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_0(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0 - \varphi J - \varphi_0 J\right] . \tag{10.13}$$

А вот теперь потребуем, чтобы поле $\varphi_0(x)$ удовлетворяло уравнению Клейна – Гордона с источником в правой части:

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0(x) = J(x) . \tag{10.14}$$

Тогда интересующий нас интеграл сводится к:

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \frac{1}{2}\varphi_0 J\right] . \tag{10.15}$$

Решение уравнения (10.14) имеет вид:

$$\varphi_0(x) = -\int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) , \tag{10.16}$$

где $\Delta_F(x-y)$ — фейнмановский пропагатор скалярного поля, удовлетворяющий уравнению (уже встречавшемуся нам в Главе 4):

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)\Delta_F(x) = -\delta(x) . \tag{10.17}$$

Подставляя (10.16) в (10.15) видим, что показатель экспоненты в (10.10) равен:

$$-i\left\{\frac{1}{2}\int d^4x \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi + \frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} . \tag{10.18}$$

Таким образом получаем [2]:

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right\} . \tag{10.19}$$

Но интеграл по $\mathcal{D}\varphi$ представляет собой просто число (он берется по всем мыслимым конфигурациям поля φ)! Обозначим это число $\mathcal{N}$. Тогда окончательно получаем:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} . \tag{10.20}$$

Величина $\mathcal{N}$ особой роли не играет, это просто нормировочный множитель.

Разложение Фурье для $\Delta_F(x)$ имеет вид:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} . \tag{10.21}$$

Присутствие $i\varepsilon \to i0^+$ в знаменателе диктует выбор пути интегрирования по k_0, в соответствии с фейнмановским правилом обхода полюсов при $k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

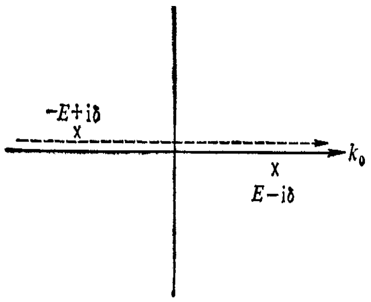


Рис. 10.1:

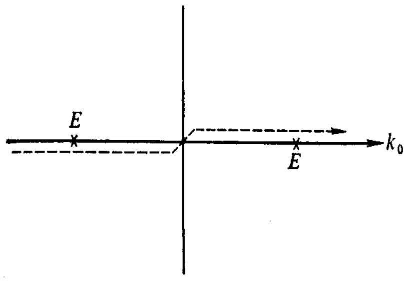


Рис. 10.2:

Полюса располагаются в точках, определяемых уравнением: $k_0^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon$, т.е. при

$$k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \mp i\delta = \pm E \mp i\delta\,, \tag{10.22}$$

как это показано на Рис. 10.1. В пределе $\delta \to 0(\varepsilon \to 0)$ эти полюса сдвигаются на действительную ось и путь интегрирования проходит как показано на Рис. 10.2.

Выше мы видели, что такой подход соответствует "повороту" временной оси на малый угол δ в комплексной плоскости времени. Это позволяет нам правильно обеспечить граничные условия для амплитуды перехода вакуум – вакуум. Но это же можно обеспечить, осуществив такой поворот и на конечный угол равный $-\pi/2$, так что $t \to -it(\to -i\infty)$. Если ввести обозначение

$$x_4 = it = ix_0\,, \tag{10.23}$$

то данный предел соответствует $x_4 \to \infty$. Такое пространство-время (с мнимым временем) является *евклидовым*, инвариантный интервал (расстояние между двумя близкими точками) в нем имеет вид:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = -\sum_{\mu=1}^{4}(dx^\mu)^2\,. \tag{10.24}$$

В импульсном пространстве можно, соответственно, ввести

$$k_4 = -ik_0\,, \tag{10.25}$$

[2]Далее, для краткости, всюду пишем dx вместо d^4x и т.п.

так что

$$k^2 = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = -k_E^2 \,, \qquad d^4k_E = d^3\mathbf{k}dk_4 = -id^4k \,, \tag{10.26}$$

где индекс E обозначает евклидово импульсное пространство. При этом фейнмановский пропагатор принимает вид:

$$\Delta_F(x) = -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_E^2 + m^2} \,. \tag{10.27}$$

Заметим, что это выражение[3], с точностью до $-i$, совпадает с корреляционной функцией Орнштейна – Цернике теории критических явлений в четырехмерном пространстве [14,15,35], если считать, что $m^2 \sim T - T_c$, где T_c – температура фазового перехода II рода (для простоты имеем в виду область температур $T > T_c$). Здесь мы впервые сталкиваемся с глубокой связью квантовой теории поля и современной теории критических явлений (статистической физикой) [14,15]. Из (10.7), с учетом $d^4x = -id^4x_E$ и $(\partial_\mu\varphi)^2 = -(\partial_E^\mu\varphi)^2$ получаем производящий функционал в евклидовой теории поля в виде:

$$Z_{0E}[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\int d^4x_E \left(\frac{1}{2}[(\partial_E^\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2] - \varphi J\right)\right\} \,, \tag{10.28}$$

что, по сути дела, совпадает со статистической суммой *гауссовой* модели фазового перехода (т.е. теории Ландау [35] без учета членов $\sim \varphi^4$ и выше) для скалярного параметра порядка φ, взаимодействующего с внешним полем J [14,15].

10.2 Функциональное интегрирование.

Перейдем к обсуждению функционального интегрирования с формальной точки зрения. Начнем с хорошо известной нам формулы для интеграла Пуассона – Гаусса (9.28):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \,. \tag{10.29}$$

Далее пределы интегрирования всегда подразумеваем от $-\infty$ до ∞ и не выписываем. Возьмем произведение n штук таких интегралов:

$$\int dx_1 dx_2 ... dx_n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n a_n x_n^2\right) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i^{1/2}} \,. \tag{10.30}$$

Пусть A — диагональная матрица с элементами $a_1, a_2, ..., a_n$, а x — n-мерный вектор (столбец) с компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$. Тогда показатель экспоненты в (10.30) можно записать в виде скалярного произведения:

$$(x, Ax) = \sum_n a_n x_n^2 \,, \tag{10.31}$$

[3] Здесь нет проблемы обхода полюсов — они лежат на мнимой оси в точках $k_4 = \pm i\sqrt{k_E^2 + m^2}$.

а детерминант матрицы A есть:

$$\mathrm{Det}\,A = a_1 a_2 ... a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i\,. \tag{10.32}$$

Тогда (10.30) запишется как:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} = (2\pi)^{n/2} (\mathrm{Det}\,A)^{-1/2}\,. \tag{10.33}$$

Поскольку это равенство справедливо для любой диагональной матрицы, оно также справедливо и для любой действительной симметричной матрицы, поскольку всегда существует линейное преобразование, приводящее такую матрицу к диагональному виду. Определим теперь меру интегрирования как:

$$[dx] = (2\pi)^{-n/2} d^n x\,. \tag{10.34}$$

Тогда (10.33) переписывается в виде:

$$\int [dx] e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} = (\mathrm{Det}\,A)^{-1/2}\,. \tag{10.35}$$

Это соотношение легко обобщается на случай, когда в экспоненте стоит квадратичная форма общего вида:

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c\,. \tag{10.36}$$

Можно действовать как при выводе (9.35). Форма (10.36) достигает минимума при $\bar{x} = -A^{-1}b$ и представляется в виде:

$$Q(x) = Q(\bar{x}) + \frac{1}{2}[x - \bar{x}, A(x - \bar{x})]\,. \tag{10.37}$$

Тогда сразу имеем аналог (9.35) в виде:

$$\int [dx] \exp\left[-\frac{1}{2}(x, Ax) - (b, x) - c\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) - c\right] (\mathrm{Det}\,A)^{-1/2}\,, \tag{10.38}$$

где A^{-1} обозначает обратную матрицу.

Рассмотрим теперь случай эрмитовых матриц. Возведем (10.29) в квадрат и запишем:

$$\int dx dy e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)} = \frac{2\pi}{a}\,. \tag{10.39}$$

Введем $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$, так что (вычисляя якобиан перехода от x, y к z, z^*) имеем $dxdy = -idz^*dz/2$, после чего (10.39) записывается как:

$$\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-az^*z} = \frac{1}{a} \tag{10.40}$$

Обобщим эту формулу, аналогично переходу от (10.30) к (10.35) и (10.38), введя положительно определенную эрмитову матрицу A, комплексный вектор b и меру интегрирования

$$[dz] = (2\pi i)^{-n/2} d^n z\,. \tag{10.41}$$

Тогда получим:

$$\int [dz^*][dz]e^{-(z^*,Az)} = (\mathrm{Det}\,A)^{-1}\,. \tag{10.42a}$$

$$\int [dz^*][dz]e^{-(z^*,Az)-(b^*,z)-(z^*,b)-c} = \exp\left[(b^*,A^{-1}b)-c\right](\mathrm{Det}\,A)^{-1}\,. \tag{10.42b}$$

Все выписанные формулы вполне строгие, они представляют собой прямое обобщение "одномерных" интегралов на случай конечномерного векторного пространства. Проведем теперь формальное обобщение на случай бесконечномерного функционального пространства. Пусть речь идет о пространстве действительных функций $\varphi(x^\mu)$. Можно определить их скалярное произведение:

$$(\varphi,\varphi) = \int d^4x[\varphi(x)]^2\,. \tag{10.43}$$

Обобщение выражения (10.35) есть:

$$\int \mathcal{D}\varphi(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int dx\varphi(x)A\varphi(x)\right\} = (\mathrm{Det}\,A)^{-1/2}\,, \tag{10.44}$$

где A — некоторый оператор, действующий на функции $\varphi(x)$:

$$A\varphi(x) = \int dy\,A(x,y)\varphi(y)\,, \tag{10.45}$$

а его детерминант определяется, естественно, как соответствующее произведение собственных значений. Мера интегрирования $\mathcal{D}\varphi(x) = [d\varphi(x)]$. Все это следует понимать, как обычно, в виде предельного выражения типа (10.5). Выражение (10.44) обычно называют гауссовым функциональным интегралом.

Если $\varphi(x)$ представляет собой комплексную функцию (поле), то возникает естественное обобщение (10.42a):

$$\int \mathcal{D}\varphi^*(x)\mathcal{D}\varphi(x)\exp\left\{-\int dx\varphi^*(x)A\varphi(x)\right\} = (\mathrm{Det}\,A)^{-1}\,, \tag{10.46}$$

где A — эрмитов оператор.

Обобщение (10.38) для случая вещественных полей $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\int \mathcal{D}\varphi(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int dx\int dy\varphi(x)A(x,y)\varphi(y) - \int dxB(x)\varphi(x) - c\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\int dx\int dyB(x)A^{-1}(x,y)B(y) - c\right\}(\mathrm{Det}\,A)^{-1/2}\,, \tag{10.47}$$

где $A^{-1}(x,y)$ обозначает соответствующий обратный оператор. Аналогичная формула интегрирования для комплексных полей возникает, как естественное обобщение (10.42b)

$$\int\mathcal{D}\varphi^*(x)\mathcal{D}\varphi(x)\exp\left\{-\int dx\int dy\varphi^*(x)A(x,y)\varphi(y) - \int dx\left[B^*(x)\varphi(x)+\varphi^*(x)B(x)\right] - c\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int dx\int dyB^*(x)A^{-1}(x,y)B(y) - c\right\}(\mathrm{Det}\,A)^{-1}\,. \tag{10.48}$$

Вернемся теперь к рассмотрению общего выражения для производящего функционала поля Клейна – Гордона (10.10):

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right]\right\}. \tag{10.49}$$

Стоящий здесь функциональный интеграл имеет, как раз, гауссов вид (10.47), причем $A(x,y) = i(\Box + m^2 - i\varepsilon)\delta(x-y)$, $B(x) = -iJ(x)$, $c = 0$. Тогда из (10.47) получаем:

$$Z_0[J] = \exp\left\{\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)(\Box + m^2 - i\varepsilon)^{-1}J(y)\right\}[i\,\mathrm{Det}(\Box + m^2 - i\varepsilon)]^{-1/2}. \tag{10.50}$$

Возникший здесь детерминант можно переписать, с помощью (10.44), как:

$$[i\,\mathrm{Det}(\Box + m^2 - i\varepsilon)]^{-1/2} = \int \mathcal{D}\varphi(x)\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx\varphi(x)(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi(x)\right\}, \tag{10.51}$$

а обратный оператор:

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)^{-1} = -\Delta_F(x-y), \tag{10.52}$$

что следует непосредственно из (10.17). Тогда выражение (10.50) сводится к:

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}\int\mathcal{D}\varphi\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right\}, \tag{10.53}$$

что совпадает с (10.19). Таким образом, прямое вычисление по правилам функционального интегрирования дает известный нам ответ для производящего функционала, полученный выше несколько “обходным” путем.

Полученные выше формулы для гауссовых функциональных интегралов будут широко использоваться ниже.

10.3 Функции Грина свободных частиц.

Покажем теперь, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина свободных частиц. Для этого разложим (10.20) в ряд:

$$\begin{aligned} Z_0[J] = \mathcal{N}\Bigg\{1 - \frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\right)^2\left[\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]^2 - \\ - \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{2}\right)^3\left[\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]^3 + \ldots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{10.54}$$

Вводя фурье-представление источника:

$$J(x) = \int d^4pJ(p)e^{-ipx} \tag{10.55}$$

и используя (10.21) легко получаем:

$$-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y) = -\frac{i}{2}(2\pi)^4\int d^4p\frac{J(-p)J(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{10.56}$$

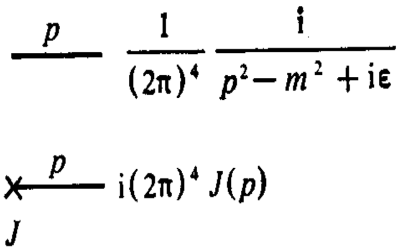


Рис. 10.3:

Рис. 10.4:

Сопоставим аналитическим выражениям графические элементы, как это показано на Рис. 10.3. Тогда выражению (10.56) соответствует диаграмма, показанная на Рис. 10.4. В результате, разложение производящего функционала (амплитуды перехода вакуум – вакуум) (10.54) представляется диаграммами, показанными на Рис. 10.5[4]. Видим, что этот ряд описывает распространение 1, 2, 3 и т. д. "частиц" между источниками, так что мы имеем дело с многочастичной теорией. Уже отсюда нетрудно понять, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина рассматриваемой теории поля.

Поясним формальную сторону дела. Рассмотрим, например, разложение в ряд некоторой функции $F(y_1, ..., y_k)$ от k переменных $y_1, ..., y_k$:

$$F\{y\} \equiv F(y_1, ..., y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{k} ... \sum_{i_n=1}^{k} \frac{1}{n!} T_n(i_1, ..., i_n) y_{i_1} ... y_{i_n}\,, \tag{10.57}$$

где

$$T_n = \left. \frac{\partial^n F\{y\}}{\partial y_{i_1} ... \partial y_{i_n}} \right|_{y=0}. \tag{10.58}$$

Перейдем теперь к интуитивному пределу, когда переменные образуют континуум: $i \to x, y_i(i = 1, ..., k) \to y(x), \sum_i \to \int dx$ и получим степенное разложение для *функционала*:

$$F[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 ... dx_n \frac{1}{n!} T_n(x_1, ..., x_n) y(x_1) ... y(x_n)\,, \tag{10.59}$$

где

$$T_n(x_1, ..., x_n) = \left. \frac{\delta}{\delta y(x_1)} ... \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F[y] \right|_{y=0}. \tag{10.60}$$

В этом случае о величине $F[y]$ и говорят как о производящем функционале для функций $T_n(x_1, ... x_n)$.

Наш производящий функционал $Z[J]$ надо еще отнормировать. Он, как мы видели, пропорционален амплитуде перехода вакуум – вакуум в присутствии источника

[4]Нормировочный множитель $\mathcal{N}$ здесь опущен.

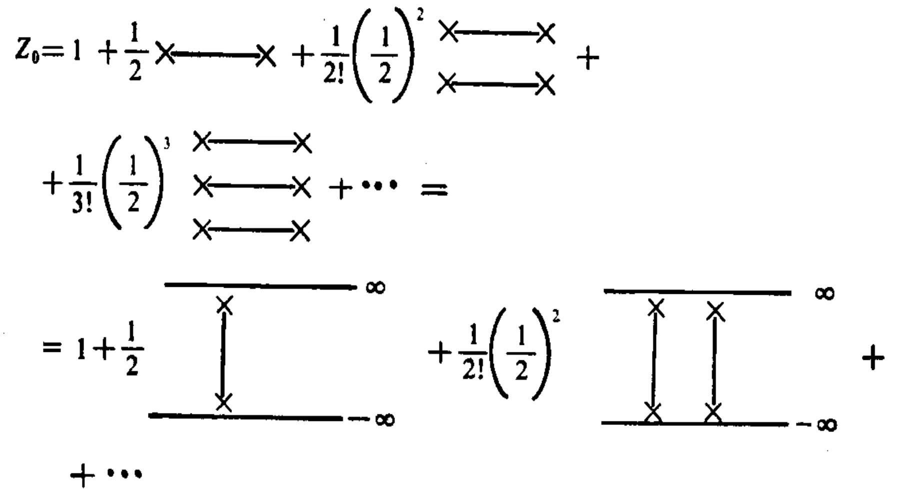


Рис. 10.5:

J. Естественной нормировкой является условие $Z[J=0]=1$. Тогда можем написать равенство:

$$Z[J] = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \,, \tag{10.61}$$

так что условие $Z[0] = 1$ выполняется автоматически. Поэтому (10.10) и (10.20) следует переписать как:

$$Z_0[J] = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right]\right\}}{\displaystyle\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-i\int d^4x \frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right\}} \,, \tag{10.62}$$

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} . \tag{10.63}$$

Эти новые определения, очевидно, удовлетворяют условию $Z[J=0]=1$, что и оправдывает отбрасывание несущественного нормировочного множителя $\mathcal{N}$.

Функционал $Z_0[J]$, определяемый выражением (10.63), в соответствии с (10.60), является производящим функционалом для функций:

$$\tau(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} . \tag{10.64}$$

Вспоминая (9.105), понимаем, что:

$$\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} = i^n \langle 0|T\varphi(x_1)...\varphi(x_n)|0\rangle \,, \tag{10.65}$$

так что

$$\tau(x_1, ..., x_n) = \langle 0|T\varphi(x_1)...\varphi(x_n)|0\rangle \tag{10.66}$$

представляет собой вакуумное среднее от хронологического произведения полевых *операторов*, т.е. является n-точечной (по числу координат) функцией Грина для рассматриваемой теории. Это определение совпадает с рассмотренным выше определением функций Грина в операторном формализме квантовой теории поля. Производящий функционал можно теперь записать в виде:

$$Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 ... dx_n J(x_1)...J(x_n)\tau(x_1, ..., x_n)\,, \tag{10.67}$$

что и означает, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина $\tau(x_1, ..., x_n)$. Именно это разложение и показано графически на Рис. 10.5.

Займемся вычислением некоторых простейших n-точечных функций Грина. Напомним, что мы имеем дело со свободной теорией скалярного поля. Начнем с 2-точечной функции:

$$\tau(x, y) = - \left. \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \right|_{J=0} . \tag{10.68}$$

Вычисления можно провести непосредственно, используя приведенное выше определение функциональной производной. Имеем:

$$\begin{gathered}\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp\left[-\frac{i}{2}\int dx_1 dx_2 J(x_1)\Delta_F(x_1 - x_2)J(x_2)\right] = \\ = -\int dx_1 \Delta_F(x - x_1)J(x_1) \exp\left[-\frac{i}{2}\int dx_1 dx_2 J(x_1)\Delta_F(x_1 - x_2)J(x_2)\right]\,,\end{gathered} \tag{10.69}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[J] = i\Delta_F(x - y) \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + \\ + \int dx_1 \Delta_F(x - x_1)J(x_1) \int dx_2 \Delta_F(y - x_2)J(x_2) \exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\,,\end{gathered} \tag{10.70}$$

где используется сокращенная запись экспоненты. Полагая теперь $J = 0$, получаем:

$$\left. \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[J] \right|_{J=0} = i\Delta_F(x - y) \tag{10.71}$$

или

$$\tau(x, y) = i\Delta_F(x - y)\,. \tag{10.72}$$

Ясно, что 2-точечная функция Грина, фактически, совпадает с фейнмановским пропагатором скалярной частицы (одночастичная функция Грина свободной скалярной частицы). Но рассмотрим еще раз ее физический смысл. Проведем сначала вычисления в оператороном подходе. По определению хронологического произведения имеем:

$$\begin{aligned}\tau(x, y) &= \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \\ &= \theta(x_0 - y_0)\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle + \theta(y_0 - x_0)\langle\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{10.73}$$

Первое слагаемое здесь представляет собой амплитуду вероятности рождения частицы в точке y в момент времени y_0 и ее последующего уничтожения в точке x в момент x_0. Второе слагаемое дает амплитуду вероятности рождения частицы в

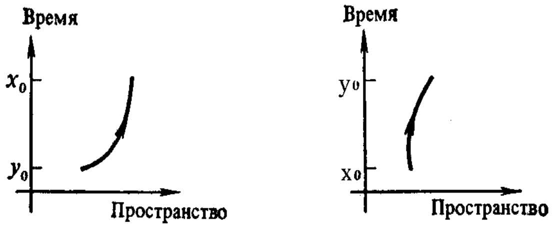


Рис. 10.6:

точке x в момент x_0 и ее уничтожения в точке y в момент времени y_0. Эти процессы графически проиллюстрированы на Рис. 10.6. Сумма этих амплитуд и дает фейнмановский пропагатор. Мы знаем, что в операторном подходе поле φ можно записать в виде суммы членов с положительными и отрицательными частотами (см. Главу 3):

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)\,, \tag{10.74}$$

где

$$\varphi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}a_\mathbf{k}e^{-ikx}\,, \tag{10.75}$$

$$\varphi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}a^+_\mathbf{k}e^{ikx}\,, \tag{10.76}$$

где $\omega_\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$, а $a^+_\mathbf{k}, a_\mathbf{k}$ — соответствующие операторы рождения и уничтожения. С учетом смысла этих операторов, в вакуумном среднем (10.73) остаются только члены вида $\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}$:

$$\tau(x,y) = \theta(x_0-y_0)\langle 0|\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)|0\rangle + \theta(y_0-x_0)\langle 0|\varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)|0\rangle\,. \tag{10.77}$$

Подставляя сюда (10.75) и (10.76) получаем:

$$\tau(x,y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6\sqrt{2\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}}[\theta(x_0-y_0)e^{-i(kx-k'y)} + \theta(y_0-x_0)e^{-i(ky-k'x)}]\langle 0|a_\mathbf{k}a^+_{\mathbf{k}'}|0\rangle\,, \tag{10.78}$$

так что, переставляя операторы в вакуумном среднем с помощью коммутационных соотношений (так, чтобы выделить обращающийся в нуль вклад от их нормального произведения и ненулевой вклад от δ-функции), получаем:

$$\tau(x,y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{k}}[\theta(x_0-y_0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0-x_0)e^{ik(x-y)}]\,. \tag{10.79}$$

Убедимся, что это выражение просто совпадает с $i\Delta_F(x-y)$, где $\Delta_F(x-y)$ задается (10.21). Выражение (10.21) можно переписать как:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2+i\varepsilon} = \int \frac{d^3\mathbf{k}dk_0}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k_0^2-(\mathbf{k}^2+m^2)+i\varepsilon} =$$
$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}dk_0}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{2\omega_\mathbf{k}}\left\{\frac{1}{k_0-\omega_\mathbf{k}+i\delta} - \frac{1}{k_0+\omega_\mathbf{k}-i\delta}\right\}. \tag{10.80}$$

Интеграл по k_0 тут, как всегда, можно легко вычислить контурным интегрированием. В показателе экспоненты стоит $e^{-ik_0x_0}$, так что при $x_0 > 0$ замыкаем контур интегрирования в нижней полуплоскости k_0, и интеграл определяется вкладом от полюса при $k_0 = \omega_{\mathbf{k}} - i\delta$. При $x_0 < 0$ замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости и все определится вкладом полюса при $k_0 = -\omega_{\mathbf{k}} + i\delta$. Тогда, по теореме Коши, имеем:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{kx}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}\left[\theta(x_0)(-i)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}x_0} - \theta(-x_0)ie^{i\omega_{\mathbf{k}}x_0}\right]. \tag{10.81}$$

После замены во втором интеграле $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ и переобозначения $x \to x - y$, получаем:

$$\Delta_F(x-y) = -i\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\left[\theta(x_0-y_0)e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0-x_0)e^{ik(x-y)}\right], \tag{10.82}$$

что совпадает с $-i\tau(x,y)$ из (10.79). Таким образом, 2-точечная функция Грина, возникшая в функциональном подходе, действительно, совпадает с одночастичным пропагатором операторной формулировки теории поля.

Но что представляет собой 1-точечная функция? Очевидно, что из (10.69) имеем:

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \langle 0|T\varphi(x)|0\rangle = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}\bigg|_{J=0} = \\ &= -\int dx_1 \Delta_F(x-x_1)J(x_1)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\bigg|_{J=0} = 0\end{aligned} \tag{10.83}$$

— вакуумное среднее самого поля равно нулю!

Найдем теперь 3-точечную функцию. Дифференцируя еще раз (10.70), получим:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_3)}Z_0[J] = \\ &-i\Delta_F(x_2-x_3)\int dx\Delta_F(x_1-x)J(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) - \\ &-i\Delta_F(x_2-x_1)\int dx\Delta_F(x_3-x)J(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) - \\ &-i\Delta_F(x_3-x_1)\int dx\Delta_F(x_2-x)J(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) - \\ &-\int dx\Delta_F(x_2-x)J(x)\int dy\Delta_F(x_3-y)J(y)\int dz\Delta_F(x_1-z)J(z)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right),\end{aligned} \tag{10.84}$$

что при $J = 0$, с очевидностью, дает нуль. Таким образом:

$$\tau(x_1,x_2,x_3) = \langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0\rangle = 0. \tag{10.85}$$

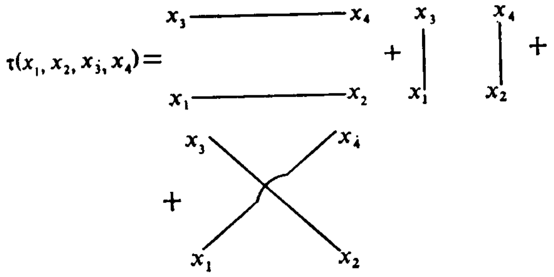


Рис. 10.7:

Аналогичные вычисления дают:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}...\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_4)}Z_0[J] \;=\; & -\Delta_F(x_2-x_3)\Delta_F(x_1-x_4)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)- \\ & -\Delta_F(x_2-x_1)\Delta_F(x_3-x_4)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)- \\ & -\Delta_F(x_3-x_1)\Delta_F(x_2-x_4)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)+...\,,\end{aligned} \tag{10.86}$$

где многоточием обозначены члены, обращающиеся в нуль при $J=0$. Соответственно, получаем:

$$\begin{aligned}\tau(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; & -\Delta_F(x_2-x_3)\Delta_F(x_1-x_4)- \\ & -\Delta_F(x_2-x_1)\Delta_F(x_3-x_4)-\Delta_F(x_3-x_1)\Delta_F(x_2-x_4)\,,\end{aligned} \tag{10.87}$$

что графически изображается диаграммами, показанными на Рис. 10.7 и дает амплитуду распространения двух свободных частиц. Здесь четыре пространственно-временные точки просто соединены всеми возможными способами линиями свободных частиц.

Переходя к n-точечным функциям, нетрудно убедиться, что для нечетных n все они просто равны нулю:

$$\tau(x_1,x_2,...,x_{2n+1})=0\,. \tag{10.88}$$

Для четных n каждая n-точечная функция факторизуется на сумму произведений 2-точечных функций (по всем “спариваниям”, т.е. по всевозможным перестановкам, входящих в них попарно координат):

$$\tau(x_1,x_2,...,x_{2n})=\sum_P \tau(x_{p_1},x_{p_2})...\tau(x_{p_{2k-1}},x_{p_{2k}})\,, \tag{10.89}$$

где

$$\tau(x_1,x_2)=i\Delta_F(x-y)\,. \tag{10.90}$$

Это сводится к известной нам теореме Вика, которая теперь нами доказана и в функциональной формулировке квантовой теории поля.

10.4 Производящий функционал для взаимодействующих полей.

До сих пор речь шла о теории свободного (невзаимодействующего поля). Как все это обобщить на взаимодействующие поля? Рассмотрим простейший пример такой теории, задав лагранжиан скалярного поля в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{g}{4!}\varphi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}\,, \tag{10.91}$$

где g — некоторая константа взаимодействия. Это так называемая теория $g\varphi^4$. Лагранжиан взаимодействия для нее имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4!}\varphi^4\,. \tag{10.92}$$

Уравнения Лагранжа для такой теории уже нелинейны (в них фигурирует слагаемое $\sim g\varphi^3$), что и отражает наличие взаимодействия (самодействия). В общем случае лагранжиан взаимодействия представляет собой некоторую функцию $V(\varphi)$. В принципе, можно рассматривать даже неполиномиальные функции, однако мы ограничимся простейшими моделями.

Отступление о размерностях констант взаимодействия.

Выше мы видели, что действие $S = \int d^4x\mathcal{L}$ безразмерно ($\hbar = 1$). Соответственно, размерность лагранжиана $[\mathcal{L}] = l^{-4}$, где l – некоторая длина. Размерность энергии (массы): $[E] = [m] = l^{-1}$. Из вида лагранжиана (10.91) понятно, что $[\varphi] = l^{-1}$. Тогда из (10.92) ясно, что в теории $g\varphi^4$ константа взаимодействия g *безразмерна*. Это очень важное обстоятельство! Благодаря ему данная теория является перенормируемой. Интуитивно, это можно понять из следующих элементарных соображений. Рассмотрим более общий степенной лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = g_k\varphi^{4+k} \qquad k > 0 \tag{10.93}$$

Тогда размерность соответствующей константы взаимодействия $[g_k] = l^k$. Но разложение теории возмущений всегда надо строить по безразмерному малому параметру. В данном случае таким параметром будет величина:

$$g_k l^{-k} \sim g_k m^k \sim g_k E^k \tag{10.94}$$

растущая с ростом энергии E (или на малых расстояниях). Это плохо и, как оказывается, является отражением неперенормируемости соответствующей теории. Грубо можно сказать, что безразмерность константы взаимодействия является необходимым (но не достаточным!) условием перенормируемости в любой теории взаимодействующих частиц. Точнее, необходимо, чтобы константа взаимодействия была бы безразмерной или размерность ее была бы отрицательной степенью длины: $g \sim l^{-a}, a > 0$. В последнем случае, безразмерный параметр теории возмущений gE^{-a} будет вполне безобидным при высоких энергиях. С этой точки зрения годится и теория $g\varphi^3$, но с ней другие проблемы — отсутствует положительная определенность энергии (нет основного состояния). Поэтому, теория $g\varphi^4$ является, по сути дела, единственной "разумной" теорией скалярного поля в четырехмерном пространстве-времени [5].

Для спинорного поля ($s = 1/2$) можно рассуждать также. Дираковский лагранжиан $\mathcal{L} \sim i\bar\psi\partial\psi - m\bar\psi\psi$, так что $[\psi] = [\bar\psi] = l^{-3/2}$. Соответственно, если рассмотреть взаимодействие дираковского поля со скалярным вида (взаимодействие Юкавы):

$$\mathcal{L}_{int} \sim g\bar\psi\psi\varphi\,, \tag{10.95}$$

то соответствующая константа взаимодействия g безразмерна и теория перенормируема. А если взять четырехфермионное взаимодействие (Ферми) вида:

$$\mathcal{L}_{int} \sim G\bar\psi\psi\bar\psi\psi\,, \tag{10.96}$$

[5] Более подробно эти вопросы, включая зависимость от размерности пространства, будут обсуждаться позднее.

то константа связи G размерна: $[G] = [m^{-2}] = l^2$. Такая теория имеет "плохое" поведение при больших энергиях и является неперенормируемой.

В современной теории принято рассматривать только перенормируемые теории. Безразмерность константы связи является грубым критерием отбора возможных лагранжианов взаимодействия.

Нормированный производящий функционал для теории с взаимодействием определим также как и для невзаимодействующей теории (ср.(10.1), (10.62)):

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS + i\int dxJ\varphi\right)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}}\,, \tag{10.97}$$

где $S = \int d^4x\mathcal{L}$ — действие рассматриваемой теории, с учетом вклада от лагранжиана взаимодействия. При $\mathcal{L}_{int} = 0$ (10.97), естественно, сводится к рассмотренным выше выражениям для свободной теории. В общем случае имеем $S = S_0 + S_{int}$, где $S_{int} = \int d^4x\mathcal{L}_{int}$.

Непосредственно проводя функциональное дифференцирование, имеем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta Z}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS + i\int dxJ\varphi\right)\varphi(x)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}}\,, \tag{10.98}$$

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(y)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS + i\int dxJ\varphi\right)\varphi(x)\varphi(y)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{10.99}$$

и т. д. Полагая в этих выражениях $J = 0$ генерируем все гриновские функции теории:

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS\right)\varphi(x)\varphi(y)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}}\,, \tag{10.100}$$

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS\right)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{10.101}$$

и т. д. Видим, что функции Грина представляют собой функциональные "средние" от произведений четного числа полей, причем "усреднение" проводится с "весом" e^{iS}. Если в этих выражениях записать $S = S_0 + S_{int}$ и провести разложение экспонент в ряд по степеням S_{int}, т.е., фактически в ряд теории возмущений по степеням константы взаимодействия, то пользуясь доказанной выше теоремой Вика, можно построить диаграммную технику для вычисления любых функций Грина, рассматриваемой теории поля, аналогично тому, как это делалось в операторном подходе. Возникающие при этом "средние" от парных произведений полей в разных точках будут "усредняться" с e^{iS_0}. Эти "средние" легко вычисляются (гауссовы интегралы!) и, как мы видели, сводятся к соответствующим свободным функциям Грина. Мы, однако, пойдем несколько иным, более формальным, путем, основанным на рассмотрении общих соотношений для производящего функционала взаимодействующей теории (10.97).

Заметим, что

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}e^{i\int dxJ\varphi} = \varphi(x)e^{i\int dxJ\varphi}\,. \tag{10.102}$$

Поскольку J и φ здесь независимые (функциональные) переменные, аналогичное равенство имеет место и для любой функции от φ:

$$V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)e^{i\int dxJ\varphi} = V\left(\varphi(x)\right)e^{i\int dxJ\varphi}\,, \tag{10.103}$$

что легко доказывается разложением $V(\varphi)$ в ряд Тэйлора. Тогда имеем:

$$e^{-i\int dxV(\varphi)}e^{i\int dxJ\varphi} = e^{-i\int dxV\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}e^{i\int dxJ\varphi}\,. \tag{10.104}$$

Поэтому, используя в качестве $V(\varphi)$ лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{int}(\varphi)$, можно записать производящий функционал теории со взаимодействием в виде:

$$\begin{aligned} Z[J] = \mathcal{N}\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}(m^2-i\varepsilon)\varphi^2 + \mathcal{L}_{int}(\varphi) + J\varphi\right]\right\} = \\ = \mathcal{N}\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{i\int dx\mathcal{L}_{int}(\varphi)\right\}\exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}(m^2-i\varepsilon)\varphi^2 + J\varphi\right]\right\} = \\ = \mathcal{N}\exp\left\{i\int dx\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}Z_0[J] \end{aligned} \tag{10.105}$$

или, используя (10.20):

$$Z[J] = \mathcal{N}\exp\left[i\int dx\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}. \tag{10.106}$$

Таким образом, мы получили общее выражение для производящего функционала теории с взаимодействием, которое в дальнейшем будет использовано при построении диаграммной техники.

10.5 Теория φ^4.

Итак вернемся к рассмотрению теории с лагранжианом взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4!}\varphi^4\,. \tag{10.107}$$

Нормированный производящий функционал для этой теории имеет вид:

$$Z[J] = \frac{\exp\left[i\int dz\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]}{\left\{\exp\left[i\int dz\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\right\}\Big|_{J=0}}\,. \tag{10.108}$$

Теория возмущений строится разложением этого выражения в ряд по степеням константы связи g. Выпишем первые члены разложения для числителя:

$$\left[1 - \frac{ig}{4!}\int dz\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 + O(g^2)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]. \tag{10.109}$$

Дифференцируя последовательно, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] = \\ = -\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right], \end{aligned} \tag{10.110}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] =$$
$$= \left\{i\Delta_F(0) + \left[\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\right]^2\right\}\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right], \tag{10.111}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3 \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] =$$
$$= \left\{3[-i\Delta_F(0)]\int dx\Delta_F(z-x)J(x) - \left[\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\right]^3\right\}\times$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right], \tag{10.112}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] =$$
$$= \left\{-3[\Delta_F(0)]^2 + 6i\Delta_F(0)\left[\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\right]^2 + \left[\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\right\}\times$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]. \tag{10.113}$$

Этим выражениям можно сопоставить диаграммы. Будем изображать функцию $-i\Delta_F(x-y)$ (пропагатор) сплошной линией, соединяющей точки x и y. Величину $-i\Delta_F(0) = -i\Delta_F(x-x)$ будем изображать замкнутой петлей, связанной с точкой x. Тогда выражение (10.113) графически представляется, как это показано на Рис. 10.8. Происхождение коэффициентов 3, 6, 1 можно понять из соображений симметрии. Например, коэффициент 3 соответствует трем способам соединить две пары линий в диаграмму с двумя петлями. Аналогично, во втором слагаемом имеется 6 способов соединить две линии, так чтобы получилась изображенная на Рис. 10.8 диаграмма. Эти коэффициенты называются факторами симметрии, мы еще обсудим общий алгоритм их получения ниже. Заметим, что первый член в (10.113) и на Рис. 10.8 представляет собой типичный вакуумный вклад (график) без внешних линий.

Рассмотрим теперь знаменатель (10.108). Для этого достаточно просто положить $J = 0$ в (10.113), что исключает второй и третий члены на Рис. 10.8. Таким образом, с точностью до членов порядка g, производящий функционал изображается графиками Рис. 10.9, где второе равенство получено разложением знаменателя с той же точностью. При этом вакуумный график из знаменателя “поднялся наверх” и в точности сократился с вакуумным графиком числителя. В этом проявляется уже встречавшееся выше общее правило сокращения вакуумных графиков, которое выполняется и для *нормированных* производящих функционалов в квантовой теории поля.

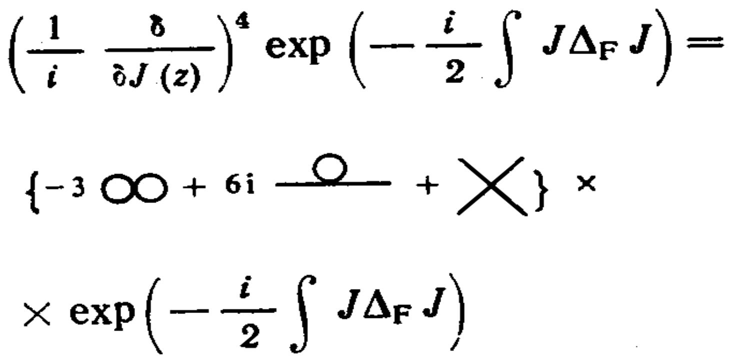


Рис. 10.8:

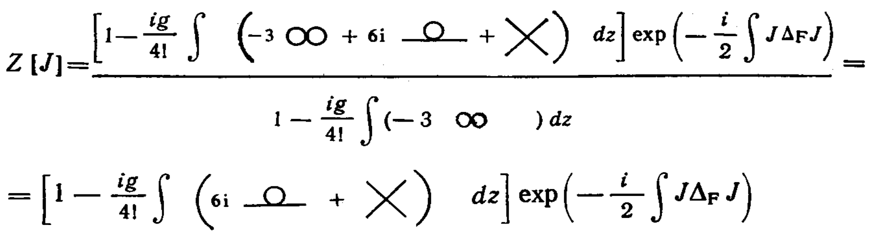


Рис. 10.9:

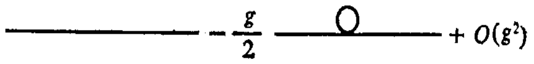


Рис. 10.10:

2-точечная функция.

Двухточечная функция определяется как:

$$\tau(x_1, x_2) = -\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} . \tag{10.114}$$

Из Рис. 10.9 ясно, что вклад первого слагаемого функционала $Z[J]$ в выражение для $\tau(x_1, x_2)$ равен просто $i\Delta_F(x_1 - x_2)$, т.е. свободному пропагатору. Диаграмма Рис. 10.9 с четырьмя “хвостами” содержит четыре множителя J и не дает $(J = 0)$ вклада в 2-точечную функцию. Вклад от диаграммы с петлей в $Z[J]$ равен:

$$\frac{g}{4}\Delta_F(0)\int dxdy\Delta_F(z-x)J(x)\Delta_F(z-y)J(y)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) . \tag{10.115}$$

Дифференцируя это выражения два раза, получаем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(...) = -\frac{ig}{4}\Delta_F(0)2\int dydz\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-y)J(y)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + ... , \tag{10.116}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(...) = -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int dz\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + ... , \tag{10.117}$$

где опущены члены, обращающиеся в нуль при $J \to 0$. В итоге, имеем:

$$\tau(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2}\Delta_F(0)\int dz\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2) + O(g^2) , \tag{10.118}$$

что изображено диаграммами на Рис. 10.10 Для свободной частицы имеем:

$$\tau(x) = i\Delta_F(x) = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{10.119}$$

и фурье-образ свободного пропагатора имеет полюс при $k^2 = m^2$, что дает спектр соответствующей частицы. Нетрудно убедиться, что при наличии взаимодействия, масса частицы становится отличной от m. В самом деле, второй член на Рис. 10.10 можно записать как:

$$\begin{aligned}
-\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int dz\Delta_F(x_1 - z)\Delta_F(x_2 - z) = \\
= -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int\frac{d^4pd^4qdz}{(2\pi)^8}\frac{e^{-ip(x_1-z)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{e^{-iq(x_2-z)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\
= -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int\frac{d^4pd^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}\delta(p+q) = \\
= -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} ,
\end{aligned} \tag{10.120}$$

так что (10.118) сводится к:

$$\tau(x_1, x_2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{i}{2} g \frac{\Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} . \tag{10.121}$$

При $g \ll 1$ член в фигурных скобках в (10.121) можно переписать (с той же точностью) как:

$$\left\{ 1 - i \frac{g}{2} \frac{\Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\}^{-1} . \tag{10.122}$$

Соответственно:

$$\tau(x_1, x_2) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 - \frac{i}{2} g \Delta_F(0) + i\varepsilon} . \tag{10.123}$$

Видим, что теперь фурье-образ $\tau(x_1, x_2)$ имеет полюс при:

$$p^2 = m^2 + \frac{i}{2} g \Delta_F(0) \equiv m^2 + \delta m^2 = m_r^2 , \tag{10.124}$$

где

$$\delta m^2 = \frac{i}{2} g \Delta_F(0) , \tag{10.125}$$

а величина m_r представляет собой физическую (или перенормированную) массу частицы. Таким образом, взаимодействие изменяет массу. К сожалению, величина δm^2 не может быть рассчитана, формально она бесконечна, поскольку $\Delta_F(0) \sim \int \frac{d^4k}{k^2} \sim \int dk k^3/k^2 \sim \int dk k$, и этот интеграл квадратично расходится на верхнем пределе. Это снова пример типичной “ультрафиолетовой” расходимости в квантовой теории поля. Ситуация здесь такая же, как и в квантовой электродинамике. Физическая причина расходимости — точечный характер взаимодействия (локальная теория поля). Нам неизвестно, существует ли какой-нибудь “реалистический” механизм “обрезания” таких расходимостей. Например, в теории конденсированного состояния, в аналогичных ситуациях, верхний предел интегрирования обычно $\sim 1/a$, где a — некоторая “минимальная” длина порядка среднего межатомного расстояния или постоянной решетки. Аналог такой длины в квантовой теории поля не известен, более того, его введение (например путем введения решеточной структуры пространства-времени на малых расстояниях) явно нарушает релятивистскую инвариантность теории. Проблема решается для перенормируемых теорий, когда удается все такие расходимости “загнать” в конечное число параметров, определяемых из эксперимента (масса, константа взаимодействия и т. п.). Для перенормируемой теории $g\varphi^4$ мы еще вернемся к обсуждению этих вопросов.

4-точечная функция.

Имеем:

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left. \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right|_{J=0} . \tag{10.126}$$

Член порядка g^0 был рассмотрен выше, из (10.87) имеем:

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\Delta_F(x_2 - x_3)\Delta_F(x_1 - x_4) - \\ -\Delta_F(x_2 - x_1)\Delta_F(x_3 - x_4) - \Delta_F(x_3 - x_1)\Delta_F(x_2 - x_4) , \end{aligned} \tag{10.127}$$

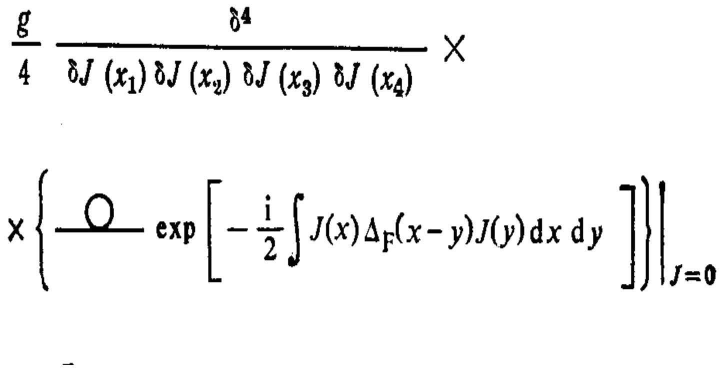


Рис. 10.11:

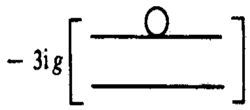


Рис. 10.12:

что показано графически на Рис. 10.7 и соответствует свободному распространению двух частиц без всякого рассеяния. Рассмотрим вклад первого порядка по g. Из вида производящего функционала, приведенного на Рис. 10.9, ясно, что один вклад такого типа, связанный с дифференцированием петлевого графика в $Z[J]$ изображается Рис. 10.11 и равен:

$$
\begin{aligned}
&\frac{g}{4}\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\times\\
&\times\left\{\Delta_F(0)\int dx\int dy\int dz\Delta_F(x-z)\Delta_F(y-z)J(y)J(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\right\}\Big|_{J=0}=\\
&=-\frac{ig}{2}\Delta_F(0)\int dz[\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(x_3-x_4)+\\
&+\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_2-x_4)+\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)+\\
&+\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_1-x_4)+\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_1-x_2)+\\
&+\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_1-x_2)]\,,
\end{aligned}
\tag{10.128}
$$

что графически показано диаграммой на Рис. 10.12, заменяющей шесть слагаемых данного выражения. Другой вклад первого порядка по g получается дифференци-

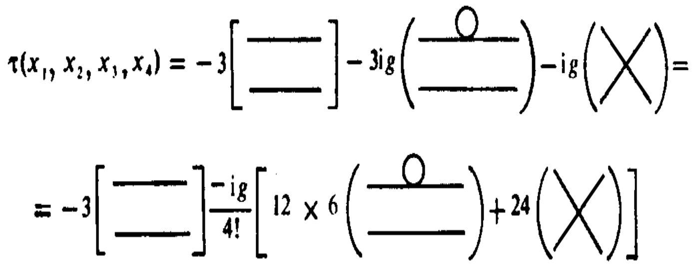


Рис. 10.13:

Рис. 10.14:

рованием “четыреххвостого” графика в $Z[J]$, что дает:

$$
-\frac{ig}{4!}\,\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)...\delta J(x_4)}\left\{\int dz\left[\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\right\}\bigg|_{J=0}=
$$
$$
=-ig\int dz\Delta_F(x_1-z)\Delta_F(x_2-z)\Delta_F(x_3-z)\Delta_F(x_4-z)\,, \tag{10.129}
$$

что графически можно изобразить просто точкой с четырьмя “хвостами”, где точка представляет элементарную (“затравочную”) вершину взаимодействия.

Таким образом, полная 4-точечная функция, с точностью до членов порядка g, изображается графиками Рис. 10.13. Здесь первый член порядка g^0, как мы уже отмечали, не дает вклада в рассеяние, второй член описывает самодействие одной из частиц, а собственно рассеяние описывается только третьим слагаемым.

Численные коэффициенты на Рис. 10.13, и в других подобных случаях, можно понять из комбинаторных соображений. Рассмотрим произвольную диаграмму порядка g^n для 4-точечной функции. Она содержит n вершин — Рис. 10.14. У 4-точечной функции имеется 4 внешних “хвоста” — Рис. 10.15 (преддиаграмма). Теперь нужно всеми способами соединить эти “хвосты” с n вершинами, по правилам составления диаграмм. Например, в первом порядке по g существует три топологически различных типа фейнмановских диаграмм, показанные на Рис. 10.16. Чтобы получить диаграмму Рис. 10.16(a) нужно сначала соединить x_1 на преддиаграмме

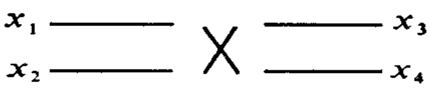


Рис. 10.15:

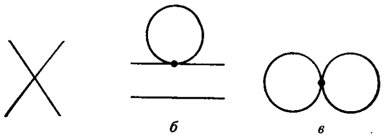


Рис. 10.16:

Рис. 10.15 с одним из концов вершины. Существует 4 способа это сделать. После этого остается 3 способа соединить x_2 с одним из оставшихся концов и т. д. Всего, таким образом, имеется $4! = 24$ способа получить эту диаграмму из преддиаграммы, отсюда и возникает соответствующий коэффициент на Рис. 10.13. Чтобы получить диаграмму Рис. 10.16(б), соединим x_1 непосредственно с одним из внешних концов x_2, x_3, x_4, что даст одну линию. Существует 3 способа это сделать. Далее выберем один их концов вершины и соединим его с одной из двух оставшихся внешних точек. Это можно сделать 4×2 способами. Далее соединим один из трех оставшихся концов пунктирной вершины с последней оставшейся точкой. Для этого имеется 3 способа. Наконец, соединим оставшиеся два конца друг с другом. В итоге получается кратность $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 12 \times 6$, что и соответствует коэффициенту перед этой диаграммой на Рис. 10.13. Понятно, что кратность диаграммы Рис. 10.16(в) равна $3 \times 3 = 9$, но эта (вакуумная) диаграмма не фигурирует на Рис. 10.13, сокращаясь с соответствующим вкладом от знаменателя нормированного функционала $Z[J]$.

В итоге можем сформулировать следующие правила диаграммной техники для теории $g\varphi^4$ (в координатном представлении):

- Свободному пропагатору $-i\Delta_F(x-y)$ сопоставляется сплошная линия, соединяющая точки x и y.
- Элементарная вершина взаимодействия изображается точкой, соединенной с четырьмя сплошными линиями, ей сопоставляется множитель $-ig$, а по координатам вершин ведется интегрирование.
- Каждая диаграмма умножается на соответствующий фактор симметрии $S(1/4!)^n$, где S — число способов построить данную диаграмму из соответствующей преддиаграммы.

10.6 Производящий функционал для связных диаграмм.

Можно ввести производящий функционал $W[J]$, который является производящим функционалом только для связных диаграмм Фейнмана, т.е. для диаграмм не распадающихся на независимые блоки[6]. Связные диаграммы важны, поскольку только они дают вклад в нетривиальную часть S-матрицы (рассеяние). Функционал $W[J]$ определяется как:

$$W[J] = -i \ln Z[J] \,, \tag{10.130}$$

так что

$$Z[J] = \exp\left(iW[J]\right) \,. \tag{10.131}$$

[6]Пример несвязной диаграммы показан на Рис. 10.16(б).

Покажем, на примере 2-точечной и 4-точечной функций, что $W[J]$ действительно “генерирует” только связные диаграммы. Имеем:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = \frac{i}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\,. \tag{10.132}$$

При $J = 0$ имеем:

$$\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = 0\,, \qquad Z[0] = 1\,, \tag{10.133}$$

так что получаем:

$$\left.\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} = -i\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} = i\tau(x_1,x_2)\,. \tag{10.134}$$

Видим, что W определяет пропагатор во всех порядках по g.

Перейдем к 4-точечной функции. Продифференцируем (10.132) еще два раза и положим $J = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)} = \\
&= i\left[\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)} + \frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_4)} + \right.\\
&\left.\left. + \frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_4)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)} - \frac{1}{Z^2}\frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right]\right|_{J=0} = \\
&= i[\tau(x_1,x_2)\tau(x_3,x_4) + \tau(x_1,x_3)\tau(x_2,x_4) + \tau(x_1,x_4)\tau(x_2,x_3) - \tau(x_1,x_2,x_3,x_4)]\,.
\end{aligned} \tag{10.135}$$

Нетрудно видеть, что это выражение не содержит несвязных диаграмм. Подставляя (10.118) и выражения с Рис. 10.129 в (10.135), с точностью до членов порядка g имеем Рис. 10.17. Видим, что вклад в это выражение дают только связные диаграммы.

Рассмотрим теперь кратко n-точечную функцию:

$$\tau(x_1,...,x_n) = \frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\right|_{J=0}\,. \tag{10.136}$$

Неприводимая (связная) n-точечная функция $\varphi(x_1,...,x_n)$ может быть определена как:

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \frac{1}{i^n}\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\right|_{J=0}\,. \tag{10.137}$$

В самом деле, из Рис. 10.13 и (10.136) следуют выражения, показанные на Рис. 10.18. Из (10.135) следует:

$$i\varphi(x_1,...,x_4) = \tau(x_1,...,x_4) - \tau(x_1,x_2)\tau(x_3,x_4) - \tau(x_1,x_3)\tau(x_2,x_4) - \tau(x_1,x_4)\tau(x_2,x_3)\,. \tag{10.138}$$

Поскольку $\tau(x_1,x_2) = i\varphi(x_1,x_2)$, имеем:

$$\tau(x_1,...,x_4) = i\varphi(x_1,...,x_4) - \sum_p \varphi(x_{i_1},x_{i_2})\varphi(x_{i_3},x_{i_4})\,, \tag{10.139}$$

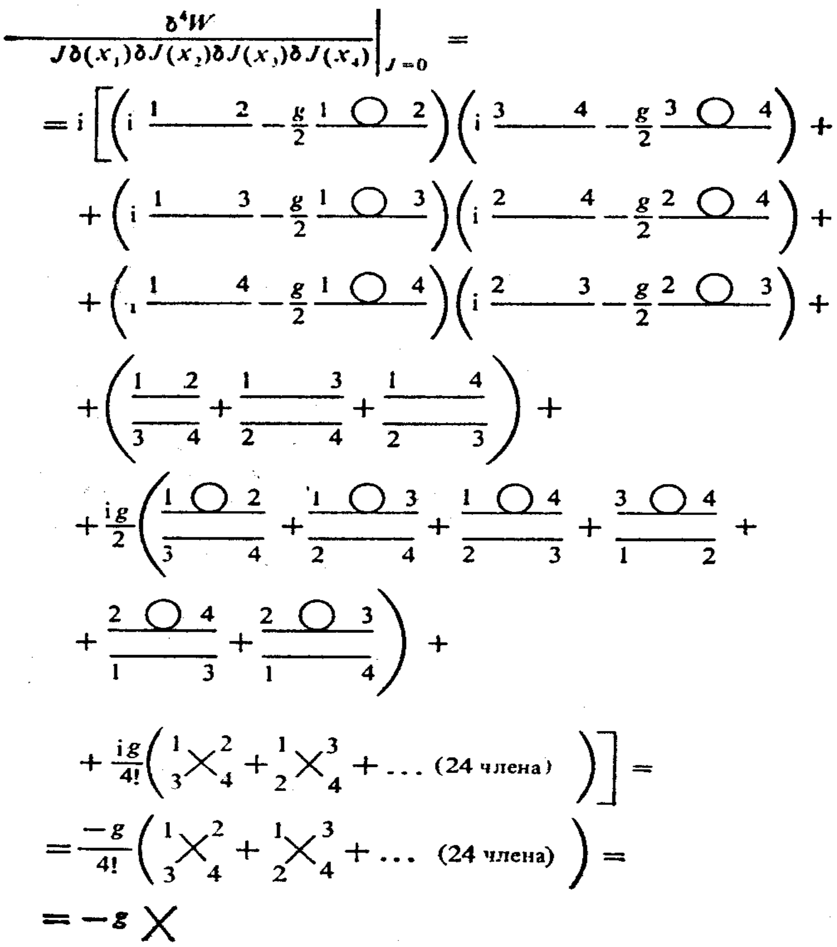


Рис. 10.17:

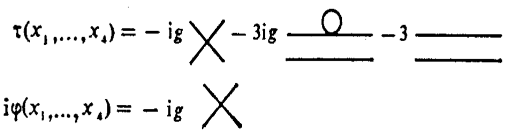


Рис. 10.18:

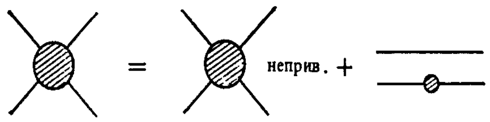


Рис. 10.19:

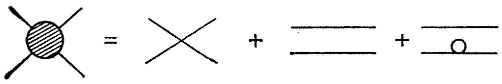


Рис. 10.20:

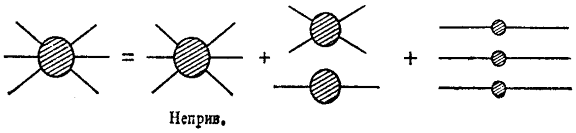


Рис. 10.21:

где сумма идет по всем возможным разбиениям индексов $(1, ..., 4)$ на пары $(i_1, i_2), (i_3, i_4)$. Таким образом, 4-точечная функция распадается на "неприводимую" (или "связную") часть и приводимые части, как показано на Рис. 10.19. В первом порядке по g имеем графики, показанные на Рис. 10.20. В случае n-точечных функций, соответствующее обобщение имеет вид, показанный на Рис. 10.21.

10.7 Оператор собственной энергии и вершинные функции.

Продолжим обсуждение общей структуры уравнений квантовой теории поля в функциональной формулировке, ограничиваясь, в основном, теорией $g\varphi^4$. Зная производящий функционал $Z[J]$, можем найти n-точечные функции $\tau(x_1, ..., x_n)$ (функции Грина $G^n(x_1, ..., x_n)$):

$$\tau(x_1, ..., x_n) = G^{(n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}. \tag{10.140}$$

Эти функции содержат как связные (неприводимые), так и несвязные (приводимые) части, как это показано, например, для $G^{(4)}$ на Рис. 10.22. Процессы рассеяния определяются только связными диаграммами, которые генерируются функционалом $W = -i \ln Z$, так что связные функции Грина определяются как:

$$i\varphi(x_1, ..., x_n) = G_c^{(n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}. \tag{10.141}$$

Тогда из всех графиков, показанных на Рис. 10.22, остается только третий, который и определяет $G_c^{(4)}$ в первом порядке по g.

Рис. 10.22:

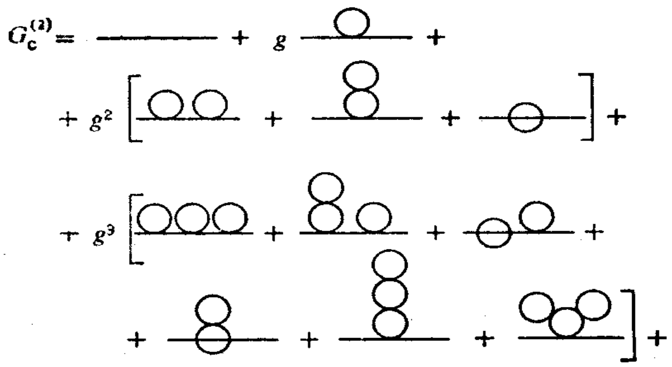


Рис. 10.23:

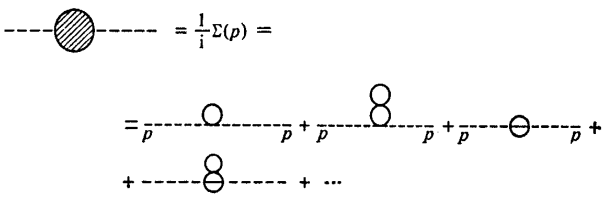


Рис. 10.24:

Связная 2-точечная функция Грина, с точностью до членов g^3, определяется графиками, показанными на Рис. 10.23. Полная сумма таких диаграмм дает "одетый" пропагатор $G_c^{(2)}(x,y)$, который обычно изображают "жирной" линией. Можно провести обычную процедуру выделения *одночастично неприводимых* (1ЧН) диаграмм (неразрезаемых по линии одной частицы), и ввести их сумму, как это показано на Рис. 10.24. Эта сумма определяет неприводимую собственно-энергетическую часть. Полный (одетый) пропагатор определяется тогда уравнением Дайсона:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(p) = G_0(p) + G_0(p)\frac{1}{i}\Sigma(p)G_0(p) + G_0(p)\frac{1}{i}\Sigma(p)G_0(p)\frac{1}{i}\Sigma(p)G_0(p) + \ldots = \\ = G_0\left\{1 + \frac{1}{i}\Sigma G_0 + \frac{1}{i}\Sigma G_0\frac{1}{i}\Sigma G_0 + \ldots\right\} = \\ = G_0\left[1 - \frac{1}{i}\Sigma G_0\right]^{-1} = \left[G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i}\Sigma(p)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{10.142}$$

или

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}\,, \tag{10.143}$$

где учли, что

$$G_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}\,. \tag{10.144}$$

В диаграммном виде уравнение Дайсона показано на Рис. 10.25. Определяя физи-

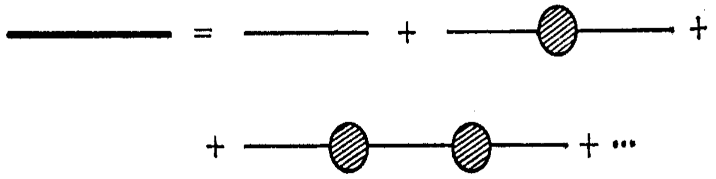


Рис. 10.25:

ческую массу частицы m_{phys} полюсом полного пропагатора [7]:

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_{phys}^2}\,, \tag{10.145}$$

получаем:

$$m_{phys}^2 = m^2 + \Sigma(p^2 = m_{phys}^2)\,. \tag{10.146}$$

Из (10.142) имеем:

$$[G_c^{(2)}(p)]^{-1} = G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i}\Sigma(p)\,, \tag{10.147}$$

так что величина, обратная 2-точечной функции, содержит кроме обратного "голого" пропагатора только 1ЧН-диаграммы. Можно формально определить 2-точечную *вершинную* функцию $\Gamma^{(2)}(p)$ соотношением:

$$G_c^{(2)}(p)\Gamma^{(2)}(p) = i\,, \tag{10.148}$$

что, согласно (10.147), сводится к:

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p)\,. \tag{10.149}$$

Фактически, нетривиальная часть этой величины сводится просто к $\Sigma(p)$, но такое обозначение удобно в рамках некоторой единой номенклатуры, вводящей общее понятие вершинных функций[8].

Можно ввести понятие производящего функционала для n-точечных 1ЧН вершин Γ^n. Он обозначается $\Gamma[\varphi]$ и называется также *эффективным действием*. Определяется этот функционал с помощью так называемого преобразования Лежандра функционала $W[J]$:

$$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int dx J(x)\varphi(x)\,. \tag{10.150}$$

Отсюда сразу же следует:

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x)\,, \qquad \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x)\,. \tag{10.151}$$

[7] Энергетический спектр свободно распространяющейся "одетой" частицы определяется из $p^2 = m_{phys}^2$.

[8] Удобно исключить мнимую единицу из определения $G_c^{(2)}(p)$, так чтобы правая часть (10.148) равнялась просто 1. Соответственно и в уравнении Дайсона $\frac{1}{i}\Sigma \to \Sigma$. Такие обозначения чаще всего и встречаются в литературе.

Тогда для пропагатора получаем:

$$G(x,y) = -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = -\frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(y)}\,. \tag{10.152}$$

Определим теперь величину $\Gamma(x,y)$ как:

$$\Gamma(x,y) = \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)}\,. \tag{10.153}$$

Эта величина является обратной к пропагатору:

$$\int dx G(x,z)\Gamma(z,y) = -\int dz \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)} =$$
$$= \int dz \frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(z)}\frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x-y)\,. \tag{10.154}$$

Продифференцируем обе части (10.154) по $J(x'')$, заменив y на z, и с учетом соотношения:

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int dz'' \frac{\delta\varphi(z'')}{\delta J(x'')}\frac{\delta}{\delta\varphi(z'')} = -\int dz'' G(x'',z'')\frac{\delta}{\delta\varphi(z'')}\,. \tag{10.155}$$

Тогда получим:

$$\int dz \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')} -$$
$$-\int dz \int dz'' \frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(z)} G(x'',z'')\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')} = 0\,, \tag{10.156}$$

так что:

$$\int dz \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}\Gamma(z,z') +$$
$$+\int dz dz'' G(x,z)G(x'',z'')\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')} = 0\,. \tag{10.157}$$

Умножая обе части последнего равенства на $G(x',z')$ и интегрируя по z', с учетом (10.154), получаем:

$$\frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(x'')} = -\int dz dz' dz'' G(x,z)G(x',z')G(x'',z'')\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')}\,. \tag{10.158}$$

Таким образом, связная 3-точечная функция представляет собой 1ЧН3-точечную вершинную функцию, у которой внешними линиями являются точные пропагаторы. Соответственно, величина $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')}$ представляет собой полную тройную вершину. Графически все это изображено на Рис. 10.26. Уравнение (10.158) можно обратить с помощью (10.154), так что:

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(y')\delta\varphi(y'')} = -\int dx dx' dx'' \Gamma(x,y)\Gamma(x',y')\Gamma(x'',y'')\frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(x'')}\,. \tag{10.159}$$

В правой части происходит “обрубание” внешних “хвостов” у (10.158).

Дифференцируя (10.158) еще раз, получаем 4-точечную функцию, представленную графиками Рис. 10.27, где возникают “четырехвостая” неприводимая вершина и три одночастично приводимых вклада, соответствующие трем кросс-каналам рассеяния.

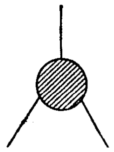


Рис. 10.26:

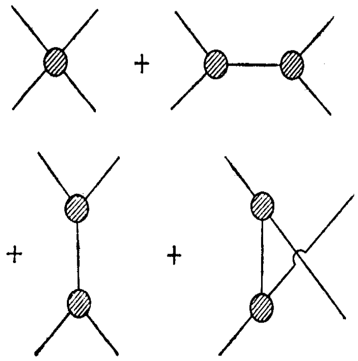


Рис. 10.27:

Термодинамическая аналогия.

Существует глубокая аналогия квантовой теории поля и статистической механики, которая выражается следующей таблицей.

Квантовая теория поля	Статистическая механика
Z - производящий функционал	Z - статистическая сумма
$Z = e^{iW}$	$Z = e^{-\frac{F}{T}}$
$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int J\varphi$	F – свободная энергия

В следующем разделе мы рассмотрим конкретный пример использования методов квантовой теории поля в применении к теории критических явлений при фазовых переходах II рода.

10.8 Теория критических явлений.

Отвлечемся на короткое время от задач квантовой теории поля и рассмотрим один из самых ярких примеров применения соответствующих методов в задачах статистической физики. Речь пойдет о критических явлениях вблизи точки фазового перехода II рода. Эта проблема в течение длительного времени не поддавалась решению. Суть ее известна — в достаточно узкой (критической) области температур вблизи температуры перехода T_c критические индексы, описывающие особенности физических величин в точке перехода *не описываются* общей теорией Ландау [35]. Причина этого также хорошо известна — вблизи точки перехода в системе развиваются мощные *флуктуации* параметра порядка, которые *сильно* взаимодействуют между собой [14, 35]. Существенный прогресс теории был связан с возникновением важной концепции масштабной инвариантности или *скэйлинга* [14, 39]. Однако обоснование этой концепции и расчет величины критических индексов потребовали развития методов, целиком основанных на аппарате квантовой теории поля, что и привело к созданию современной флуктуационной теории фазовых переходов [14,15,39]. Достаточно подробное изложение этой теории потребовало бы отдельного курса лекций. Здесь мы дадим предельно сжатое изложение лишь основных идей и ряда результатов, хорошо иллюстрирующих не раз упоминавшуюся глубокую аналогию задач квантовой теории поля и статистической физики. При этом будут опускаться многие существенные детали вычислений.

Запишем функционал свободной энергии теории Ландау в стандартном виде [14, 15, 39][9]:

$$\frac{1}{T}F[\phi(r)] = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[(\nabla\phi_j)^2 + \tau\phi_j^2\right] + \frac{1}{8}g\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_j^2\right)^2 \right\}, \qquad (10.160)$$

где T — температура, а параметр $\tau = \frac{T-T_c}{T_c}$ задает близость системы к точке фазового перехода. Мы ограничимся рассмотрением только области температур $T > T_c$

[9] Сразу ведем рассмотрение в пространстве произвольно размерности d, имея в виду существенную зависимость критических явлений от размерности пространства [14, 35].

(симметричная фаза). Параметр порядка ϕ_j представляет собой n-компонентный вектор в некотором "изотопическом" пространстве с размерностью n. Выражение (10.160) является весьма общим. Фактически речь идет о $O(n)$-симметричной (изотропной) модели фазового перехода, описывающей целый ряд реальных систем. Случай $n = 1$ соответствует модели Изинга, $n = 2$ соответствует XY-модели (сверхтекучесть, сверхпроводимость), $n = 3$ описывает изотропный гейзенберговский ферромагнетик и т. д. [14, 39].

В рамках теории Ландау, пренебрегающей флуктуациями параметра порядка (теория самосогласованного или "молекулярного" поля), величина $\phi = 0$ при $T > T_c$ [35]. Однако и при $T > T_c$ в системе могут флуктуационно возникать области с $\phi(r) \neq 0$. Вероятность таких флуктуаций определяется [14, 35] как:

$$\mathcal{P}[\phi(r)] = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\frac{1}{T} F[\phi(r)]\right\}, \tag{10.161}$$

где статистическая сумма Z определяется функциональным интегралом:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi(r) \exp\left\{-\frac{1}{T} F[\phi(r)]\right\}. \tag{10.162}$$

Свободная энергия системы в целом при этом равна:

$$F = -T \ln Z. \tag{10.163}$$

Корреляционная функция параметра порядка определяется как:

$$G_{jl}(r, r') = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi(r) \phi_j(r) \phi_l(r') \exp\left\{-\frac{1}{T} F[\phi(r)]\right\} \equiv \langle \phi_j(r) \phi_l(r') \rangle. \tag{10.164}$$

Аналогия с рассмотрением предыдущих разделов очевидна — теория критических явлений эквивалентна *евклидовой* квантовой теории n-компонентного скалярного поля в d-мерном пространстве. Выражение (10.164) является просто пропагатором (функций Грина, 2-точечной функцией) такой теории поля. В простейшем варианте гауссовой модели критических явлений мы уже сталкивались с такой теорией в связи с (10.28).

Теория возмущений по константе взаимодействия флуктуаций g строится вполне аналогично тому, как это было сделано выше для теории $g\varphi^4$ с однокомпонентным скалярным полем. Свободная функция Грина совпадает с коррелятором Орнштейна – Цернике (ср.(10.27)):

$$G_{0jl}(p) = \frac{\delta_{jl}}{p^2 + \tau}. \tag{10.165}$$

Корреляционная функция взаимодействующих флуктуаций определяется уравнением Дайсона:

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - \Sigma(p), \tag{10.166}$$

где собственно-энергетическая часть $\Sigma(p)$ представляется графиками Рис. 10.28. Вершинная часть (полная "четыреххвостка") определяет 4-точечный коррелятор $\langle \phi_i(r_1) \phi_j(r_2) \phi_l(r_3) \phi_m(r_4) \rangle$ и т. д.

Нетривиальная физика критических явлений связана с взаимодействием флуктуаций. Рассмотрим первые поправки теории возмущений к "затравочному" взаимодействию, определяемому константой g. На Рис. 10.29 изображены графики $\sim g^2$, со-

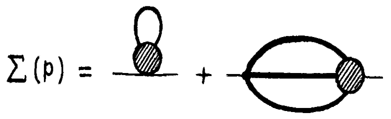


Рис. 10.28:

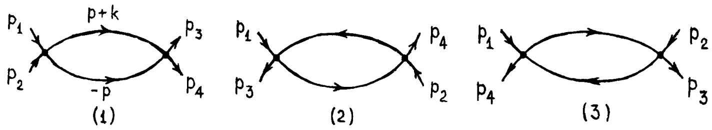


Рис. 10.29:

ответствующие трем кросс-каналам двухчастичного рассеяния, определяемым тремя суммарными импульсами[10]:

1. $p_1 + p_2$,
2. $p_1 - p_3$,
3. $p_1 - p_4$.

Естественно, имеется общий закон сохранения:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \,. \tag{10.167}$$

В задаче с n-компонентным полем удобно воспользоваться симметризованной (по “изотопическим” индексам) записью “затравочного” взаимодействия:

$$\bullet = g(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \equiv gI_{ijkl} \,. \tag{10.168}$$

Тогда член взаимодействия в (10.160) $\sim I_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l$, где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

Для нахождения полной вершины двухчастичного рассеяния нужно просуммировать все графики типа показанных на Рис. 10.30. Естественно, что в общем виде эта задача не решается. Однако, можно провести некоторую топологическую классификацию диаграмм, которая позволяет сформулировать общую систему, так называемых “паркетных”, интегральных уравнений, которая определяет полную вершину взаимодействия[11]. Ясно, что полную вершину Γ можно представить в виде:

$$\Gamma = R + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \,, \tag{10.169}$$

где блоки $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ построены из диаграмм, которые можно разрезать по двум линиям в каналах 1,2,3, а блок R состоит из всех диаграмм, которые нельзя разрезать ни по одному из этих каналов. Тогда для блоков $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ можно составить графические уравнения, показанные на Рис. 10.31. В этих уравнениях выделены блоки:

[10] Стрелки на линиях определяют направления входящих и выходящих импульсов.
[11] И.Т. Дятлов, В.В. Судаков, К.А. Тер-Мартиросян. ЖЭТФ **32**, 767 (1957).

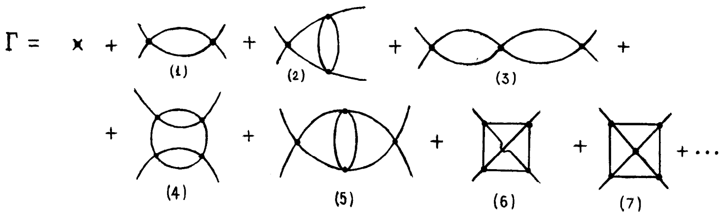


Рис. 10.30:

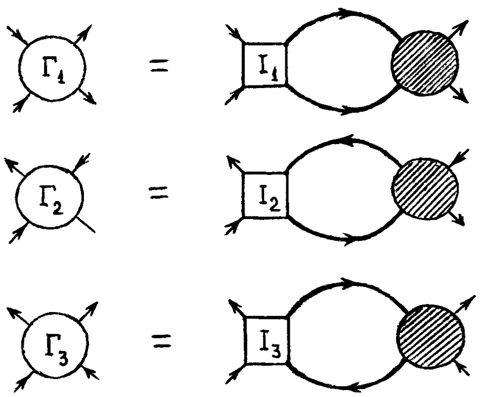


Рис. 10.31:

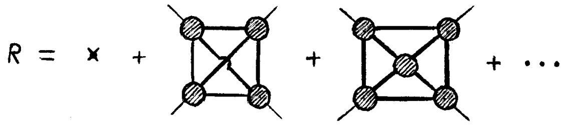


Рис. 10.32:

$$I_i = R + \sum_{j\neq i} \Gamma_j \,, \tag{10.170}$$

неразрезаемые по двум линиям в канале i. Структура диаграмм, определяющих блок R ясна из диаграмм, показанных на Рис. 10.32.

Полученная система интегральных уравнений очень сложна. Тем не менее существует ситуация, когда она решается достаточно просто. Речь идет о так называемом приближении "главных логарифмов". Чтобы понять основную идею, оценим величину диаграммы 1 на Рис. 10.29[12]. В аналитическом виде этот график определяется интегралом:

$$g^2(n+8)\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+\tau}\frac{1}{(p+k)^2+\tau} \,. \tag{10.171}$$

Происхождение множителя $n+8$ связано с произведением двух факторов (10.168), стоящих в вершинах:

$$I_{ijmn}I_{mnkl} + I_{ikmn}I_{mnjl} + I_{ilmn}I_{mnjk} = (n+8)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \,. \tag{10.172}$$

Рассмотрим теперь нашу теорию в четырехмерном пространстве $d=4$. Тогда имеем следующую оценку интеграла:

$$\int d^4p \frac{1}{p^2+\tau}\frac{1}{(p+k)^2+\tau} \sim \int\limits_{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} \frac{dpp^3}{p^4} \sim \int\limits_{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} \frac{dp}{p} \sim \ln\frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})} \,, \tag{10.173}$$

где ввели параметр обрезания $\Lambda \sim \frac{1}{a}$. Здесь, в отличие от квантовой теории поля, нет проблем с логарифмической расходимостью на верхнем пределе — разложение Ландау (10.160) применимо только на масштабах длины, существенно превышающих межатомное расстояние, флуктуаций параметра порядка с меньшими длинами волн просто нет. Величина a играет роль "минимальной длины", отсутствующей в квантовой теории поля. Тем не менее, факт логарифмической расходимости (10.173) очень важен. Этот логарифм велик в интересующей нас области параметров, вблизи точки фазового перехода, когда речь идет о $k, \sqrt{\tau} \ll \Lambda$. Существенна "инфракрасная" расходимость при τ или k стремящихся к нулю! В самом деле, с точностью до членов второго порядка по g, мы теперь имеем:

$$\Gamma(k) \approx g - g^2(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})} + \dots \,. \tag{10.174}$$

Видим, что первая поправка к вершине взаимодействия при $\tau \to 0$, $k \to 0$ может существенно превышать затравочную константу g — взаимодействие флуктуаций растет по мере приближения системы к точке перехода. В этом и есть проблема! Нужно

[12]В дальнейшем мы, по большей части, опускаем несущественные численные множители типа факторов симметрии и т. п.

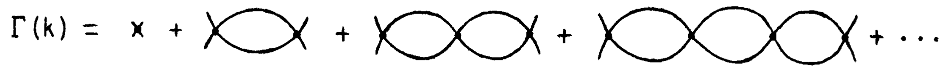


Рис. 10.33:

суммировать все существенные поправки, а это не просто сделать. Для пространства $d = 3$ задача вообще кажется безнадежной, однако для $d = 4$, благодаря относительно слабой логарифмической расходимости, можно провести определенный отбор графиков, соответствующий упомянутому приближению "главных логарифмов". Дело в том, что логарифм у нас появляется от интегрирования по импульсам в петлевом графике. Поэтому в высших порядках будут возникать логарифмы в более высокой степени, причем эта степень равна числу петель в соответствующем графике. Например, аналогичная оценка графиков 2 и 3 на Рис. 10.30 дает для них величину $\sim g^3 \ln^2 \frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}$, а для графика 4 получаем $\sim g^4 \ln^3 \frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}$. В тоже время оценка графика 6 дает $\sim g^4 \ln \frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}$, а для графика 7 имеем $\sim g^5 \ln \frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}$, что заведомо меньше вкладов 2,3,4 в силу предположения слабости исходного взаимодействия $g \ll 1$. Поэтому можно ограничиться "главными логарифмами", т.е. отбирать только те графики, у которых степень логарифма только на единицу меньше степени константы связи g, на Рис. 10.30 это графики 2,3,4. Их топология ясна – они содержат максимально нарастающее число петель типа Рис. 10.29. Именно такой набор графиков чаще всего называют "паркетом". "Паркет" учитывает все поправки к вершине $\sim g^n \ln^n$, но пренебрегает всеми вкладами $\sim g^{n+k} \ln^n$. Тем более можно пренебречь вкладами без логарифмов. В частности, введенный выше блок R сводится тогда лишь к первому члену Рис. 10.32, т.е. просто к затравочному взаимодействию g. В таком приближении "паркетные" уравнения Рис. 10.31 удается решить. Процедура решения, однако, довольно сложна и мы не будем на ней останавливаться. Дело в том, что правильный ответ для полной вершины получается и при более "наивном" рассмотрении, которым мы и воспользуемся.

Рассмотрим простую последовательность графиков, показанную на Рис. 10.33. Это обычная прогрессия, которая легко суммируется (в отличие от двумерного "паркета"):

$$\begin{aligned}\Gamma(k) &= g - g^2(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})} + g^3(n+8)^2\ln^2\frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})} + \ldots \\ &= \frac{g}{1 + g(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}}. \qquad (10.175)\end{aligned}$$

Решение "паркетных" уравнений дает точно такой же ответ (если внешние импульсы вершины одного порядка)[13]. Дело в том, что "паркетные" уравнения для такой вершины сводятся к дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{d\Gamma(s)}{ds} = -(n+8)\Gamma^2(s) \qquad (10.176)$$

[13]Совпадение с правильным ответом здесь является довольно случайным и, конечно же, не отменяет необходимости более строгого решения, впервые выполненного в цитировавшейся выше работе Дятлова, Судакова и Тер-Мартиросяна.

с граничным условием $\Gamma(s) \to g$ при $s \to 0$, и введена логарифмическая переменная:

$$s = \ln \frac{\Lambda}{\mathrm{Max}(k, \sqrt{\tau})}\,. \tag{10.177}$$

Интегрирование (10.176) тогда дает:

$$\Gamma(s) = \frac{g}{1 + g(n+8)s}\,, \tag{10.178}$$

что совпадает с (10.175). Фактически, этот результат вполне аналогичен выражениям для физического заряда, полученным в Главе 8 при изучении асимптотических свойств квантовой электродинамики и ведущих к проблеме "московского нуля"[14].

Рассмотрим случай $k = 0$ (взаимодействие флуктуаций с предельно длинными волнами). Тогда (10.175) сводится к:

$$\Gamma(k=0) = \frac{g}{1 + g(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau}}} \to \frac{1}{(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau}}} \qquad \text{при} \quad \tau \to 0\,. \tag{10.179}$$

Видим, что при приближении к точке фазового перехода зависимость от "затравочной" константы связи g пропадает, а само эффективное взаимодействие *стремится к нулю* (типичный "нуль-заряд"!) [15]. Но здесь это не вызывает проблем, как в релятивистской теории поля, а наоборот, полностью проясняет ситуацию. В самом деле, результат (10.179) означает эффективное ослабление взаимодействия флуктуаций по мере приближения к точке перехода. Можно непосредственно рассчитать влияние такого слабого взаимодействия на все физические величины, имеющие особенность в точке перехода и убедиться, что оно приводит только к незначительным (логарифмическим) температурным поправкам к критическому поведению, следующему из теории Ландау. Эти логарифмические поправки не меняют *степени* температурных особенностей, т.е. критические индексы. Поэтому для $d = 4$ критические индексы просто равны критическим индексам теории Ландау!

Отступление: определение критических индексов.

В теории критических явлений вводится следующий стандартный набор характеристик системы и их критических индексов, определяющих сингулярности этих величин в точке фазового перехода в зависимости от параметра $\tau = \frac{T-T_c}{T_c} \to 0$.

Параметр порядка:

$$\bar{\varphi} \sim |\tau|^{\beta}\,, \qquad T \to T_c - 0\,, \tag{10.180}$$

$$\bar{\varphi} \sim h^{\frac{1}{\delta}}\,, \qquad T = T_c\,, \tag{10.181}$$

где h — внешнее поле, сопряженное параметру порядка. Восприимчивость:

$$\chi \sim \begin{cases} \tau^{-\gamma}\,, & T \to T_c + 0\,, \\ |\tau|^{-\gamma'}\,. & T \to T_c - 0\,. \end{cases} \tag{10.182}$$

Корреляционная функция параметра порядка (d — размерность пространства):

$$G(r) \sim \frac{\exp(-r/\xi)}{r^{d-(2-\eta)}}\,, \tag{10.183}$$

---

[14] Результат типа (10.175) впервые был получен из "паркетных" уравнений также при исследовании асимптотических свойств в теории релятивистского скалярного поля $g\varphi^4$. В теории критический явлений при $d = 4$ он был использован существенно позже Ларкиным и Хмельницким.

[15] Подчеркнем, что в теории критических явлений имеем $g > 0$, так что никаких проблем, типа "ложных" полюсов здесь не возникает.

где корреляционная длина:

$$\xi \sim \begin{cases} \tau^{-\nu}, & T \to T_c + 0, \\ |\tau|^{-\nu'}, & T \to T_c - 0. \end{cases} \tag{10.184}$$

В самой критической точке:

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-(2-\eta)}}, \tag{10.185}$$

$$G(p) \sim \frac{1}{k^{2-\eta}}. \tag{10.186}$$

Аналогичным образом вводится критический индекс теплоемкости α:

$$C(\tau, h=0) = \frac{A^+}{\alpha}[\tau^{-\alpha} - 1] + B^+, \qquad T \to T_c + 0, \tag{10.187}$$

$$C(\tau, h=0) = \frac{A^-}{\alpha'}[|\tau|^{-\alpha'} - 1] + B^-, \qquad T \to T_c - 0, \tag{10.188}$$

при этом $\alpha = 0$ соответствует логарифмической особенности.

Важно отметить, что полученные в рамках теории Ландау (или метода молекулярного поля) стандартные значения критических индексов [35]:

$$\begin{aligned} &\nu = \frac{1}{2}, \qquad \gamma = 1, \qquad \eta = 0, \\ &\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{2}, \qquad \delta = 3 \end{aligned} \tag{10.189}$$

удовлетворяют стандартным скейлинговым соотношениям [14, 35]

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\gamma}{2-\eta}, \\ \alpha &= 2 - \nu d, \\ \beta &= \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta), \end{aligned} \tag{10.190}$$

если в них положить размерность пространства $d = 4$. В этом смысле можно сказать, что теория Ландау дает правильное описание критических явлений для размерности пространства $d = 4$. Это же утверждение остается справедливым и для всех $d > 4$ – нетрудно видеть, что поправки типа (10.171) не приводят ни к каким расходимостям для $d > 4$, а потому малы в силу предположения $g \ll 1$. Размерность пространства $d = 4$ называется *верхней критической размерностью* теории.

Для физически интересного случая $d = 3$ не удается провести отбор доминирующих диаграмм в ряду теории возмущений, все диаграммы оказываются одного порядка. В этом и была основная трудность при построении теории критических явлений. Вильсон предложил оригинальный метод расчета критических индексов, основанный на теории возмущения по искусственно определенному малому параметру $\varepsilon = 4 - d$ — отклонению от верхней критической размерности пространства $d = 4$, при которой индексы совпадают с предсказываемыми теорией среднего поля (ε-разложение). Идея введения "дробной" размерности пространства довольно проста. Во всех фейнмановских интегралах выше фигурировало интегрирование по объему d-мерного импульсного пространства, элемент объема которого в сферических координатах, для подинтегральной функции, зависящей только от модуля импульса, записывается в виде:

$$d^d p = \Omega_d p^{d-1} dp, \tag{10.191}$$

где Ω_d — поверхность единичной d-мерной сферы:

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \tag{10.192}$$

где использовано обычное обозначение Г-функции. В этом выражении уже можно считать d произвольным (нецелым) вещественным параметром. Тогда можно записать:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} ... = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int dp\, p^{d-1} ... = K_d \int dp\, p^{d-1} ... , \tag{10.193}$$

где введено стандартное обозначение:

$$K_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} \left[\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \right]^{-1}. \tag{10.194}$$

В частности $K_4 = (8\pi^2)^{-1}$. Выше, при оценке (10.173) эта константа просто опускалась. Дальше мы также не будем ее выписывать.

Проведем теперь снова оценку вклада диаграммы 1 с Рис. 10.29, имея в виду пространство с $d = 4 - \varepsilon$. Вместо (10.173) имеем:

$$g^2(n+8)K_d \int\limits_{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} dp\, p^{d-1} \frac{1}{p^4} \sim g^2(n+8) \int\limits_{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} dp\, p^{d-5} \sim$$
$$\sim g^2(n+8) \frac{1}{d-4} p^{d-4} \Big|_{\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} \sim g^2(n+8) \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau}) \right]^{-\varepsilon} - \Lambda^{-\varepsilon} \right\}. \tag{10.195}$$

Все изменение по сравнению со случаем $d = 4$ состоит в том, что вместо логарифма (10.173) возникает “логарифмическая переменная”:

$$s = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[\mathrm{Max}(k,\sqrt{\tau}) \right]^{-\varepsilon} - \Lambda^{-\varepsilon} \right\}, \tag{10.196}$$

переходящая в тот же логарифм в пределе $\varepsilon \to 0$. Поэтому мы снова, при решении “паркетных” уравнений, можем воспользоваться приближением “главных логарифмов”, а дифференциальное уравнение для вершины (10.176) сохраняет свой вид. Его решение (10.178) для случая $k = 0$ в пространстве $d = 4 - \varepsilon$ записывается теперь как:

$$\Gamma(k=0) = \frac{g}{1 + g(n+8)\frac{1}{\varepsilon}[\tau^{-\varepsilon/2} - \Lambda^{-\varepsilon}]} \to$$
$$\to \frac{1}{(n+8)\frac{1}{\varepsilon \tau^{\varepsilon/2}}} = \frac{\varepsilon \tau^{\varepsilon/2}}{(n+8)} \qquad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{10.197}$$

Видим, что эффективное взаимодействие флуктуаций оказывается малым по введенному нами искусственному параметру $\varepsilon = 4 - d$.

Уравнение (10.176) можно также рассматривать как дифференциальное уравнение *по параметру обрезания* Λ, входящему в переменную s (10.196), (10.177): $ds = \Lambda^{-(1+\varepsilon)} d\Lambda$. Это уравнение тогда описывает перенормировку вершины Γ при инфинитезимальном преобразовании параметра обрезания $\Lambda \to \Lambda' = \Lambda + d\Lambda$. По

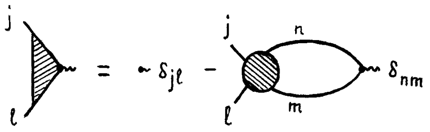


Рис. 10.34:

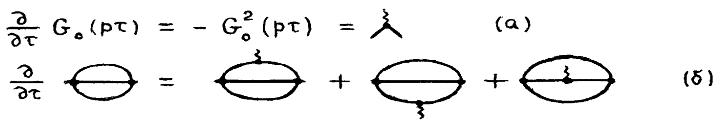


Рис. 10.35:

сути дела это есть дифференциальное уравнение ренорм-группы (группы перенормировок) Гелл-Манна и Лоу, уже известное нам из квантовой электродинамики. Идеология ренорм-группы является основой современной теории фазовых переходов [14, 15, 40].

Перейдем к схематическому описанию расчета критических индексов. Рассмотрим корреляционную функцию параметра порядка (функцию Грина) $G(p\tau)$. Имеем, по определению:

$$\begin{aligned} G(p=0\tau) = \chi(\tau) \sim \tau^{-\gamma}\,, \\ G(p\tau=0) \sim p^{-2+\eta}\,. \end{aligned} \tag{10.198}$$

Ограничимся определением именно индексов γ и η, поскольку остальные можно определить, пользуясь скэйлинговыми соотношениями типа (10.191) [14, 39].

В рассматриваемой теории можно доказать два тождества Уорда:

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha} G^{-1}_{jl}(p\tau=0) = 2p_\alpha\delta_{jl} - 2\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}p'_\alpha G^2_{mm}(p'0)\Gamma_{jlmm}(ppp'p')\,, \tag{10.199}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G^{-1}_{jl}(p\tau=0) = \delta_{jl} - \int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d} G^2_{mm}(p'0)\Gamma_{jlmm}(ppp'p')\,. \tag{10.200}$$

Введя "треугольную" вершину $\mathcal{T}_{jl} = \frac{\partial}{\partial\tau}G^{-1}_{jl}(p\tau=0)$, можно второе из этих тождеств изобразить графически, как показано на Рис. 10.34. Это тождество можно вывести последовательным дифференцированием графиков для для собственно - энергетической части (обратного пропагатора), как это показано схематически на Рис. 10.35. Дифференцирование обратного свободного пропагатора (10.165) (Рис. 10.35(a)) дает первое слагаемое, а дифференцирование простейшего вклада в собственно - энергетическую часть (Рис. 10.35(a)) дает вклады низшего порядка для вершины с двумя соединенными "хвостами", т.е. низший вклад во второе слагаемое. Полный ряд "продифференцированных" графиков собирается в полную вершину. Тождество (10.199) выводится аналогично, дифференцированием по p_α.

Подставим в (10.199) "паркетное" решение для $\Gamma(ppp'p')$. Мы его не находили, но достаточно сказать, что оно (подобно выписанному выше решению для $\Gamma(k)$) зависит

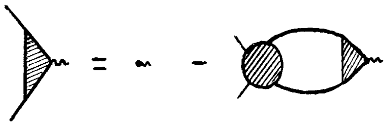


Рис. 10.36:

только от модулей $|p|$ и $|p'|$, так что интеграл в правой части (10.199) обращается в нуль при интегрировании по полярному углу. Поэтому имеем просто:

$$\frac{\partial G^{-1}(p\tau = 0)}{\partial p_\alpha} = 2p_\alpha \,, \tag{10.201}$$

так что

$$G(p\tau = 0) \sim \frac{1}{p^2} \,, \tag{10.202}$$

что дает значение индекса $\eta = 0$.

Воспользуемся теперь тождеством (10.200). В "паркетном" приближении можно определенным образом пересуммировать графики так, что это тождество превращается в интегральное уравнение для "треугольной" вершины, показанное на Рис. 10.36. С использованием логарифмических переменных это уравнение записывается как:

$$\mathcal{T}_{jl}(s) = \delta_{jl} - \int\limits_0^s dt \Gamma_{jlmn}(t)\mathcal{T}_{mn}(t) \,. \tag{10.203}$$

Используя $\mathcal{T}_{jl} = \mathcal{T}\delta_{jl}$ и (10.168) получаем:

$$I_{jlmn}\delta_{mn} = (n+2)\delta_{jl} \tag{10.204}$$

и (10.203) сводится к:

$$\mathcal{T}(s) = 1 - (n+2)\int\limits_0^s dt \Gamma(t)\mathcal{T}(t) \,. \tag{10.205}$$

Дифференцируя по s, сводим это интегральное уравнение к дифференциальному:

$$\frac{d\mathcal{T}(s)}{ds} = -(n+2)\Gamma(s)\mathcal{T}(s) \tag{10.206}$$

с граничным условием $\mathcal{T}(s=0) = 1$. Отсюда находим:

$$\mathcal{T}(s) = \exp\left\{ -(n+2)\int\limits_0^s dt \Gamma(t) \right\} \,. \tag{10.207}$$

Используя здесь (10.178), получаем окончательно:

$$\mathcal{T}(s) = [1 + g(n+8)s]^{-\frac{n+2}{n+8}} \,. \tag{10.208}$$

Рис. 10.37:

Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G^{-1}(p=0\tau)=\frac{\partial\chi^{-1}(\tau)}{\partial\tau}=[1+g(n+8)s]^{-\frac{n+2}{n+8}} \tag{10.209}$$

Интегрируя с требуемой точностью, получаем:

$$\chi(\tau)\approx\frac{1}{\tau}\left\{1+g(n+8)\frac{1}{\varepsilon}[\tau^{-\varepsilon/2}-\Lambda^{-\varepsilon}]\right\}^{\frac{n+2}{n+8}}\to\tau^{-(1+\frac{\varepsilon}{2}\frac{n+2}{n+8})} \tag{10.210}$$

при $\tau\to 0$. Соответственно, для критического индекса восприимчивости находим:

$$\gamma=1+\frac{n+2}{n+8}\frac{\varepsilon}{2}+\dots\,. \tag{10.211}$$

Это выражение, также как и полученный выше результат $\eta=0$, справедливы с точностью до членов первого порядка по ε, и представляют собой первые члены ε-разложения критических индексов. Достаточно громоздкий счет позволяет получить поправки высших порядков.

Замечательным результатом современной теории, следующим из этих формул, является утверждение об *универсальности* критического поведения — величина критических индексов в самых различных физических системах определяется только размерностью пространства (системы), в котором изучается фазовый переход, и числом компонент n параметра порядка (т.е., фактически, типом симметрии, нарушаемой при фазовом переходе).

В разложении (10.160), вообще говоря, присутствуют и более высокие степени параметра порядка. Возникает вопрос об их роли в критическом поведении. Почему мы ограничились только $g\phi^4$? Пусть имеется вклад $\lambda\phi^6$. К чему это приведет? Рассмотрим простейшую поправку к этому вкладу, изображаемую диаграммой на Рис. 10.37. По порядку величины она определяется интегралом:

$$\lambda^2\int d^3p_1\int d^3p_2\frac{1}{p_1^2p_2^2(p_1^2+p_2^2)}\sim\lambda^2\int\limits_{\sqrt{\tau}}^{\Lambda}dp_1\int\limits_{\sqrt{\tau}}^{\Lambda}dp_2\frac{p_1^2p_2^2}{p_1^2p_2^2(p_1^2+p_2^2)}\sim\lambda^2\ln\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau}}\,. \tag{10.212}$$

Для $d>3$ соответствующая поправка просто сходится (на нижнем пределе, при $\tau\to 0$), так что для $d=4-\varepsilon$ взаимодействие типа $\lambda\phi^6$ является *несущественным.* Аналогично дело обстоит и с членами разложения Ландау с более высокими степенями параметра порядка.

Приведем в заключение значения критических индексов с точностью до членов

Таблица 10.1: Критические индексы для модели с $n = 1$ (Изинг).

Индекс	Вильсон	Численный счет	Ландау
ν	0.626	0.642	0.5
η	0.037	0.055	0
γ	1.244	1.250	1
α	0.077	0.125	0
β	0.340	0.312	0.5
δ	4.460	5.15	3

$\sim \varepsilon^2$ в теории с n-компонентным параметром порядка [14, 15]:

$$\begin{aligned}
\gamma &= 1 + \frac{n+2}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+2}{n+8}\frac{n^2+22n+52}{(n+8)^2}\frac{\varepsilon^2}{4} + \ldots\,, \\
2\nu &= 1 + \frac{n+2}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+2}{n+8}\frac{n^2+23n+60}{(n+8)^2}\frac{\varepsilon^2}{4} + \ldots\,, \\
\eta &= \frac{n+2}{2(n+8)^2}\varepsilon^2 + \frac{n+2}{2(n+8)^2}\left[\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4}\right]\varepsilon^3 + \ldots\,, \\
\delta &= 3 + \varepsilon + \left[\frac{1}{2} - \frac{n+2}{(n+8)^2}\right]\varepsilon^2 + \ldots\,, \\
\beta &= \frac{1}{2} - \frac{3}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+8)^3}\varepsilon^2 + \ldots\,, \\
\alpha &= \frac{4-n}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \ldots\,.
\end{aligned} \tag{10.213}$$

Интересно сравнить значения индексов, полученные по этим формулам для $d = 3$ $(\varepsilon = 1)$ и $n = 1$ (изинговский случай), в сравнении с результатами численных расчетов (высокотемпературные разложения) для трехмерной модели Изинга. В приводимой таблице даны также значения индексов теории среднего поля (Ландау). Видно, что ε-разложение обеспечивает неплохое согласие с результатами численного анализа [16].

Современные методы расчета, существенно улучшающие результаты простейшего ε-разложения за счет учета вкладов высших порядков, дают значения индексов, практически совпадающие с результатами численных расчетов и эксперимента [40].

10.9 Фермионы и функциональные методы.

Обобщение функциональных методов на фермиевские поля встречает определенные затруднения. В рассматривавшихся выше функциональных интегралах для бозе-полей велось интегрирование по всем возможным классическим (c-числовым) полевым конфигурациям. Для фермиевских полей понятие классического предела от-

[16] Другой достаточно эффективный метод расчета критических индексов может быть основан на их разложении в ряд по обратным степеням числа компонент параметра порядка $1/n$ [14, 15], поскольку при $n \to \infty$, как можно показать, критические индексы также определяются приближением самосогласованного поля (теорией Ландау). Метод вычислений основан на отборе графиков с замкнутыми петлями, поскольку каждая петля дает вклад $\sim n$.

сутствует и неясно, на первый взгляд, о каких возможных полевых конфигурациях тут может вообще идти речь. Переход к классическому пределу связан, как известно, с пределом $\hbar \to 0$. При этом нетривиальные правые части коммутаторов всех бозевских полевых операторов, рассмотренных в Главе 2, обращаются в нуль, а сами операторы переходят в c-числа. Для фермиевских полей, как мы видели там же, квантование осуществляется с помощью *антикоммутаторов*, так что при $\hbar \to 0$ получаем для фермиевских полей просто некоторые антикоммутирующие величины, смысл которых, с точки зрения "здравого смысла" не вполне ясен. Однако именно на этом пути и лежит решение проблемы. Такие величины были введены в математику в середине XIX века Грассманом и называются *грассмановыми переменными*. Функциональная формулировка квантовой теории поля для фермионов, основанная на использовании грассмановых переменных, была дана Березиным, который впервые ввел понятие интегрирования по этим переменным [41].

Рассмотрим сначала соответствующие математические определения. Генераторы C_i n-мерной грассмановой алгебры удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{C_i, C_j\} \equiv C_iC_j + C_jC_i = 0\,, \tag{10.214}$$

где $i = 1, 2, ..., n$. В частности:

$$C_i^2 = 0\,. \tag{10.215}$$

Поэтому разложение произвольной функции $f(C_i)$ в ряд может содержать только конечное число членов. Например, для одномерной алгебры имеем:

$$f(C) = a + bC\,, \tag{10.216}$$

где a и b — обычные числа. Квадратичный и следующие члены разложения равны нулю.

Для общего n-мерного случая аналог (10.216) имеет вид:

$$f(C) = P_0 + P_1^iC_i + P_2^{ij}C_iC_j + ... + P_nC_1C_2...C_n\,, \tag{10.217}$$

где каждый индекс суммирования принимает значения от 1 до n, а коэффициенты P антисимметричны относительно перестановки любой пары индексов $i, j, \ldots$. Разложение обрывается благодаря (10.214).

Рассмотрим понятие дифференцирования по грассмановым переменным. Существует два типа такого дифференцирования — левое и правое. Левая производная произведения C_1C_2 определяется как:

$$\frac{\partial^L}{\partial C_i}(C_1C_2) = \delta_{i1}C_2 - \delta_{i2}C_1\,. \tag{10.218}$$

Правая производная, соответственно, равна:

$$\frac{\partial^R}{\partial C_i}(C_1C_2) = \delta_{i2}C_1 - \delta_{i1}C_2\,. \tag{10.219}$$

Тогда выполняются равенства:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, C_j\right\} = \delta_{ij}\,, \tag{10.220}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j}\right\} = 0\,. \tag{10.221}$$

В частности, для одномерной алгебры:

$$\left\{\frac{d}{dC}, C\right\} = 1 \tag{10.222}$$

и всегда

$$\left(\frac{\partial}{\partial C_i}\right)^2 = 0\,. \tag{10.223}$$

Все эти соотношения имеют довольно естественный вид.

Определение интегрирования по грассмановым переменным, напротив, вводится достаточно формальным образом. В частности, эту операцию нельзя ввести как обратную дифференцированию. Ее можно определить, тем не менее, так, чтобы она обладала некоторыми общими свойствами, интуитивно присущими обычному определению интеграла. Например, можно потребовать, чтобы интеграл был инвариантен при сдвиге переменной интегрирования на константу:

$$\int dC f(C) = \int dC f(C+\alpha)\,. \tag{10.224}$$

Это всегда так с обычным интегралом в бесконечных пределах, но надо ясно понимать, что в данном случае ничего общего с обычным интегралом нет (кроме обозначения $\int$), нет тут и никаких пределов интегрирования. Используя явный вид $f(C)$ (10.216), получаем:

$$\int dC(a+bC) = \int dC[a+b(C+\alpha)]\,, \qquad \text{так что}$$

$$\int dC\, bC = \int dC\, b(C+\alpha)\,, \tag{10.225}$$

откуда следует:

$$\int dC\, b\alpha = 0 \tag{10.226}$$

или, ввиду произвольности $b\alpha$,

$$\int dC = 0\,. \tag{10.227}$$

Здесь α — другой элемент алгебры Грассмана, не зависящий от C и антикоммутирующий с C. Остающийся еще интеграл $\int dC\,C$ можно просто *доопределить* условием:

$$\int dC\,C = 1\,. \tag{10.228}$$

Условия (10.227) и (10.228) полностью определяют операцию интегрирования.

Естественно, что так определенное интегрирование не имеет никакого обычного геометрического смысла. Более того, в случае одномерной алгебры Грассмана мы имеем $\frac{df}{dC} = b$, но и $\int dC f(C) = b$, так что операция интегрирования действует на функцию так же, как и операция дифференцирования!

В n-мерном случае полагаем:

$$\int dC_i = 0\,, \qquad \int dC_i C_i = 1\,. \tag{10.229}$$

Пусть теперь η и $\bar{\eta}$ — независимые грассмановы переменные, так что:

$$\int d\eta = \int d\bar{\eta} = 0\,, \qquad \int d\eta\eta = \int d\bar{\eta}\bar{\eta} = 1\,. \tag{10.230}$$

Поскольку $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$, имеем:

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta\,, \tag{10.231}$$

так что получаем:

$$\int d\bar{\eta}d\eta\, e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta}d\eta - \int d\bar{\eta}d\eta\,\bar{\eta}\eta = 0 + \int d\bar{\eta}d\eta\,\eta\bar{\eta} = 1\,. \tag{10.232}$$

Найдем теперь обобщение этой формулы на случай большего числа измерений. Рассмотрим двумерный случай, вводя, для удобства, обозначения:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix}. \tag{10.233}$$

Показатель экспоненты $\bar{\eta}\eta$ (точнее $\bar{\eta}^T\eta$) имеет вид:

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2\,. \tag{10.234}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}(\bar{\eta}\eta)^2 &= (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2)(\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) = \\ &= \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_2\eta_2\bar{\eta}_1\eta_1 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2\,,\end{aligned} \tag{10.235}$$

где учли, что $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \bar{\eta}_1^2\bar{\eta}_2^2 = 0$. Более высокие степени $\bar{\eta}\eta$ равны нулю и мы, таким образом, получаем:

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2\,. \tag{10.236}$$

Применяя введенные выше правила интегрирования, видим, что:

$$\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_2 \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 = 1\,, \tag{10.237}$$

как и в одномерном случае. Проведем теперь замену переменных интегрирования:

$$\eta = M\alpha\,, \qquad \bar{\eta} = N\bar{\alpha}\,, \tag{10.238}$$

где M и N — матрицы 2×2, а α и $\bar{\alpha}$ — новые независимые грассмановы переменные. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\eta_1\eta_2 &= (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) = \\ &= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 = (\mathrm{Det}\,M)\alpha_1\alpha_2\,,\end{aligned} \tag{10.239}$$

где учли антикоммутативность грассмановых переменных. Чтобы сохранить правила интегрирования

$$\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1\eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1\alpha_2\,, \tag{10.240}$$

нужно потребовать:

$$d\eta_1 d\eta_2 = (\mathrm{Det}\,M)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2\,, \tag{10.241}$$

что отличается от обычного правила замены переменных степенью детерминанта. Учитывая

$$\bar{\eta}\eta = N\bar{\alpha}M\alpha = N\bar{\alpha}\alpha M^T = -\alpha M^T N\bar{\alpha} = \bar{\alpha}M^T N\alpha\,, \tag{10.242}$$

запишем (10.237) в виде:

$$(\mathrm{Det}\, MN)^{-1}\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}M^T N\alpha} = 1\,. \tag{10.243}$$

Поскольку $\mathrm{Det}\, MN = \mathrm{Det}\, M^T N$, отсюда следует общий результат:

$$\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = \mathrm{Det}\, A\,, \tag{10.244}$$

что представляет собой гауссов интеграл по грассмановым переменным.

Чтобы описывать фермиевские *поля* совершим теперь переход к бесконечномерной грассмановой алгебре, генераторы которой будем обозначать $C(x)$:

$$\{C(x), C(y)\} = 0\,, \tag{10.245}$$

$$\frac{\partial^{L,R}C(x)}{\partial C(y)} = \delta(x-y)\,, \tag{10.246}$$

$$\int dC(x) = 0\,, \qquad \int dC(x)C(x) = 1\,. \tag{10.247}$$

В результате у нас возникают функциональные интегралы по грассмановым (фермиевским) полям.

Лагранжиан Дирака, как известно, имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi\,. \tag{10.248}$$

Тогда нормированный производящий функционал для свободного поля Дирака имеет вид:

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int dx[\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]\right\}\,, \tag{10.249}$$

где нормировочный множитель

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[i\int dx\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)\right]\,. \tag{10.250}$$

Здесь мы ввели грассманов источник $\bar{\eta}(x)$ для поля $\psi(x)$ и $\eta(x)$ для поля $\bar{\psi}(x)$.

Для сокращения записи удобно ввести обозначение

$$S^{-1} = i\gamma^\mu\partial_\mu - m\,. \tag{10.251}$$

Тогда:

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[i\int dx(\bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right]\,. \tag{10.252}$$

Рассмотрим квадратичную форму:

$$Q(\psi,\bar{\psi}) = \bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\,. \tag{10.253}$$

Найдем значение ψ, которое ее "минимизирует" из условия:

$$\frac{\partial^L Q}{\partial\bar{\psi}} = S^{-1}\psi + \eta = 0\,, \qquad \frac{\partial^R Q}{\partial\psi} = \bar{\psi}S^{-1} + \bar{\eta} = 0\,, \tag{10.254}$$

что дает:

$$\psi_m = -S\eta\,, \qquad \bar{\psi}_m = -\bar{\eta}S\,, \tag{10.255}$$

где предположили существование оператора, обратного S^{-1}. В "минимуме" имеем:

$$Q = Q_m = Q(\psi_m,\bar{\psi}_m) = -\bar{\eta}S\eta\,. \tag{10.256}$$

Тогда нашу квадратичную форму можно представить в следующем виде:

$$Q = Q_m + (\bar{\psi}-\bar{\psi}_m)S^{-1}(\psi-\psi_m)\,. \tag{10.257}$$

Соответственно: [17]

$$\begin{aligned} Z_0[\eta,\bar{\eta}] &= \frac{1}{\mathcal{N}}\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int dx[Q_m + (\bar{\psi}-\bar{\psi}_m)S^{-1}(\psi-\psi_m)]\right\} = \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}}\exp\left[-i\int dx\int dy\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right]\mathrm{Det}(-iS^{-1})\,, \end{aligned} \tag{10.258}$$

где при получении последнего выражения мы вынесли множитель $\exp\left[i\int Q_m\right]$ за знак интеграла, поскольку Q_m не зависит от ψ и $\bar{\psi}$, и воспользовались очевидным функциональным обобщением (10.244):

$$\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi}A\psi} = \mathrm{Det}\,A\,. \tag{10.259}$$

Аналогичным образом можно показать, что $\mathcal{N} = \mathrm{Det}(-iS^{-1})$, так что окончательно получаем производящий функционал свободного дираковского поля в виде:

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \exp\left[-i\int dx\int dy\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right]\,. \tag{10.260}$$

Нетрудно убедиться, что оператор S действительно существует. Он имеет вид:

$$S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_F(x)\,, \tag{10.261}$$

где $\Delta_F(x)$ — хорошо известный нам фейнмановский пропагатор скалярного поля. В самом деле, используя (10.251) имеем:

$$S^{-1}S = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_F(x) = (-\Box - m^2)\Delta_F(x) = \delta(x)\,. \tag{10.262}$$

[17] Второе равенство в (10.258) представляет собой фермиевский аналог формулы (10.48) для комплексного бозонного поля.

Теперь можно определить свободный пропагатор дираковского поля как:

$$\tau(x,y) = -\left.\frac{\delta^2 Z_0[\eta,\bar\eta]}{\delta\eta(x)\delta\bar\eta(y)}\right|_{\eta=\bar\eta=0} =$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(y)}\left.\left\{-i\int dx\int dy\bar\eta(x)S(x-y)\eta(y)\right\}\right|_{\eta=\bar\eta=0} = iS(x-y)\,, \quad (10.263)$$

где мы использовали $\exp(-\bar\eta S\eta) = 1 - \bar\eta S\eta$.

Суммируем теперь формулы, относящиеся к свободным скалярному и спинорному полям. Для скалярного поля имеем:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 = -\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi\,. \quad (10.264)$$

Мы нашли выше

$$\tau(x,y) = i\Delta_F(x-y)\,, \quad (10.265)$$

где Δ_F — фейнмановский пропагатор, удовлетворяющий уравнению:

$$(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta(x-y)\,. \quad (10.266)$$

Для спинорного (дираковского) поля имеем:

$$\mathcal{L}_0 = i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi = \bar\psi S^{-1}\psi\,, \quad (10.267)$$

$$\tau(x,y) = iS(x-y)\,. \quad (10.268)$$

В обоих случаях видим, что пропагатор есть оператор, обратный коэффициенту при квадратичном члене в лагранжиане. Можно вообще *принять это в качестве определения пропагатора* для произвольного поля.

Производящий функционал для взаимодействующих ферми – полей может быть определен вполне аналогично бозевскому случаю:

$$Z[\eta,\bar\eta] = \exp\left[i\int dx\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\right)\right] Z_0[\eta,\bar\eta]\,. \quad (10.269)$$

Отсюда можно вывести все правила диаграммной техники для фермиевских полей, вполне аналогично тому, как это было сделано выше в скалярном случае. Единственной существенной особенностью, связанной с грассмановой природой фермиевских полей, является необходимость сопоставления дополнительного множителя (-1), каждой фермионной петле[18]. Мы не будем рассматривать подробно формулировку диаграммных правил в моделях взаимодействия одних только фермионов, поскольку в четырехмерном пространстве Минковского все они, к сожалению, являются неперенормируемыми.

В качестве примера модели взаимодействий фермионов, которая реально применяется для описания процессов с элементарными частицами, приведем так называемое 4-фермионное взаимодействие Ферми. Оно может быть успешно использовано для описания низкоэнергетических процессов

[18]Нетрудно показать [8], что происхождение этого множителя связано с функциональным обобщением (10.221), которое имеет вид: $\frac{\delta^2}{\delta\eta(x)\delta\eta(y)} = -\frac{\delta^2}{\delta\eta(y)\delta\eta(x)}$.

взаимодействия лептонов. Соответствующий лагранжиан взаимодействия (для двух первых поколений лептонов) записывается в следующем стандартном виде [27]:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_w^+ j_w \,, \tag{10.270}$$

где j_w — оператор слабого тока лептонов:

$$\begin{aligned} j_w^\alpha &= \bar{\psi}_e \Gamma^\alpha \psi_{\nu e} + \bar{\psi}_\mu \Gamma^\alpha \psi_{\nu\mu} \,, \\ j_w^{\alpha+} &= \bar{\psi}_{\nu e} \Gamma^\alpha \psi_e + \bar{\psi}_{\nu\mu} \Gamma^\alpha \psi_\mu \,, \end{aligned} \tag{10.271}$$

где

$$\Gamma^\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\alpha(1+\gamma^5) \,, \tag{10.272}$$

а нижние индексы полевых операторов обозначают соответствующие частицы (электрон e, мюон μ, электронное нейтрино ν_e, мюонное нейтрино ν_μ).

Из простейшего размерного анализа ясно, что этот лагранжиан соответствует неперенормируемой теории — константа связи G является размерной величиной, с размерностью квадрата длины или обратного квадрата массы. Ее численное значение, хорошо известное из обработки данных по низкоэнергетическим процессам (описываемым первым порядком теории возмущений по G) с лептонами, таким, как распад мюона, равно:

$$G = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\hbar^3}{m_p^2 c} = 1.43 \cdot 10^{-49} \,\mathrm{erg} \cdot \mathrm{cm}^3 \,, \tag{10.273}$$

где m_p — масса протона, введенная здесь просто как размерный параметр. Ее появление в (10.273) вполне произвольно, мы еще увидим, как такое взаимодействие возникает, как эффективное, в низкоэнергетическом пределе современной теории электромагнитных и слабых взаимодействий.

Ввиду неперенормируемости теории поля с (10.270), это взаимодействие нельзя рассматривать в качестве фундаментального, бессмысленно выписывать и поправки высших порядков соответствующей теории возмущений.

10.10 Пропагаторы и калибровочные условия в квантовой электродинамике.

В случае квантовой электродинамики максвелловского поля, производящий функционал имеет вид:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{ i \int dx (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) \right\} \,, \tag{10.274}$$

где J^μ – внешний токовый источник,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,. \tag{10.275}$$

Выполнив интегрирование по dx по частям и отбросив поверхностные члены можно переписать этот лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} A^\mu [g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu \,. \tag{10.276}$$

Лагранжиан электромагнитного поля инвариантен относительно градиентных (калибровочных) преобразований $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. В тоже время, интеграл в (10.274) берется по *всем* A_μ, в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочным преобразованием. Очевидно, что это приведет к *бесконечному* вкладу в Z и в функции Грина. Ясно, что нужно фиксировать некоторую частную калибровку так, чтобы интеграл по A_μ *не брался* по полям, связанным друг с другом калибровочным преобразованием. Здесь мы сталкиваемся с проблемой, которая становится особенно острой при переходе к задаче квантования неабелевых калибровочных полей. Оказывается, что в рамках функционального подхода к квантовой теории поля эта проблема может быть последовательно решена. Как это делается будет достаточно подробно показано в следующей главе, а пока ограничимся несколькими замечаниями технического характера.

Если наложить на вектор-потенциал условие Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$, то лагранжиан (10.276) перейдет в:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} A^\mu g_{\mu\nu} \Box A^\nu \,. \tag{10.277}$$

Оператор, обратный по отношению к $g^{\mu\nu}\Box$ представляет собой пропагатор Фейнмана (см. например Главу 4):

$$D_{F\mu\nu}(x,y) = g_{\mu\nu} 4\pi \Delta_F(x,y;m=0) \,. \tag{10.278}$$

В импульсном представлении, возникающий из (10.277) оператор $-g_{\mu\nu}k^2$ имеет обратный оператор вида $-g^{\nu\lambda}\frac{1}{k^2}$, так что фейнмановский пропагатор электромагнитного поля в калибровке Лоренца имеет вид:

$$D_{F\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} \frac{4\pi}{k^2} \,. \tag{10.279}$$

В общем случае, к лагранжиану можно добавить член, фиксирующий калибровку с произвольным коэффициентом α:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{8\pi} A^\mu \left[g_{\mu\nu} \Box + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu \,. \tag{10.280}$$

В импульсном представлении коэффициент при квадрате поля имеет вид:

$$-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu \,, \tag{10.281}$$

а обратный ему оператор дает пропагатор вида:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \,. \tag{10.282}$$

При $\alpha \to 1$ получаем отсюда фейнмановский пропагатор (калибровка Лоренца – Фейнмана). При $\alpha \to 0$ получаем пропагатор в калибровке Ландау.

Глава 11

КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

11.1 Неабелевы калибровочные поля и метод Фаддеева–Попова.

Перейдем к построению квантовой теории неабелевых калибровочных полей. Задача квантования полей Янга – Миллса долгое время оставалась нерешенной из-за трудностей, связанных с необходимостью корректного учета калибровочной инвариантности. В частности, не удавалось последовательно провести квантование в рамках канонического (операторного) подхода к квантовой теории поля, несмотря на его успешное применение к абелевой квантовой электродинамике. Полное решение этой проблемы было достигнуто Фаддеевым и Поповым с использованием функциональных методов. В последующем изложении в этой главе мы следуем, в основном, книге [11].

Эвристическое рассмотрение основной идеи.

Выше мы видели, что величина обычным образом определенного производящего функционала Z в калибровочной теории (даже в электродинамике), вообще говоря, является бесконечной, поскольку в нем фигурирует интегрирование по *всем* полям A_μ, в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочными преобразованиями, оставляющими подинтегральное выражение инвариантным.

Прежде чем приступать к вычислениям, которые позволят последовательно отделить бесконечный “объемный” множитель из (бесконечномерного) функционального интеграла по калибровочному полю, рассмотрим, для иллюстрации основной

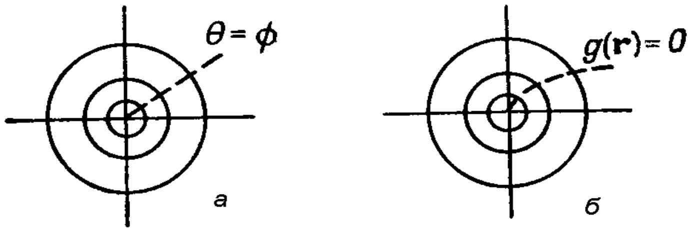


Рис. 11.1:

идеи метода, обычный двумерный интеграл вида:

$$W = \int dx \int dy e^{iS(x,y)} = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})}\,, \tag{11.1}$$

где $\mathbf{r} = (r, \theta)$ задает полярные координаты точки на плоскости. Предположим, что (аналог действия!) функция $S(\mathbf{r})$ инвариантна относительно вращений в двумерном пространстве:

$$S(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_\phi) \tag{11.2}$$

при $\mathbf{r} = (r, \theta) \to \mathbf{r}_\phi = (r, \theta + \phi)$. Это означает, что $S(\mathbf{r})$ постоянна на окружностях ("орбитах") в плоскости (x, y), показанных на Рис. 11.1(а). Если в этом тривиальном примере мы хотим учитывать вклад в интеграл только от неэквивалентных значений $S(\mathbf{r})$, то нужно выделить "объемный множитель", соответствующий интегрированию по угловой переменной[1] $\int d\theta = 2\pi$. Чтобы сделать это формальным путем, рассмотрим следующий прием, который далее будет обобщен на более сложные случаи. Подставим в наш интеграл 1, записанную в следующем виде[2]:

$$1 = \int d\phi \delta(\theta - \phi)\,. \tag{11.3}$$

Тогда имеем:

$$W = \int d\phi \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \delta(\theta - \phi) = \int d\phi W_\phi\,, \tag{11.4}$$

где

$$W_\phi = \int d\mathbf{r} \delta(\theta - \phi) e^{iS(\mathbf{r})} \tag{11.5}$$

вычисляется для данного значения угла $\phi = \theta$. Таким образом, мы сначала вычисляем W при фиксированном значении угла $\phi = \theta$ (связь!), а затем интегрируем по вкладам, соответствующим всем значениям ϕ (см. Рис. 11.1(а)). Используя инвариантность функции S (11.2), имеем:

$$W_\phi = W_{\phi'}\,. \tag{11.6}$$

Следовательно, "объем" орбиты можно выделить в виде множителя:

$$W = \int d\phi W_\phi = W_\phi \int d\phi = 2\pi W_\phi\,. \tag{11.7}$$

[1]Интегрирование по угловым переменным подразумевается в пределах от 0 до 2π, соответственно пределы явно не выписываем.

[2]Здесь подразумевается, что θ попадает в интервал $(0, 2\pi)$.

В общем случае можно выбрать более сложную связь, чем $\phi = \theta$, которую можно представить уравнением некоторой кривой $g(\mathbf{r}) = 0$, пересекающей каждую орбиту только один раз, как это показано на Рис. 11.1(б), так что уравнение $g(\mathbf{r}_\phi) = 0$ должно иметь единственное решение ϕ для данного значения r. Рассматривая такую связь общего вида, определим вместо простого уравнения (11.3), "представление единицы" вида:

$$1 = \Delta_g(\mathbf{r}) \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] \, . \tag{11.8}$$

Иначе говоря, определим функцию $\Delta_g(\mathbf{r})$ как:

$$[\Delta_g(\mathbf{r})]^{-1} = \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] \, . \tag{11.9}$$

Используя общее правило:

$$\int dx \delta[f(x)] = \int df \frac{1}{df/dx} \delta(f) = \left. \frac{1}{df/dx} \right|_{f=0} \, , \tag{11.10}$$

получаем:

$$\Delta_g(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial g(\mathbf{r}_\theta)}{\partial \theta} \right|_{g=0} \, , \tag{11.11}$$

причем $\Delta_g(\mathbf{r})$ инвариантна относительно двумерных вращений:

$$[\Delta_g(\mathbf{r}_{\phi'})]^{-1} = \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_{\phi+\phi'})] = \int d\phi'' \delta[g(\mathbf{r}_{\phi''})] = [\Delta_g(\mathbf{r})]^{-1} \, . \tag{11.12}$$

Тогда, повторяя рассуждения, аналогичные переходу от (11.4) к (11.7), можно снова выделить из интеграла "объемный множитель" 2π:

$$W = \int d\phi \int d\mathbf{r} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] e^{iS(\mathbf{r})} = \int d\phi W_\phi \, , \tag{11.13}$$

где

$$W_\phi = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] \, . \tag{11.14}$$

Здесь-то и содержится вся нетривиальная часть интеграла. "Объемный" множитель равен, как мы понимаем, просто 2π, что является формальным следствием инвариантности W_ϕ относительно вращений:

$$W_{\phi'} = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_{\phi'})] = \int d\mathbf{r}' e^{iS(\mathbf{r}')} \Delta_g(\mathbf{r}'{}_\phi) = W_\phi \, , \tag{11.15}$$

где введена переменная $\mathbf{r}' = (r, \phi')$ и воспользовались тем, что $S(\mathbf{r})$, $\Delta_g(\mathbf{r})$ и мера интегрирования $d\mathbf{r}$ инвариантны относительно вращений. Таким образом "рецепт" выделения "объемного" множителя состоит в том, что под интеграл вводится ограничивающая δ-функция, которая умножается на Δ_g, определенную условием (11.9).

Выделение объемного множителя в функциональном интеграле.

Перейдем к рассмотрению неабелевых калибровочных теорий. Для определенности рассмотрим случай полей Янга – Миллса с калибровочной группой $SU(2)$. Лагранжиан такой теории имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}\,, \qquad a = 1, 2, 3\,, \tag{11.16}$$

где (см. уравнение (2.112))

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\,. \tag{11.17}$$

Здесь g — янг-миллсовская константа связи. Производящий функционал определим, как обычно, в виде:

$$Z[\vec{J}] = \int \mathcal{D}\vec{A}_\mu \exp\left\{ i \int dx [\mathcal{L}(x) + \vec{J}_\mu \cdot \vec{A}^\mu(x)] \right\}\,. \tag{11.18}$$

Действие инвариантно относительно калибровочного преобразования:

$$\vec{A}_\mu \to \vec{A}^\theta_\mu\,, \tag{11.19}$$

где (см. уравнения (2.156), (2.159) и (2.162))

$$\vec{A}^\theta_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} = U(\theta) \left[\vec{A}_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + \frac{1}{ig} U^{-1}(\theta) \partial_\mu U(\theta) \right] U^{-1}(\theta)\,. \tag{11.20}$$

Здесь

$$U(\theta) = \exp\left[i\vec{\theta}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right] \tag{11.21}$$

— преобразование спинорного представления группы $SU(2)$. Вблизи единичного преобразования $U(\theta)$ можно представить в виде:

$$U(\theta) = 1 + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + O(\theta^2)\,. \tag{11.22}$$

Величины $\vec{\theta}(x)$ представляют собой параметры группы, зависящие от точки пространства-времени, а $\vec{\tau}$ — матрицы Паули в изотопическом пространстве.

Действие нашей теории постоянно (инвариантно) на *орбите* калибровочной группы, состоящей из всех $\vec{A}^\theta_\mu$, полученных из некоторой фиксированной конфигурации $\vec{A}_\mu$ преобразованием $U(\theta)$, пробегающим по всем элементам группы $SU(2)$. При правильном квантовании функциональное интегрирование должно осуществляться по "гиперповерхности" в функциональном пространстве, которая пересекает каждую орбиту лишь один раз. Таким образом, если мы запишем уравнение этой гиперповерхности в виде:

$$f_a(\vec{A}_\mu) = 0\,, \qquad a = 1, 2, 3\,, \tag{11.23}$$

то уравнение

$$f_a(\vec{A}^\theta_\mu) = 0 \tag{11.24}$$

должно иметь единственное решение $\vec{\theta}$ при данной полевой конфигурации $\vec{A}_\mu$. Это условие фиксирует выбор калибровки.

Определим теперь интегрирование по параметрам калибровочной группы:

$$[d\vec{\theta}] = \prod_{a=1}^{3} d\theta_a \,. \tag{11.25}$$

Если мы совершаем два калибровочных преобразования $\vec{\theta}$ и $\vec{\theta}'$, то соответствующая матрица имеет вид $U(\theta)U(\theta')$ и параметры преобразования суммируются: $\vec{\theta}+\vec{\theta}'$. Поэтому определенная согласно (11.25) мера интегрирования является инвариантной относительно калибровочных преобразований, в том смысле, что углы θ пробегают при интегрировании все мыслимые значения и сдвиг на константу θ' ничего не меняет. Символически это записывают как $d(\vec{\theta}\vec{\theta}') = d\vec{\theta}'' = d\vec{\theta}$.

Теперь мы можем поступить как и выше (при рассмотрении обычного интеграла), и ввести $\Delta_f[\vec{A}_\mu]$:

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] = \int [d\vec{\theta}(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^\theta)] \,. \tag{11.26}$$

Отсюда имеем:

$$\Delta_f[\vec{A}_\mu] = \mathrm{Det}\, M_f \tag{11.27}$$

— детерминант Фаддеева – Попова, где

$$(M_f)_{ab} = \frac{\delta f_a}{\delta \theta_b} \,. \tag{11.28}$$

Подробнее эти выкладки выглядят так. Проводя обычную дискретизацию пространства и последующий предельный переход, можем написать:

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] = \int \prod_x \prod_a d\theta_a(x)\delta[f_a(x)] = \prod_x \prod_a \int df_a(x)\delta[f_a(x)] \frac{\partial(\theta_1(x),\theta_2(x),\theta_3(x))}{\partial(f_1(x),f_2(x),f_3(x))} =$$
$$= \prod_x \mathrm{Det}\left[\frac{\partial\theta_a(x)}{\partial f_b(x)}\right]_{f=0} = \mathrm{Det}\left[\frac{\delta\theta_a(x)}{\delta f_b(x)}\right]_{f=0} . \tag{11.29}$$

В последнем равенстве (после перехода к непрерывному x) возникает функциональный детерминант (якобиан) матрицы с непрерывными индексами $\frac{\delta\theta_a(x)}{\delta f_b(y)}$, который определяется произведением собственных значений этой матрицы.

Матрица M_f связана с бесконечно малыми калибровочными преобразованиями функции $f_a[\vec{A}_\mu]$:

$$\begin{aligned} f_a[\vec{A}_\mu^\theta(x)] &= f_a[\vec{A}_\mu(x)] + \int dy \frac{\delta f_a(x)}{\delta\theta_b(y)}\theta_b(y) + O(\theta^2) = \\ &= f_a[\vec{A}_\mu(x)] + \int dy [M_f(x,y)]_{ab}\theta_b(y) + O(\theta^2) \,. \end{aligned} \tag{11.30}$$

Тогда из требования единственности решения уравнения (11.24) $f_a(\vec{A}_\mu^\theta) = 0$ относительно $\vec{\theta}$ следует, что $\mathrm{Det}\, M_f$ отличен от нуля. Конкретный вид M_f, естественно, зависит от выбора того или иного условия калибровки (вида функции f_a), явные выражения для случая калибровки Лоренца будут приведены ниже.

Детерминант Фаддеева – Попова $\Delta_f[\vec{A}_\mu]$ калибровочно инвариантен. В самом деле, запишем

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] = \int [d\vec{\theta}'(x)]\delta\big[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta'})\big] \,. \tag{11.31}$$

Тогда

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu^\theta] = \int [d\vec{\theta}'(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta\theta'})] = \int [d\vec{\theta}(x)\vec{\theta}'(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta\theta'})] =$$
$$= \int [d\vec{\theta}''(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta''})] = \Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu], \tag{11.32}$$

что и требовалось доказать. Это вполне аналогично (11.12).

Подставим теперь возникающее из (11.26) "представление единицы"

$$1 = \int [d\vec{\theta}(x)]\Delta_f[\vec{A}_\mu]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^\theta)] \tag{11.33}$$

в (11.18). Тогда, обозначая для единообразия меру интегрирования по полям Янга – Миллса как $[d\vec{A}_\mu(x)]$, получаем:

$$\int [d\vec{A}_\mu(x)] \exp\left\{i\int dx\mathcal{L}(x)\right\} =$$
$$= \int [d\vec{\theta}(x)] \int [d\vec{A}_\mu(x)]\Delta_f[\vec{A}_\mu]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^\theta)] \exp\left\{i\int dx\mathcal{L}(x)\right\} =$$
$$= \int [d\theta(x)] \int [d\vec{A}_\mu(x)]\Delta_f[\vec{A}_\mu(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu)] \exp\left\{i\int dx\mathcal{L}(x)\right\}. \tag{11.34}$$

При получении последнего равенства мы воспользовались инвариантностью выражений для $\Delta_f[\vec{A}_\mu]$ и $\exp\left\{i\int dx\mathcal{L}(x)\right\}$ относительно калибровочных преобразований $\vec{A}_\mu^\theta \to \vec{A}_\mu$. Тогда видим, что подинтегральное выражение не зависит от $\vec{\theta}(x)$ и $\int[d\vec{\theta}(x)] = \int\prod_x d\vec{\theta}(x)$ дает просто бесконечный "объем" орбиты, который мы и хотели выделить! Поэтому, опуская этот ненужный множитель, производящий функционал калибровочного поля $\vec{A}_\mu$ можно записать как:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu]\Delta_f[\vec{A}_\mu]\delta[f_a(\vec{A}_\mu)] \exp\left\{i\int dx[\mathcal{L}(x) + \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu]\right\} =$$
$$= \int [d\vec{A}_\mu](DetM_f)\delta[f_a(\vec{A}_\mu)] \exp\left\{i\int dx[\mathcal{L}(x) + \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu]\right\}. \tag{11.35}$$

В этом суть так называемого *анзатца Фаддеева - Попова*, мы устраняем все лишние интегрирования, вводя в функциональную меру множитель $\mathrm{Det}\, M_f\delta[f_a(\vec{A}_\mu)]$.

Абелева калибровочная теория (КЭД).

Рассмотрим простейший пример – квантовую электродинамику. В этом случае бесконечно малое калибровочное преобразование записывается как:

$$A_\mu^\theta = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x). \tag{11.36}$$

В этом случае, при любом выборе калибровочного условия (11.23), линейного по полю $A_\mu(x)$, матрица M_f (11.28) *не зависит* от поля $A_\mu(x)$. Поэтому детерминант Фаддеева – Попова не существен с физической точки зрения, его можно вынести за знак функционального интегрирования по $A_\mu(x)$ и просто опустить[3]. Тогда производящий функционал записывается как:

$$Z[J] = \int [dA_\mu]\delta[f(A_\mu)] \exp\left\{ i\int dx[\mathcal{L}(x) + J_\mu(x)A^\mu(x)]\right\} , \tag{11.37}$$

где $\delta[f(A_\mu)]$ фиксирует конкретную калибровку, после чего мы приходим к обычной формулировке КЭД.

11.2 Фейнмановские диаграммы в неабелевой теории.

Перейдем теперь к подробному рассмотрению построения диаграммной техники для неабелевой теории. Перепишем производящий функционал (11.35) в виде:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu] \exp\left\{ iS_{eff} + i\int dx \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu \right\} , \tag{11.38}$$

где мы просто переписали множитель $\mathrm{Det}\, M_f \delta[f_a(\vec{A}_\mu)]$ в виде $\exp\ln(\mathrm{Det}\, M_f \delta[f_a(\vec{A}_\mu)])$, а величину $-i\ln(\mathrm{Det}\, M_f \delta[f_a(\vec{A}_\mu)])$ включили в определение эффективного действия S_{eff}. Естественно, что наличие такого члена в эффективном действии усложняет задачу построения диаграммной техники. Нужно сначала попытаться представить этот вклад в более естественном виде.

"Духи" Фаддеева - Попова.

Величину $\mathrm{Det}\, M_f$ можно записать в виде экспоненты, воспользовавшись формулой:

$$\mathrm{Det}\, M_f = \exp[Sp \ln M_f] . \tag{11.39}$$

Доказательство (11.39) тривиально. Равенство $\ln \mathrm{Det}\, M_f = Sp \ln M_f$ очевидно для любой матрицы: $\mathrm{Det}\, M_f$ представляет собой произведение всех собственных значений M_f, а $\ln \mathrm{Det}\, M_f$ дает тогда сумму логарифмов всех собственных значений M_f, т.е. как раз $Sp \ln M_f$.

Представляя матрицу M_f в виде:

$$M_f = 1 + L \tag{11.40}$$

и разлагая логарифм в ряд, можно написать:

$$\begin{aligned} \exp[Sp \ln M_f] &= \exp\left[SpL - \frac{1}{2}SpL^2 + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}SpL^n + ...\right] = \\ &= \exp\left\{ \int dx L_{aa}(x,x) - \frac{1}{2}\int dx \int dy L_{ab}(x,y)L_{ba}(y,x) + ...\right\} . \end{aligned} \tag{11.41}$$

Поэтому детерминант Фаддеева – Попова можно представить в виде *петлевого* разложения[4], показанного на Рис. 11.2, где сплошные линии обозначают пропагаторы

[3] С точки зрения последующего изложения можно сказать, что в КЭД "духи" Фаддеева – Попова не взаимодействуют с полем A_μ, а потому не существенны.

[4] Это разложение аналогично петлевому разложению свободной энергии в теории конденсированного состояния [13]

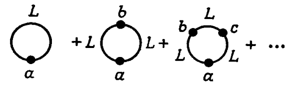


Рис. 11.2:

некоторых фиктивных частиц ("духов" Фаддеева - Попова), образующих изотопический триплет комплексных скалярных (бесспиновых) полей $\vec{c}(x)$. Эти поля и их взаимодействия можно описать производящим функционалом:

$$\mathrm{Det}\, M_f = \int [d\vec{c}][d\vec{c}^{+}] \exp\left\{ i \int dxdy \sum_{ab} c_a^{+}(x)[M_f(x,y)]_{ab} c_b(y) \right\} . \qquad (11.42)$$

Здесь интегрирование ведется по *грассмановым* $\vec{c}(x), \vec{c}^{+}(x)$, иначе (для c-числовых полей) мы получили бы $(\mathrm{Det}\, M_f)^{-1}$! Поэтому *скалярные* поля $\vec{c}(x), \vec{c}^{+}(x)$ подчиняются *статистике Ферми.* Таким образом, "духи" Фаддеева - Попова являются фермионами со спином 0! Никакого противоречия с теоремой о связи спина и статистики тут, конечно же, нет, поскольку эти "духи" являются чисто фиктивными частицами, которые вводятся в теорию для "удобства записи". Поскольку их вклад в производящий функционал сводится к петлевому ряду (11.41), в теории не возникает диаграмм с внешними линиями "духов".

Члены, фиксирующие калибровку.

Попытаемся теперь превратить в экспоненту член $\delta[f_a(\vec{A}_\mu)]$. Для этого сначала обобщим условие, фиксирующее калибровку, переписав его в виде:

$$f_a[\vec{A}_\mu] = B_a(x)\,, \qquad a = 1,2,3\,, \qquad (11.43)$$

где $B_a(x)$ — произвольная функция пространственно-временной точки, *не зависящая* от калибровочного поля $\vec{A}_\mu$. Соответственно, определим Δ_f условием:

$$\Delta_f[\vec{A}_\mu] \int [d\vec{\theta}(x)] \delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta}) - B_a(x)] = 1\,. \qquad (11.44)$$

Очевидно, что ввиду независимости $B_a(x)$ от $\vec{A}_\mu$ это *та же самая* функция Δ_f, что и определенная в (11.26)[5], зависимости от $B_a(x)$ тут, фактически, нет! Поэтому производящий функционал (11.35) можно переписать в виде:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu][d\vec{B}](\mathrm{Det}\, M_f)\delta[f_a(\vec{A}_\mu) - B_a] \exp\left\{ i \int dx \left[\mathcal{L}(x) - \vec{J}^{\mu}\cdot\vec{A}_\mu - \frac{1}{8\pi\xi}\vec{B}^2(x) \right] \right\} , \qquad (11.45)$$

где мы еще включили в подинтегральное выражение *константу* вида:

$$\int [d\vec{B}] \exp\left\{ -\frac{i}{8\pi\xi} \int dx \vec{B}^2(x) \right\} , \qquad (11.46)$$

где ξ — произвольный постоянный коэффициент, именуемый, обычно, калибровочным параметром. В результате, производящий функционал (11.45) отличается от

[5] Это просто аналог (11.6) в случае обычного интегрирования.

(11.35) на несущественный постоянный множитель, который можно включить в нормировку. Но теперь, с помощью δ-функции, входящей в (11.45), можно снять интегрирование по $[d\vec{B}(x)]$. В итоге, учитывая еще и (11.42), получаем:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu][d\vec{c}][d\vec{c}^+] \exp(iS_{eff}[\vec{J}]) , \tag{11.47}$$

где:

$$S_{eff}[\vec{J}] = S[\vec{J}] + S_{fix} + S_{ghost} , \tag{11.48}$$

где $S[\vec{J}] = \int dx[\mathcal{L}(x) + \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu]$ — обычное действие рассматриваемой теории,

$$S_{fix} = -\frac{1}{8\pi\xi} \int dx \{f_a[\vec{A}_\mu(x)]\}^2 \tag{11.49}$$

— так называемый член, фиксирующий калибровку, и

$$S_{ghost} = \int dxdy \sum_{ab} c_a^+(x)[M_f(x,y)]_{ab} c_b(y) \tag{11.50}$$

— действие "духов".

Калибровка Лоренца.

В лоренцевской калибровке имеем:

$$f_a(\vec{A}_\mu) \equiv \partial^\mu A_\mu^a = 0 , \qquad a = 1,2,3 . \tag{11.51}$$

При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях

$$U(\theta) = 1 + i\vec{\theta}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + O(\theta^2) , \tag{11.52}$$

так что

$$A_\mu^{a\theta} = A_\mu^a(x) - \varepsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) . \tag{11.53}$$

Подставляя (11.53) в (11.51) имеем:

$$\begin{aligned} f_a(\vec{A}_\mu^\theta) = f_a(\vec{A}_\mu) - \partial^\mu \left[\varepsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)\right] = \\ = f_a(\vec{A}_\mu) + \int dy [M_f(x,y)]_{ab}\theta^b(y) , \end{aligned} \tag{11.54}$$

где в последнем равенстве использовали (11.30). Тогда видим, что в данном случае

$$[M_f(x,y)]_{ab} = \frac{1}{g}\partial^\mu[\delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{abc}A_\mu^c]\delta(x-y) . \tag{11.55}$$

Подставляя все это в (11.49) и (11.50), получаем:

$$S_{fix} = -\frac{1}{8\pi\xi} \int dx (\partial^\mu \vec{A}_\mu)^2 , \tag{11.56}$$

$$S_{ghost} = \frac{1}{g} \int dx \sum_{ab} c_a^+(x) \partial^\mu [\delta_{ab} \partial_\mu - g \varepsilon_{abc} A_\mu^c] c_b(x) \,. \tag{11.57}$$

Видим, что в данном случае "духи" взаимодействуют с калибровочным полем $\vec{A}_\mu$, что описывается вторым членом в квадратных скобках в (11.57). В аналогичном выражении в КЭД такой член просто отсутствовал [6].

Введем еще грассмановы источники η_a^+, η_a для "духовых" полей c_a, c_a^+, запишем производящий функционал рассматриваемой теории в виде:

$$Z[\vec{J}, \vec{\eta}, \vec{\eta}^+] = \int [d\vec{A}_\mu d\vec{c} d\vec{c}^+] \exp \left\{ i \int dx \left[\mathcal{L}(x) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{8\pi\xi} (\partial^\mu \vec{A}_\mu)^2 + c_a^+ \partial^\mu (\delta_{ab} \partial_\mu - g \varepsilon_{abc} A_\mu^c) c_b + J_\mu^a A^{a\mu} + \eta^{a+} c^a + \eta^a c^{a+} \right] \right\} \,, \tag{11.58}$$

где мы еще переопределили, очевидным образом, поля c_a, c_a^+, включив в них множитель $1/g$.

Разложение теории возмущений.

Запишем теперь действие рассматриваемой теории в виде:

$$S_{eff} = S_0 + S_I \,, \tag{11.59}$$

где

$$S_0 = \int dx \left[- \frac{1}{16\pi} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{8\pi\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + c_a^+ \partial^2 c_a + J_\mu^a A^{a\mu} + \eta^{a+} c^a + \eta^a c^{a+} \right] \,, \tag{11.60}$$

а член взаимодействия, содержащий степени полей выше второй, имеет вид:

$$S_I = \int dx \left[- \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g \varepsilon^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{1}{16\pi} g^2 \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} - \right.$$
$$\left. - g c^{a+} \partial^\mu \varepsilon^{abc} A_\mu^c c^b \right] . \tag{11.61}$$

Производящий функционал можно теперь записать в виде:

$$Z[\vec{J}, \vec{\eta}, \vec{\eta}^+] = \exp \left\{ i S_I \left[\frac{\delta}{i\delta \vec{J}_\mu}, \frac{\delta}{i\delta \vec{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta \vec{\eta}^+} \right] \right\} Z_A^0[\vec{J}] Z_c^0[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+] \,, \tag{11.62}$$

где

$$Z_A^0[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu] \exp \left\{ i \int dx \left[- \frac{1}{16\pi} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{8\pi\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + J_\mu^a A^{a\mu} \right] \right\} \,, \tag{11.63}$$

$$Z_c^0[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+] = \int [d\vec{c}^+][d\vec{c}] \exp \left\{ i \int dx \left[c^{a+} \partial^2 c^a - \eta^{a+} c^a - \eta^a c^{a+} \right] \right\} \,. \tag{11.64}$$

Отсюда очевидным образом выводится разложение теории возмущений. Мы не будем подробно проводить этот вывод, а ограничимся сводкой основных правил построения диаграммной техники. Недостающие подробности можно найти в целом ряде книг, например в [8–12].

[6] В неабелевом случае также можно выбрать специальную, т.н. аксиальную калибровку, в которой "духи" удается полностью исключить [11], однако "платой" за это является весьма громоздкий вид пропагатора калибровочного поля.

Пропагаторы.

Чтобы найти пропагатор поля $\vec{A}_\mu$, перепишем Z_A^0 в виде:

$$\begin{aligned}Z_A^0[\vec{J}] &= \int [d\vec{A}_\mu] \exp\left\{ i \int dx \left[\frac{1}{8\pi}\delta_{ab}A_\mu^a \left(g^{\mu\nu}\partial^2 - \frac{\xi-1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu \right) A_\nu^b + J_\mu^a A^{a\mu} \right] \right\} = \\ &= \int [d\vec{A}_\mu] \exp\left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} A_\mu^a K_{ab}^{\mu\nu} A_\nu^b + J_\mu^a A^{a\mu} \right] \right\}, \qquad (11.65)\end{aligned}$$

где

$$K_{ab}^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\nu}\partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right] \delta_{ab}\,. \qquad (11.66)$$

Интегрирование $[d\vec{A}_\mu]$ можно выполнить, пользуясь известной нам формулой для гауссова интеграла (10.47), которая, в частности, может быть записана в таком виде:

$$\int [d\varphi] \exp\left[-\frac{1}{2}\langle \varphi K \varphi\rangle + \langle J\varphi\rangle \right] \sim (\mathrm{Det}\, K)^{-1/2} \exp\langle J K^{-1} J\rangle\,, \qquad (11.67)$$

где угловыми скобками обозначены соответствующие интегралы. Применение этой формулы к (11.65) дает:

$$Z_A^0[\vec{J}] = \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int dx dy J_\mu^a(x) G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^b(y) \right\}, \qquad (11.68)$$

где

$$G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[-\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - \xi\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon}\,. \qquad (11.69)$$

Легко проверить, что

$$\int dy K_{ab}^{\mu\nu}(x-y) G_{\nu\lambda}^{bc}(y-z) = g_\lambda^\mu \delta_a^c \delta(x-z)\,, \qquad (11.70)$$

так что G есть действительно обратный оператор для K.

Аналогично находим:

$$Z_c^0[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+] = \exp\left\{ -i \int dx dy \eta^{a+}(x) G^{ab}(x-y) \eta^a(y) \right\}, \qquad (11.71)$$

где:

$$G^{ab}(x-y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \delta_{ab}\,. \qquad (11.72)$$

Это прямо соответствует тому, что “дух” является скалярной частицей с нулевой массой (но подчиняющейся статистике Ферми).

В итоге имеем:

1. Пропагатор безмассовых векторных бозонов:

$$i\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\delta_{ab} \left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon}\,, \qquad (11.73)$$

   обозначаемый на графиках волнистой линией.

2. Пропагатор “духов” Фаддеева - Попова:

$$i\Delta^{ab}(k) = -i\delta_{ab} \frac{4\pi}{k^2 + i\varepsilon}\,, \qquad (11.74)$$

   обозначаемый пунктиром со стрелкой (“дух” отличается от “антидуха”!).

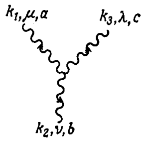


Рис. 11.3:

Вершины элементарных взаимодействий.

В неабелевых теориях имеется самодействие калибровочных полей двух типов, что записывается в виде:

$$\varepsilon_a^\mu(k_1)\varepsilon_b^\nu(k_2)\varepsilon_c^\lambda(k_3)\Gamma^{abc}_{\mu\lambda\nu}(k_1,k_2,k_3)\,, \tag{11.75}$$

$$\varepsilon_a^\mu(k_1)\varepsilon_b^\nu(k_2)\varepsilon_c^\lambda(k_3)\varepsilon_d^\rho(k_4)\Gamma^{abcd}_{\mu\lambda\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4)\,, \tag{11.76}$$

где выписаны также соответствующие вектора поляризации. Соответствующие правила Фейнмана вытекают непосредственно из (11.61), (11.62). В импульсном представлении первый член в (11.61) может быть записан как:

$$\frac{1}{3!}A^{a\mu}(k_1)A^{b\nu}(k_2)A^{c\lambda}(k_3)\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)\,. \tag{11.77}$$

Вершина $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}$ должна быть полностью антисимметрична при перестановке полей A. Структура, связанная с калибровочной группой $SU(2)$ уже фиксирована:

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)=\varepsilon^{abc}\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)\,, \tag{11.78}$$

а лоренцеву структуру этой функции можно получить следующим образом. Из (11.61) ясно, что $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$ состоит из членов вида $k_\mu g_{\nu\lambda}$. Точную комбинацию этих членов можно установить из требования антисимметрии $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$ относительно перестановки индексов: μ,ν, $1,2$ и т. д., с учетом полной антисимметрии тензора ε^{abc}. Таким образом найдем:

$$i\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}=ig\varepsilon^{abc}[(k_1-k_2)_\lambda g_{\mu\nu}+(k_2-k_3)_\mu g_{\nu\lambda}+(k_3-k_1)_\nu g_{\mu\lambda}] \tag{11.79}$$

где $k_1+k_2+k_3=0$. Соответствующий график для "тройной" вершины показан на Рис. 11.3.

Аналогичным образом можно найти вершину "четверного" взаимодействия калибровочного поля, соответствующую второму слагаемому в (11.61):

$$\begin{gathered}i\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho}=ig^2[\varepsilon^{abe}\varepsilon^{cde}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho})+\\+\varepsilon^{ace}\varepsilon^{bde}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho})+\varepsilon^{ade}\varepsilon^{cbe}(g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu}-g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu})]\end{gathered} \tag{11.80}$$

что изображается графиком на Рис. 11.4. Здесь $k_1+k_2+k_3+k_4=0$.

Для вершины, связывающей "духи" и калибровочные поля с вектором поляризации $\varepsilon^\mu(q)$ имеем:

$$i\Gamma^{abc}_\mu=ig\varepsilon^{abc}k_{2\mu} \tag{11.81}$$

где $k_2=k_1+q$. Эта вершина изображена на Рис. 11.5, она антисимметрична по изоспиновым индексам. Напомним, что "духовые" линии входят в диаграммы только

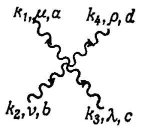


Рис. 11.4:

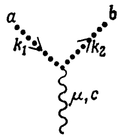


Рис. 11.5:

в виде петель. Наряду с каждой диаграммой, содержащей замкнутую петлю калибровочного поля, существует эквивалентная ей диаграмма с замкнутой "духовой" линией в том же месте. Как и в случае обычных фермионных полей, каждая "духовая" петля должна умножаться дополнительно на (-1).

От калибровочного параметра ξ зависит только пропагатор калибровочного поля (11.69), его значение подбирается из соображений удобства при решении конкретных задач. Например $\xi = 1$ соответствует калибровке т'Хоофта - Фейнмана, а $\xi = 0$ отвечает калибровке Ландау.

Введение фермионов в чистую теорию Янга - Миллса, рассмотренную выше, не вызывает трудностей: достаточно добавить к лагранжиану калибровочно - инвариантные члены типа:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{11.82}$$

где

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igT^a A^a_\mu \psi \tag{11.83}$$

Здесь T^a – генератор калибровочной группы в рассматриваемом представлении. Например, если ψ является $SU(2)$ дублетом, то $T^a = \tau^a/2$. Таким образом возникаю дополнительные правила Фейнмана для фермионов (с групповыми индексами $n, m, ...$):

1. Фермионный пропагатор имеет стандартный вид:

$$i\Delta_{mn}(k) = \delta_{nm} \frac{1}{\gamma_\mu k^\mu - m + i\varepsilon} \tag{11.84}$$

и изображается сплошной линией.

2. Вершина, соответствующая взаимодействию фермиона с калибровочным полем имеет вид:

$$i\Gamma^{\alpha\mu}_{nm} = ig(T^a)_{nm}\gamma^\mu \tag{11.85}$$

Графически это показано на Рис. 11.6.

Структура диаграммной техники, описанная выше сохраняется и для других калибровочных групп, таких, как наиболее важная, с практической точки зрения,

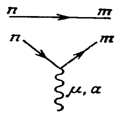


Рис. 11.6:

группа $SU(3)$ цветовой симметрии кварков. Разница только в размерности соответствующих неприводимых представлений и в виде матриц генераторов группы.

К настоящему моменту мы уже достаточно познакомились с основами современной теории квантовых калибровочных полей, лежащими в основе стандартной модели элементарных частиц. Пора перейти к обсуждению конкретных моделей их взаимодействия. Но остались еще и некоторые проблемы концептуального характера, которые мы обсуждали в начале нашего курса. В частности, пока не ясно, как быть с проблемой безмассовости полей Янга - Миллса, находящейся, казалось-бы, в разительном контрасте с экспериментом, свидетельствующем о том, что единственным дальнодействующим полем в Природе (кроме гравитационного) является (абелево) электромагнитное поле. В следующей главе мы увидим, как эта проблема решается в единой теории слабого и электромагнитного взаимодействия, к обсуждению которой мы и переходим. Замечательно, что решение этой проблемы оказывается основанным на идеях и методах, заимствованных квантовой теорией поля из современной теории конденсированного состояния.

Глава 12

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И МОДЕЛЬ ВАЙНБЕРГА-САЛАМА

12.1 Спонтанное нарушение симметрии и теорема Голдстоуна.

Как уже отмечалось выше, существенный прогресс в современной теории элементарных частиц был достигнут благодаря использованию ряда концепций теории конденсированного состояния. Наиболее важным оказалось введение в квантовую теорию поля представлений о возможности *фазовых переходов*, когда симметрия основного состояния оказывается более низкой, чем симметрия лагранжиана. На этом пути удалось решить упоминавшуюся проблему генерации масс калибровочных бозонов без нарушения локальной калибровочной инвариантности и прийти к чрезвычайно богатой и нетривиальной картине, лежащей в основе стандартной модели. Более того, представления о серии возможных фазовых переходов лежат в основе современной космологии и физики вещества в экстремальных условиях высоких плотностей и температур. Здесь мы ограничимся лишь рассмотрением ряда основных идей, сыгравших решающую роль при построении единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий[1].

Начнем опять с простейшего примера скалярного вещественного поля $\varphi(x)$ с самодействием. Рассмотрим лагранжиан вида:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - V(\varphi)\,, \tag{12.1}$$

где $V(\varphi)$ — некоторая функция инвариантов поля. Первый член во втором выражении можно трактовать как плотность кинетической энергии поля, а остальные представляют собой плотность потенциальной энергии.

[1]Изложение в этой главе, в основном, следует [34].

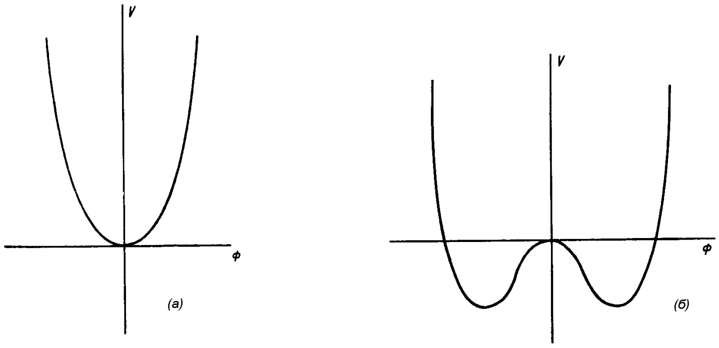


Рис. 12.1:

Из (12.1) получаем уравнения движения:

$$\partial_\mu^2 \varphi = -\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \qquad \text{или}$$
$$\partial_t^2 \varphi - \nabla^2 \varphi = -\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}\,. \tag{12.2}$$

Характер решений уравнений поля существенно зависит от вида "потенциальной энергии" самодействия $V(\varphi)$. Рассмотрим сначала случай, отвечающий "обычной", традиционной теории поля, рассматривавшейся выше. Пусть $V(\varphi)$ имеет вид, показанный на Рис. 12.1(а). Тогда система имеет состояние "устойчивого равновесия" $\varphi = 0$, вокруг которого поле может совершать "малые колебания". Вблизи положения равновесия можно всегда написать:

$$V(\varphi) \approx \frac{\mu^2}{2}\varphi^2\,, \tag{12.3}$$

где $\mu^2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0}$, так что (12.2) сводится к:

$$\partial_\mu^2 \varphi + \mu^2 \varphi = 0\,, \tag{12.4}$$

т.е. к уравнению Клейна – Гордона. Если искать его решение в виде плоской волны $\varphi \sim e^{ikx}$, то из (12.4) сразу следует обычный закон дисперсии релятивистской частицы с массой μ: $k_0^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2$. Следующие члены разложения $V(\varphi)$ приводят к нелинейным членам в полевых уравнениях. Они описывают взаимодействие плоских волн или рассеяние частиц. Ограничимся

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\,. \tag{12.5}$$

Кубический член не вводим, чтобы кривая $V(\varphi)$ была симметричной относительно $\varphi \to -\varphi$, тогда всегда есть минимум $V(\varphi)$ при $\varphi = 0$. Ограничение членом $\sim \varphi^4$ имеет принципиальное значение, тогда константа связи $\lambda > 0$ безразмерна, а теория перенормируема. В общем, это уже хорошо известная нам теория φ^4.

Рассмотрим теперь случай $\mu^2 < 0$. Это несколько странно, поскольку, с наивной точки зрения, соответствует мнимой массе частиц. Но нужно провести более аккуратное рассмотрение. Теперь $\varphi = 0$ не является более положением устойчивого равновесия, а потенциальная энергия имеет вид, показанный на Рис. 12.1(б)[2]. Видим, что возникают *два* положения устойчивого равновесия системы, соответствующие:

$$\varphi = \eta = \pm\sqrt{\frac{|\mu|^2}{\lambda}}\,. \tag{12.6}$$

Разложение $V(\varphi)$ в точках (12.6), с точностью до квадратичных членов, дает:

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2\eta^2}{4} - \mu^2(\varphi - \eta)^2 = \frac{\mu^2\eta^2}{4} - \mu^2(\delta\varphi)^2\,, \tag{12.7}$$

где $\delta\varphi = \varphi - \eta$, причем $-\mu^2(\delta\varphi)^2 > 0$ в силу $\mu^2 < 0$. Отсюда видно, что уравнения поля (12.2) будут иметь решения для $\delta\varphi$ в виде плоских волн с волновым вектором k, удовлетворяющие условию (закону дисперсии) $k^2 = 2|\mu|^2$, так что этим волнам будут соответствовать частицы с *положительной* массой $m = \sqrt{2|\mu|^2}$.

Фактически, мы имеем здесь дело с фазовым переходом в квантовой теории поля. Система переходит в *одно* из двух положений равновесия Рис. 12.1(б), а поле совершает малые колебания вблизи этого нового основного состояния.

В квантовой механике колебания системы, имеющей два таких минимума потенциальной энергии, не ограничиваются областью вблизи одного из положений равновесия. Между двумя такими областями возможен туннельный переход. При этом происходит расщепление состояния на два — симметричное и антисмметричное относительно двух положений равновесия, и симметричное состояние является основным [29]. Поэтому в квантовой механике симметрия основного состояния полностью отвечает симметрии функции Лагранжа (в нашем случае — четной по φ.). Квантовая теория поля оказывается, в этом смысле, ближе к классической механике. Дело в том, что вероятность туннельного перехода падает при увеличении числа степеней свободы, а при бесконечном их числе обращается в нуль. В самом деле, рассмотрим поле в конечном объеме Ω. Тогда функция Лагранжа $L = \int d^3x\mathcal{L} \sim \mathcal{L}\Omega$, так что соответствующая кинетическая энергия $\sim \Omega\dot{\varphi}^2$, а потенциальная $\sim \Omega V(\varphi)$. Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна задаче о туннелировании частицы с массой $M \sim \Omega$ через потенциальный барьер шириной $|x| \sim \eta$ и высотой $\mathcal{V} \sim \Omega m^2\eta^2$. Вероятность такого туннельного перехода [29] порядка $\exp(-\sqrt{2M\mathcal{V}}|x|) \sim \exp(-\Omega m\eta^2) \to 0$ при $\Omega \to \infty$. Иногда, для наглядности, говорят, что поле, в основном состоянии, представляет собой "струну" или "веревку" бесконечной длины, лежащую в правой или левой долине потенциала Рис. 12.1(б) и вытянутую вдоль этой долины (перпендикулярно плоскости рисунка). Естественно, что такой объект не может туннелировать между долинами потенциального рельефа.

В теории поля основное состояние называется вакуумом. Мы должны задать определенное основное состояние системы — один определенный вакуум. То что имеется второй вакуум, физически эквивалентный первому, уже не играет роли. Поэтому двум минимумам $V(\varphi)$ сопоставляется два различных и ортогональных друг другу вакуума, два ортогональных пространства состояний, два разных мира.

Обычная традиционная теория поля, соответствующая потенциалу $V(\varphi)$, показанному на Рис. 12.1(а), строится, как мы знаем, следующим образом. Поле представляется в виде суммы по осцилляторам, описываемы операторами рождения и уничтожения $a^\dagger$ и a, причем вакуумом называется состояние без частиц $a|0\rangle = 0$, так что

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = 0\,. \tag{12.8}$$

В случае потенциала $V(\varphi)$, показанного на Рис. 12.1(б), в виде суммы по операторам рождения и уничтожения представляется не само поле φ, а его отклонение от

[2] Тут существует полная аналогия с теорией фазовых переходов Ландау, в которой $\mu^2 \sim T - T_c$, так что $\mu^2 < 0$ при $T < T_c$, т.е. ниже температуры фазового перехода.

положения равновесия $\delta\varphi = \varphi - \eta$. В этом случае:

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \eta\,, \tag{12.9}$$

т.е. вакуумное среднее полевого оператора отлично от нуля — в системе существует *бозе-конденсат*[3] частиц, соответствующих полю φ. Исходный лагранжиан (12.1), (12.5) симметричен относительно $\varphi \to -\varphi$. Однако при $\mu^2 < 0$ он приводит к несимметричному основному состоянию (вакууму), выражением этой несимметрии является (12.9). Возбуждения над этим вакуумом также уже не обладают симметрией исходного лагранжиана, поскольку кривая $V(\varphi)$ с Рис. 12.1(б) несимметрична относительно точки $\varphi = \eta$. Произошло то, что в квантовой теории поля называется явлением *спонтанного нарушения симметрии*, а в теории конденсированного состояния хорошо известно как *фазовый переход* в состояние с пониженной симметрией.

Механизм генерации массы.

Существование у скалярного поля отличного от нуля вакуумного среднего может автоматически приводить к появлению *массы* у исходно безмассовых частиц, взаимодействующих с этим полем. Рассмотрим, например, дираковское поле, описывающее свободный безмассовые фермионы спина 1/2. Лагранжиан такого поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar\psi_L\hat\partial\psi_L + i\bar\psi_R\hat\partial\psi_R\,, \tag{12.10}$$

где $\hat\partial = \gamma^\mu\partial_\mu$ и мы ввели "левые" и "правые" компоненты биспинора ψ:

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi\,, \qquad \psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi\,, \qquad \psi_L + \psi_R = \psi\,. \tag{12.11}$$

Теперь введем взаимодействие полей ψ_L, ψ_R с нашим скалярным полем φ, нарушающим симметрию. Для этого добавим к лагранжиану (12.10) член вида:

$$\mathcal{L}_{int} = -\varkappa[\bar\psi_L\psi_R + \bar\psi_R\psi_L]\varphi\,, \tag{12.12}$$

где выражение в квадратных скобках представляет собой единственный скаляр, который можно составить из ψ_L и ψ_R, а $\varkappa$ — безразмерная константа взаимодействия (благодаря чему это взаимодействие является перенормируемым). Заменим теперь в (12.12) поле φ его вакуумным средним η, это означает, что мы не рассматриваем процессов с рождением частиц поля φ. Тогда имеем:

$$\mathcal{L}_{int} = -\varkappa\eta(\bar\psi_L\psi_R + \bar\psi_R\psi_L) = -\varkappa\eta\bar\psi\psi\,, \tag{12.13}$$

так что сумма (12.10) и (12.13) дает:

$$\mathcal{L} = i\bar\psi\hat\partial\psi - m\bar\psi\psi\,, \tag{12.14}$$

что соответствует дираковскому лагранжиану для фермионов с массой:

$$m = \varkappa\eta\,. \tag{12.15}$$

Таким образом, при построении моделей частиц можно исходить из картины первично безмассовых "левых" и "правых" фермионов, взаимодействие которых с полем

[3] Вспомните боголюбовский подход к теории неидеального бозе-газа!

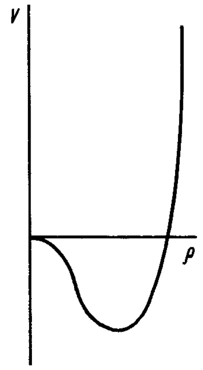


Рис. 12.2:

φ, претерпевающим фазовый переход, превращает "левые" частицы в "правые" и наоборот и приводит к возникновению массы.

Выше мы рассмотрели простейший пример лагранжиана с дискретной симметрией относительно замены $\varphi \to -\varphi$. Рассмотрим теперь случай нарушения непрерывной симметрии. Для этого введем комплексное скалярное поле φ, что, очевидно, эквивалентно двум вещественным полям φ_1, φ_2, связанным соотношением (ср. Главу 2):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] \tag{12.16}$$

Лагранжиан этого поля запишем в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - V(\varphi_1, \varphi_2) = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - V(\varphi_1, \varphi_2)\,. \tag{12.17}$$

Будем считать, что потенциал $V(\varphi_1, \varphi_2)$ зависит только от модуля φ, т.е. от $\rho^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 2\varphi^*\varphi$, так что $V = V(\rho)$. Это означает, что мы требуем дополнительной ("внутренней") симметрии теории относительно преобразования известной нам группы $U(1)$:

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi \tag{12.18}$$

или, что тоже самое, инвариантности лагранжиана относительно поворота в "изотопической" плоскости:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\to \varphi_1 \cos\alpha - \varphi_2 \sin\alpha\,, \\ \varphi_2 &\to \varphi_1 \sin\alpha + \varphi_2 \cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Мы видели (см. Главу 2), что с такой симметрией связано сохранение некоторого заряда (электрического, барионного и т.п.). При этом поля φ и φ^* имеют заряды разного знака.

Рассмотрим теперь потенциал $V(\rho)$, показанный на Рис. 12.2. что соответствует, например,

$$V(\rho) = \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 \tag{12.20}$$

при $\mu^2 < 0$. Записывая поле в виде (представление модуль-фаза):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\vartheta(x)}\,, \tag{12.21}$$

где $\rho(x)$ и $\vartheta(x)$ — вещественные функции, видим, что $V(\rho)$ имеет минимум при $\rho = \eta = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}}$, т.е. при значениях поля:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta e^{i\alpha} \tag{12.22}$$

с *произвольным* α! Здесь имеется бесконечнократное вырождение основного состояния системы по значениям α. Каждое значение α соответствует своему вакууму (основному состоянию) с одной и той же (минимальной) энергией $V(\eta)$. Все эти вакуумы физически эквивалентны, но выбрать надо только один определенный вакуум, например соответствующий $\alpha = 0$, и вместе с ним одно определенное пространство состояний, в котором уже нет симметрии (12.18), (12.19).

Посмотрим, каким частицам соответствует теперь лагранжиан (12.17). Используя (12.21), перепишем лагранжиан как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - V(\rho) + \frac{\rho^2}{2}(\partial_\mu\vartheta)^2\,. \tag{12.23}$$

Если ограничиться в (12.23) лишь квадратичными членами по полю, то следует разложить $V(\rho)$ вблизи $\rho = \eta$ по степеням $\rho' = \rho - \eta$, а в третьем члене (12.23) заменить ρ на η. Тогда получаем лагранжиан свободных частиц в виде:

$$\mathcal{L} = \mathrm{const} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 + \frac{\eta^2}{2}(\partial_\mu\vartheta)^2\,, \tag{12.24}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$. Отсюда немедленно следуют уравнения движения:

$$(\partial_\mu^2 + m^2)\rho' = 0\,, \qquad \partial_\mu^2\vartheta = 0\,. \tag{12.25}$$

Таким образом получили два нейтральных (вещественных) поля ρ' и ϑ, причем первому отвечают частицы с массой m, а второму — *безмассовые частицы*. В (12.25) опущены члены высших порядков, описывающие взаимодействие этих частиц.

Появление безмассовых частиц при спонтанном нарушении непрерывной симметрии теории составляет содержание *теоремы Голдстоуна*, а сами такие частицы называются *голдстонами*[4].

Не составляет труда провести обобщение теоремы Голдстоуна на случай более высоких симметрий. Пусть поле $\varphi(x)$ имеет n компонент. Тогда преобразования группы симметрии можно записать в виде:

$$\vec{\Phi} = S\vec{\Phi}'\,, \tag{12.26}$$

[4] В теории конденсированного состояния ситуация аналогична. Например фазовый переход в ферромагнитное состояние нарушает непрерывную симметрию группы вращений — обменный гамильтониан Гейзенберга инвариантен относительно вращений (в него входят скалярные произведения спинов на узлах решетки), тогда как в основном состоянии возникает выделенное направление — вектор спонтанной намагниченности (симметрия понижается). Аналогом голдстонов в этом случае являются *акустические* спиновые волны.

где $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Phi}'$ — столбцы из n компонент $(\varphi_1, ...\varphi_n)$, а S — матрица $n \times n$. Пусть потенциал $V(\vec{\Phi})$ зависит только от $\rho^2 = \varphi_1^2 + ... + \varphi_n^2$ и других инвариантов нет. Тогда:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\Phi})^2 - V(\rho)\,. \tag{12.27}$$

В этом случае мы снова можем перейти к "полярным" координатам для поля $\vec{\Phi}$, когда поле определяется модулем $\rho(x)$ и $n-1$ "угловыми" переменными $\alpha_i(x)(i = 1, 2, ..., n-1)$. Лагранжиан в этих переменных приобретает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{\rho^2}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} \theta_{ik}(\alpha_i)\partial_\mu \alpha_i \partial_\mu \alpha_k - V(\rho)\,. \tag{12.28}$$

Пусть $V(\rho)$ имеет минимум при $\rho = \eta$, т.е. $\langle 0|\rho|0\rangle = \eta$. Угловые компоненты α_i можно фиксировать условием $\langle 0|\alpha_i|0\rangle = 0$ (выбор вакуума) и тем, что θ_{ik} при $\alpha_i = 0$ имеет вид $\theta_{ik}(0) = \delta_{ik}$. Тогда, вводя опять $\rho' = \rho - \eta$, имеем:

$$\mathcal{L} = \text{const} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_\mu \alpha_i)^2\,. \tag{12.29}$$

Видим, что частицы, соответствующие полям α_i имеют нулевые массы, так что в задаче возникает $n-1$ голдстонов. Это более общий вариант теоремы Голдстоуна.

12.2 Калибровочные поля и эффект Хиггса.

Казалось бы появление голдстоуновских частиц с нулевой массой создает нам лишь дополнительные трудности, поскольку основной нашей задачей является решение проблем, связанных с наличием нулевой массы у калибровочных бозонов. Однако это не так! Наоборот, объединение основной идеи калибровочных теорий с концепцией спонтанного нарушения симметрии позволяет прийти к естественной стратегии построения реалистических теорий взаимодействия элементарных частиц.

Рассмотрим взаимодействие скалярного поля φ, нарушающего симметрию, с калибровочным полем A_μ в его простейшем абелевом (максвелловском) варианте. Лагранжиан, инвариантный относительно локальной группы $U(1)$, имеет вид: [5]

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi^*\right]\left[(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi\right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\varphi, \varphi^*)\,, \tag{12.30}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

$$V(\varphi, \varphi^*) = \mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda(\varphi^* \varphi)^2\,, \qquad \mu^2 < 0\,. \tag{12.31}$$

Введем опять представление поля φ через "радиальное" и "угловое" вещественные поля:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\vartheta(x)}\,. \tag{12.32}$$

Но теперь мы можем рассматривать (12.32) как *локальное калибровочное преобразование* группы $U(1)$:

$$\varphi(x) = e^{ie\chi(x)}\varphi'(x)\,, \tag{12.33}$$

[5] Далее в этой главе испоьзуется система единиц Хевисайда.

где

$$\chi(x) = \frac{1}{e}\vartheta(x)\,, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)\,. \tag{12.34}$$

Тогда ковариантная производная, входящая в (12.30) преобразуется следующим образом:

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu + ieA_\mu)e^{ie\chi}\varphi' = e^{ie\chi}(\partial_\mu + ie\partial_\mu\chi + ieA_\mu)\varphi' = e^{ie\chi}(\partial_\mu + ieA'_\mu)\varphi'\,, \tag{12.35}$$

где

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi \tag{12.36}$$

или, с учетом (12.33), (12.34):

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta}(\partial_\mu + ieA'_\mu)\rho\,, \tag{12.37}$$

где

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\vartheta\,. \tag{12.38}$$

В результате, наш лагранжиан принимает вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA'_\mu)\rho][(\partial^\mu + ieA'^\mu)\rho] - V(\rho^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{e^2}{2}\rho^2 A'^\mu A'_\mu - V(\rho^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.\end{aligned} \tag{12.39}$$

Видим, что "угловая" компонента ϑ поля φ исчезла из лагранжиана (а с ней и возможность появления голдстона!), она "откалибровалась" в переопределенный вектор-потенциал.

Разложим теперь (12.39) по степеням отклонения $\rho' = \rho - \eta$ от вакуумного среднего η, сохраняя только квадратичные члены. Тогда получаем:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A'^\mu A'_\mu + \mathrm{const}\,, \tag{12.40}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$. Этот лагранжиан описывает два свободных поля — поле ρ' частиц с массой m и векторное поле A'_μ *с массой*:

$$m_A = e\eta\,, \tag{12.41}$$

целиком обусловленной наличием ненулевого вакуумного среднего скалярного поля. Уравнения движения для этих полей имеют вид:

$$\partial^2_\mu\rho' + m^2\rho' = 0\,, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A'^\nu = 0\,. \tag{12.42}$$

Второе уравнение здесь имеет вид уравнения Прока.

Итак, в исходном лагранжиане у нас было двухкомпонентное поле φ и векторное максвелловское (безмассовое) поле A_μ. При $\mu^2 > 0$, сохраняя только квадратичные по полям члены, мы получили бы лагранжиан двух свободных полей, одно из которых описывает заряженные частицы спина 0, а другое соответствует фотону с нулевой массой покоя и двумя поляризуемостями, т.е. всего 4 типа частиц. При $\mu^2 < 0$ число частиц остается тем же (сохранение числа степеней свободы), но они приняли другой характер — теперь есть одно незаряженное скалярное поле спина 0 и три независимые компоненты векторного бозона со спином 1. Исходно у нас была КЭД скалярного поля, а после перестройки системы полей возникла "совсем другая" теория. Важно, однако подчеркнуть, что все преобразования были точными, так что исходная калибровочная инвариантность теории сохранилась (и была использована), несмотря на возникновение массы у калибровочного поля! Аналогичным образом, сохраняется и свойство перенормируемости.

Возникновение массы у векторного калибровочного поля за счет взаимодействия со скалярным полем, нарушающим симметрию основного состояния, называется *эффектом Хиггса*, а поле ρ обычно называют хиггсовским полем (а соответствующие скалярные частицы — *хиггсовскими бозонами.*).

Отступление: теория Гинзбурга – Ландау.

Покажем, что рассмотренное явление является точным аналогом фазового перехода в сверхпроводящее состояние, описываемого теорией Гинзбурга – Ландау, созданной задолго до открытия феномена Хиггса.

Рассмотрим статический случай модели Хиггса, когда $\partial_0 A^\mu = 0$. Электромагнитное поле будем рассматривать в кулоновской калибровке: $A^\mu = (\varphi = 0, \mathbf{A})$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Тогда лагранжиан (12.30) запишется как:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[(\nabla - ie\mathbf{A})\varphi\right]\left[(\nabla + ie\mathbf{A})\varphi^*\right] - \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2 - \frac{1}{4}\lambda|\varphi|^4 - \frac{1}{4}(\nabla \times \mathbf{A})^2 . \qquad (12.43)$$

Тогда

$$F = -\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}|(\nabla - ie\mathbf{A})\varphi|^2 + \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2 + \frac{1}{4}\lambda|\varphi|^4 \qquad (12.44)$$

представляет собой, в точности, плотность свободной энергии в теории Гинзбурга – Ландау [42], если, конечно, положить $m^2 = a(T - T_c)$, где T_c — температура сверхпроводящего перехода[6]. В этом случае имеем $m^2 > 0$ при температурах $T > T_c$ и $m^2 < 0$ при $T < T_c$. В области $T < T_c$ минимум F достигается при

$$|\varphi|^2 = -\frac{m^2}{\lambda} > 0 , \qquad (12.45)$$

что определяет равновесное значение сверхпроводящего *параметра порядка*, являющегося точным аналогом рассматривавшегося выше вакуумного среднего хиггсовского поля (основное состояние полевой системы, $T = 0$.).

Свободная энергия Гинзбурга – Ландау инвариантна относительно калибровочного преобразования:

$$\varphi \to e^{i\Lambda(x)}\varphi , \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \frac{1}{e}\nabla\Lambda(x) , \qquad (12.46)$$

а соответствующий сохраняющийся ток имеет вид:

$$\mathbf{j} = -\frac{ie}{2}(\varphi^*\nabla\varphi - \varphi\nabla\varphi^*) - e^2|\varphi|^2\mathbf{A} . \qquad (12.47)$$

При $T < T_c$ и однородном в пространстве параметре порядка φ вклад в (12.47) дает только второй член:

$$\mathbf{j} = \frac{e^2m^2}{\lambda}\mathbf{A} , \qquad (12.48)$$

что представляет собой уравнение Лондона. Если учесть еще уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}$, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ и вычислить ротор от обеих частей (12.48), то получим уравнение, для магнитного поля в сверхпроводнике:

$$\nabla^2\mathbf{H} = k^2\mathbf{H} , \qquad k^2 = -\frac{e^2m^2}{\lambda} > 0 , \qquad (12.49)$$

описывающее *эффект Мейсснера* — выталкивание магнитного поля из сверхпроводника. Поле экспоненциально спадает внутри сверхпроводника на длине $|k|^{-1}$ (глубина проникновения) [42].

[6] По сравнению со стандартными обозначениями [42], мы считаем равной 1 массу электрона и скорость света. Более важно, что в теории Гинзбурга – Ландау, по сравнению с (12.44) $e \to 2e$, в соответствии с зарядом куперовских пар, но здесь нам это несущественно.

Наконец, из (12.49) вытекает $\nabla^2 \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A}$, аналогом чего в лоренц-ковариантной форме является уравнение $\Box A_\mu = -k^2 A_\mu$ — "фотон" в сверхпроводнике приобретает "массу" $|k|$, что эквивалентно эффекту Хиггса. Таким образом, модель Хиггса является релятивистским аналогом теории Гинзбурга – Ландау, а хиггсовский вакуум аналогичен, по сути дела, основному состоянию сверхпроводника.

12.3 Поля Янга – Миллса и спонтанное нарушение симметрии.

Перейдем к рассмотрению механизма Хиггса в неабелевых калибровочных теориях. Напомним сначала основные факты, относящиеся к полям Янга – Миллса, на примере хорошо известной нам группы $SU(2)$.

Взаимодействие скалярного поля φ с Янг-Миллсовским полем $\vec{A}_\mu$ (стрелка обозначает вектор в изотопическом пространстве) описывается переходом от обычной производной $\partial_\mu \varphi$ к ковариантной производной вида:

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu)\varphi\,, \tag{12.50}$$

где $\vec{T}$ — генератор калибровочной группы, для $SU(2)$ имеем $\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$.

Напомним, какие условия накладываются на поле $\vec{A}_\mu$ из требования инвариантности лагранжиана относительно локальных калибровочных преобразований. Если поле φ соответствует какому-либо изотопическому мультиплету, то его преобразование при вращении в изопространстве можно записать в виде:

$$\varphi = S\varphi'\,, \tag{12.51}$$

где оператор S зависит от трех параметров (углов) вектора поворота $\vec{\omega}(x)$. Тогда для ковариантной производной имеем:

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi &= S\partial_\mu\varphi' + (\partial_\mu S)\varphi' - ig\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu S\varphi' = \\ &= S(\partial_\mu + S^{-1}\partial_\mu S - igS^{-1}\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu S)\varphi'\,. \end{aligned} \tag{12.52}$$

Для того, чтобы это выражение приняло вид:

$$D_\mu\varphi = S(\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{A}'_\mu)\varphi'\,, \tag{12.53}$$

необходимо потребовать:

$$\vec{T}\cdot\vec{A}'_\mu = S^{-1}(\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu)S + \frac{i}{g}S^{-1}\partial_\mu S\,. \tag{12.54}$$

При малых $\vec{\omega}$ имеем:

$$S = 1 + i\vec{T}\cdot\vec{\omega}\,. \tag{12.55}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu)S &= (1 - i\vec{T}\cdot\vec{\omega})\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu(1 + i\vec{T}\cdot\vec{\omega}) = \\ &= \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu - i[\vec{T}\cdot\vec{\omega}, \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu] = \vec{T}\cdot A_\mu + [\vec{\omega}\times\vec{A}_\mu]\cdot\vec{T}\,, \end{aligned} \tag{12.56}$$

где использовали $[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$ — коммутационное соотношение для генераторов группы $SU(2)$. С учетом $S^{-1}\partial_\mu S = i\vec{T}\cdot\partial_\mu\vec{\omega}$ (12.54) и (12.55) дают общее правило преобразования:

$$\vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu + [\vec{\omega}\times\vec{A}_\mu] - \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\omega}\,, \tag{12.57}$$

так что помимо градиентного преобразования поле Янга – Миллса еще и поворачивается в изопространстве.

Тензор полей Янга – Миллса имеет вид:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu + g[\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu]\,, \tag{12.58}$$

используя (12.57) нетрудно убедиться, что при бесконечно малых вращениях в изопространстве $\vec{F}_{\mu\nu}$ преобразуется как изовектор:

$$\vec{F}'_{\mu\nu} = \vec{F}_{\mu\nu} + [\vec{\omega}\times\vec{F}_{\mu\nu}]\,. \tag{12.59}$$

Лагранжиан поля Янга – Миллса имеет вид:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu}\,, \tag{12.60}$$

что является инвариантом по отношению к преобразованиям локальной калибровочной группы.

Пусть теперь речь идет о янг-миллсовском поле, взаимодействующем со скалярным хиггсовским поле, нарушающим симметрию. Пусть это поле ϕ представляет собой изоспинор, т.е. имеет две комплексных (4 вещественных) компоненты:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\,, \tag{12.61}$$

преобразующиеся при вращениях в изопространстве как:

$$\phi = S\phi'\,, \qquad S = e^{\frac{i}{2}g\vec{\tau}\vec{\omega}(x)}\,. \tag{12.62}$$

При малых $\vec{\omega}$ имеем $S = 1 + ig\vec{\omega}\vec{\tau}/2$.

Лагранжиан системы полей ϕ и $\vec{A}_\mu$ имеет вид:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(\phi) - \frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}\,, \tag{12.63}$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{A}_\mu\,, \tag{12.64}$$

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2\,. \tag{12.65}$$

Тогда для $\mu^2 < 0$ (12.65) имеет минимум при:

$$\phi^*\phi = \frac{1}{2}\eta^2\,, \qquad \eta^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda}\,. \tag{12.66}$$

Вакуумное состояние бесконечнократно вырождено, но мы должны выбрать один определенный вакуум (нарушение симметрии!), например положив:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}\,, \tag{12.67}$$

где η — вещественное положительное число. Перейдем теперь к “полярным” координатам:

$$\phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\vartheta}(x)}\phi'(x) = \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i(\vec{n}\cdot\vec{\tau})\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\phi'(x)\,, \tag{12.68}$$

где

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\vartheta} = \vec{n}\,\vartheta \tag{12.69}$$

и $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении оси, вокруг которой совершается поворот в изопространстве.

Представление (12.68), (12.69) означает параметризацию изоспинора $\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ при помощи четырех вещественных функций: $\rho, \vartheta, \theta, \varphi$, где $\vartheta, \theta, \varphi$ — полярные углы, определяющие направление вектора $\vec{n}$ в изопространстве:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\rho\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\theta e^{i\varphi} \\ \rho\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - i\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\theta\right) \end{pmatrix}, \tag{12.70}$$

причем $\phi^*\phi = \rho^2/2$, $\langle 0|\rho|0\rangle = \eta$, $\langle 0|\vartheta|0\rangle = \langle 0|\theta|0\rangle = \langle 0|\varphi|0\rangle = 0$.

Заметим, что (12.68) тождественно с (12.62), если положить $\vec{\omega} = \vec{\vartheta}/g$. Лагранжиан инвариантен относительно таких преобразований и имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D'_\mu\rho)(D'^{\mu}\rho)^* - V(\rho) - \frac{1}{4}\vec{F}'_{\mu\nu}\vec{F'}^{\mu\nu}\,, \tag{12.71}$$

где в D'_μ и $\vec{F}'_{\mu\nu}$ сделана замена $\vec{A}_\mu \to \vec{A}'_\mu$ соответствующая калибровочному преобразованию (12.57). Видим, что только одна из четырех компонент поля ϕ, а именно ρ, осталась в лагранжиане, остальные поглотились калибровочным преобразованием!

Учитывая форму спинора $\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}$, перепишем лагранжиан в виде (штрих над $\vec{A}_\mu$ опускаем):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{g^2}{8}\rho^2\vec{A}^\mu\cdot\vec{A}_\mu - V(\rho) - \frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}\,, \tag{12.72}$$

где

$$V(\rho) = \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4\,. \tag{12.73}$$

При малых отклонениях от вакуума, разлагая опять $V(\rho)$ по степеням $\rho' = \rho - \eta$ и сохраняя в лагранжиане только квадратичные члены, получим:

$$\mathcal{L} = \mathrm{const} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 - \frac{1}{4}\vec{F}^0_{\mu\nu}\vec{F}^{0\mu\nu} + \frac{1}{8}g^2\eta^2\vec{A}^\mu\cdot\vec{A}_\mu\,, \tag{12.74}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$ и $\vec{F}^0_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu$. Полученный лагранжиан описывает четыре свободных поля — вещественное скалярное поле ρ и триплет векторных полей $\vec{A}_\mu$. Первому отвечают частицы с массой m, а векторным полям — частицы с массой:

$$m_A = \frac{g\eta}{2}\,. \tag{12.75}$$

Таким образом, нарушение симметрии опять привело к появлению массы у частиц векторного (калибровочного) поля $\vec{A}_\mu$. Калибровочная инвариантность теории при этом, очевидно, сохранилась! Общее число степеней свободы не изменилось: вместо трех “исчезнувших” компонент поля ϕ (голдстонов) появились продольно поляризованные компоненты поля $\vec{A}_\mu$. В рассмотренной модели массу приобрели все компоненты поля Янга – Миллса, и продольные и поперечные.

Если мы хотим построить объединенную теорию слабого и электромагнитного взаимодействия, нужно обеспечить массивность векторных бозонов — переносчиков слабого взаимодействия (короткодействие!), но электромагнитное поле сохранить безмассовым. Это можно обеспечить, рассмотрев некоторое обобщение только что рассмотренной $SU(2)$-модели. Для этого заметим, что инвариант $\phi^*\phi$ рассмотренного выше скалярного поля автоматически обладает некоторой дополнительной симметрией, кроме использованной нами симметрии $SU(2)$. В самом деле, поле ϕ можно еще умножить на произвольный фазовый множитель типа $\exp\left[i\frac{f}{2}\lambda(x)\right]$, ничего от этого не изменится. Это преобразование группы $U(1)$, так что в дальнейшем будем говорить о симметрии $SU(2)\otimes U(1)$. Наличие дополнительной абелевой симметрии $U(1)$ означает, что частицам поля ϕ можно приписать, кроме изоспина, еще и некоторый “гиперзаряд”, которому нужно сопоставить еще одно (абелево) калибровочное поле, которое будем обозначать B_μ. В результате, полная симметрия рассматриваемой модели соответствует инвариантности относительно локального калибровочного преобразования вида:

$$\phi = S\phi' \,, \tag{12.76}$$

где

$$S = \exp\left(ig\vec{\omega}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + if\frac{\lambda(x)}{2}\right) \,, \tag{12.77}$$

а лагранжиан теории имеет вид:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(\rho) - \frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \,, \tag{12.78}$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu - i\frac{f}{2}B_\mu \,, \tag{12.79}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \,. \tag{12.80}$$

Дальнейший анализ, фактически, повторяет предыдущее рассмотрение, так что детали опускаем. Оказывается удобным вместо полей $A_{\mu 1}, A_{\mu 2}, A_{\mu 3}$ и B_μ ввести следующие их линейные комбинации:

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\mu 1} + iA_{\mu 2}) \,, \tag{12.81}$$

$$\begin{aligned} Z_\mu &= A_{\mu 3}\cos\alpha - B_\mu\sin\alpha \,, \qquad & A_{\mu 3} &= Z_\mu\cos\alpha + A_\mu\sin\alpha \,, \\ A_\mu &= A_{\mu 3}\sin\alpha + B_\mu\cos\alpha \,, \qquad & B_\mu &= -Z_\mu\sin\alpha + A_\mu\cos\alpha \,, \end{aligned} \tag{12.82}$$

где

$$\cos\alpha = \frac{g}{\tilde{g}} \,, \qquad \sin\alpha = \frac{f}{\tilde{g}} \,, \qquad \tilde{g} = \sqrt{g^2 + f^2} \,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{g} \,. \tag{12.83}$$

Тогда наш лагранжиан (12.78) переписывается через эти новые поля как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 - V(\rho) + \frac{\rho^2}{4}\left[g^2 W^{*\mu} W_\mu + \frac{\tilde{g}^2}{2} Z^\mu Z_\mu\right] - \frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\,. \quad (12.84)$$

Здесь важно, что поле A_μ из (12.82) не вошло в квадратные скобки, так что после возникновения ненулевого вакуумного среднего поля ρ (спонтанного нарушения симметрии) это поле остается безмассовым и может быть отождествлено с обычным электромагнитным полем. В тоже время, поля W_μ и Z_μ приобретают массу:

$$m_W = \frac{g\eta}{2}\,, \qquad m_Z = \frac{\tilde{g}\eta}{2} = \frac{m_W}{\cos\alpha}\,. \quad (12.85)$$

Это сразу же видно из записи лагранжиана (12.84) с точностью до квадратичных по $\rho' = \rho - \eta$, W_μ и Z_μ членов:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 - \frac{1}{2}m^2\rho'^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)(\partial_\mu W^*_\nu - \partial_\nu W^*_\mu) + \\ + \frac{1}{4}g^2\eta^2 W^*_\mu W^\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \frac{1}{8}\tilde{g}^2\eta^2 Z^2_\mu - \\ - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \mathrm{const}\,, \quad (12.86)\end{aligned}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$.

Поле W_μ (12.81) является комплексным, т.е. заряженным, а поля A_μ и Z_μ (12.82) вещественны (нейтральны). Из определения $\vec{F}_{\mu\nu}$ (12.58) и (12.81), (12.82) следует:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(F^1 + iF^2)_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu\,, \quad (12.87)$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_{\mu 3} = \partial_\mu + ig\sin\alpha A_\mu + ig\cos\alpha Z_\mu\,. \quad (12.88)$$

Если отождествить поле A_μ с электромагнитным полем, то из (12.88) следует следующая связь янг-миллсовской константы связи g с электрическим зарядом:

$$e = g\sin\alpha\,. \quad (12.89)$$

Важным свойством рассматриваемой модели является ее перенормируемость. Перенормируемость КЭД имеет “двойную прочность”: она обеспечена во-первых, безмассовостью фотона и, во-вторых, его нейтральностью. Если отказаться от одного из этих свойств, перенормируемость сохраняется, т.е. перенормируемой является, например, теория взаимодействия фермионов с массивным векторным нейтральным полем. Поэтому можно не бояться, что фотон окажется имеющим очень малую, неуловимую до сих пор массу. Теория существенно не пострадает. Перенормируемой является и теория полей Янга – Миллса, состоящих из двух заряженных и одного нейтрального безмассового полей, включая и их взаимодействие с фермионами. Благодаря феномену Хиггса заряженные поля Янга – Миллса могут стать массивными, далее мы будем отождествлять их с промежуточными заряженными W-бозонами — переносчиками слабого взаимодействия, а Z-бозоны с аналогичными нейтральными частицами. Электромагнитное поле A_μ остается в рассматриваемой модели безмассовым. Возникает вопрос — останется ли теория перенормируемой после действия эффекта Хиггса? Можно ожидать, что останется, поскольку все составляющие исходного лагранжиана перенормируемы, а дальше мы ничего особенного не делали, кроме вполне допустимых преобразований и переобозначений. Это ожидание оправдывается и при более строгом рассмотрении.

12.4 Модель Вайнберга – Салама.

Перейдем к описанию единой схемы описания слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц, предложенной Вайнбергом и Саламом. Это единственная реалистическая модель элементарных частиц, которую мы достаточно подробно рассмотрим в нашем курсе. В настоящее время эта модель прекрасно подтверждена экспериментом и лежит в основе стандартной модели. Основная идея теории электрослабого взаимодействия состоит в том, что слабые взаимодействия переносятся калибровочными бозонами ($W^{\pm}, Z$), которые изначально являются безмассовыми, а конечную массу (обеспечивающую короткодействие) приобретают в результате действия механизма Хиггса. Электромагнитное поле, естественно, остается при этом безмассовым. В части, касающейся самих калибровочных полей, такая модель описана в предыдущем разделе. Но нужно еще включить в теорию лептоны — электрон и нейтрино[7], которые исходно также будем предполагать безмассовыми. Механизм Хиггса (спонтанное нарушение симметрии) должно обеспечить возникновение массы у электрона, но не у нейтрино[8].

Начнем со спинорных полей. Лагранжиан Дирака:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{12.90}$$

при $m = 0$ превращается просто в $i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$. Введем, как обычно, для безмассовых фермионов:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi\,, \qquad \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi\,, \qquad \psi = \psi_L + \psi_R\,, \tag{12.91}$$

где $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Тогда

$$i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = i\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L\,, \tag{12.92}$$

поскольку γ^5 антикоммутирует с γ^{μ}. Электрон (мюон и τ-лептон) обладают как L, так и R компонентами, однако согласно двухкомпонентной теории нейтрино ν_e (ν_{μ}, ν_{τ}) обладают только L-компонентами. Тогда исходный лагранжиан лептонов можно записать в виде:

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}e_R + i\bar{e}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}e_L + i\bar{\nu}_e\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\nu_e + (e\to\mu) + (e\to\tau)\,, \tag{12.93}$$

где фермионные поля обозначены символами соответствующих частиц. Вклад высших поколений в дальнейшем не выписываем.

Преобразования калибровочной группы должны затрагивать частицы с одинаковыми пространственно-временными свойствами, т.е. единственная возможность состоит в том, чтобы перемешивать e_L и ν_e. Введем тогда изоспинор:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \tag{12.94}$$

и припишем этому дублету неабелев заряд ("слабый" изоспин) $I_W = 1/2$, соответственно двум компонентам. Нейтрино ν_e соответствует третья компонента $I_W^3 = +1/2$, а "электрону" e_L соответствует $I_W^3 = -1/2$. Остается еще

$$\psi_R = e_R\,, \tag{12.95}$$

[7] Последующие поколения лептонов описываются точно также.

[8] Здесь мы пренебрегаем возможным наличием у нейтрино малой массы покоя.

который считается изосинглетом: $I_W = 0$. Имеем тогда лагранжиан:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L\,, \tag{12.96}$$

который инвариантен относительно преобразований изогруппы $SU(2)$:

$$\psi_L \to e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\vec{\alpha}}\psi_L\,, \qquad \psi_R \to \psi_R \tag{12.97}$$

или подробнее:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}. \tag{12.98}$$

Электрический заряд Q и третья компонента слабого изоспина I_W^3 для левых и правых полей связаны следующими очевидными соотношениями:

$$L: \quad Q = I_W^3 - \frac{1}{2}\,; \qquad R: \quad Q = I_W^3 - 1\,. \tag{12.99}$$

Если сделать эту симметрию локальной калибровочной симметрией, т.е. считать, что $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x)$, возникнут, как мы видели, три безмассовых калибровочных янг-миллсовских поля. Но фотон не будет входить в их число, поскольку правый электрон e_R, являющийся изосинглетом, не будет взаимодействовать с этими полями, тогда как с фотоном он, естественно, должен взаимодействовать. Тут можно воспользоваться тем обстоятельством, что $SU(2)$ не является максимальной симметрией рассматриваемого лагранжиана. На самом деле можно еще подвергнуть e_R простому преобразованию $U(1)$:

$$e_R \to e^{i\beta}e_R\,. \tag{12.100}$$

Но это может быть только общее преобразование для всех полей. Иными словами ν_e и e_L также должны приобрести одинаковый фазовый множитель. При этом фаза для них не обязана совпадать с фазой для R-лептона. Таким образом можно записать:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{in\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}. \tag{12.101}$$

где n — некоторое число, которое еще нужно определить. Эта $U(1)$-симметрия приводит к существованию некоторого сохраняющегося заряда, причем e_R обладает одним значением этого заряда, а ν_e и e_L — другим. Очевидно, что это *не* электрический заряд Q, поскольку ν_e и e_L обладают различными зарядами Q. Соответственно, калибровочное поле, отвечающее этой $U(1)$ симметрии, это вовсе не электромагнитное поле. Вайнберг предложил считать, что эта симметрия соответствет сохранению "слабого гиперзаряда" Y_W, определяемого соотношением[9]:

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2}\,. \tag{12.102}$$

Сравнивая это выражение с (12.99) видим, что для левых и правых лептонов нужно ввести:

$$L: \quad Y_W = -1\,; \qquad R: \quad Y_W = -2\,. \tag{12.103}$$

[9]Это выражение записано по аналогии с формулой Гелл-Манна – Нишиджимы для гиперзаряда теории адронов [27]

Поэтому в (12.101) нужно положить $n = 1/2$, так что константа взаимодействия с гиперзарядовым калибровочным полем для левых полей в два раза меньше соответствующей константы для правых полей. В результате, преобразование группы $U(1)$ приобретает окончательный вид:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\beta/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix}. \tag{12.104}$$

Таким образом, лагранжиан (12.93), (12.96) инвариантен относительно прямого произведения групп $SU(2) \otimes U(1)$. Теорию Янга – Миллса с такой симметрией мы уже рассмотрели в предыдущем разделе. При этом мы ввели четыре калибровочных поля: изотриплет полей $\vec{A}_\mu$ и изосинглет B_μ, для них $Y_W = 0$.

Лептонные поля ψ_L и ψ_R взаимодействуют с полями $\vec{A}_\mu$, B_μ и хиггсовским полем ϕ. Рассмотрим сначала подробней это последнее взаимодействие. Соответствующий вклад в лагранжиан запишем в виде аналогичном (12.12), уже обсуждавшемся выше в связи с механизмом генерации массы фермионов:

$$\mathcal{L}_M = -\sqrt{2}a(\bar{\psi}_L \psi_R \phi + \bar{\psi}_R \psi_L \phi^*)\,, \tag{12.105}$$

где a — безразмерная константа соответствующего (перенормируемого!) взаимодействия. Хиггсовское поле запишем в виде изоспинора:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}, \qquad \phi^* = (\varphi^-, \varphi^{0*})\,, \tag{12.106}$$

компоненты которого соответствуют проекциям слабого изоспина $I_W^3 = \pm 1/2$. Из (12.102) видно, что оно обладает следующими квантовыми числами:

$$I_W = 1/2\,, \qquad Y_W = 1\,. \tag{12.107}$$

Оба поля φ^+ и φ^0 являются комплексными, так что можно записать:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3 + i\varphi_4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \end{pmatrix}, \tag{12.108}$$

где $\varphi_1, ..., \varphi_4$ – действительные поля.

Ковариантная производная, описывающая взаимодействие хиггсовского поля с калибровочными полями имеет вид:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu - \frac{i}{2} f B_\mu)\phi\,. \tag{12.109}$$

В итоге часть лагранжиана, содержащая поле ϕ, равна:

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^4 - \sqrt{2}a(\bar{\psi}_L \psi_R \phi + \bar{\psi}_R \psi_L \phi^*)\,. \tag{12.110}$$

Подробнее (в компонентах) часть этого лагранжиана, соответствующая взаимодействию хиггсовского поля с лептонами, имеет вид:

$$-\sqrt{2}a(\bar{\nu}_e e_R \varphi^+ + \bar{e}_L e_R \varphi^0 + \bar{e}_R \nu_e \varphi^- + \bar{e}_R e_L \varphi^0)\,. \tag{12.111}$$

Далее, имеем:

$$\phi^*\phi = (\varphi^+)^*\varphi^+ + (\varphi^0)^*\varphi^0 = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2)\,. \tag{12.112}$$

При $\mu^2 < 0$ происходит бозе-конденсация хиггсовского поля и минимуму энергии соответствует:

$$\langle 0|(\varphi^*\varphi)|0\rangle = \eta^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}\,. \tag{12.113}$$

Выберем вакуум так, чтобы:

$$\langle 0|\varphi_1|0\rangle = \eta\,, \qquad \langle 0|\varphi_2|0\rangle = \langle 0|\varphi_3|0\rangle = \langle 0|\varphi_4|0\rangle = 0\,, \tag{12.114}$$

т.е.

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}\,. \tag{12.115}$$

Тогда член взаимодействия в низшем порядке (по возбуждениям) имеет вид:

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{2}a(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)\phi = a(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)\eta = a\eta\bar{\psi}\psi\,, \tag{12.116}$$

так что с хиггсовским конденсатом η взаимодействуют только электроны. Это означает, что мы добились того, чего хотели — электрон приобретает массу:

$$m_e = a\eta\,, \tag{12.117}$$

а нейтрино остается безмассовым!

Перейдем теперь к рассмотрению взаимодействия лептонов с калибровочными полями, которое учитывается переходом к ковариантной производной:

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu - if\frac{Y}{2}B_\mu\right)\psi\,, \tag{12.118}$$

где Y — слабый гиперзаряд поля ψ, g и f — константы взаимодействия. Для ψ_L имеем $\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$, $Y = -1$, а для ψ_R соответственно $\vec{T} = 0$ и $Y = -2$. Тогда, связанная с взаимодействием с калибровочными полями часть лагранжиана лептонного поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + i\frac{f}{2}B_\mu\right)\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu(\partial_\mu + ifB_\mu)\psi_R\,. \tag{12.119}$$

Входящие сюда калибровочные поля, как мы видели в (12.81), (12.82), (12.83), можно разделить на три типа полей: поле заряженных тяжелых мезонов W_μ, поле нейтральных тяжелых мезонов Z_μ и электромагнитное поле A_μ. Выпишем отдельно части лагранжиана $\mathcal{L}_W$, $\mathcal{L}_Z$, $\mathcal{L}_A$, соответствующие взаимодействию с этими полями:

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{2}\bar{\psi}_L\gamma^\mu(\tau_1 A_{1\mu} + \tau_2 A_{2\mu})\psi_L = \frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu(\bar{\nu}_e W_\mu e_L + \bar{e}_L W_\mu^*\nu_e)\,. \tag{12.120}$$

Это лагранжиан слабого взаимодействия лептонов за счет обмена $W^\pm$-мезонами (т.н. заряженные токи). Кроме того, имеются взаимодействия с полями $A_{\mu 3}$ и B_μ, из (12.119) они имеют вид:

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}_L\gamma^\mu(g\tau_3 A_{\mu 3} - fB_\mu)\psi_L - f\bar{\psi}_R\gamma^\mu B_\mu\psi_R \tag{12.121}$$

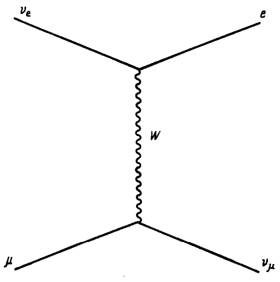


Рис. 12.3:

или, используя (12.82), (12.83),

$$\frac{\tilde{g}}{2}\gamma^\mu[\bar{\nu}_e(\cos\alpha A_{\mu 3} - \sin\alpha B_\mu)\nu_e - \bar{e}_L(\cos\alpha A_{\mu 3} + \sin\alpha B_\mu)e_L - 2\sin\alpha \bar{e}_R B_\mu e_R]\,, \quad (12.122)$$

так что, выражая $A_{\mu 3}$ и B_μ через Z_μ и A_μ согласно (12.82), получаем:

$$\mathcal{L}_Z = \frac{\tilde{g}}{2}\gamma^\mu(\bar{\nu}_e Z_\mu \nu_e - \cos 2\alpha \bar{e}_L Z_\mu e_L + 2\sin^2\alpha \bar{e}_R Z_\mu e_R) \quad (12.123)$$

— слабое взаимодействие за счет обмена нейтральными Z-бозонами (т.н. нейтральные токи), а также

$$\mathcal{L}_A = -g\sin\alpha\gamma^\mu(\bar{e}_L A_\mu e_L + \bar{e}_R A_\mu e_R) \quad (12.124)$$

— электромагнитное взаимодействие. Заметим, что (12.124) еще раз подтверждает выражение для электрического заряда (12.89). Таким образом, рассматриваемая модель дает единое описание слабого и электромагнитного взаимодействия, при котором поля, соответствующие $W^\pm$- и Z-мезонам, а также и обычное электромагнитное поле возникают из фундаментального требования инвариантности теории относительно локальных калибровочных преобразований группы $SU(2)\otimes U(1)$.

В первые годы после построения модели Вайнберга – Салама процессы слабого взаимодействия за счет нейтральных токов (12.123) не были известны, что рассматривалось как серьезный недостаток рассматриваемой модели. Их открытие в CERN в 1973 году послужило первым серьезным подтверждением именно этой теории электрослабого взаимодействия. Простейший процесс слабого взаимодействия — распад мюона μ описывается диаграммой, показанной на Рис. 12.3. Если масса W-мезона существенно больше массы μ, то его пропагатор просто пропорционален $\frac{1}{m_W^2}$, и рассматриваемая амплитуда перехода эквивалентна амплитуде, полученной из феноменологического (непернормируемого) четырехфермионного взаимодействия Ферми (10.96), (10.270), и имеет вид:

$$\frac{g^2}{2m_W^2}(\bar{e}_L\gamma_\alpha\nu_e)(\bar{\nu}_\mu\gamma^\alpha\mu)\,. \quad (12.125)$$

Сравнивая с (10.270), получаем следующее выражение для константы взаимодействия Ферми:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}\,. \quad (12.126)$$

Величина G хорошо известна из эксперимента и дается (10.273). Видим, что ее малая величина (“слабость” слабого взаимодействия), фактически, связана с наличием в знаменателе (12.125) *большой* массы промежуточного бозона, а на самом деле, фундаментальной константой взаимодействия является $g \sim e$! Используя (12.89)) и экспериментально известные значения e и G, можно, с помощью (12.85) и (12.126) найти следующие оценки масс промежуточных бозонов:

$$m_W = \frac{e}{2^{5/4} G^{1/2} \sin\alpha} = \frac{37\,\mathrm{GeV}}{\sin\alpha}\,, \qquad m_Z = \frac{m_W}{\cos\alpha} = \frac{74\,\mathrm{GeV}}{\sin 2\alpha}\,, \tag{12.127}$$

так что $m_W > 37\,\mathrm{GeV}$ и $m_Z > 74\,\mathrm{GeV}$. Используя (12.85) и (12.127) можем написать:

$$\eta = \frac{m_W}{g} = \frac{37\,\mathrm{GeV}}{e} = 122\,\mathrm{GeV}\,. \tag{12.128}$$

Тогда из (12.117) имеем:

$$a = \frac{m_e}{\eta} \approx 5 \cdot 10^{-6}\,, \tag{12.129}$$

так что константа взаимодействия лептонов с хиггсовским полем очень мала.

Экспериментальное исследование процессов слабого взаимодействия посредством нейтральных токов дало, к началу 80-х годов, следующую оценку “угла” α:

$$\sin\alpha \approx 0.47\,. \tag{12.130}$$

Тогда из (12.127) имеем:

$$m_W \approx 78.6\,\mathrm{GeV}\,, \qquad m_Z \approx 89.3\,\mathrm{GeV}\,. \tag{12.131}$$

Триумфом теории стало открытие в 1983 году $W^{\pm}$- и Z-бозонов в прямых экспериментах в CERN с массами $m_W \approx 80\,\mathrm{GeV}$, $m_Z \approx 92\,\mathrm{GeV}$. С тех пор теория электрослабого взаимодействия получила множество экспериментальных подтверждений и является сейчас общепризнанной схемой их описания.

Основной нерешенной проблемой, в настоящее время, является отсутствие прямого экспериментального подтверждения существования хиггсовских частиц. К сожалению, модель Вайнберга – Салама практически не позволяет дать надежную оценку их массы. Как уже отмечалось в Главе 1, осенью 2000 года в CERN были получены довольно убедительные данные о существовании хиггсовских частиц с массой порядка 115 GeV. Подтверждение этого результата сыграло бы решающую роль в завершении экспериментальной проверки “стандартной модели” [10].

Стандартная модель.

“Стандартная модель” элементарных частиц представляет собой соединение теории электрослабого взаимодействия Вайнберга – Салама и уже бегло обсуждавшейся выше квантовой хромодинамики. Полная калибровочная симметрия теории определяется прямым произведением групп цветовой симметрии, слабого изоспина и

[10] К сожалению, руководство CERN приняло решение о прекращении соответствующих экспериментов в связи с планами строительства нового ускорителя на той же площадке. Это решение, обусловленное, в основном, финансовыми соображениями, привело к тому, что окончательная ясность с в данном вопросе может возникнуть только через несколько лет, после завершения строительства и запуска новых экспериментальных установок в США.

слабого гиперзаряда: $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$. Если ограничиться наиболее важным первым поколением фермионов, то фермионный сектор модели определяется:

$$L=\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, \qquad e_R, \qquad Q_L=\begin{pmatrix}u_\alpha\\ d_\alpha\end{pmatrix}_L, \qquad u_{R\alpha}\,, \qquad d_{R\alpha}\,, \tag{12.132}$$

где u и d обозначают соответствующие кварки (α — индекс цвета). Ковариантная производная, определяющая взаимодействие фермионов с полями Янга – Миллса, имеет вид:

$$D_\mu=\partial_\mu-ig_1\frac{Y}{2}B_\mu-ig_2\frac{\tau^i}{2}W^i_\mu-ig_3\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu\,, \tag{12.133}$$

где λ^a — генераторы цветовой группы $SU(3)$ (см. Главу 2), а G^a_μ — векторные поля глюонов. Хиггсовская часть теории описана выше. Глюоны остаются безмассовыми, но они не наблюдаются в свободном состоянии из-за явления конфайнмента, что еще будет обсуждаться ниже. Как уже отмечалось, такой теории достаточно для описания всего окружающего нас мира. На сегодняшний день все ее предсказания согласуются с имеющимися экспериментами [11]. Попытки реального объединения всех взаимодействий в рамках единой калибровочной группы, включающей симметрию стандартной модели $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ в качестве подгруппы называются теориями “великого объединения” (GUT). Их мы кратко обсудим в следующей Главе.

Фазовые переходы в теории поля при конечных температурах.

В заключение остановимся еще на одном, чрезвычайно интересном, направлении современной квантовой теории поля. Мы видели, что в основе теории электрослабого взаимодействия лежит явление спонтанного нарушения симметрии и механизм Хиггса. Выше уже отмечалось, что это явление представляет собой типичный фазовый переход, типа происходящего в сверхпроводниках. Из теории конденсированного состояния мы хорошо знаем, что всякое нарушение симметрии исчезает при достаточно высокой температуре $T>T_c$, когда система переходит в симметричную фазу. Такое же явление имеет место и в рассматриваемых моделях квантовой теории поля. Впервые это было ясно продемонстрировано в работах Киржница и Линде [43]. Соответствующий анализ можно провести, используя стандартную (мацубаровскую) формулировку квантовой теории поля при конечных температурах [13]. Не имея возможности обсуждать эти интересные вопросы в рамках данного курса, мы упомянем только самые основные выводы.

Вакуумное среднее хиггсовского поля, играющее роль параметра порядка обращается в нуль при температурах $T>T_c$, где

$$T_c\approx\sqrt{\frac{3|\mu^2|}{\lambda}}\sim\eta(0)\sim 10^2\div 10^3\,\mathrm{GeV}\,. \tag{12.134}$$

При $T<T_c$ параметр порядка ведет себя более или менее обычным образом:

$$\eta^2(T)=\frac{|\mu^2|}{\lambda}-\Phi(T)\,, \tag{12.135}$$

[11] Краткий обзор экспериментального состояния стандартной модели можно найти в статье: M.K. Gaillard, P.D. Grannis, F.J. Sciulli. Rev. Mod. Phys. **71**, S96 (1999), значение этой теории в “повседневной” жизни хорошо описано в статье: R.N. Cahn. Rev. Mod. Phys. **68**, 951 (1996).

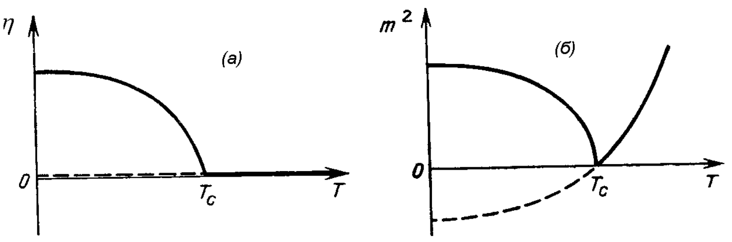


Рис. 12.4:

где $\Phi(T)$, некоторая возрастающая функция температуры. В результате возникает поведение параметра порядка, показанное на Рис. 12.4(а). Но массы частиц, возникающие при спонтанном нарушении симметрии, как мы видели выше, пропорциональны вакуумному среднему η при $T = 0$. Соответственно, при росте температуры массы калибровочных бозонов, лептонов и других частиц уменьшаются и при $T = T_c$ *обращаются в нуль*, как это показано на Рис. 12.4(б). Даже на уровне такого простейшего обсуждения ясно, что исчезновение масс частиц и возникновение мощных дальнодействующих сил может играть огромную роль в задачах космологии, поскольку в первые мгновения после "большого взрыва" температура Вселенной была очень высока. Эти выводы повлекли бурное развитие новых подходов в космологии [43,44]. Аналогичные эффекты могут играть существенную роль и в экспериментах по столкновению очень тяжелых ядер, когда развиваются также очень высокие температуры.

В настоящее время анализ температурных эффектов в квантовой теории поля превратился в необходимую составляющую часть теории элементарных частиц, что более, чем что - либо другое подчеркивает единство квантовой теории поля и современной статистической физики.

Глава 13

ПЕРЕНОРМИРОВКА

13.1 Расходимости в теории φ^4.

Понятие перенормируемости играет в современной квантовой теории поля совершенно фундаментальную роль. Только перенормируемые теории считаются имеющими физический смысл. Мы уже провели достаточно краткое обсуждение перенормируемости на примере КЭД в Главе 8. Сейчас мы вернемся к более подробному обсуждению.

В основном, мы будем рассматривать простейшую скалярную теорию поля $g\varphi^4$, которая довольно подробно рассматривалась выше в Главе 10. Мы уже встречались там с типичными расходимостями типа (10.125). Перейдем к более серьезному их анализу. Пользуясь правилами диаграммной техники выпишем опять первую поправку к собственно-энергетической части, изображаемую графиком Рис. 13.1. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид:

$$\frac{1}{i}\Sigma = -ig\frac{1}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-m^2}\,, \tag{13.1}$$

где учтен фактор симметрии 1/2. В числителе подинтегрального выражения стоит четвертая, а в знаменателе — вторая степень q, соответственно интеграл квадратично расходится при больших q (на верхнем пределе), имеем "ультрафиолетовую" расходимость. Эта диаграмма $\sim g$.

Другая типичная расходимость возникает в порядке $\sim g^2$ от диаграммы, показанной на Рис. 13.2, где $p_1 + p_2 = q$ и $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$. Соответствующее аналитическое выражение есть:

$$-g^2\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2}\,. \tag{13.2}$$

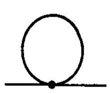


Рис. 13.1:

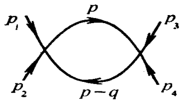


Рис. 13.2:

Здесь имеется четвертая степень p, как в числителе, так и в знаменателе, что приводит к логарифмической расходимости[1].

Посмотрим как можно определить степень расходимости произвольного графика. Подобный анализ уже проводился нами для КЭД в Главе 8. Но здесь мы уделим ему большее внимание. Очевидно, что в произвольной диаграмме каждый пропагатор дает вклад в знаменатель подинтегрального выражения $\sim p^2$ (при больших p массой m можно просто пренебречь!), а каждая вершина дает вклад в числитель $\sim p^4$, а также δ-функцию, выражающую закон сохранения импульса в этой вершине. Число независимых импульсов, по которым ведется интегрирование, равно числу замкнутых петель в диаграмме. В рассмотренных примерах это число равно 1 (однопетлевые диаграммы). Рассмотрим диаграмму порядка $\sim g^n$, т.е. с n вершинами. Пусть у нее имеется E внешних линий, I внутренних и L петель. Для общности рассмотрим пространство-время с размерностью d — в этом случае вершины дают вклад в числитель, равный p^d. Определим *условную степень расходимости* D данной диаграммы как:

$$D = dL - 2I\,. \tag{13.3}$$

Для рассмотренных выше диаграмм имеем, как уже отмечено, $D = 2$ и $D = 0$. Можно теперь выразить D через E и n, исключив I и L. В самом деле, имеется всего I внутренних импульсов. В каждой из n вершин сохраняется импульс, однако имеется еще и полный закон сохранения импульса в процессе рассеяния, описываемого данной диаграммой (импульсы внешних линий фиксированы). В результате имеется всего $n-1$ соотношений между импульсами (по которым ведется интегрирование). Таким образом остается всего $I-n+1$ независимых импульсов интегрирования. Но это число равно L:

$$L = I - n + 1\,. \tag{13.4}$$

В теории φ^4 в каждую вершину входит четыре линии, так что всего имеется $4n$ линий, часть их них внутренние, а часть — внешние. При подсчете числа линий внутренние линии учитываются дважды, поскольку они связывают две вершины. Тогда имеем:

$$4n = E + 2I\,. \tag{13.5}$$

Из (13.3), (13.4), (13.5) немедленно получаем:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right)E + n(d-4)\,. \tag{13.6}$$

В частности, для $d = 4$ имеем:

$$D = 4 - E\,, \tag{13.7}$$

[1]Фактически, мы уже довольно подробно рассматривали такие диаграммы при обсуждении теории критических явлений в четырехмерном пространстве, где проблема расходимости решалась введением естественного параметра обрезания Λ, порядка обратной постоянной решетки.

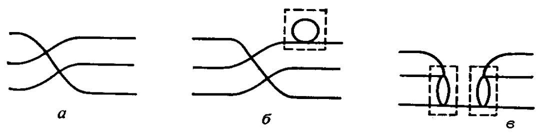


Рис. 13.3:

откуда, в частности, получаются правильные результаты для рассмотренных выше простейших диаграмм. Из (13.7) видно, что степень расходимости уменьшается с ростом числа внешних линий (и зависит только от него!) [2].

Вернемся, однако, к обсуждению общей формулы (13.6) и рассмотрим последнее слагаемое в этом выражении. Если коэффициент при n больше нуля, то ситуация безнадежна — степень расходимости D растет с ростом n, так что полная теория, просуммированная по всем n будет содержать бесконечное число членов, каждый из которых содержит расходимость более высокой степени, чем предыдущий. Это означает неперенормируемость теории. В теории φ^4 при $d = 4$ степень расходимости зависит только от E и не зависит от порядка теории возмущений, так что мы имеем конечное число *типов* расходимостей и можно надеяться, что соответствующие бесконечные вклады можно исключить с помощью конечного числа (бесконечных) перенормировок соответствующих физических величин (перенормируемая теория). Конечное число типов расходимостей — *необходимое* условие перенормируемости.

Полезно рассмотреть аналогичные формулы для случая теории с взаимодействием φ^r. Соотношения (13.3) и (13.4) тогда не меняются, а равенство (13.5) переходит в:

$$rn = E + 2I\,, \tag{13.8}$$

так что (13.6) переписывается в виде:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + n\left[\frac{r}{2}(d-2) - d\right]\,. \tag{13.9}$$

Отсюда для $d = 4$ имеем:

$$D = 4 - E + n(r-4)\,. \tag{13.10}$$

Для теории φ^6 имеем $D = 4 - E + 2n$ — она неперенормируема. С другой стороны, для теории φ^3 имеем $D = 4 - E - n$ — степень расходимости D убывает с ростом n, так что при заданном E существует только конечное число расходящихся диаграмм — суперперенормируемая теория [3]. Отметим, что для $d = 2$ имеем $D = 2 - 2n$ и не зависит от r.

Вернемся, однако, к (13.7) и обсудим вопрос о сходимости или расходимости графиков с $E > 4$. В теории φ^4 число E всегда четно. Рассмотрим, для примера, графики, показанные на Рис. 13.3. Здесь $E = 6$, так что по критерию (13.7) они должны, вроде бы, сходиться. Это верно для графика Рис. 13.3(а), но заведомо неверно для (б) и (в), поскольку они содержат "скрытые" расходимости от уже рассмотренных нами петель. Именно поэтому мы и назвали D условной степенью расходимости. Существенно, что справедливо обратное утверждение: диаграмма Фейнмана сходится,

[2] Может показаться, что вообще все диаграммы с числом внешних концов, большим 4, сходятся. Например, для $E = 6$ имеем $D = -2$. Это, как мы увидим, неверно.

[3] Эта теория, однако, нехороша, поскольку в ней отсутствует устойчивое основное состояние.

если ее степень расходимости D, а также степени расходимости всех ее подграфов отрицательны (теорема Вайнберга).

Две рассмотренные выше расходящиеся диаграммы Рис. 13.1 и Рис. 13.2, называются *примитивно расходящимися* диаграммами. Ими исчерпываются все примитивно расходящиеся диаграммы теории φ^4 (типы расходимостей).

Анализ размерностей.

Проведем анализ размерностей в d-мерном пространстве. Действие $S = \int d^d x \mathcal{L}$ безразмерно. Отсюда легко находим:

$$[\mathcal{L}] = L^{-d}\,, \qquad [\mathcal{L}] = \Lambda^d\,, \tag{13.11}$$

где L — длина, а Λ — импульс. Из члена $\sim \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$ в $\mathcal{L}$, с учетом $[\partial_\mu] = L^{-1}$, имеем:

$$[\varphi] = L^{1-\frac{d}{2}} = \Lambda^{\frac{d}{2}-1}\,. \tag{13.12}$$

Рассмотрим взаимодействие $g\varphi^r$. Если ввести размерность константы связи как $[g] = L^{-\delta} = \Lambda^\delta$, то, очевидно, имеем $-\delta + r\left(1 - \frac{d}{2}\right) = -d$, так что эта размерность равна:

$$\delta = d + r - \frac{rd}{2}\,. \tag{13.13}$$

Поэтому размерность константы связи в разных теориях есть:

$$\begin{array}{llllll}
g\varphi^4: & \delta = 4 - d\,, & [g] = \Lambda^{4-d}\,, & \delta \geq 0 & \text{для} & d \leq 4\,, \\
g\varphi^3: & \delta = 3 - \frac{d}{2}\,, & [g] = \Lambda^{3-\frac{d}{2}}\,, & \delta \geq 0 & \text{для} & d \leq 6\,, \\
g\varphi^6: & \delta = 6 - 2d\,, & [g] = \Lambda^{6-2d}\,, & \delta \geq 0 & \text{для} & d \leq 3\,.
\end{array} \tag{13.14}$$

Исключая r из равенств (13.9), (13.13), получаем:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E - n\delta\,. \tag{13.15}$$

В частности, для $d = 4$ имеем $D = 4 - E - n\delta$. Отсюда ясно, что необходимым условием перенормируемости теории является условие $\delta \geq 0$. Выше, для простоты, мы все время говорили о безразмерности константы связи ($\delta = 0$), как о необходимом условии перенормируемости. В (13.14) указано, когда это условие выполняется для простейших моделей взаимодействия. Видим, что здесь существует также и весьма существенная зависимость от размерности пространства.

В заключение, приведем таблицу "канонических" размерностей различных многоточечных функций Грина и вершинных частей [8]:

Полевая функция	Размерность в единицах Λ	Размерность при $d=4$
φ	$\frac{d}{2}-1$	1
$G^{(n)}(x_1,...,x_n)$	$n\left(\frac{d}{2}-1\right)$	n
$G^{(n)}(p_1,...,p_n)$	$-nd+n\left(\frac{d}{2}-1\right)=-n\left(\frac{d}{2}+1\right)$	$-3n$
$\bar{G}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})$	$d-n\left(\frac{d}{2}+1\right)$	$4-3n$
$\Gamma^{(2)}(x-y)$	$2+d$	6
$\Gamma^{(n)}(x_1,...x_n)$	$n\left(\frac{d}{2}+1\right)$	$3n$
$\Gamma^{(n)}(p_1,...,p_n)$	$-dn+n\left(\frac{d}{2}+1\right)=n\left(1-\frac{d}{2}\right)$	$-n$
$\bar{\Gamma}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})$	$d+n\left(1-\frac{d}{2}\right)$	$4-n$

Здесь, в дополнение к уже известным нам многоточечным функциям и вершинам введены $\bar{G}^{(n)}$ и $\bar{\Gamma}^{(n)}$, определенные равенствами:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(p_1,...,p_n) &= \bar{G}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})\delta(p_1+...+p_n)\,, \\ \Gamma^{(n)}(p_1,...,p_n) &= \bar{\Gamma}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})\delta(p_1+...+p_n)\,, \end{aligned} \tag{13.16}$$

где выделена, в явном виде, δ-функция полного закона сохранения импульса (имеющая, в единицах Λ, размерность $-d$).

13.2 Размерная регуляризация теории φ^4.

Для того, чтобы провести анализ расходимостей фейнмановских графиков, необходимо сначала научиться эти расходимости корректно выделять. Это достигается тем или иным методом *регуляризации* фейнмановских интегралов. Выше (например при обсуждении расходимостей в КЭД)[4] мы использовали простейший метод регуляризации, основанный на введении параметра обрезания Λ на верхнем пределе. Этот метод явно нарушает релятивистскую инвариантность, поскольку он эквивалентен введению “минимальной длины”. Существует более современный и элегантный подход, называемый размерной регуляризацией (т’Хоофт и Вельтман), к изложению которого мы сейчас и переходим. Идея этого метода, близкая, по существу, к методике рассмотрения критических явлений в пространстве с размерностью $d=4-\varepsilon$ (Вильсон), состоит в том, чтобы рассматривать интегралы, содержащие расходимости, как интегралы в пространстве с произвольной $d<4$, а затем перейти к пределу $d\to 4$. Оказывается, что сингулярности рассмотренных выше однопетлевых графиков являются простыми полюсами по переменной $\varepsilon=d-4$.

Обобщим сначала лагранжиан четырехмерной теории:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{13.17}$$

на случай d измерений. Поскольку поле φ имеет размерность $\frac{d}{2}-1$, а лагранжиан $\mathcal{L}$ — размерность d, константа связи g безразмерна при $d=4$ и для того, чтобы она

[4]Глава 8.

оставалась безразмерной в d измерениях, ее необходимо умножить на μ^{4-d}, где μ — ***произвольный*** параметр размерности массы (импульса)[5] . Таким образом, далее будем рассматривать теорию с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4!}g\mu^{4-d}\varphi^4 \,. \tag{13.18}$$

Вычислим простейшую поправку к собственно - энергетической части, изображенную графиком Рис. 13.1. Аналогично (13.1) она определяется интегралом:

$$\frac{1}{2}g\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2-m^2}\,. \tag{13.19}$$

Это интеграл нужно вычислить при произвольном d.

Интегрирование в d-измерениях.

Работаем в d-мерном "пространстве Минковского" с одним временным и $d-1$ пространственными измерениями ($d \le 4$). Нас интересуют интегралы вида:

$$I_d(q) = \int d^dp\frac{1}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha}\,, \tag{13.20}$$

где $p = (p_0, \mathbf{r})$. Введем полярные координаты $(p_0, r, \varphi, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{d-3})$, так что:

$$d^dp = dp_0r^{d-2}drd\varphi\sin\theta_1d\theta_1\sin^2\theta_2d\theta_2...\sin^{d-3}\theta_{d-3}d\theta_{d-3} = dp_0r^{d-2}drd\varphi\prod_{k=1}^{d-3}\sin^k\theta_kd\theta_k\,,$$

$$(-\infty < p_0 < \infty\,,\ \ 0 < r < \infty\,,\ \ 0 < \varphi < 2\pi\,,\ \ 0 < \theta_k < \pi)\,. \tag{13.21}$$

Тогда:

$$I_d(q) = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_0\int\limits_0^{+\infty}dr\,r^{d-2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\prod_{k=1}^{d-3}\sin^k\theta_kd\theta_k}{(p_0^2-r^2+2p_0q_0-2r|\mathbf{q}|\cos\theta_{d-3}-m^2)^\alpha}\,. \tag{13.22}$$

Прямые вычисления [8] дают

$$I_d(q) = i\pi^{d/2}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{[-q^2-m^2]^{\alpha-d/2}}\,. \tag{13.23}$$

Используя (13.23), получаем для (13.19):

$$-\frac{ig}{32\pi^2}m^2\left(-\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \tag{13.24}$$

Γ-функция имеет полюса в нуле и в отрицательных целых точках. Видим, что расходимость (13.24) проявляется как простой полюс при $d \to 4$. Можно показать, что:

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\psi_1(n+1)+O(\varepsilon)\right]\,, \tag{13.25}$$

где $\psi_1(z) = d\ln\Gamma(z)/dz = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная Γ-функции, для которой имеем: $\psi_1(n+1) = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\gamma$, где $\gamma = -\psi_1(1) = 0.577$ — постоянная Эйлера. Полагая $\varepsilon = 4-d$ получаем:

$$\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\varepsilon}-1+\gamma+O(\varepsilon)\,. \tag{13.26}$$

---

[5] Произвольность параметра μ очевидна ввиду последующего предельного перехода $d \to 4$

В результате, используя $a^\varepsilon = 1+\varepsilon \ln a + ...$, получаем следующее разложение (13.24) вблизи $d=4$:

$$-\frac{igm^2}{32\pi^2}\left[-\frac{2}{\varepsilon}-1+\gamma+O(\varepsilon)\right]\left[1+\frac{\varepsilon}{2}\ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right]=$$
$$=\frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon}+\frac{igm^2}{32\pi^2}\left[1-\gamma+\ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right]+O(\varepsilon)=$$
$$=\frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon}+\text{Конечное выражение}\,. \tag{13.27}$$

Конечный вклад не играет тут особенно важной роли, заметим, все же, что он зависит от произвольного фактора μ. Главное, что нам удалось корректно выделить расходимость, при $\varepsilon > 0$ этот вклад конечен и с ним можно работать обычным образом.

Вычислим теперь 4-точечную функцию, с точностью до членов $\sim g^2$. Аналогично (13.2) для вклада диаграммы Рис. 13.2 имеем:

$$-\frac{1}{2}g^2(\mu^2)^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2}\,. \tag{13.28}$$

Знаменатели в подинтегральном выражении можно объединить с помощью формулы Фейнмана:

$$\frac{1}{ab}=\int\limits_0^1\frac{dz}{[az+b(1-z)]^2}\,. \tag{13.29}$$

Эта формула выводится из:

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^2}\,, \tag{13.30}$$

если положить $x=az+b(1-z)$, причем a и b следует считать комплексными, чтобы исключить сингулярность при $a=b$. Имеем теперь:

$$\frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2}=\int\limits_0^1\frac{dz}{[p^2-m^2-2pq(1-z)+q^2(1-z)]^2}\,. \tag{13.31}$$

Совершая замену переменных $p'=p-q(1-z)$ видим, что знаменатель подинтегрального выражения является квадратом от ${p'}^2-m^2+q^2z(1-z)$. Однако $d^dp'=d^dp$, так что после переобозначения $p'\to p$ (13.28) приобретает вид:

$$-\frac{1}{2}g^2(\mu^2)^{4-d}\int\limits_0^1 dz\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[p^2-m^2+q^2z(1-z)]^2}\,. \tag{13.32}$$

Используя (13.23) имеем отсюда:

$$\frac{ig^2}{2}(\mu^2)^{4-d}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{d/2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}\int\limits_0^1 dz[q^2z(1-z)-m^2]^{d/2-2}=$$
$$=\frac{ig^2}{32\pi^2}(\mu^2)^{2-d/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int\limits_0^1 dz\left[\frac{q^2z(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right]^{\frac{d}{2}-2}\,. \tag{13.33}$$

В пределе $d \to 4$ из (13.25) имеем:

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)\,, \tag{13.34}$$

так что, с использованием $a^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln a$, (13.33) принимает вид:

$$\frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)\right)\left\{1 - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^1 dz \ln\left[\frac{q^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2}\right]\right\} =$$
$$= \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} - \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left\{\gamma + \int\limits_0^1 \ln\left[\frac{q^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2}\right]\right\}. \tag{13.35}$$

В этом выражении главный (расходящийся) член зависит от μ, а конечная часть от квадрата суммарного импульса $(p_1 + p_2)^2 = q^2 = s$ (переменной Манделстама). Определим функцию:

$$F(s, m, \mu) = \int\limits_0^1 dz \ln\left[\frac{sz(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2}\right]. \tag{13.36}$$

Тогда итоговое выражение для вклада диаграммы Рис. 13.2 имеет вид:

$$-\frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}[\gamma + F(s, m, \mu)] = -\frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \text{Конечное выражение}\,. \tag{13.37}$$

Итак, мы получили в явном виде поправки низшего порядка к 2-х и 4-точечной функциям в теории φ^4. Выпишем теперь соответствующие 1ЧН-вершины $\Gamma^{(2)}(p)$ и $\Gamma^{(4)}(p_i)$. Выражение (13.27) сводится согласно (13.1) к $\frac{1}{i}\Sigma$, так что в первом порядке по g имеем:

$$\Sigma(p) = -\frac{gm^2}{16\pi^2\varepsilon} + \text{Конечное выражение}\,. \tag{13.38}$$

Соответственно, из определения $\Gamma^{(2)}(p) = G^{-1}(p)G(p)G^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p)$ имеем:

$$\Gamma^{(2)}(p) = G^{-1}(p) = p^2 - m^2\left(1 - \frac{g}{16\pi^2\varepsilon}\right). \tag{13.39}$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 4$ это выражение расходится.

Далее, 4-точечная вершина $\Gamma^{(4)}(p_1, ..., p_4)$ в импульсном представлении выражается как:

$$\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = G^{-1}(p_1)G^{-1}(p_2)G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)G^{-1}(p_3)G^{-1}(p_4) \tag{13.40}$$

и представляется суммой диаграмм, показанных на Рис. 13.4, соответствующих учету всех кроссинг каналов, вклад которых получается из (13.37) и еще двух аналогичных членов, получаемых из (13.37) заменой манделстамовской переменной s на t и u (см. Главу 5):

$$s = (p_1 + p_2)^2\,, \qquad t = (p_1 + p_3)^2\,, \qquad u = (p_1 + p_4)^2\,. \tag{13.41}$$

Действие функций $G^{-1}(p_i)$ сводится в (13.40) к “обрубанию” внешних концов. В

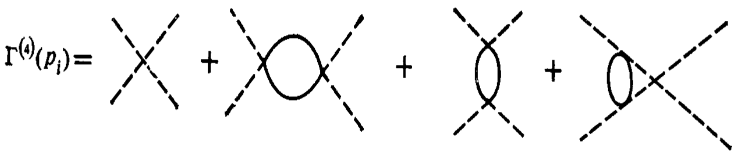


Рис. 13.4:

итоге получаем:

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = -ig\mu^\varepsilon - \frac{3ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}[3\gamma + F(s,m,\mu) + F(t,m,\mu) + F(u,m,\mu)] =$$
$$= -ig\mu^\varepsilon\left(1 + \frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}\right) + \text{Конечное выражение}\,. \qquad (13.42)$$

Основной вклад здесь также бесконечен при $\varepsilon \to 0$. Чтобы вершины $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ имели физический смысл, они должны быть конечны. Для этого и нужно проводить перенормировку!

Петлевое разложение.

Заметим, что в наших вычислениях рассматривались диаграммы с одинаковым числом петель: оно было равно 1 (однопетлевое приближение). Существуют соображения, из которых видно, что разложение по числу петель, в некотором смысле, даже более интересно, чем обычное разложение теории возмущений по степеням g. Разложение по числу петель L эквивалентно разложению по степеням постоянной Планка $\hbar$. В самом деле, восстанавливая везде $\hbar$, можем записать производящий функционал теории в виде:

$$Z[J(x)] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int dx[\mathcal{L}(x) + \hbar J(x)\varphi(x)]\right\}\,. \qquad (13.43)$$

Вводя $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, можем написать:

$$Z[J] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} Z_0[J]\,, \qquad (13.44)$$

где

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\exp\left[-\frac{1}{2}i\hbar\int dx\int dy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\,. \qquad (13.45)$$

Из (13.44) следует, что каждая вершина дает множитель $\hbar^{-1}$ в произвольный график n-го порядка обычной теории возмущений, а из (13.45) следует, что при этом каждый пропагатор дает множитель $\hbar$. Таким образом, данный график содержит множитель $\hbar^{I-n} = \hbar^{L-1}$ (где мы использовали выведенное выше соотношение (13.4): $L = I - n + 1$, где I — число внутренних линий данной диаграммы). Поэтому разложение по числу петель действительно является разложением по степеням $\hbar$, т.е. разложением “в окрестности” классической теории.

13.3 Перенормировка теории φ^4.

Наша цель теперь — сделать физические величины конечными! В однопетлевом приближении перенормировку несложно выполнить в явном виде. Поскольку после регуляризации все величины у нас конечны, то можно действовать прямым путем. Из определения физической массы частицы ясно, что обратный пропагатор *должен* иметь вид:

$$G^{-1}(p) = \Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m_1^2 \qquad \text{или} \qquad m_1^2 = -\Gamma^{(2)}(0) = -G^{-1}(0)\,, \qquad (13.46)$$

где физическая масса m_1 конечна. Первоначальная (“затравочная”) масса m, входящая в лагранжиан не имеет непосредственного физического смысла и, в пределе $d \to 4$ может быть и бесконечной. Это масса, которой частица обладала-бы в отсутствие взаимодействия, так что это ненаблюдаемая величина, только m_1 имеет физический смысл и должна быть конечна. Из (13.39) и определения (13.46) имеем:

$$m_1^2 = m^2 \left(1 - \frac{g}{16\pi^2 \varepsilon}\right) . \tag{13.47}$$

Но во втором слагаемом в правой части этого выражения можно, с той же точностью $\sim g$, заменить m на m_1, что дает:

$$m_1^2 = m^2 - \frac{g}{16\pi\varepsilon} m_1^2 , \tag{13.48}$$

откуда получаем:

$$m^2 = m_1^2 \left(1 + \frac{g}{16\pi^2 \varepsilon}\right) . \tag{13.49}$$

Вот такой должна быть “затравочная” масса, чтобы в однопетлевом приближении физическая масса равнялась фиксированному значению m_1. Видим, что при $\varepsilon \to 0$ величина m расходится, но конечность m_1 обеспечена!

Аналогичным образом можно рассмотреть и вершину $\Gamma^{(4)}$. Перепишем (13.42) в виде:

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g\mu^\varepsilon + \frac{g^2 \mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma - F(s,m,\mu) - F(t,m,\mu) - F(u,m,\mu)\right] . \tag{13.50}$$

Определим теперь перенормированную (конечную!) константу связи g_1 соотношением:

$$g_1 = i\Gamma^{(4)}(p_i = 0) , \tag{13.51}$$

т.е. через вершину взаимодействия частиц с нулевыми импульсами. Тогда из (13.50) получаем:

$$g_1 = g\mu^\varepsilon + \frac{g^2 \mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma - 3F(0,m,\mu)\right] . \tag{13.52}$$

Считая g_1 фиксированной конечной величиной, сразу видим, что “затравочную” константу связи g нужно сделать бесконечной (при $\varepsilon \to 0$). В самом деле, перестраивая выражение (13.52) с помощью замен g на $g_1\mu^{-\varepsilon}$ и m на m_1 там где это требуется (что всегда можно сделать с точностью до интересующих нас членов $\sim g^2$), можно получить выражение для g через g_1, аналогичное (13.49):

$$g = g_1\mu^{-\varepsilon} - \frac{3g_1^2 \mu^{-2\varepsilon}}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - F(0,m_1,\mu)\right] . \tag{13.53}$$

Тогда можно выразить $\Gamma^{(4)}$ (13.50) через g_1 так:

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g_1 - \frac{g_1^2 \mu^{-\varepsilon}}{32\pi^2} [F(s,m_1,\mu) + F(t,m_1,\mu) + F(u,m_1,\mu) - 3F(0,m_1,\mu)] . \tag{13.54}$$

Отсюда непосредственно следует (13.51), поскольку при $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ имеем $s = t = u = 0$. Таким образом, физическая (перенормированная) константа связи g_1

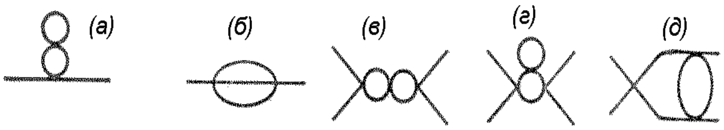


Рис. 13.5:

совпадает с величиной $i\Gamma^{(4)}$ в точке, где все внешние импульсы равны нулю[6]. Теперь все у нас стало конечным! Мы полностью провели перенормировку в однопетлевом приближении.

Как все это выглядит в двухпетлевом приближении? В этом случае надо рассмотреть диаграммы, показанные на Рис. 13.5. Соответствующий анализ показывает, что в этом случае величина $G^{-1}(p) = \Gamma^{(2)}(p)$ приобретает дополнительную расходимость от диаграммы Рис. 13.5(б). Эта расходимость не устраняется перенормировкой массы и константы связи. Она поглощается дополнительным мультипликативным фактором, который вводится доопределением перенормированной 2-точечной функции соотношением:

$$G_r^{-1} = \Gamma_r^{(2)} = Z_\varphi(g_1, m_1, \mu)\Gamma^{(2)}(p, m_1)\,. \tag{13.55}$$

Здесь величина $\Gamma_r^{(2)}$ является конечной, а фактор Z_φ — бесконечен. Величина $Z_\varphi^{1/2}$ называется константой перенормировки волновой функции. Для Z_φ можно написать разложение в ряд по числу петель, которое имеет вид:

$$Z_\varphi = 1 + g_1 Z_1 + g_1^2 Z_2 + ... = 1 + g_1^2 Z_2 + ...\,, \tag{13.56}$$

поскольку однопетлевой вклад отсутствует. Перенормировка волновой функции (амплитуды поля) не может быть совершенно произвольной. Для ее определения нужно потребовать, чтобы в некоторой точке, скажем $p^2 = 0$, выполнялось условие:

$$\left.\frac{\partial}{\partial p^2} G_r^{-1}(p)\right|_{p^2=0} = \left.\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_r^{(2)}\right|_{p^2=0} = 1\,. \tag{13.57}$$

Выбор точки $p^2 = 0$ достаточно произволен.

Расходимость Z_φ означает, что в двухпетлевом приближении ранее определенная величина m_1 бесконечна (в пределе $\varepsilon \to 0$). Однако перенормированная $G_r^{-1}(p) = \Gamma_r^{(2)}$ дает конечное значение перенормированной массы m_r:

$$m_r^2 = Z_\varphi m_1^2\,. \tag{13.58}$$

Иначе говоря, расходимости Z_φ и m_1^2 сокращаются. Аналогичным образом изменяется и значение перенормированной константы связи. Для $\Gamma_r^{(4)}$ имеет место соотношение, аналогичное (13.55):

$$\Gamma_r^{(4)} = Z_\varphi^2 \Gamma^{(4)}(p, m_1, \mu) \tag{13.59}$$

[6]Это, впрочем, не единственный способ определения пернормированной константы связи. Иногда g_1 определяют через $i\Gamma^{(4)}$ в так называемой симметричной точке $p_i^2 = m^2$, $p_i p_j = -m^2/3$ $(i \neq j)$, что соответствует $s = t = u = 4m^2/3$.

$$= \frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon} + \text{конечная часть}$$

Рис. 13.6:

и, следовательно, новая перенормированная константа связи g_r, определяемая соотношением, аналогичным (13.46), имеет вид:

$$i\Gamma_r^{(4)}(p_i = 0) = g_r = Z_\varphi^2 g_1 \,. \tag{13.60}$$

Фактор Z_φ является функцией переменной $g\mu^\varepsilon$, выписывая эту зависимость явно, получаем перенормированную n-частичную вершинную функцию в виде:

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) = Z_\varphi^{n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) \tag{13.61}$$

или

$$\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\varphi^{-n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \,. \tag{13.62}$$

Таким образом и в двухпетлевом приближении теория может быть сделана конечной. Сохраняется ли это важнейшее свойство во всех порядках? Это вопрос *доказательства перенормируемости.* Оно достаточно громоздко, но может быть проведено во всех порядках теории возмущений (Дайсон). Подробно с доказательством перенормируемости в разных моделях теории поля можно познакомиться в книге [4]. Отметим только, что доказательство перенормируемости в теории φ^4 сложнее, чем аналогичное доказательство для КЭД, которое облегчается благодаря калибровочной инвариантности.

Контрчлены.

Существует альтернативная точка зрения на перенормировку, которая стала весьма распространена, особенно после появления книги [4]. Она состоит в том, чтобы рассматривать параметры m и g в исходном лагранжиане сразу в качестве физических массы и заряда (константы связи). Из того факта, что этот лагранжиан не дает конечных функций Грина, вытекает требование, что в лагранжиан нужно ввести дополнительные члены, сокращающие расходимости. Их называют *контрчлены.* Перенормируемая теория может быть сделана конечной введением *конечного* числа контрчленов. Рассмотрим кратко, как это делается.

Рассмотрим опять перенормировку массы в однопетлевом приближении, определяемую соотношениями (13.46) – (13.49). Ее можно описать следующим образом. Однопетлевая поправка к свободному пропагатору показана на Рис. 13.6 и расходится при $\varepsilon \to 0$. Добавим к исходному лагранжиану $\mathcal{L}$ член вида:

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\frac{gm^2}{32\pi^2\varepsilon}\varphi^2 \equiv -\frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2 \,. \tag{13.63}$$

Его можно рассматривать как взаимодействие, которое мы будем изображать на диаграммах “крестиком”:

$$\times = -\frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon} = -i\delta m^2 \,. \tag{13.64}$$

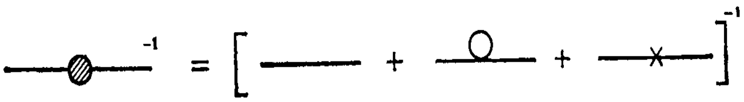


Рис. 13.7:

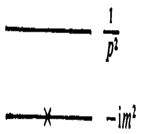


Рис. 13.8:

Тогда, с точностью $\sim g$, полный обратный пропагатор представляется графиками Рис. 13.7 и равен:

$$\Gamma^{(2)}(p) = iG(p)^{-1} = i\left[\frac{1}{i}(p^2 - m^2) - \left(\frac{igm^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \text{Конечная часть}\right) + \frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon}\right] = \\ = p^2 - m^2\,, \tag{13.65}$$

где опустили конечный вклад (или включили его в m^2). Здесь m^2 считается конечной величиной, физической массой, которая в соответствующем порядке теории возмущений равна $-\Gamma^{(2)}(0)$. Лагранжиан имеет теперь вид $\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1$, где $\delta\mathcal{L}_1$ — расходящийся контрчлен.

Смысл рассмотрения массового члена в лагранжиане в качестве дополнительного взаимодействия прост. Рассмотрим свободную теорию:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi \tag{13.66}$$

и будем считать, что она описывает безмассовое поле (первый член в лагранжиане) с взаимодействием, определяемым вторым членом. Правила Фейнмана показаны на Рис. 13.8. Полный пропагатор тогда определяется графиками, показанными на Рис. 13.9. В результате имеем геометрическую прогрессию:

$$G(p) = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}(-im^2)\frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}(-im^2)\frac{i}{p^2}(-im^2)\frac{i}{p^2} + \ldots = \frac{i}{p^2 - m^2}\,, \tag{13.67}$$

т.е. является обычным пропагатором массивного поля. Это и было использовано при рассмотрении массового контрчлена в лагранжиане в качестве возмущения.

Аналогичным образом можно рассмотреть $\Gamma^{(4)}$. Из (13.42) видно, что величина $\Gamma^{(4)}$, соответствующая графикам $\sim g^2$, показанным на Рис. 13.10, расходится при $\varepsilon \to 0$. Тогда можно добавить к лагранжиану контрчлен вида:

Рис. 13.9:

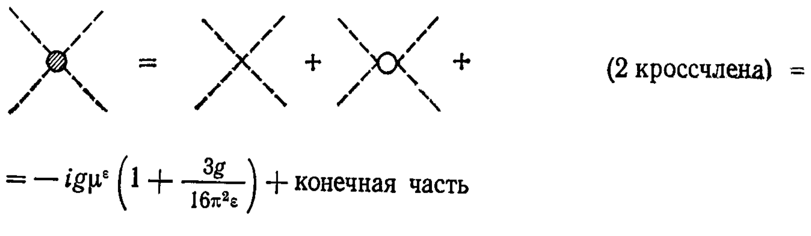


Рис. 13.10:

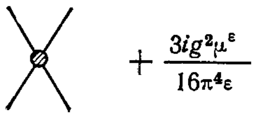


Рис. 13.11:

$$\delta\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4!}\frac{3g^2\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2\varepsilon}\varphi^4 = \frac{Bg\mu^{\varepsilon}}{4!}\varphi^4\,, \tag{13.68}$$

так что имеем дополнительное взаимодействие, показанное на Рис. 13.11. В результате $\Gamma^{(4)}$ становится конечной, как это показано на Рис. 13.12. Наконец, расходимость $\Gamma^{(2)}$ в двухпетлевом приближении, качественно описанная выше, и приводившая к необходимости умножения величин $\Gamma^{(n)}$ на $Z_{\varphi}^{n/2}$, эквивалентна добавлению к лагранжиану контрчлена вида:

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{A}{2}(\partial_\mu\varphi)^2\,, \tag{13.69}$$

где $1 + A = Z_{\varphi}$.

Итак, конечные выражения для функций Грина и вершин можно получить, добавляя к лагранжиану:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}g\mu^{4-d}\varphi^4 \tag{13.70}$$

контрчлены $\mathcal{L}_{CT}$:

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{A}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}Bg\mu^{4-d}\varphi^4\,. \tag{13.71}$$

Полный лагранжиан, который принято называть “голым” лагранжианом $\mathcal{L}_B$, равен:

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = \frac{1+A}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}(m^2 + \delta m^2)\varphi^2 - \frac{1}{4!}(1+B)g\mu^{4-d}\varphi^4\,. \tag{13.72}$$

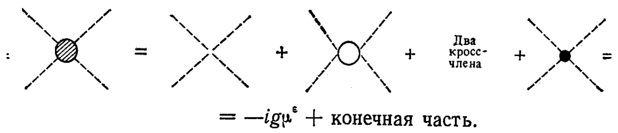


Рис. 13.12:

Таким образом, добавление контрчленов эквивалентно умножению величин φ, m и g на некоторые перенормировочные множители Z (мультипликативная перенормировка). А именно, если ввести по определению "голые" величины:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \sqrt{Z_\varphi}\varphi_r\,, & Z_\varphi &= 1 + A\,, \\ m_B &= Z_m m_r\,, & Z_m^2 &= \frac{m^2+\delta m^2}{1+A}\,, \\ g_B &= \mu^\varepsilon Z_g g_r\,, & Z_g &= \frac{1+B}{(1+A)^2}\,, \end{aligned} \tag{13.73}$$

то "голый" лагранжиан (13.72) примет вид:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_B\partial^\mu\varphi_B - \frac{1}{2}m_B^2\varphi_B^2 - \frac{1}{4!}g_B\varphi_B^4\,. \tag{13.74}$$

Заметим, что здесь нет ***явной*** зависимости от μ. Величины A,B и δm^2 подразумеваются подобранными таким образом, чтобы функции Грина теории были конечны (при $\varepsilon \to 0$). на языке контрчленов теория является пернормируемой, если контрчлены, необходимые для сокращения расходимостей в каждом порядке теории возмущений, имеют тот же вид, что и члены, входящие в исходный лагранжиан. Если это имеет место, то "голые" величины могут быть определены при помощи (бесконечных!) перенормировочных множителей, как это сделано выше. При этом "голый" лагранжиан имеет тот же вид, что и исходный.

Лагранжиан $\mathcal{L}_B$ приводит к конечной теории, а исходный $\mathcal{L}$ — нет. Это означает, что "запрятав" все расходимости в φ_B, m_B и g_B можно сделать теорию конечной — расходимости поглощаются перенормировкой. Все "голые" величины расходятся при $\varepsilon \to 0$ [7], тогда как перенормированные величины принимают при $\varepsilon \to 0$ конечные, но произвольные, значения. Их следует отождествить с физическими параметрами теории.

Уравнение (13.62) очевидно и из подхода, основанного на контрчленах. Из (13.74) и (13.74) ясно, что взяв (13.74) в качестве исходного лагранжиана, мы должны во всех формулах для функций Грина заменить $m \to m_B$, $g \to g_B$, $\varphi \to \varphi_B$. Но теперь можно (и нужно!) выразить "голые" параметры через физические m_r, g_r и φ_r согласно формулам (13.74). Тогда получим:

$$\Gamma_B^{(n)}(p_i, g_B, m_B) = Z_\varphi^{-n/2}\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu)\,, \tag{13.75}$$

что эквивалентно (13.62) (индекс B теперь можно убрать). Отсутствие явной зависимости левой части этого уравнения от μ очевидна из формы лагранжиана (13.74), где ее также нет.

13.4 Ренормализационная группа.

В Главе 8 мы уже кратко обсуждали группу перенормировок (ренорм-группу) в КЭД. Метод ренорм-группы играет огромную роль в квантовой теории поля [4,8,10] и статистической физике [14,15], также, как и в некоторых других областях теоретической физики. Поэтому здесь мы проведем более подробное его обсуждение. Надо

[7] При конечных ε проблемы расходимостей нет вообще.

заметить, что существует целый ряд (фактически эквивалентных) формулировок этого метода. Например в Главе 8 преобразования ренорм-группы связывались с переходом от одного значения параметра обрезания расходящихся интегралов к другому, в теории критических явлений часто используется [14] формулировка Вильсона, связанная с последовательным интегрированием по областям импульсного пространства, с переходом к учету все более длинноволновых флуктуаций и т. п. Здесь мы придерживаемся наиболее часто употребляемого в современной литературе по квантовой теории поля (хотя и несколько формального) подхода, основанного на методе размерной регуляризации [8].

В рамках теории размерной регуляризации мы ввели в теорию произвольный параметр μ размерности массы. Зависимость перенормированной 1ЧН-функции от μ определяется, согласно (13.61), соответствующей μ-зависимостью перенормировочного множителя Z_φ. Иными словами (ср.(13.62), (13.75)) неперенормированная ("голая") функция $\Gamma^{(n)}$ не зависит от μ:

$$\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\varphi^{-n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \tag{13.76}$$

и, следовательно, инвариантна относительно группы преобразований:

$$\mu \to e^s\mu \qquad \text{или} \qquad \mu = e^s\mu_0 \qquad \text{т.е.} \qquad s = \ln\frac{\mu}{\mu_0}\,. \tag{13.77}$$

Эти преобразования и образуют ренормализационную группу (ренорм-группу, группу перенормировок). Вводя безразмерный дифференциальный оператор $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$, получим:

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(n)} = 0 \tag{13.78}$$

или, учитывая (13.76):

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}[Z_\varphi^{-n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu)] = 0\,, \tag{13.79}$$

где g_r и m_r зависят от μ. Проводя дифференцирование и умножая результат на $Z_\varphi^{n/2}$, получаем:

$$\left[-n\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sqrt{Z_\varphi} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial g_r}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_r} + \mu\frac{\partial m_r}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_r}\right]\Gamma_r^{(n)} = 0\,. \tag{13.80}$$

В дальнейшем, для краткости, будем везде писать g вместо g_r и m вместо m_r, подразумевая, что имеем дело только с перенормированными величинами. Вообще, в (13.80) входят только перенормированные выражения, конечные при $\varepsilon \to 0$.

Определим следующие функции:

$$\begin{aligned} m\gamma_m(g) &= \mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\,, \\ \gamma(g) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sqrt{Z_\varphi}\,, \\ \beta(g) &= \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\,. \end{aligned} \tag{13.81}$$

Тогда уравнение (13.80) принимает вид:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m\gamma_m(g)\frac{\partial}{\partial m}\right]\Gamma^{(n)} = 0\,. \tag{13.82}$$

Это основное уравнение ренормализационной группы, называемое иногда уравнением Каллана – Симанзика. Оно выражает инвариантность перенормированной функции $\Gamma^{(n)}$ относительно замены параметра регуляризации μ. [8]

Запишем теперь аналогичное уравнение, выражающее инвариантность функции $\Gamma^{(n)}$ относительно изменения масштаба импульсов (массы). Пусть производится замена $p_i \to tp_i$, $m \to tm$, $\mu \to t\mu$. Функция $\Gamma^{(n)}$ имеет массовую размерность D, определяемую согласно приведенной выше таблице размерностей, следующим выражением:

$$D = d + n\left(1 - \frac{d}{2}\right) = 4 - n + \varepsilon\left(\frac{n}{2} - 1\right), \tag{13.83}$$

где $d = 4 - \varepsilon$. Тогда имеем:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, tm, t\mu) = t^D \Gamma^{(n)}(p_i, m, \mu), \tag{13.84}$$

что после простых замен переменных $tm \to \tilde{m}$, $m \to \tilde{m}/t$, $\tilde{m} \to m$ и $t\mu \to \tilde{\mu}$, $\mu \to \tilde{\mu}/t$, $\tilde{\mu} \to \mu$, переписывается как:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, m, \mu) = t^D \Gamma^{(n)}(p_i, m/t, \mu/t). \tag{13.85}$$

Функция $\Gamma^{(n)}$ представляет собой, таким образом, однородную функцию своих переменных со степенью однородности D.

Однородные функции. Теорема Эйлера.

Напомним основные факты об однородных функциях. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется однородной функцией степени p, если для любых t выполняется:

$$u = f(tx_1, ..., tx_m) = t^p f(x_1, ..., x_m). \tag{13.86}$$

Для однородных функций имеет место теорема Эйлера:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + x_m \frac{\partial u}{\partial x_m} = pu. \tag{13.87}$$

В самом деле, рассмотрим $u = f(tx_1^0, ..., tx_m^0)$, где $(x_1^0, ..., x_m^0)$ произвольная точка из области определения функции. Тогда имеем:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} x_1^0 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m^0. \tag{13.88}$$

С другой стороны

$$\frac{du}{dt} = pt^{p-1} f(x_1^0, ..., x_m^0), \qquad \text{так что}$$
$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = pf(x_1^0, ..., x_m^0) = pu. \tag{13.89}$$

Сравнение (13.88) с (13.89) и дает (13.87).

Из (13.85), по теореме Эйлера, получаем:

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t} + m\frac{\partial}{\partial m} + \mu\frac{\partial}{\partial \mu} - D\right)\Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = 0. \tag{13.90}$$

[8] Во избежание недоразумений отметим, что здесь имеется в виду вершина, определяемая в (13.16) и обозначавшаяся выше $\bar{\Gamma}^{(n)}$.

Исключая $\mu\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu}$ из (13.82) и (13.90), получаем другую запись уравнения Каллана – Симанзика:

$$\left[-t\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial g} - n\gamma(g) + m(\gamma_m(g) - 1)\frac{\partial}{\partial m} + D\right]\Gamma^{(n)}(tp_i, g, m, \mu) = 0\,, \tag{13.91}$$

которая непосредственно выражает результат изменения масштаба импульсов в $\Gamma^{(n)}$ в t раз. Заметим, что если $\beta(g) = \gamma(g) = 0$, $\gamma_m(g) = 1$, то этот результат просто будет определяться *канонической* размерностью D, как и следовало бы ожидать, исходя из "наивного" размерного анализа. Необходимость рассмотрения перенормировок и, следовательно, отличных от нуля функций $\beta(g), \gamma(g), \gamma_m(g)$, связана с наличием взаимодействия, которое приводит к появлению *аномальных* размерностей.

Найдем теперь решение уравнения (13.91). Это уравнение выражает тот факт, что изменение величины t может быть скомпенсировано за счет изменения величин m и g и общего множителя. Предположим, что существуют функции $g(t)$, $m(t)$ и $f(t)$, такие, что:

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = f(t)\Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu)\,. \tag{13.92}$$

Дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = \frac{df(t)}{dt}\Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu) + f(t)\left(\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial m} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial g}\right) \tag{13.93}$$

или, с учетом (13.92):

$$\begin{aligned} t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) &= \left(t\frac{df(t)}{dt} + f(t)t\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m} + f(t)t\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu) = \\ &= \left(t\frac{df(t)}{dt} + tf(t)\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m} + tf(t)\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}\right)\frac{1}{f(t)}\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu)\,, \end{aligned} \tag{13.94}$$

что, после переноса левой части направо, сводится к:

$$\left(-t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} + t\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m} + t\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = 0\,. \tag{13.95}$$

Сравним теперь уравнения (13.91) и (13.95). Приравнивая коэффициенты при $\partial/\partial g$ получаем так называемое уравнение Гелл-Манна – Лоу:

$$t\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \beta(g)\,. \tag{13.96}$$

Величина $g(t)$ называется "бегущей" константой связи, а функция $\beta(g)$ называется функцией Гелл-Манна – Лоу. Это уравнение играет фундаментальную роль при исследовании асимптотических свойств квантовой теории поля. Зная функцию $\beta(g)$ можно найти $g(t)$. Особый интерес, как мы увидим, представляет асимптотика $g(t)$ при $t \to \infty$. В качестве начального условия для (13.96) имеем условие $g(1) = g$.

Сравнение коэффициентов при $\partial/\partial m$ в (13.91) и (13.95) дает:

$$t\frac{\partial m}{\partial t} = m[\gamma_m(g) - 1]\,, \tag{13.97}$$

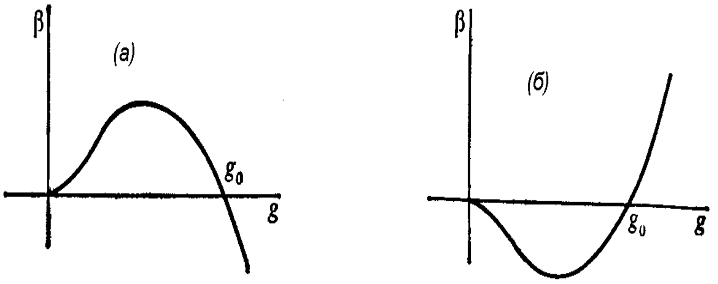


Рис. 13.13:

а из сравнения оставшихся членов следует:

$$\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = D - n\gamma(g)\,. \tag{13.98}$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать и получить:

$$f(t) = t^D \exp\left[-\int\limits_0^t dt \frac{n\gamma(g(t))}{t}\right], \tag{13.99}$$

подставляя которое в (13.92) и учитывая $D = 4 - n + \varepsilon\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, в пределе $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = t^{4-n} \exp\left[-n\int\limits_0^t dt \frac{\gamma(g(t))}{t}\right]\Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu)\,. \tag{13.100}$$

Это и есть решение (13.91), выраженное через “бегущую” константу связи $g(t)$ и “бегущую” массу $m(t)$. Экспоненциальный член определяет аномальную размерность. Таким образом, физика при больших импульсах определяется функциями $g(t)$ и $m(t)$. Соотношения типа (13.100), в некотором смысле, позволяют анализировать ситуацию и вне области применимости теории возмущений.

В пределе очень больших импульсов массами частиц можно пренебречь. Поэтому, обычно весь анализ проводится только с уравнением Гелл-Манна – Лоу (13.96). Рассмотрим характерные возможности, которые тут возникают. Нас будет интересовать поведение $g(t)$ при $t \to \infty$. Уравнение Гелл-Манна – Лоу имеет вид (13.96). Возможные варианты качественного поведения функции $\beta(g)$, которые исчерпывают практически все возможности показаны на Рис. 13.13. Условие $\beta(g = 0) = 0$ выполняется всегда, это соответствует теории без взаимодействия. Теория возмущений позволяет, как мы увидим ниже, определить поведение $\beta(g)$ вблизи $g = 0$, оно квадратично по g. В принципе могут существовать и нули $\beta(g)$ при конечных g, нам достаточно рассмотреть лишь один — при $g = g_0$, чтобы понять к каким следствиям приведет его существование. Рассмотрим сначала $\beta(g)$, показанную на Рис. 13.13(а). Нули этой функции при $g = 0$ и $g = g_0$ называются ***фиксированными точками.*** Нетрудно видеть, что при $t \to \infty$ и начальных значениях g вблизи g_0 величина $g(t)$, определяемая из (13.96), стремится к g_0. В самом деле, при начальном $g < g_0$ имеем $\beta(g) > 0$, так что g растет с ростом t и стремится к g_0 (где рост останавливается). Аналогично, при начальном $g > g_0$ имеем $\beta(g) < 0$ и g убывает с ростом t, т.е. также стремится к g_0, двигаясь в отрицательном направлении. Таким образом $g(\infty) = g_0$ — имеем *ультрафиолетово* устойчивую фиксированную точку — фиксированное значение константы связи (заряда) при очень больших импульсах. При малых начальных значениях g в пределе $t \to 0$ всегда имеем $g = 0$ — *инфракрасно* устойчивую фиксированную точку ("московский нуль"). Если нуля функции Гелл-Манна – Лоу при конечных g нет, уравнение (13.96) дает непрерывный рост g при $t \to \infty$, фиксированного значения заряда не возникает. Если при больших значениях аргумента $\beta(g) \sim g^{\alpha}$ и $\alpha > 1$, то теория становится внутренне противоречивой — неизбежно возникает расходимость g при *конечных* значениях t. При $\alpha \leq 1$ имеем монотонный рост g при $t \to \infty$ — теория непротиворечива, но при $t \to \infty$ имеем переход в область "сильной связи".

Теперь рассмотрим $\beta(g)$, показанную на Рис. 13.13(б). Снова имеем две фиксированные точки, однако знак $\beta(g)$ теперь другой, так что $g = g_0$ является инфракрасно устойчивой фиксированной точкой ($t \to 0$), а $g = 0$ — ультрафиолетово устойчивой фиксированной точкой ($t \to \infty$). В последнем случае $g \to 0$ при $t \to \infty$ и взаимодействие уменьшается по мере роста энергии (импульса), обращаясь в пределе в нуль. Это явление называется *асимптотической свободой*. При отсутствии нуля функции $\beta(g)$ при конечных значениях g здесь возникают проблемы в области малых импульсов (больших расстояний) — взаимодействие растет и может иметь нефизическую расходимость. В любом случае, здесь происходит переход к "сильной связи" на больших расстояниях (конфайнмент ?).

Изложенные возможности практически исчерпывают варианты асимптотического поведения в любой модели квантовой теории поля. В качестве конкретного примера рассмотрим теорию $g\varphi^4$ $(g > 0)$. Рассмотрим результат однопетлевого приближения (13.52) для перенормированной константы связи. Опуская несущественные конечные поправки можем написать:

$$g_1 = g\mu^{\varepsilon}\left(1 + \frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}\right). \tag{13.101}$$

Отсюда имеем:

$$\mu\frac{\partial g_1}{\partial \mu} = \varepsilon g\mu^{\varepsilon} + \frac{3g^2}{16\pi^2}\mu^{\varepsilon}. \tag{13.102}$$

При конечных ε тут все конечно и мы можем (с той же точностью) переписать (13.102) как:

$$\mu\frac{\partial g_1}{\partial \mu} = \varepsilon g_1 + \frac{3g_1^2}{16\pi^2}\mu^{-\varepsilon}, \tag{13.103}$$

а потом просто опустить индекс 1, считая, что работаем с перенормированной (физической) константой связи. Тогда из (13.103), при $\varepsilon \to 0$, получаем функцию Гелл-Манна – Лоу:

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{3g^2}{16\pi^2}. \tag{13.104}$$

Вводя $s = \ln t = \ln\frac{\mu}{\mu_0}$, так что $\mu\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{\partial}{\partial s} = t\frac{\partial}{\partial t}$, перепишем уравнение (13.103) в виде:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{3g^2}{16\pi^2}. \tag{13.105}$$

Отсюда и без всякого счета видно, что "бегущая" константа связи теории φ^4 возрастает с ростом s, т.е. с ростом импульса, так что теория не является асимптотически свободной. Функция Гелл-Манна – Лоу $\sim g^2$. Элементарное интегрирование уравнения (13.105) с начальным условием $g(s=0)=g_0$ дает:

$$g = \frac{g_0}{1-\frac{3}{16\pi^2}g_0 s} = \frac{g_0}{1-\frac{3}{16\pi^2}g_0 \ln t} = \frac{g_0}{1-\frac{3}{16\pi^2}g_0 \ln\frac{\mu}{\mu_0}}\,. \tag{13.106}$$

С ростом t (или μ) константа связи растет и, в конце концов, мы наталкиваемся на нефизическую сингулярность ("ложный" полюс) $1=\frac{3}{16\pi^2}g_0\ln(\frac{\mu}{\mu_0})$, что соответствует $\mu=\mu_0\exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_0}\right)$. Ситуация здесь вполне аналогична уже встречавшейся нам в КЭД в Главе 8. Это же поведение подробно рассматривалось нами выше в Главе 10 при обсуждении критических явлений.

Разумеется полученное поведение функции Гелл-Манна – Лоу целиком основано на однопетлевом приближении и формально справедливо только при достаточно малых значениях константы связи g. Вопрос о поведении этой функции при больших значениях константы связи, а с ним и вопрос о непротиворечивости теории $g\varphi^4$, в значительной мере, остается открытым. В ряде работ, для $g\to\infty$ было получено асимптотическое поведение $\beta(g)$, несущественно отличающееся от результатов однопетлевого приближения, что означало-бы внутреннюю противоречивость теории, в соответствии со старой точкой зрения Ландау, обсуждавшейся в Главе 8. Отметим, впрочем, недавнюю работу[9], в которой было получено поведение $\beta(g)\sim g^{0.96}$, которое, в соответствии со сделанными выше замечаниями означает, что эта простейшая модель квантовой теории поля является внутренне непротиворечивой.

Заметим, что теорию $g\varphi^4$ "легко сделать" асимптотически свободной, если считать, что $g<0$. Тогда, очевидно, сменится знак перед логарифмом в знаменателе (13.106) и эффективная константа связи будет падать с ростом t и μ. Однако такая теория неустойчива, у нее нет основного состояния (потенциальная энергия поля может быть сколь угодно большой отрицательной величиной), поэтому в квантовой теории поля она, обычно, не рассматривается. Тем не менее специфический вариант такой модели, сводящийся к обобщенному функционалу Ландау (10.160) с числом компонент поля $n=0$ (!), описывает, как оказывается, движение электрона в случайном поле примесей с точечным потенциалом V, хаотически разбросанных в пространстве со средней плотностью ρ, если в (10.160) считать $g=-\rho V^2$ и $\tau=-E$, где E – энергия электрона. Эта задача тесно связана с еще не до конца решенной проблемой локализации электронов в неупорядоченных системах (одним из основных механизмов перехода металл – диэлектрик). В частности, возникающие здесь проблемы оказываются тесно связанными с проблемой описания инфракрасной области асимптотически свободных моделей квантовой теории поля (конфайнмент). Не имея возможности подробно обсуждать эту задачу в данных лекциях, сошлемся только на имеющиеся обзоры[10].

13.5 Асимптотическая свобода теорий Янга – Миллса.

Перейдем к рассмотрению асимптотических свойств калибровочных теорий. Ситуация в КЭД была рассмотрена в Главе 8, где было показано, что теория не является асимптотически свободной, что приводит к проблеме "нуля заряда" и патологическому поведению при больших импульсах (энергиях). Замечательно, что в неабелевых калибровочных теориях положение совсем другое. Именно, в них реализуется

[9]И.М. Суслов. Письма ЖЭТФ **71**, 315 (2000)
[10]М.В. Садовский. УФН **133**, 223 (1981), И.М. Суслов. УФН **168**, 503 (1998)

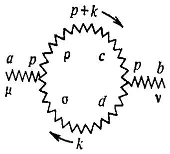


Рис. 13.14:

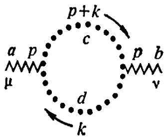


Рис. 13.15:

поведение, названное выше асимптотически свободным. Открытие этого явления Гроссом и Вильчеком в начале 70-х годов открыло путь к построению квантовой хромодинамики и обеспечило возможность проведения надежных расчетов КХД-эффектов при высоких энергиях по теории возмущений.

Здесь мы ограничимся тем, что приведем основные *результаты* для случая $SU(3)$ калибровочной теории (КХД), а также качественную интерпретацию самого явления асимптотической свободы, отсылая читателя за деталями вычислений к имеющимся учебникам $[8, 9, 11]$. Ключом к нахождению асимптотического поведения является снова функция Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$. В КЭД для ее вычисления в Главе 8 рассматривался простейший однопетлевой график поляризации вакуума (фермионная петля). В однопетлевом приближении КХД возникают дополнительные возможности, связанные с неабелевым характером теории (самодействие полей Янга-Миллса и необходимость учета "духов" Фаддеева – Попова). В этом случае мы должны рассчитать вклад в перенормировку заряда от простейшего петлевого графика глюон – глюонного взаимодействия, показанного на Рис. 13.14, от взаимодействия глюонов с "духами", показанного на Рис. 13.15 и аналогичного КЭД вклада от взаимодействия глюонов с кварками Рис. 13.16. В результате довольно громоздких расчетов [8], для перенормированной в однопетлевом приближении константы связи КХД получаем аналог выражения (13.101) в виде: [11]

$$g_1 = g\mu^{\varepsilon/2}\left[1 + \frac{g^2}{4\pi\varepsilon}\left(-11 + \frac{2n_f}{3}\right)\right], \tag{13.107}$$

где n_f — число кварковых "ароматов" (число типов кварков). Аналогичная одно-

[11]Здесь снова пользуемся гауссовской системой единиц.

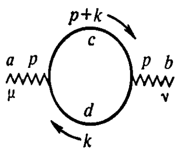


Рис. 13.16:

петлевая поправка от электронов в КЭД имеет вид $\frac{e^2}{4\pi}\left(-\frac{4}{3}\right)$. Знак фермионного вклада здесь тот же, что и в КЭД. Однако суммарный вклад процессов Рис. 13.14 и Рис. 13.15 имеет *другой знак*!. Соответственно при $n_f < 16$ общий знак поляризационной поправки в (13.107) *противоположен* таковому в КЭД ("антиэкранировка"). Физическая природа такого поведения будет объяснена ниже, а сейчас, действуя аналогично переходу от (13.101) к (13.104), получаем в переделе $\varepsilon \to 0$:

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{g^3}{12\pi}\left(-33 + 2n_f\right) . \tag{13.108}$$

При $n_f \leq 16$ из (13.108) следует, что $\beta(g) < 0$ и константа связи g *убывает* с ростом масштаба импульсов (масс), в соответствии с качественной картиной, обсуждавшейся выше. Следовательно такая теория является асимптотически свободной. В Природе, как известно, $n_f = 6$.

Получим выражение для "бегущей" константы связи. Вводя опять $s = \ln t = \ln\frac{\mu}{\mu_0}$, $\mu\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{\partial}{\partial s}$, имеем уравнение Гелл-Манна – Лоу:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = -\eta g^3 , \qquad \text{где} \qquad \eta = \frac{33 - 2n_f}{12\pi} . \tag{13.109}$$

Перепишем это как:

$$\frac{d}{ds}(g^{-2}) = 2\eta . \tag{13.110}$$

Легко видеть, что решение этого уравнения имеет вид:

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{g_0^2} + 2\eta s \tag{13.111}$$

или

$$g^2 = \frac{g_0^2}{1 + 2g_0^2\eta s} = \frac{g_0^2}{1 + 2g_0^2\eta\ln t} . \tag{13.112}$$

Вводя $t = Q/\mu$ и определяя g_0 при $Q = \mu$, получаем результат, цитировавшийся в Главе 8:

$$g^2(Q^2) = \frac{g^2(\mu)}{1 + \frac{g^2(\mu^2)}{12\pi}(33 - 2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} . \tag{13.113}$$

Только в мире, где $n_f > 16$ знак в знаменателе (13.113) был бы таким же, как в квантовой электродинамике. В реальном мире эффективный заряд КХД не растет, а *падает* с ростом Q^2 и становится малым на малых расстояниях! Это и есть асимптотическая свобода. При достаточно малых Q^2 (на больших расстояниях между кварками) эффективная константа связи наоборот становится большой, что экспериментально проявляется в явлении *конфайнмента* ("инфракрасная тюрьма"). Для значения Q^2, при котором возникает "ложный" полюс в (13.113), введем обозначение Λ^2_{QCD}:

$$\Lambda^2_{QCD} = \mu^2 \exp\left[-\frac{12\pi}{(33 - 2n_f)g^2(\mu^2)}\right] . \tag{13.114}$$

Тогда (13.113) переписывается как:

$$g^2(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} . \tag{13.115}$$

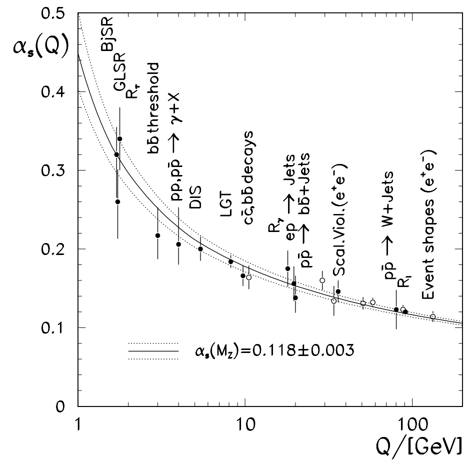


Рис. 13.17:

При $Q^2 \gg \Lambda^2_{QCD}$ эффективная константа связи мала и взаимодействие кварков и глюонов (на малых расстояниях или при больших импульсах) можно описывать по теории возмущений, аналогично взаимодействию электронов и фотонов в КЭД (на больших расстояниях или малых импульсах). При $Q^2 \sim \Lambda^2_{QCD}$ такое описание становится невозможным, а кварки и глюоны объединяются в сильно взаимодействующие кластеры — адроны. Экспериментальное значение Λ лежит в интервале от 0.1 до 0.5 GeV. Тогда для экспериментов, проводимых при $Q^2 \sim (30\ \text{GeV})^2$ из (13.115) получаем $g^2 \sim 0.1$, так что теория возмущения явно применима, как и в КЭД. В пределе больших Q^2 всеми массами кварков можно пренебречь, однако в теорию все равно входит массовый масштаб μ^2, возникший в процессе перенормировки.

Подчеркнем, что теоретический результат (13.115) полностью подтверждается на эксперименте! На Рис. 13.17 приводится подборка экспериментальных данных для эффективной константы связи КХД, как функции характерного масштаба энергии-импульса в различных процессах рассеяния, изучавшихся на различных экспериментальных установках[12]. Видим впечатляющее согласие теории и эксперимента.

Антиэкранировка — парамагнетизм янг-миллсовского вакуума.

Как мы видели, асимптотическая свобода связана с свойством антиэкранировки заряда в янг-миллсовском вакууме. Оказывается, что это явление имеет довольно простое физическое объяснение, основанное на известных аналогиях с теорией твердого тела. Последующее изложение, в основном, следует работе[13].

Антиэкранировка заряда означает, что вакуум действует как диэлектрическая среда с диэлектрической постоянной $\epsilon < 1$. При этом вакуум квантовой теории поля отличается от обычной поляризуемой среды в одном очень важном пункте — он релятивистски инвариантен. Это означает, что его магнитная проницаемость μ связана с диэлектрической проницаемостью соотношением:

$$\mu\epsilon = 1\,. \tag{13.116}$$

Действительно, ϵ представляет собой коэффициент при вкладе в действие от электрического поля $\vec{E}\cdot\vec{D} \propto \epsilon F_{oi}F^{oi}$, а μ^{-1} является коэффициентом при вкладе магнитного поля $\vec{B}\cdot\vec{H} \propto \mu^{-1}F_{ij}F^{ij}$.

[12] M. Schmelling. ArXiv: hep-ex/9701002.
[13] F. Wilczek. Asymptotic Freedom. ArXiv: hep-th/9609099.

Сумма этих вкладов является релятивистски инвариантной только при выполнении условия $\epsilon = \mu^{-1}$. Это обстоятельство позволяет связать электрические свойства среды с ее магнитными свойствами, которые могут быть двух типов:

1. *Диамагнетизм Ландау ($\mu < 1$).* Заряженные частицы в среде в ответ на внешнее магнитное поле создают ток, который сам индуцирует магнитное поле, направленное противоположно внешнему полю.
2. *Парамагнетизм Паули ($\mu > 1$).* Если частицы обладают магнитными моментами, то они стремятся выстроиться вдоль внешнего поля.

Тогда свойство антиэкранировки янг-миллсовского вакуума можно представить себе как условие $\mu > 1$, т.е. как его парамагнетизм[14]. В конечном итоге, все дело здесь в том, что неабелевы калибровочные поля подчиняются статистике Бозе, а также, в отличие от абелевых фотонов сами обладают зарядом, соответствующим калибровочной симметрии. Подчеркнем, что терминология теории электромагнетизма (за неимением лучшего) используется здесь только по аналогии с $U(1)$ калибровочной теорией (КЭД). В действительности мы, конечно же, имеем в виду заряды, соответствующие $SU(3)$ калибровочной симметрии, т.е. цветовые заряды. Под электрическими и магнитными свойствами мы подразумеваем цветовые электрические и магнитные свойства (поля). Когда мы говорим, что поля Янга – Миллса в КХД (глюоны) обладают зарядом и магнитным моментом, имеется в виду, что они обладают цветовым зарядом и цветовым магнитным моментом. На деле же глюоны электрически нейтральны.

Хорошо известный результат теории металлов состоит в том, что для идеального газа электронов диамагнетизм Ландау, фактически, перекрывается парамагнетизмом Паули, так что полный отклик является парамагнитным [35]. Оказывается, что в теории неабелевых калибровочных полей ситуация аналогична и связана с парамагнитным откликом спинов янг-миллсовских полей.

Стандартный классический лагранжиан неабелевой калибровочной теории имеем вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} G^a_{\alpha\beta} G^{a\alpha\beta} + \bar{\psi}(i\gamma^\nu D_\nu - m)\psi + \phi^\dagger(-D_\nu D^\nu - \mu^2)\phi \; + \quad \text{другие вклады}\,, \tag{13.117}$$

где тензор напряженностей полей определен как $G^a_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - g f^{abc} A^b_\alpha A^c_\beta$, а f^{abc} — структурные константы калибровочной группы, ковариантная производная $D_\nu = \partial_\nu + igA^a_\nu \cdot T^a$, а T^a — генераторы группы (например матрицы Паули $\frac{\tau}{2}$ для фундаментального представления $SU(2)$, или матрицы Гелл-Манна – Лоу $\frac{\lambda}{2}$ для фундаментального представления $SU(3)$). Под "другими вкладами" подразумеваются взаимодействия юкавского типа и самодействие скалярных полей, важно, что они не зависят от калибровочного поля. Удобно переопределить $gA \to A$, так чтобы янг-миллсовская константа g входила только в "свободный" лагранжиан калибровочного поля:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi g^2} G^a_{\alpha\beta} G^{a\alpha\beta} + \bar{\psi}(i\gamma^\nu D_\nu - m)\psi + \phi^\dagger(-D_\nu D^\nu - \mu^2)\phi \; + \quad \text{другие вклады}\,, \tag{13.118}$$

где теперь $G^a_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - f^{abc} A^b_\alpha A^c_\beta$, $D_\nu = \partial_\nu + iA^a_\nu \cdot T^a$ и g осталось только в виде коэффициента в первом слагаемом.

Чтобы рассчитать магнитную восприимчивость вакуума нужно знать изменение плотности его энергии при изменении внешнего магнитного поля. Может показаться, что все определяется только первым членом а (13.118): $\frac{1}{8\pi g^2}B^2$. Но это просто классический вклад в энергию, кроме этого в квантовой теории нужно рассмотреть изменение нулевой энергии всевозможных полей, входящих в (13.118), при изменении внешнего магнитного поля. Тут все аналогично теории металлов, где роль вакуума играет заполненная сфера Ферми.

Прежде чем переходить к явным вычислениям, выпишем правильный ответ, дабы проанализировать его смысл и следствия. Оказывается, что вклад нулевых колебаний $\Delta\mathcal{E}$, приводит к тому, что плотность энергии вакуума во внешнем магнитном поле B имеет вид[15]:

$$\mathcal{E} + \Delta\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi g^2(\Lambda^2)} B^2 - \frac{1}{8\pi}\eta B^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{B}\right) \; + \quad \text{конечные вклады}\,, \tag{13.119}$$

[14] Обычная поляризуемая среды, в отличие от этого, может одновременно обладать свойствами диэлектрической экранировки ($\epsilon > 1$) и парамагнетизма ($\mu > 1$). Тем не менее, некоторая историческая ирония состоит в том, что физическое поведение, приводящее к асимптотической свободе, было, фактически, известно Ландау, который внес фундаментальный вклад в квантовую теорию магнетизма, но, в то же время, подвергал сомнению основы квантовой теории поля, из-за патологического поведения взаимодействия в области больших импульсов.

[15] Заметим, что в нашей системе единиц $[B] = [L^{-2}] = [\Lambda^2]$, кроме того мы везде пользуемся гауссовой системой единиц электродинамики.

где η было определено выше в (13.109):

$$\eta = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}\,, \tag{13.120}$$

а опущенные члены конечны в пределе $g \to 0$ и $\Lambda \to \infty$. Здесь мы ввели обычный параметр обрезания Λ, т.е. отбросили вклад всех колебаний с волновыми векторами, превышающими Λ. Происхождение обозначения $g^2(\Lambda^2)$ скоро станет ясным.

Представим себе, что параметр обрезания Λ в (13.120) заменяется на меньшее значение Λ'. Тогда нетрудно понять, что все моды колебаний с волновыми векторами в интервале между Λ' и Λ дают вклад в изменение энергии вакуума вклад вида:

$$\delta(\mathcal{E} + \Delta\mathcal{E}) = -\frac{1}{8\pi}\eta B^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda'^2}\right) = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\frac{1}{8\pi g^2}B^2\,, \tag{13.121}$$

где во втором равенстве введен вклад в магнитную восприимчивость вакуума от указанных мод, что и является, по сути дела, ее определением.

Отсюда, при малых g, мы имеем:

$$\mu - 1 = \eta g^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda'^2}\right)\,, \tag{13.122}$$

где явно выписан вклад в восприимчивость от мод с энергиями (импульсами), лежащими в интервале между Λ' и Λ. Из выражения (13.120) ясно, что здесь, как и в теории металлов, имеется два вклада — первый связан с тенденцией спиновых моментов ориентироваться по полю (парамагнетизм), а второй — с орбитальным движением заряженных частиц (диамагнетизм). Для электронного газа парамагнитный отклик в три раза сильнее диамагнитного [35]. Результат (13.122) показывает, что в КХД ситуация аналогична и $\mu > 1$, что, как мы видели, соответствует антиэкранировке электрического заряда ($\epsilon < 1$). При определении правильного знака надо учитывать, что частицы со спином 1 имеют (глюоны) только две степени свободы (поляризации), а также и то, что вклад фермионов (кварков) в энергию вакуума имеет отрицательный знак (Глава 3), что приводит к уменьшению парамагнитного эффекта. В частности, в КЭД, где абелево электромагнитное поле не обладает самодействием, а весь рассматриваемый эффект обусловлен фермионами, мы и имеем обычную экранировку заряда вакуумом.

Каковы следствия (13.119) для наблюдаемых величин? Нужно, прежде всего, избавиться от произвольного параметра обрезания Λ. Для этого определим эффективную константу связи таким образом, чтобы правая часть (13.119) не зависела от Λ. Для этого нужно, чтобы выполнялось условие:

$$\text{const} \equiv \frac{1}{g^2(\Lambda^2)} - \eta \ln\left(\frac{\Lambda^2}{B}\right)\,, \tag{13.123}$$

что эквивалентно (13.111). Еще лучше записать это условие в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{d(\ln \Lambda^2)}\frac{1}{g^2(\Lambda^2)} = \eta\,, \tag{13.124}$$

что есть тоже самое, что и уравнение Гелл-Манна – Лоу (13.110). Отсюда видно, что эффективная константа связи уменьшается с ростом параметра обрезания Λ, стремясь к нулю как обратная степень логарифма Λ при $\Lambda \to \infty$, пока в теории не слишком много кварков, т.е. пока $\eta > 0$. Это и есть асимптотическая свобода.

Перейдем теперь к более или менее последовательному выводу (13.119). Парамагнитный вклад в η от спиновых проекций $\pm s$ несложно рассчитать следующим образом. Пусть электрический заряд равен 1, а гиромагнитное отношение g_m. Поскольку нас интересует вклад мод с очень большими импульсами, то параметр обрезания Λ много больше масс всех частиц, которые поэтому можно рассматривать как безмассовые (игнорируя возникающие при этом инфракрасные расходимости, которые можно устранить, обрезая все встречающиеся далее интегралы по импульсам на нижнем пределе $\sim B$). Включение магнитного поля приводит к сдвигу энергии релятивистской частицы вида [1]: $E^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \to E^2 \pm g_m B s$. Поэтому, соответствующее изменение энергии нулевых колебаний есть:

$$\Delta\mathcal{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left(\sqrt{k^2 + g_m sB} + \sqrt{k^2 - g_m sB} - 2\sqrt{k^2}\right). \tag{13.125}$$

Проводя здесь разложение до членов квадратичных по B и выполняя интегрирование по углам, находим:

$$\Delta\mathcal{E} = -B^2(g_m s)^2\frac{1}{32\pi^2}\int\limits_0^{\Lambda^2}\frac{dk^2}{k^2} = -B^2(g_m s)^2\frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{B}\,. \tag{13.126}$$

Это дает парамагнитный вклад в (13.119). Точное значение коэффициента при соответствующем вкладе в (13.119) связано с с групповыми константами $SU(3)$ и мы его не выводим.

Диамагнитный вклад в η вычисляется сложнее. Возьмем вектор-потенциал магнитного поля в калибровке Ландау: $A_y = Bx$. Тогда уравнение Клейна – Гордона, определяющее орбитальное движение релятивистской частицы в магнитном поле, есть:

$$\left[E^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - iBx\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi = 0\,, \tag{13.127}$$

а его решения имеют вид:

$$\phi = e^{i(k_2 y + k_3 z)}\chi_n\left(x - \frac{k_2}{B}\right) \tag{13.128}$$

с собственными значениями $E_n^2 = k_3^2 + B(2n+1)$. Здесь χ_n обычная волновая функция гармонического осциллятора [29]. Уровни энергии характеризуются целым числом n и импульсом k_3, но вырождены по k_2, как в обычной задаче об уровнях Ландау в магнитном поле [29]. Если рассмотреть состояния в кубе со стороной L, то координата центра осциллятора k_2/B должна удовлетворять неравенству $0 \le k_2/B \le L$, что означает, что в интервале Δk_3 имеется $\Delta k_2 \Delta k_3/(2\pi)^2 = \frac{B}{4\pi^2}\Delta k_3$ состояний для фиксированного значения n (для единичного объема $L^3 = 1$). Тогда соответствующий вклад в энергию нулевых колебаний есть:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{B}{(2\pi)^2}\sum_{n=0}^{\frac{\Lambda^2}{2B}-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dk_3\theta\left[\Lambda^2 - k_3^2 - B(2n+1)\right]\sqrt{k_3^2 + B(2n+1)} \equiv \sum_{n=0}^{\frac{\Lambda^2}{2B}-\frac{1}{2}} f\left(n + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{13.129}$$

Это выражение довольно громоздкое ввиду наличия суммы по n. Для наших целей достаточно учесть первый нетривиальный вклад в формуле суммирования Эйлера – Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{p} g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{p+1} dn g(n) - \frac{1}{24}(g'(p+1) - g'(0)) + \ldots \tag{13.130}$$

поскольку следующие ее члены приводят к вкладам более высокого порядка по B/Λ^2. Применяя (13.130) к (13.129), убеждаемся, что интегральный член не зависит от B, а существенный вклад возникает от производной в нуле:

$$\frac{1}{24}f'(0) = \frac{1}{24}\frac{B}{4\pi^2}2\int_{\sqrt{B}}^{\Lambda} dk_3 \frac{B}{\sqrt{k_3^2}} = B^2\frac{1}{96\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{B}\,. \tag{13.131}$$

Это дает диамагнитную часть (13.119), которая оказывается меньше парамагнитного вклада (13.126), для любых разумных значений g_m и s.

Как уже отмечалось выше, открытие асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теория сыграло революционную роль в современной квантовой теории поля и превратило КХД в “респектабельную” теорию, лежащую в основе “стандартной модели”. За последние четверть века теория прошла всестороннюю проверку и, в области ее применимости, всегда подтверждалась экспериментальными данными. Мы не будем здесь обсуждать все эти успехи, ограничившись некоторыми дополнительными ссылками. Многие аспекты КХД подробно описаны в уже не раз цитировавшейся книге [11]. Довольно детальное изложение математического аппарата КХД в стиле, близком к нашим лекциям, можно найти в [45]. Из нерешенных до конца проблем отметим проблему описания конфайнмента, что тесно связано с необходимостью описания непертурбативных эффектов в КХД на больших расстояния (малых импульсах, в ИК области). Мы кратко обсудим этот вопрос в следующей Главе.

В самое последнее время мощное развитие получило изучение кварк-глюонного вещества в экстремальных условиях высоких температур и плотностей, что весьма существенно для задач астрофизики и космологии, также как и для экспериментов по столкновению тяжелых ядер на уже работающих или строящихся ускорителях. Здесь проявляется целый ряд замечательных аналогий с физикой конденсированного состояния, в частности, большой интерес вызывает теоретическое изучение так называемой *цветовой сверхпроводимости*, возникающей в кварк-глюонном веществе высокой плотности за счет куперовского спаривания кварков, вызванного притяжением за счет обмена глюонами. Достаточно детальное и ясно написанное изложение этих проблем можно найти в [46,47].

Интересующиеся элементарным обзором успехов современной КХД могут ограничиться чтением популярного мини-обзора[16].

13.6 "Бегущие" константы связи и "великое объединение."

Рассматривавшаяся нами в Главе 12 $SU(2)\otimes U(1)$ симметричная объединенная теория электрослабого взаимодействия находится, как и $SU(3)$ инвариантная КХД во впечатляющем согласии с экспериментом. Но действительно ли она объединяет электромагнитное и слабое взаимодействия? Фактически, $SU(2)\otimes U(1)$ представляет собой произведение двух несвязанных множеств калибровочных преобразований: группы $SU(2)$ слабого изоспина с константой связи g и группы $U(1)$ слабого гиперзаряда с константой связи f. Отношение этих констант связи, введенное в (12.83) как:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{g} \tag{13.132}$$

фактически должно определяться из эксперимента. Если, однако, группы $SU(2)$ и $U(1)$ рассмотреть в качестве подгрупп некоторой более широкой калибровочной группы

$$G \supset SU(2)\otimes U(1)\,, \tag{13.133}$$

то константы g и f могут быть связаны между собой групповыми соотношениями, которые и определят угол Вайнберга α. При этом, часть новых преобразований группы G связывает ранее несвязанные подмножества групп $SU(2)$ и $U(1)$. Естественно попытаться объединить электрослабую симметрию $SU(2)$ и $U(1)$ с цветовой калибровочной $SU(3)$ симметрией КХД:

$$G \supset SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)\,. \tag{13.134}$$

Тогда калибровочные преобразования группы G будут связывать электрослабые константы g и f с рассматривавшейся выше константой связи КХД. В результате *все* известные взаимодействия будут описываться единой калибровочной группой с единой константой взаимодействия g_G, а все наблюдаемые константы известных взаимодействий будут однозначно определяться структурой группы G. Подобные модели называются теориями "великого объединения" (GUT). Таких моделей предложено некоторое количество, ниже мы кратко обсудим их особенности.

Основание для такого описания можно усмотреть и исходя из реального поведения "бегущих" констант связи для известных взаимодействий. Будем обозначать их $g_1(Q)$, $g_2(Q)$ и $g_3(Q)$ соответственно калибровочным группам $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$.

[16]F. Wilczek. QCD Made Simple. Phys. Today **53**, No.8, 22 (2000)

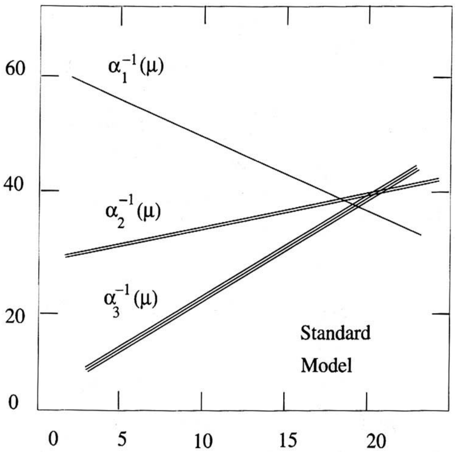


Рис. 13.18:

Во избежании путаницы, введем следующие стандартные обозначения, связывающие g_i $(i = 1, 2, 3)$ с обозначениями констант взаимодействия, использовавшимися нами выше:

$$\begin{aligned} SU(3): &\qquad g^2(Q) = 4\pi g_3^2(Q)\,, \\ SU(2): &\qquad g(Q) = g_2(Q)\,, \\ U(1): &\qquad f(Q) = \frac{1}{C} g_1(Q)\,. \end{aligned} \tag{13.135}$$

Здесь введен (не очень существенный для дальнейшего) коэффициент C, который обычно определяется некоторыми групповыми константами группы G. В частности, тогда и угол α из (13.132) становится функцией Q:

$$\operatorname{tg} \alpha(Q) = \frac{1}{C} \frac{g_1(Q)}{g_2(Q)}\,. \tag{13.136}$$

На Рис. 13.18 показано поведение "бегущих" констант стандартной модели $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$ в зависимости от $\log_{10}(\mu/\mathrm{GeV})$, полученное исходя их экспериментальных данных и однопетлевых формул, рассматривавшихся выше на примере КЭД и КХД. Видим, что КХД константа g_3 убывает с ростом импульса (асимптотическая свобода), тогда как константы теории электрослабого взаимодействия g_1 и g_2 возрастают. При этом ясно видна тенденция к сближению величин эффективных констант взаимодействия в области $Q \sim 10^{15}\,\mathrm{GeV}$. Можно ожидать, что в истинной теории элементарных частиц при некотором большом значении $Q \sim M_X$ (на малых расстояниях!) все три константы сливаются в одну константу теории "великого" объединения[17]:

$$g_i(Q) = g_G(Q) \qquad \text{при} \qquad Q \geq M_X\,, \tag{13.137}$$

соответствующую калибровочной группе G. При $Q < M_X$ константы $g_i(Q)$ разделяются и, в конце концов, на больших расстояниях переходят в феноменологические

[17] В этой области угол Вайнберга, в соответствии в (13.136), определяется групповым коэффициентом C.

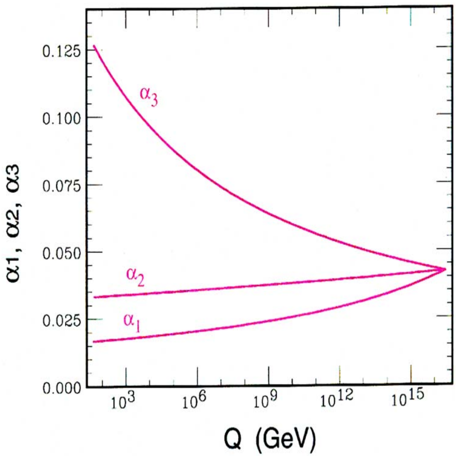


Рис. 13.19:

константы g_i, описывающие наблюдаемые взаимодействия на нынешнем уровне экспериментальных возможностей при $Q \sim \mu \sim 10\,\mathrm{GeV}$. Подобное поведение констант взаимодействия получается в некоторых моделях, обобщающих стандартную модель с учетом суперсимметрии (симметрии, преобразования которой переводят фермионы в бозоны и наоборот). Пример поведения "бегущих" констант связи, получающегося в подобных моделях, показан на Рис. 13.19. Возможность получить такое поведения эффективных констант связи считается сильным аргументом в пользу теорий с суперсимметрией. Заметим, однако, что суперсимметрия в Природе заведомо сильно нарушена и пока нет экспериментальных свидетельств в пользу ее существования. В частности, пока неизвестно существуют ли частицы — суперпартнеры известных частиц.

Предполагая существование группы "великого объединения" G и используя феноменологические значения констант взаимодействия, определенные при $Q \sim \mu \sim m_W$ можно оценить массу M_X более аккуратно. Для КХД константы g_3, используя (13.109) – (13.113), можем написать:

$$\frac{1}{g_3^2(\mu)} = \frac{1}{g_3^2(Q)} + 2b_3 \ln\frac{Q}{\mu}\,, \tag{13.138}$$

где ввели

$$b_3 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{3}n_f - 11\right)\,, \tag{13.139}$$

отличающуюся от использованной выше величины η знаком и постоянным множителем. При $Q = M_X$ имеем $g_3 = g_G$, так что из (13.138) получаем:

$$\frac{1}{g_i^2(\mu)} = \frac{1}{g_G^2} + 2b_i \ln\frac{M_X}{\mu}\,, \qquad \text{где} \qquad i = 3\,. \tag{13.140}$$

Это же соотношение можно применить и к константам взаимодействия g_1, g_2 групп

$SU(2)$ и $U(1)$, причем:

$$b_1 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{4}{3}n_g\right),$$
$$b_2 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(-\frac{22}{3}\right) + b_1\,, \tag{13.141}$$
$$b_3 = \frac{1}{(4\pi)^2}(-11) + b_1\,, \tag{13.142}$$

где n_g — число типов фермионов в рассматриваемой модели. В общем случае группы $SU(N)$ имеем:

$$b_N = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(-\frac{11}{4}N + \frac{4}{3}n_g\right), \tag{13.143}$$

где первый член связан с вкладом петли калибровочных бозонов, а второй с петлями фермионов.

Исключая n_g и g_G из трех уравнений типа (13.142) и используя (13.143), составим следующую линейную комбинацию:

$$\frac{C^2}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} - \frac{1+C^2}{g_3^2} = 2[C^2 b_1 + b_2 - (1+C^2)b_3]\ln\frac{M_X}{\mu}\,, \tag{13.144}$$

где $g_i^2 = g_i^2(\mu)$. Левая сторона тут подобрана так, чтобы ее можно было выразить через e^2 и g_3^2. В самом деле, имеем:

$$\frac{C^2}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} = \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} = \frac{1}{e^2}\,, \tag{13.145}$$

где использовали (13.136) и известные формулы электрослабой теории $e = g\sin\alpha = f\cos\alpha$. Подставляя коэффициенты b_i из (13.142) в (13.144), получим:

$$\ln\frac{M_X}{\mu} = \frac{3(4\pi)^2}{22(1+3C^2)}\left[\frac{1}{e^2} - \frac{1+C^2}{g_3^2}\right]. \tag{13.146}$$

При $\mu \sim 10\,\text{GeV}$ имеем $e^2 \sim 10^{-2}$ и $g_3^2 \sim 0.1$. Полагая[18] $C^2 = 5/3$ получаем

$$M_X \sim 5\cdot 10^{14}\,\text{GeV}\,. \tag{13.147}$$

Эта оценка, как нетрудно видеть, не очень чувствительна к выбору μ и к точному значению C. Масса M_X очень велика, но не настолько, чтобы надо было учитывать гравитацию[19].

Минимальная группа, удовлетворяющая условию

$$G \supset SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1) \tag{13.148}$$

[18] Это следует из (13.136) и $\sin^2\alpha \approx 0.2$. В общем случае из (13.136) имеем: $\sin^2\alpha = \frac{g_1^2(Q)}{g_1^2(Q)+C^2 g_2^2(Q)}$. Если взять $C^2 = 5/3$, то при $Q = M_X$, т.е. при $g_1 = g_2$, получим $\sin^2\alpha = 3/8$. Но при $Q \approx \mu$ величина $\sin^2\alpha$ уже другая из-за $g_1 \neq g_2$..

[19] Учет гравитации становится важным при $\frac{GM^2}{r}|_{r=\frac{\hbar}{MC}} \sim Mc^2$, что дает планковскую массу $M_P c^2 \sim \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} \sim 1.2\cdot 10^{19}$ GeV.

— это группа $SU(5)$. На ее использовании основана простейшая модель GUT (Джорджи – Глэшоу). Какие калибровочные бозоны возникают в этой теории? В общем случае $SU(N)$-симметричной калибровочной теории имеется $N^2 - 1$ калибровочных бозонов. Соответственно, для $SU(5)$ имеем:

$$24 = (8,1)_{\text{Глюоны}} + [(1,3) + (1,1)]_{W,Z,\gamma} + [(3,2) + (\bar{3},2)]_{X,Y}\,. \tag{13.149}$$

Таким образом в теории возникают сверхтяжелые бозоны X и Y. Они обладают цветом и являются посредниками взаимодействий, переводящих кварки в лептоны:

$$(u,d)_L \to e_L^+ + (\bar{Y},\bar{X})\,, \tag{13.150}$$

что, в частности, приводит к неизбежности распада протона[20]. При $Q \sim M_{X,Y}$ сильное цветовое взаимодействие смешивается с электрослабым и четкое разделение частиц на цветные кварки и бесцветные лептоны пропадает.

Фермионы в $SU(5)$ модели размещаются по фундаментальным представлениям $\bar{5}$ и 10. В явном виде, для левых состояний имеем:

$$\begin{aligned} \bar{5} &= (1,2) + (\bar{3},1) = (\nu_e, e^-)_L + \bar{d}_L\,, \\ 10 &= (1,1) + (\bar{3},1) + (3,2) = e_L^+ + u_L^+ + (u,d)_L\,. \end{aligned} \tag{13.151}$$

Теоретические оценки времени жизни протона дают:

$$\tau_p \sim \frac{M_X^4}{m_p^5}\,. \tag{13.152}$$

Видно, что его численное значение очень чувствительно к точному значению M_X. Оно лежит в интервале $10^{30} - 10^{32}$ лет! Современная экспериментальная граница: $\tau_p > 10^{32}$ лет. Это, по-видимому, позволяет отбросить простейшую $SU(5)$ модель “великого объединения”. Однако существуют более сложные модели GUT, в которых время жизни протона существенно больше. К сожалению, в настоящее время не видно экспериментальных возможностей поиска распадов протона со временем жизни, существенно превышающим 10^{32} лет. В этом смысле, а также ввиду огромного масштаба массы M_X, все GUT модели, до некоторой степени, представляют собой “игру” теоретиков. Тем не менее, чисто теоретические соображения заставляют вести активные исследования в этом направлении [48].

[20] Распад протона не столь неожидан, как может показаться. Сохранение электрического заряда связано с существованием безмассового фотона, но, ведь, по-видимому, не существует безмассовых частиц, ответственных за сохранение барионного заряда (см. Главу 2).

Глава 14

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ

14.1 Теория поля на решетке.

Все предыдущее рассмотрение теории взаимодействующих полей было основано на том или ином варианте теории возмущений. По сути дела, это единственный универсальный метод анализа соответствующих задач. В тоже время ясно, что в квантовой теории поля существует целый ряд проблем, последовательное решение которых невозможно без развития методов, не использующих теорию возмущений. В частности, такие задачи возникают при исследовании асимптотических свойств квантовой теории поля, где выход за рамки теории возмущений необходим при попытках восстановления вида функции Гелл-Манна – Лоу. Из физических проблем здесь основной является, конечно, проблема последовательного описания явления конфайнмента кварков. Достаточно очевидно, что никакого универсального метода выхода за рамки теории возмущений просто не существует. Вместе с тем, в квантовой теории поля развит ряд подходов, которые позволяют проанализировать некоторые непертурбативные эффекты. В связи с этим в теории возник ряд важных концепций, значение которых выходит за рамки собственно квантовой теории поля. В этой Главе мы остановимся на ряде таких задач, имея в виду проиллюстрировать, главным образом, именно эту концептуальную сторону дела.

Очень важное направление современной квантовой теории связано с рассмотрением калибровочных полей на решетке. Оно было предложено в начале 70-х годов Вильсоном и, по сути дела, является единственным методом, позволяющим достаточно полно решить проблему конфайнмента. В этом подходе вместо обычного пространственно-временного континуума вводится дискретное пространство-время[1]. При этом автоматически отпадает проблема полевых расходимостей, по-

[1]Как не раз указывалось выше, введение решетки нарушает релятивистскую инвариантность

скольку возникает естественное их обрезание — длина волн в решетке не может быть меньше удвоенной постоянной решетки a, соответственно область изменения импульсов ограничена величиной $\frac{\pi}{a}$ (хорошо известная из теории твердого тела зона Бриллюэна). В такой формулировке квантовая теория поля во многом аналогична статистической механике решеточных систем, где существуют хорошо разработанные методы, позволяющие, иногда, решать задачи и не по теории возмущений. В частности, в решеточных моделях можно эффективно использовать численные расчеты методом Монте-Карло. В нашем изложении мы, в основном, следуем книге [11], более подробное рассмотрение решеточных моделей в квантовой теории поля можно найти в [49] и в хорошем обзоре [50].

Ниже мы будем рассматривать только евклидову формулировку квантовой теории поля на решетке, хотя существуют и методы анализа моделей с явным выделением временных зависимостей. Будем рассматривать только простую кубическую решетку с постоянной a в четырехмерном пространстве. Узлы решетки будем параметризовать 4-вектором n. Тогда четырехмерное интегрирование заменяется суммированием:

$$\int d^4x ... \to a^4 \sum_n ... \,. \tag{14.1}$$

Скалярные поля.

Рассмотрим простейший случай скалярного поля $\phi(x)$. Действие соответствующей теории в непрерывном евклидовом пространстве имеет вид:

$$S(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi)\right] , \tag{14.2}$$

где

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \,. \tag{14.3}$$

Скалярное поле существует в каждом узле решетки n:

$$\phi(x) = \phi_n \,. \tag{14.4}$$

Производная поля определяется на решетке как:

$$\partial_\mu \phi(x) \to \frac{1}{a}(\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n) \,, \tag{14.5}$$

где $\hat{\mu}$ — 4-вектор длины a в направлении μ.

Для действия на решетке соответственно имеем:

$$S(\phi) = \sum_n \left\{ \frac{a^2}{2}\sum_{\mu=1}^{4}(\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n)^2 + a^4\left(\frac{m^2}{2}\phi_n^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_n^4\right)\right\} . \tag{14.6}$$

Полезно перейти в импульсное представление и определить спектр возбуждений свободной теории ($\lambda = 0$). Воспользуемся разложением Фурье:

$$\phi_n = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot n}\phi(k) \,. \tag{14.7}$$

теории, но для задач, которые будут здесь обсуждаться, это не так уж и важно — основной интерес представляет, например, поведение КХД на больших расстояниях, когда о решетке можно просто “забыть”.

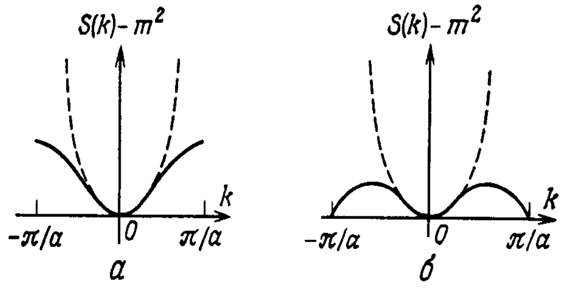


Рис. 14.1:

Поскольку рассматривать длины волн меньше удвоенной постоянной решетки a не имеет смысла, интегрирование в (14.7) проводится по зоне Бриллюэна обратной решетки, т.е.

$$-\frac{\pi}{a} \le k_\mu \le \frac{\pi}{a} \qquad \text{для каждого} \qquad \mu = 1, ..., 4\,. \tag{14.8}$$

Здесь $k_\mu \equiv k \cdot \hat{\mu}$. После подстановки (14.7) в (14.6) члены, получающиеся из "кинетической" энергии, запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered} a^4 \sum_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{i(k+k')\cdot n} (e^{iak_\mu} - 1)(e^{iak'_\mu} - 1) = \\ = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (e^{iak_\mu} - 1)(e^{-iak_\mu} - 1) = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right), \end{gathered} \tag{14.9}$$

так что действие свободной теории принимает вид:

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right) + m^2 \right] \phi(-k)\phi(k)\,, \tag{14.10}$$

Таким образом каждая мода дает в действие вклад вида:

$$S(k) = \frac{1}{2} \left[\sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right) + m^2 \right] \tag{14.11}$$

вместо стандартного $\frac{1}{2}\left(k^2 + m^2\right)$. Тем не менее оба этих выражения имеют один и тот же непрерывный предел, поскольку они совпадают при малых k, в этом смысле все благополучно. Полученный спектр показан на Рис. 14.1(а).

Теория с решеточным действием (14.6) может быть проквантована с помощью формализма функционального интегрирования, в рамках которого вакуумное среднее дается формулой[2]:

$$\langle 0|\phi_{n1}\phi_{n2}...\phi_{nl}|0\rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_n [d\phi_n](\phi_{n1}\phi_{n2}...\phi_{nl}) e^{-S[\phi]}\,, \tag{14.12}$$

где

$$Z = \int \prod_n [d\phi_n] e^{-S[\phi]}\,. \tag{14.13}$$

[2]В евклидовой теории не имеет смысла писать знак T-упорядочения!

Это типичная статистическая механика поля (параметра порядка) ϕ_n на решетке! Величина $S[\phi]$ — соответствующая флуктуационная свободная энергия. Выражение (14.12) представляет собой корреляционную этого параметра порядка, заданного на разных узлах. Полезно сравнить эти выражения с (10.160), (10.162) и (10.164), использовавшимися выше при рассмотрении теории критических явлений.

Проведем здесь замену переменной (изменим масштаб полей):

$$\phi'_n = \sqrt{\lambda}\phi_n \,. \tag{14.14}$$

Тогда решеточное действие принимает вид:

$$S(\phi) = \frac{1}{\lambda} S'(\phi') \,, \tag{14.15}$$

где:

$$S'(\phi') = \sum_n \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_\mu (\phi'_{n+\mu} - \phi'_n)^2 + a^4 \left(\frac{m^2}{2} {\phi'}_n^2 + \frac{1}{4} {\phi'}_n^4 \right) \right\} \,, \tag{14.16}$$

так что константа взаимодействия λ стала общим множителем для всего действия. Тогда (14.12) и (14.13) переписываются в виде:

$$\langle 0|\phi'_{n1}\phi'_{n2}...\phi'_{nl}|0\rangle = \frac{1}{Z'} \int \prod_n [d\phi'_n](\phi'_{n1}\phi'_{n2}...\phi'_{nl}) \exp\left\{ -\frac{1}{\lambda} S'[\phi'] \right\} \,, \tag{14.17}$$

$$Z' = \int \prod_n [d\phi'_n] \exp\left\{ -\frac{S'[\phi']}{\lambda} \right\} \,. \tag{14.18}$$

Если здесь заменить

$$\frac{1}{\lambda} \to \beta = \frac{1}{T} \,, \tag{14.19}$$

где T — температура, то разложение *сильной связи* в квантовой теории поля, которое нужно вести по *обратным* степеням константы связи λ, оказывается эквивалентным *высокотемпературному* разложению статистической механики. Это открывает довольно широкие возможности для изучения таких разложений, поскольку метод высокотемпературных разложений в применении к решеточным моделям статистической механики разработан довольно хорошо и широко используется в численном исследовании, например, критических явлений [51, 52].

Фермионные поля.

Перейдем к рассмотрению фермионов. Процедура, аналогичная той, которая использовалась в случае скалярных полей, приводит к евклидову решеточному действию для системы свободных фермионов следующего вида:

$$S_0(\psi) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_{\mu=1}^{4} \bar{\psi}_n \gamma_\mu (\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}) + ma^4 \bar{\psi}_n \psi_n \right\} \,, \tag{14.20}$$

где γ-матрицы евклидовой теории удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \,. \tag{14.21}$$

В импульсном представлении действие (14.20) записывается в виде:

$$S_0(\psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{\psi}(-k)\left\{i\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m\right\}\psi(k)\,. \tag{14.22}$$

По сравнению с непрерывным случаем происходит замена $\gamma_\mu k_\mu \to \gamma_\mu \frac{1}{a}\sin ak_\mu$. Аналогично тому, как в обычной (евклидовой) теории Дирака $\gamma_\mu k_\mu + m$ дает спектр $k^2 + m^2$, в данном случае имеем спектр возбуждений вида:

$$S(k) = \frac{\sin^2 ak_\mu}{a^2} + m^2\,, \tag{14.23}$$

показанный на Рис. 14.1(б). Видим, что в этом случае в зоне Бриллюэна имеется два одинаковых минимума. Один из них, при $k = 0$, приводит к правильному непрерывному пределу. Другая мода, соответствующая минимуму при $k_\mu = \pm\frac{\pi}{a}$, обладает при $a \to 0$ бесконечным импульсом, а при конечных a может быть возбуждена. Соответственно, требуется некоторая модификация теории, не влияющая на непрерывный предел, но устраняющая вклад второго минимума. Вильсон предложил добавить к решеточному лагранжиану следующий вклад:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2a}\bar{\psi}_n(\psi_{n+\hat{\mu}} + \psi_{n-\hat{\mu}} - 2\psi_n)\,, \tag{14.24}$$

так что в евклидовом пространстве действие свободных фермионов принимает вид:

$$S_0(\psi) = \sum_n \left\{\frac{a^3}{2}\sum_\mu \bar{\psi}_n[(1+\gamma_\mu)\psi_{n+\hat{\mu}} + (1-\gamma_\mu)\psi_{n-\hat{\mu}} - 2\psi_n] + ma^4\bar{\psi}_n\psi_n\right\}\,. \tag{14.25}$$

В импульсном представлении имеем:

$$S_0(\psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{\psi}(-k)\left\{i\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m - \sum_\mu \frac{\cos ak_\mu - 1}{a}\right\}\psi(k)\,. \tag{14.26}$$

Это действие обладает тем свойством, что нежелательный минимум поднимается на ненулевые энергии, тогда как поведение теории при малых k не изменяется. Соответственно, в непрерывном пределе остается только вклад “правильного” минимума при $k = 0$.

Локальная калибровочная инвариантность.

Построим теперь решеточную калибровочную теорию. Для конкретности имеем в виду $SU(3)$-симметричную КХД. Локальное (зависящее от узла!) калибровочное преобразование запишем в виде:

$$\psi_n \to \Phi_n\psi_n\,, \qquad \bar{\psi}_n \to \bar{\psi}_n\Phi_n^+\,, \tag{14.27}$$

где

$$\Phi_n = \exp\left\{i\frac{\lambda^i}{2}\theta_n^i\right\}\,. \tag{14.28}$$

Здесь λ^i $(i = 1, 2, ..., 8)$ — матрицы Гелл-Манна (генераторы группы $SU(3)$, см. уравнения (2.186)).

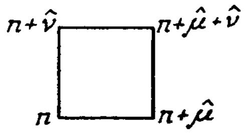


Рис. 14.2:

Введем теперь так называемую *реберную* переменную, заданную на решеточной связи, соединяющей соседние узлы:

$$U(n+\hat{\mu}, n) = \exp\left\{iga\frac{\lambda^i}{2}A^i_{n\mu}\right\}, \tag{14.29}$$

где $A^i_{n\mu}$ — решеточное поле глюонов, g — янг-миллсовская константа связи. Закон калибровочного преобразования этой матрицы определим как:

$$U(n+\hat{\mu}, n) \to \Phi_{n+\hat{\mu}} U(n+\hat{\mu}, n)\Phi^+_n\,. \tag{14.30}$$

Из (14.27) и (14.30) следует, что комбинация $\bar{\psi}_n U(n, n+\hat{\mu})\psi_{n+\hat{\mu}}$ является калибровочно инвариантной. Отсюда ясно, как нужно модифицировать действие (14.25), чтобы получить кварковую часть $SU(3)$-симметричного действия КХД:

$$S_{QCD} = S(q) + S(A)\,, \tag{14.31}$$

$$S(q) = \sum_n \left\{\frac{a^3}{2}\sum_\mu \left[\bar{\psi}_n(1+\gamma_\mu)U(n, n+\hat{\mu})\psi_{n+\hat{\mu}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\bar{\psi}_n(1-\gamma_\mu)U(n, n-\hat{\mu})\psi_{n-\hat{\mu}} - 2\psi_n\right] + ma^4\bar{\psi}_n\psi_n\right\}. \tag{14.32}$$

В непрерывном пределе $a \to 0$ разложение выражения (14.32) в ряд по степеням a дает обычное выражение для фермионного действия, в котором возникают ковариантные производные калибровочной теории.

Как должно выглядеть решеточное действие для самого калибровочного (глюонного) поля? Ясно, что оно должно строиться из реберных переменных. Простейшая калибровочно инвариантная комбинация определяется на элементарном квадратике (грани, или, как ее еще называют, плакете) решетки, показанном на Рис. 14.2. Составим матричное произведение реберных переменных, взятых вдоль связей на плакете p:

$$U_p = U(n, n+\hat{\mu})U(n+\hat{\mu}, n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U(n+\hat{\mu}+\hat{\nu}, n+\hat{\nu})U(n+\hat{\nu}, n)\,. \tag{14.33}$$

Эта комбинация, очевидно, является инвариантной относительно преобразований (14.30). Введем действие калибровочного поля в виде следующей суммы по всем плакетам на решетке:

$$S(A) = -\frac{1}{8\pi g^2}\sum_p SpU_p\,. \tag{14.34}$$

Здесь шпур от произведения берется по индексам матриц $SU(3)$. Если в экспонентах, входящих в (14.33), (14.34), провести разложение по степеням a и отбросить члены $O(a^3)$, выражение (14.34) можно переписать в виде:

$$S(A) = -\frac{1}{8\pi g^2}\sum_p Sp\{\exp(iga^2 F_{n\mu\nu})\}\,, \tag{14.35}$$

где

$$F_{n\mu\nu} = \partial_\mu A_{n\nu} - \partial_\nu A_{n\mu} - ig[A_{n\mu}\,, A_{n\nu}] \tag{14.36}$$

где введено обозначение:

$$\partial_\mu A_{n\nu} \equiv \frac{1}{a}(A_{n+\hat{\mu}\nu} - A_{n\nu})\,, \tag{14.37}$$

причем $A_{n\mu} = A^i_\mu \lambda^i/2$ — глюонное поле в узле n. Отсюда сразу же возникает правильный непрерывный предел:

$$S(A) = -\frac{1}{8\pi g^2}\sum_p \left\{1 - \frac{g^2a^4}{2}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + ...\right\} \to \text{const} + \frac{1}{16\pi}\int d^4x F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}\,, \tag{14.38}$$

где, в процессе вывода, использовались свойства $Sp\lambda^i = 0$ и $Sp(\lambda^i\lambda^j) = 2\delta^{ij}$.

Критерий конфайнмента. Петля Вильсона.

Чтобы ввести критерий конфайнмента (удержания) кварков в КХД, можно найти энергию системы, состоящей из кварка, находящегося в точке $x = (t, \mathbf{0})$ и антикварка, находящегося в точке $x = (t, \mathbf{R})$. В случае отсутствия удержания, с очевидностью, имеем:

$$E(R) \to 2m \qquad \text{при} \qquad R \to \infty\,, \tag{14.39}$$

где m — масса кварка. Наличие удержания означает, что межкварковый потенциал безгранично растет:

$$E(R) \to \infty \qquad \text{при} \qquad R \to \infty\,. \tag{14.40}$$

Будем обозначать фермионное поле кварков $q(x)$ и введем калибровочно инвариантный $q\bar{q}$-оператор вида:

$$\Gamma[x, x'; C] = \bar{q}(x')U(x', x; C)q(x)\,, \tag{14.41}$$

где $U(x', x; C)$ — упорядоченное произведение реберных переменных вдоль некоторого пути (траектории) C, связывающего точки x и x' на решетке[3]. Рассмотрим калибровочно инвариантный коррелятор, описывающий перекрытие $q\bar{q}$ состояния в момент (евклидова!) времени $t = 0$ и $q\bar{q}$ состояния в момент времени $t = T$:

$$\Omega(T, R) = \langle 0|\Gamma^+[(0, \mathbf{0}), (0, \mathbf{R}); C]\Gamma[(T, \mathbf{0}), (T, \mathbf{R}); C]|0\rangle\,. \tag{14.42}$$

"Вставляя" между операторами представление единицы (условие полноты!) через сумму по полной системе собственных состояний энергии рассматриваемой системы, получаем (ср. использование аналогичного приема в Главе 9):

$$\Omega(T, R) = \sum_n |\langle 0|\Gamma^+[(0, \mathbf{0}), (0, \mathbf{R}); C]|n\rangle|^2 e^{-E_n T}\,. \tag{14.43}$$

[3]В непрерывном пределе: $U(x', x) = P\exp\left\{ig\int_x^{x'} dy^\mu \frac{\lambda^i}{2}A^i_\mu(y)\right\}$, где P — оператор упорядочения вдоль пути C.

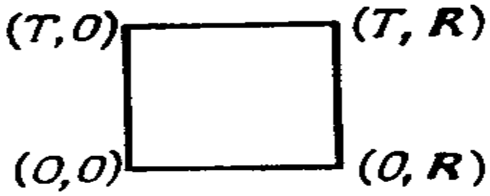


Рис. 14.3:

Видим, что при больших T основной вклад дает слагаемое с наименьшим E_n. Это наименьшее собственное значение энергии очевидно соответствует *потенциальной* энергии $q\bar{q}$ системы, в которой кварк и антикварк находятся на расстоянии R друг от друга:

$$\lim_{T\to\infty} \Omega(T,R) \sim e^{-E(R)T} \,. \tag{14.44}$$

В терминах кварковых полей имеем:

$$\Omega(T,R) = \langle 0|\bar{q}(0,\mathbf{R})U[(0,\mathbf{R}),(0,\mathbf{0});C]q(0,\mathbf{0})\bar{q}(T,\mathbf{0})U[(T,\mathbf{0}),(T,\mathbf{R});C]q(T,\mathbf{R})|0\rangle \,. \tag{14.45}$$

Если рассмотреть кварки как очень тяжелые (классические, c-числовые) внешние источники и рассмотреть путь C в виде замкнутого прямоугольника, показанного на Рис. 14.3, выражение (14.45) можно переписать как:

$$\Omega(T,R) \sim e^{-2mT} W(C) \sim e^{-E(R)T} \,, \tag{14.46}$$

где

$$W(C) = \langle 0|SpU[x,x';C]|0\rangle \tag{14.47}$$

определяет так называемую петлю Вильсона. Именно поведение коррелятора $W(C)$ и определяет наличие или отсутствие конфайнмента. В самом деле, из (14.46) ясно, что:

$$\lim_{T\to\infty} W(C) \sim \exp\{-T[E(R)-2m]\} \,. \tag{14.48}$$

Как мы увидим ниже, в пределе сильной связи ($g \to \infty$) в решеточной теории в решеточной теории можно показать, что вильсоновская петля удовлетворяет *закону площади*, так что для достаточно большого контура C имеем:

$$W(C) \sim \exp\{-KA(C)\} \,, \tag{14.49}$$

где K — некоторая константа, а $A(C)$ — площадь, охватываемая на решетке контуром C (т.е. минимальная площадь поверхности, границей которой является C). Например, для прямоугольного контура Рис. 14.3, имеем:

$$A(C) = TR \,. \tag{14.50}$$

Но тогда из (14.48), (14.49) и (14.50) получаем:

$$T[E(R)-2m] \sim KTR \qquad \text{или} \qquad E(R)-2m \sim KR \,, \tag{14.51}$$

т.е. линейно растущий с R потенциал взаимодействия в системе $q\bar{q}$, что, очевидно, соответствует конфайнменту. Коэффициент K называется коэффициентом натяжения струны (силой конфайнмента). Название это связано с тем, что для возникновения линейно растущего потенциала глюонное поле между кварками должно собраться в трубку — "струну". Эта струна вытягивается следом за кварками и не позволяет им разойтись на макроскопические расстояния.

Закон площади в разложении сильной связи.

Покажем, схематически, как получить закон площади а пределе сильной связи. Поскольку реберные переменные непосредственно связаны с калибровочными полями, в решеточной калибровочной теории их можно выбрать в качестве основных динамических степеней свободы. Это позволяет записать (14.47) в виде "функционального" интеграла[4]:

$$W(C) = \frac{1}{Z} \int \prod_{m,\mu} dU(n, n+\hat{\mu}) SpU(x, x; C) \exp\left\{ -\frac{1}{8\pi g^2} \sum_p SpU_p \right\}, \tag{14.52}$$

где

$$Z = \int \prod_{m,\mu} dU(n, n+\hat{\mu}) \exp\left\{ -\frac{1}{8\pi g^2} \sum_p SpU_p \right\}. \tag{14.53}$$

Отметим, что здесь не нужно добавлять к действию никаких членов фиксирующих калибровку, поскольку реберная переменная изменяется в ограниченной области. Соответственно, объем пространства траекторий, порождаемых калибровочными преобразованиями, конечен. Поэтому, до перехода к непрерывному пределу не возникает необходимости вводить члены фиксации калибровки.

Реберные переменные, как мы видели выше, являются элементами группы $SU(3)$. Унитарные матрицы группы $SU(3)$ параметризуются восемью обобщенными углами Эйлера, так что можно записать групповые интегралы в (14.52), (14.53) в явном виде, выразив их через эти углы. Мы этого делать не будем, а лишь приведем следующие условия ортогональности [11]:

$$\begin{gathered} \int dU(n, n+\hat{\mu}) [U(n, n+\hat{\mu})]_{ij} = 0\,, \\ \int dU(n, n+\hat{\mu}) [U(n, n+\hat{\mu})]_{ij} [U^+(n, n+\hat{\mu})]_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk}\,, \\ \int dU(n, n+\hat{\mu}) [U(n, n+\hat{\mu})]_{ij} [U(n, n+\hat{\mu})]_{kl} = 0\,. \end{gathered} \tag{14.54}$$

Условия (14.55) означают, что при вычислении интегралов, определяющих (14.52), только вклады от ребер (связей) решетки, проходимых в противоположных направлениях дают ненулевой вклад. Таким образом, если имеются два соседних плакета одинаковой ориентации, то после интегрирования по переменной, определенной на их общем ребре, они "сливаются" в один прямоугольник, как это показано на Рис. 14.4.

В пределе сильной связи величина $\frac{1}{g^2}$ рассматривается в качестве малого пара-

[4] На решетке это просто многократный интеграл!

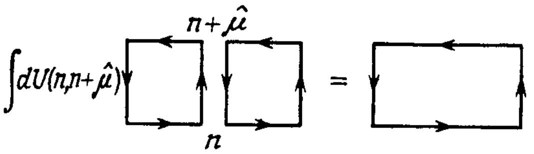


Рис. 14.4:

метра. Поэтому экспоненту в (14.52) можно разложить в ряд:

$$W(C) = \frac{1}{Z}\int \prod_{n,\mu} dU(n, n+\hat{\mu}) SpU(x, x; C)\left[1 - \frac{1}{8\pi g^2}\sum_p SpU_p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{8\pi g^2}\right)^2 \sum_p \sum_{p'} SpU_p SpU_{p'} + \ldots\right] . \quad (14.55)$$

Для простоты рассмотрим опять прямоугольный контур C. Согласно формулам (14.55) в этом разложении отличен от нуля интеграл только от такого члена в разложении экспоненты по $\frac{1}{g^2}$, для которого плакеты целиком заполняют поверхность, натянутую на данный контур. Только в этом случае каждое ребро в групповом интеграле встречается дважды (или ни одного раза), причем один раз в положительном, а другой раз в отрицательном направлении, так что все групповые интегралы по реберным переменным оказываются отличными от нуля. Таким образом, неисчезающий вклад в $W(C)$ наинизшего порядка дает член, пропорциональный $\left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p}$, где N_p — минимальное число плакетов, необходимых для того, чтобы заполнить поверхность, ограниченную контуром C:

$$W(C) \sim \left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p} . \quad (14.56)$$

Это соответствует закону площади, поскольку площадь поверхности, ограниченной контуром C, равна:

$$A(C) = a^2 N_p \,. \quad (14.57)$$

Следовательно

$$W(C) \sim (g^2)^{-A(C)/a^2} = \exp\{-(TR\ln g^2)/a^2\}\,. \quad (14.58)$$

Сравнивая это выражение с (14.49) и (14.51), получаем линейно растущий потенциал вида:

$$E(R) = KR\,, \qquad \text{где} \qquad K = \frac{1}{a^2}\ln g^2\,, \quad (14.59)$$

что соответствует $g^2(a) \sim e^{Ka^2}$.

Можно также рассмотреть разложение слабой связи для вильсоновской петли, переходя к непрерывному пределу и заменяя действие гауссовским приближением. В этом случае для петли получается *закон периметра*, который, как оказывается, соответствует кулоновскому потенциалу $E(R) \sim \frac{1}{R}$.

Означает ли все это, что мы доказали свойство конфайнмента? Нет, не означает! Например, все наши рассуждения можно повторить и для абелевой $U(1)$ теории,

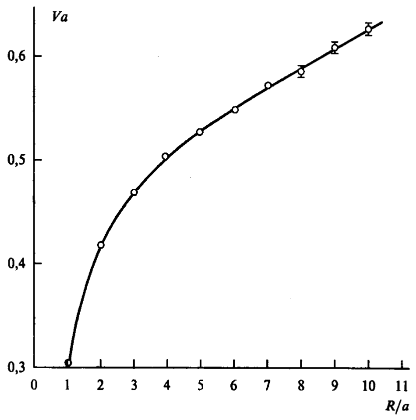


Рис. 14.5:

мы нигде не использовали свойство неабелевости $SU(3)$. Режимы сильной и слабой связи могут быть разделены одним или несколькими фазовыми переходами, происходящими при изменении константы связи g. Общего доказательства отсутствия таких переходов в КХД нет. Однако проблема всесторонне исследовалась численно, методами Монте-Карло. Соответствующие вычисления показали, что в КХД фазовые переходы, в области промежуточных значений g, отсутствуют. Зависимость $g^2(a) \sim e^{Ka^2}$ из (14.59) (область сильной связи) непрерывно переходит в области слабой связи в асимптотически свободное поведение $g^2(a) \sim \frac{1}{\ln a^{-1}}$, справедливую при $a \to 0$. Потенциал взаимодействия кварков, следующий из этих расчетов хорошо аппроксимируется суперпозицией кулоновского потенциала, доминирующего на малых расстояниях и линейно растущего потенциала, определяющего свойство конфайнмента на больших расстояниях: $V(R) = \frac{C}{R} + KR$. Типичный результат таких вычислений показан на Рис. 14.5 [55], где приводится потенциал, действующий между двумя статическими кварками, вычисленный на решетке 32^4, с ребром $a = 0.055 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$. Сплошной линией показана подгонка к суперпозиции кулоновского и линейного потенциалов. Ясно видно, что линейный рост $V(R)$ имеет место на расстояниях $R > 0.25 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$. На меньших расстояниях доминирует пертурбативная динамика (асимптотическая свобода). Типичное значение коэффициента натяжения струны, следующее из этих расчетов $K \approx 0.2\,\mathrm{GeV}^2 \approx 1.0 \cdot 10^{13}\,\mathrm{GeVcm}^{-1} \approx 14$ тонн! Эффективно это доказывает свойство конфайнмента в КХД, лежащее в основе стандартной модели. Подробности Монте-Карло расчетов в решеточных теория поля хорошо описаны в обзорах [53, 54]. Там же можно найти и описание других применений решеточных моделей, в частности, ранние попытки расчета масс реальных адронов, рассматриваемых как связанные состояния кварков и глюонов. Современное состояние вопроса с аналитическими моделями конфайнмента можно изучить по обзору [55].

Исследование решеточных моделей является сейчас одним из наиболее важных и активно развивающихся направлений квантовой теории поля. Не имея возможности для более подробного описания современных достижений этого направления, приведем лишь, в качестве примера, результаты Монте-Карло расчетов спектра легких

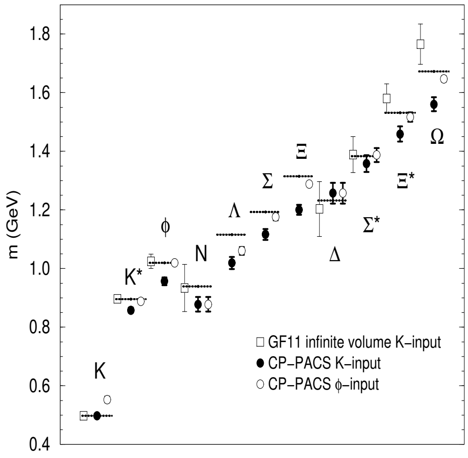


Рис. 14.6:

адронов, показанные на Рис. 14.6[5], и демонстрирующие очень приличное согласие с экспериментом.

Свойство конфайнмента не является абсолютным, при некоторой достаточно высокой температуре T_c (температуре деконфайнмента), или при достаточно высокой его плотности, должен происходить фазовый переход из фазы адронной материи в фазу кварк-глюонной плазмы [47]. Физическая причина этого достаточно ясна. Если Λ — характерный масштаб импульсов, характеризующий переход к асимптотически свободному поведению, то при $T \gg \Lambda$ передаваемый импульс в процессах взаимодействия будет (почти всегда) удовлетворять неравенству $Q^2 \gg \Lambda^2$. Соответственно, будет применима теория возмущений. Но в пертурбативном подходе к КХД кварки и глюоны являются физическими состояниями теории. Это означает, что при $T \gg \Lambda$ мы имеем почти идеальный газ кварков и глюонов (кварк-глюонную плазму). Значение такого фазового перехода очень велико для решения ряда задач астрофизики нейтронных звезд и космологии. Экспериментально это явление может наблюдаться при столкновениях тяжелых ядер, в частности, первые указания на его наблюдение были получены в экспериментах в CERN в 2000 году. Величину T_c вычисляли методом Монте-Карло в решеточной КХД. Типичные значения, получающееся в таких расчетах, сводятся к T_c, лежащей в интервале $0.15 - 0.20\,\mathrm{MeV}$. Детальный обзор фазовых переходов в КХД можно найти в [56].

14.2 Эффективный потенциал и петлевое разложение.

Понятие эффективного потенциала является весьма полезным при рассмотрении теорий со спонтанно нарушенной симметрией. Оно дает возможность рассматривать эти теории по существу так же, как теории с ненарушенной симметрией, и вычислять квантовые поправки к классической картине спонтанного нарушения симметрии, рассмотренной выше.

[5]S. Aoki et al. ArXiv: hep-lat/9904012

Опять рассмотрим простейший случай скалярного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi)\,, \qquad V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4\,, \qquad S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}\,. \tag{14.60}$$

Лагранжиан инвариантен относительно $\varphi \to -\varphi$, однако в случае спонтанного нарушения симметрии таким свойством не обладает решение уравнения

$$\left.\frac{dV}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0\,, \tag{14.61}$$

где $\varphi_0 \neq 0$. Это видно уже из проведенного выше классического анализа.

Квантовые поправки, как мы видели, возникают из петлевого разложения, а расходимости, которые они содержат, делают необходимой перенормировку. Условия перенормировки формулировались выше в терминах 1ЧН-функций $\Gamma^{(n)}$. Производящим функционалом для функций $\Gamma^{(n)}(x_1, ..., x_n)$ является *эффективное действие* $\Gamma(\varphi)$, определенное в (10.150). Смысл этого названия прояснится ниже.

Производящий функционал для связных диаграмм $W[J]$ определяется согласно (10.131) как:

$$e^{iW[J]} = \langle 0|0\rangle_J\,. \tag{14.62}$$

Тогда классическое поле φ_c (в присутствие источника J) определяется из (10.151):

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0|\varphi(x)|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle_J}\,. \tag{14.63}$$

Вакуумное среднее значение $\langle\varphi\rangle$ есть, по определению:

$$\langle\varphi\rangle = \lim_{J\to 0} \varphi_c\,. \tag{14.64}$$

Согласно (10.150) эффективное действие $\Gamma[\varphi_c]$ равно:

$$\Gamma(\varphi_c) = W[J] - \int dx J(x)\varphi_c(x) \tag{14.65}$$

и, в соответствии с (10.151), оно удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} = -J(x)\,. \tag{14.66}$$

При $J(x) \to 0$ величина φ_c превращается в константу, равную $\langle\varphi\rangle$, так что вакуумное среднее от φ является решением уравнения:

$$\left.\frac{d\Gamma[\varphi_c]}{d\varphi_c}\right|_{\varphi_c=\langle\varphi\rangle} = 0\,. \tag{14.67}$$

Обычное разложение функционала $\Gamma[\varphi_c]$ по степеням φ_c записывается в виде:

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 ... dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, ..., x_n)\varphi_c(x_1)...\varphi_c(x_n) \tag{14.68}$$

или, что эквивалентно, в импульсном представлении:

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dp_1...dp_n \delta(p_1 + ... + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, ..., p_n) \varphi_c(p_1)...\varphi_c(p_n) \,. \tag{14.69}$$

Альтернативным является разложение $\Gamma[\varphi_c]$ по полю φ_c и его производным вида:

$$\Gamma[\varphi_c] = \int dx \, \{-U(\varphi_c(x))\} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_c)^2 Z(\varphi_c(x)) \,. \tag{14.70}$$

В этом случае, функция (не функционал!) $U(\varphi_c)$ называется *эффективным потенциалом*. Ниже мы увидим, что в классическом пределе он просто совпадает с потенциалом $V(\varphi)$. В случае, когда $\varphi_c(x) = \langle \varphi \rangle = \varphi = const$, все члены последнего разложения, за исключением первого, обращаются в нуль, так что:

$$\Gamma[\varphi] = -\Omega U(\varphi) \,, \tag{14.71}$$

где Ω — полный объем, занимаемый полем в пространстве-времени. Сравнивая (14.69) и (14.71), имеем:

$$U(\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \Gamma^{(n)}(p_i = 0) \,. \tag{14.72}$$

Условия нормировки, накладываемые на величины $\Gamma^{(2)}(p_i = 0)$ и $\Gamma^{(4)}(p_i = 0)$ могут быть переформулированы в терминах потенциала U:

$$\left. \frac{d^2 U(\varphi_c)}{d^2 \varphi_c} \right|_{\varphi_c = \langle \varphi \rangle} = m^2 \,, \tag{14.73}$$

$$\left. \frac{d^4 U(\varphi_c)}{d^4 \varphi_c} \right|_{\varphi_c = \langle \varphi \rangle} = g \,. \tag{14.74}$$

Кроме того, условие (14.67) для вакуумного среднего принимает вид:

$$\left. \frac{dU(\varphi_c)}{d\varphi_c} \right|_{\varphi_c = \langle \varphi \rangle} = 0 \,. \tag{14.75}$$

С целью изучения свойств теории со спонтанным нарушением симметрии, удобно определить новое поле φ':

$$\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle \,, \tag{14.76}$$

вакуумное среднее от которого равно нулю.

Заметим, что поскольку все расходимости теории поглощены контрчленами до того, как были наложены условия нормировки (14.73), (14.74), очевидно, что в теории со спонтанным нарушением симметрии не содержатся новые расходимости, сверх тех, которые имеются в теории с ненарушенной симметрией, так что структура расходимостей в перенормируемой теории поля не затрагивается спонтанным нарушением симметрии.

Займемся вычислением эффективного потенциала. Используем (14.65) и начнем с вычисления функционала $W[J]$ методом перевала. Напомним, что такое метод перевала, на примере обычного интеграла вида:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-f(x)} \,. \tag{14.77}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет минимум в некоторой точке x_0. Тогда имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \ldots \,, \tag{14.78}$$

так что можно написать:

$$I \approx e^{-f(x_0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0)} \tag{14.79}$$

и задача свелась к известному нам гауссову интегралу, который уже легко считается.

Восстанавливая постоянную Планка в определении функционала $W[J]$, имеем:

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi,J]} \,, \tag{14.80}$$

где

$$S[\varphi, J] = \int d^4x[\mathcal{L}(\varphi) + \hbar\varphi(x)J(x)] \,. \tag{14.81}$$

Из (14.60) и (14.61) следует равенство:

$$\left.\frac{\delta S[\varphi, J]}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi_0} = \hbar J(x) \,. \tag{14.82}$$

При $J \to 0$ это сводится к условию экстремальности действия. Разложим действие в окрестности φ_0:

$$\begin{aligned} S[\varphi, J] &= S[\varphi_0, J] + \int dx[\varphi(x) - \varphi_0] \left.\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi_0} + \\ &+ \int dx \int dy \, \frac{1}{2}[\varphi(x) - \varphi_0] \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi_0} [\varphi(y) - \varphi_0] + \ldots = \\ &= S[\varphi_0, J] + \hbar \int dx[\varphi(x) - \varphi_0]J(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int dx \int dy[\varphi(x) - \varphi_0] \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi} [\varphi(y) - \varphi_0] + \ldots \,, \end{aligned} \tag{14.83}$$

где использовали (14.82). Выполняя функциональное дифференцирование, можно убедиться, что:

$$\left.\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\right|_{\varphi_0} = -[\Box + V''(\varphi_0)]\delta(x - y) \,. \tag{14.84}$$

Если положить $\varphi' = \varphi - \varphi_0$, то разложение (14.83) принимает вид:

$$S[\varphi, J] = S[\varphi_0, J] + \hbar \int dx\varphi'(x)J(x) - \frac{1}{2} \int dx\varphi'(x)[\Box + V''(\varphi_0)]\varphi'(x) + \ldots \,. \tag{14.85}$$

Подстановка этого выражения в (14.80) для использования метода перевала дает (пишем здесь вместо φ' просто φ):

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0, J]\right\} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\int dx\varphi[\Box + V''(\varphi_0)]\varphi\right\} \,, \tag{14.86}$$

где опущен вклад второго члена из (14.85), поскольку в дальнейшем подразумевается переход к пределу $J \to 0$. Чтобы получить петлевое разложение (эквивалентное, как мы видели, разложению по $\hbar$), заменим $\varphi \to \hbar^{1/2}\varphi$, исключая таким образом $\hbar$ из второй экспоненты в (14.86). Перейдем в интеграле в этой экспоненте к евклидову пространству, так что исчезнет еще и мнимая единица i. Теперь при вычислении функционального интеграла используем обычную формулу гауссова интегрирования и получим:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0, J]\right\}(\mathrm{Det}[\Box + V''(\varphi_0)])^{-1/2}\,. \tag{14.87}$$

Используя соотношение $\mathrm{Det}\,A = \exp Sp \ln A$, получаем:

$$W[J] = S[\varphi_0] + \hbar\int dx\varphi_0(x)J(x) + \frac{i\hbar}{2}Sp\ln[\Box + V''(\varphi_0)]\,. \tag{14.88}$$

Это выражение дает $W[J]$ с учетом однопетлевой квантовой поправки, члены $O(\hbar^2)$ опущены. Теперь можно подставить (14.88) в (14.65). Но сначала выразим $S[\varphi_c]$ через $S[\varphi_0]$. Полагая $\varphi_0 = \varphi_c - \varphi_1$, имеем:

$$\begin{aligned} S[\varphi_0] = S[\varphi_c - \varphi_1] &= S[\varphi_c] - \int dx\varphi_1(x)\left.\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi_c} + ... \\ &= S[\varphi_c] - \hbar\int dx\varphi_1(x)J(x) + ...\end{aligned} \tag{14.89}$$

Тогда подстановка (14.88) и (14.89) в (14.65) в пределе $J \to 0$ дает:

$$\Gamma[\varphi_c] = S[\varphi_c] + \frac{i\hbar}{2}Sp\ln[\Box + V''(\varphi_0)] \tag{14.90}$$

— эффективное действие с учетом однопетлевой квантовой поправки. Пусть теперь $\varphi_c(x) = \varphi = \mathrm{const}$. Тогда $\Gamma[\varphi]$ определяется (14.71), а из (14.60) следует $S[\varphi] = -\Omega V(\varphi)$. Соответственно, из (14.90) получаем эффективный потенциал вида:

$$U(\varphi) = V(\varphi) - \frac{i\hbar}{2}\Omega^{-1}Sp\ln[\Box + V''(\varphi)]\,. \tag{14.91}$$

Отсюда видим, что при $\hbar \to 0$ (в классическом пределе) эффективный потенциал просто совпадает с классическим потенциалом $V(\varphi)$, а эффективное действие (14.90) переходит в классическое (14.60). Поскольку шпур оператора сводится к сумме (интегралу) по всем собственным значениям, можно (после перехода к евклидову импульсному пространству) переписать (14.91) в виде:

$$\begin{aligned} U(\varphi) = V(\varphi) &+ \frac{\hbar}{2}\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\ln[k_E^2 + V''(\varphi)] = \\ &= V(\varphi) + \frac{\hbar}{2}\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\ln\left(k_E^2 + m^2 + \frac{1}{2}g\varphi^2\right)\,.\end{aligned} \tag{14.92}$$

Выражения такого типа можно использовать для изучения вопроса о спонтанном нарушении симметрии с учетом квантовых поправок. В использовавшемся нами выше классическом приближении при $m^2 > 0$ вакуум был невырожденным, а при $m^2 < 0$

возникало вырождение и спонтанное нарушение симметрии (фазовый переход). Что будет с учетом квантовых поправок, в частности при $m^2 = 0$? Из однопетлевого выражения для эффективного потенциала следует возникновение нетривиального минимума при $\varphi \neq 0$ и при $m^2 = 0$ – происходит спонтанное нарушение, индуцированное квантовыми поправками. К сожалению, однопетлевое приближение недостаточно для полного исследования этой задачи [8,11]. Более подробно с формализмом эффективного потенциала, его связью с группой перенормировок и другими аспектами теории можно познакомиться по обзору [57].

Рассмотренное выше петлевое разложение, являющееся, фактически, разложением по степеням $\hbar$, а не по степеням константы связи g, претендует в этом смысле на выход за рамки теории возмущений. Однако это не совсем так! В классической теории g сама по себе несущественна. Проще всего это понять, если перейти к $\varphi' = g\varphi$. Тогда лагранжиан теории φ^4 может быть переписан как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi'\partial^\mu\varphi' - \frac{1}{2}m^2\varphi'^2 - \varphi'^4\right). \tag{14.93}$$

Таким образом g вообще не появляется в классических уравнениях движения и, казалось бы, ее значение несущественно. Это, конечно, не так в квантовой теории и дело тут, как раз, в появлении $\hbar$. Дело в том, что в квантовом случае всегда фигурирует отношение:

$$\frac{1}{\hbar}\mathcal{L} = \frac{1}{g^2\hbar}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi'\partial^\mu\varphi' + ...\right) \tag{14.94}$$

и существенным параметром является $g^2\hbar$. Поэтому, квазиклассическое приближение (малые $\hbar$), фактически, тесно связано с приближением слабой связи (малые g).

14.3 Инстантоны в квантовой механике.

Нетривиальные непертурбативные эффекты в квантовой могут возникать даже при малых значениях константы связи, когда, казалось бы никаких сомнений в применимости теории возмущений быть не может. Однако это не всегда так! Даже в области малых значений константы связи могут существовать явления, для описания которых теория возмущений совершенно неадекватна[6]. Примером может служить описание эффектов квантовомеханического туннелирования.

Начнем с обычной квантовой механики. Рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся в одномерном потенциале:

$$H = \frac{1}{2}p^2 - V(x). \tag{14.95}$$

Ниже мы получим известные результаты квантовой механики, но достаточно необычным способом, который в дальнейшем удобно обобщить на случай квантовой теории поля.

Евклидовы интегралы по траекториям.

Рассмотрим евклидову (мнимое время!) версию фейнмановского интеграла по траекториям:

$$\langle x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i\rangle = \mathcal{N}\int[dx]e^{-S/\hbar}. \tag{14.96}$$

[6] В последующем изложении мы следуем, в основном, лекциям Коулмэна [58], более подробно с этими проблемами можно познакомиться по прекрасной книге [59]

Здесь $|x_i\rangle$ и $|x_f\rangle$ — собственные состояния оператора координаты частицы, H — ее гамильтониан. Меру интегрирования, обозначавшуюся выше как $\mathcal{D}x$, теперь обозначаем $[dx]$, величину T считаем положительной.

Введем, как обычно, полный набор собственных состояний гамильтониана:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{14.97}$$

и запишем:

$$\langle x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i\rangle = \sum_n e^{-E_nT/\hbar}\langle x_f|n\rangle\langle n|x_i\rangle\,. \tag{14.98}$$

Тогда в пределе $T \to \infty$ здесь остается только вклад основного состояния.

В правой части (14.96) стоит евклидово действие:

$$S = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V\right]. \tag{14.99}$$

Интегрирование $[dx]$ осуществляется по всем траекториям, подчиненным граничным условиям: $x(-T/2) = x_i$, $x(T/2) = x_f$. Подробнее, если $\bar{x}(t)$ — данная функция, удовлетворяющая таким условиям, то произвольная функция, удовлетворяющая тем же условиям, может быть записана в виде:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum_n c_n x_n(t)\,, \tag{14.100}$$

где $x_n(t)$ образуют полную систему ортонормированных функций, обращающихся в нуль на границах:

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2} dt x_n(t) x_m(t) = \delta_{nm}\,, \qquad x_n(\pm T/2) = 0\,. \tag{14.101}$$

Тогда меру $[dx]$ можно определить как:

$$[dx] = \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} dc_n\,. \tag{14.102}$$

Очевидно, что таким образом мы "переберем" все траектории, а от фейнмановского определения данное отличается только нормировочным множителем.

Правую часть (14.96) нетрудно сосчитать в квазиклассическом приближении (малые $\hbar$!). Основной вклад в действие дают тогда точки вблизи экстремальной траектории, определяемой из:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{x}} = -\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + V'(\bar{x}) = 0 \tag{14.103}$$

— евклидова уравнения Ньютона. Выберем x_n в виде собственных функций второй вариационной производной действия S на $\bar{x}$:

$$-\frac{d^2x_n}{dt^2} + V''(\bar{x})x_n = \lambda_n x_n\,. \tag{14.104}$$

Аналогично рассмотрению, проведенному в самом начале Главы 2, первая вариация действия, при варьировании траектории $x \to \bar{x} + a$, в данной задаче сводится к:

$$\delta S = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\, a \left[-\frac{d^2 x}{dt^2} + V'(x) \right] = 0 \qquad \text{при} \qquad x = \bar{x} \,, \tag{14.105}$$

откуда и следует закон Ньютона (14.103). Если здесь снова проварьировать $x \to \bar{x} + a$, то получим:

$$\delta^2 S = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\, a \left[-\frac{d^2(\bar{x}+a)}{dt^2} + V'(\bar{x}+a) \right] = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\, a[-\ddot{\bar{x}} - \ddot{a} + V'(\bar{x}) + V''(\bar{x})a] =$$

$$= \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt\, a[-\ddot{a} + V''(\bar{x})a] \,, \tag{14.106}$$

где при переходе к последнему равенству использовали уравнение движения (14.103). Отсюда ясно, что вторая вариационная производная действия S определяется левой частью (14.104).

Тогда, в пределе малых $\hbar$, после подстановки (14.100) в (14.99), ограничиваемся квадратичными отклонениями траекторий от классической $\bar{x}$, так что интегралы по c_n становятся гауссовыми, и мы находим:

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \mathcal{N} e^{-S(\bar{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-1/2} [1 + O(\hbar)] =$$

$$= \mathcal{N} e^{-S(\bar{x})/\hbar} \left[\mathrm{Det}(-\partial_t^2 + V''(\bar{x})) \right]^{-1/2} [1 + O(\hbar)] \,. \tag{14.107}$$

Если существует несколько стационарных точек действия, то их вклады нужно просуммировать.

Заметим теперь, что евклидово уравнение движения (14.103) эквивалентно обычному ньютоновскому уравнению для частицы единичной массы, движущейся в потенциале *минус* V! Для такого уравнения имеем интеграл движения:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 - V(\bar{x}) \,. \tag{14.108}$$

Рассмотрим потенциал V, изображенный на Рис. 14.7(а). Пусть $x_i = x_f = 0$. Инвертированный потенциал изображен на Рис. 14.7(б). Очевидно, что единственное решение классических уравнений движения в этом потенциале, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид:

$$\bar{x} = 0 \tag{14.109}$$

— частица покоится на вершине. Для этого решения имеем $S = 0$. Тогда из (14.107) имеем:

$$\langle 0 | e^{-HT/\hbar} | 0 \rangle = \mathcal{N} [\mathrm{Det}(-\partial_t^2 + \omega^2)]^{-1/2} [1 + O(\hbar)] \,, \tag{14.110}$$

где нули обозначают переход из начала координат в начало координат, а $\omega^2 = V''(0)$ — квадрат частоты малых колебаний вблизи минимума потенциала V. Можно показать [58], что при больших T:

$$\mathcal{N} [\mathrm{Det}(\partial_t^2 + \omega^2)]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \,. \tag{14.111}$$

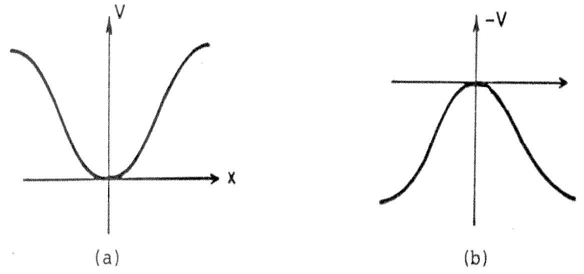


Рис. 14.7:

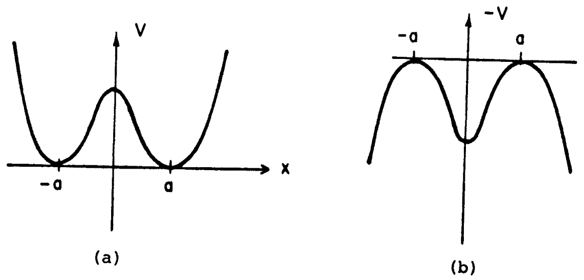


Рис. 14.8:

Тогда из (14.110) и рассуждений вокруг (14.98) сразу видим, что энергия основного состояния, в рассматриваемой задаче, есть:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega[1 + O(\hbar)]\,, \tag{14.112}$$

т.е. энергия осциллятора, совершающего нулевые колебания вблизи минимума V. Вероятность частице пребывать в начале координат, когда она находится в основном состоянии, равна:

$$|\langle x = 0|n = 0\rangle|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}[1 + O(\hbar)]\,. \tag{14.113}$$

Это всем известные результаты квазиклассического приближения квантовой механики. Собственно говоря, из такого соответствия сразу ясна справедливость (14.111). Физика дела тоже вполне ясна — в пределе малых $\hbar$ частица находится в основном состоянии гармонического осциллятора, вблизи начала системы координат.

Двухъямный потенциал и инстантоны.

Рассмотрим теперь более интересный пример — двухъямный потенциал, изображенный на Рис. 14.8(a). В этом случае имеем $V(x) = V(-x)$, причем минимумы потенциала расположены в точках $x = \pm a$. Введем также $\omega^2 = V''(\pm a)$ — квадрат частоты калссических колебаний частицы вблизи минимумов. Рассчитаем следую-

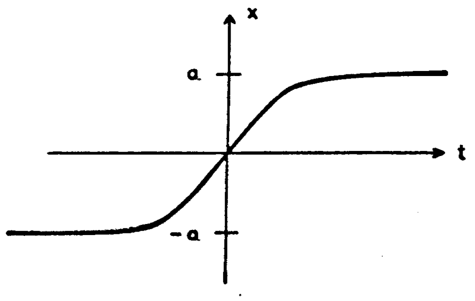


Рис. 14.9:

щие амплитуды перехода:

$$\langle -a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle = \langle a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle\,, \tag{14.114}$$

$$\langle a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle = \langle -a|e^{-HT/\hbar}|a\rangle\,, \tag{14.115}$$

аппроксимируя интеграл по траекториям квазиклассикой, в духе проведенного только что рассмотрения частицы в одной яме. В качестве первого шага нужно опять найти решения классических евклидовых уравнений движения (14.103), удовлетворяющие нужным граничным условиям. Существует два очевидных решения — когда частица все время пребывает на вершине правого или левого холма Рис. 14.8(b). Однако есть и более интересное решение – когда частица стартует с одной из вершин (например левой) в момент времени $-T/2$, а затем перекатывается на правую вершину к моменту $+T/2$ ($T \to \infty$). В этом случае мы имеем дело с решениями уравнений движения с $E = 0$ (поскольку $E = 0$ в начальном состоянии $x = \pm a$). Соответственно (см. (14.108)):

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sqrt{2V}\,, \tag{14.116}$$

и решение этого уравнения имеет вид:

$$t = t_1 + \int\limits_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{2V}}\,, \tag{14.117}$$

где t_1 — константа интегрирования (время, при котором $x = 0$). Это решение, очевидно, имеет вид, показанный на Рис. 14.9. Такое решение называется *инстантоном*[7], центрированным в точке t_1. Зеркально симметричное решение можно назвать антиинстантоном. Важно подчеркнуть, что инстантон обладает *конечным* действием:

$$S_0 = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + V\right] = \int\limits_{-T/2}^{T/2} dt \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 = \int\limits_{-a}^{a} dx\sqrt{2V}\,, \tag{14.118}$$

где использовали (14.116). При больших t имеем $\bar{x} \to a$, так что (14.116) можно аппроксимировать как:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sqrt{\omega^2(\bar{x}-a)^2} = \omega(a-\bar{x}) \tag{14.119}$$

[7]Происхождение этого названия связано с очевидной аналогией с солитоном, но подчеркивает, что речь идет о решении евклидовых уравнений движения.

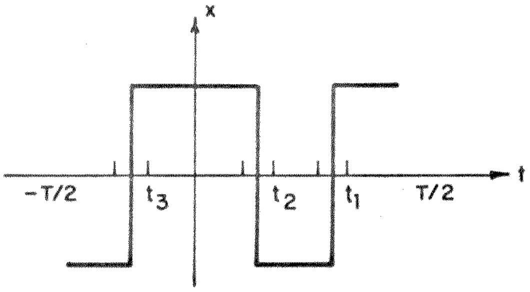


Рис. 14.10:

так что при больших t:

$$(a - \bar{x}) \sim e^{-\omega t} \tag{14.120}$$

— инстантон "локализован во времени" (на временах $\sim \frac{1}{\omega}$), что и поясняет происхождение названия.

Ясно, что при больших T не только инстантон и антиинстантон являются решениями уравнений движения, но приближенными решениями являются также и цепочки из хорошо разделенных инстантонов и антиистантонов. Пример такой конфигурации показан на Рис. 14.10, где имеется n объектов (инстантонов или антиинстантонов), центрированных в точках $t_1, ..., t_n$:

$$\frac{T}{2} > t_1 > t_2 > ... > t_n > -\frac{T}{2}\,. \tag{14.121}$$

Соответственно, в интеграле по траекториям необходимо просуммировать вклады от всех таких конфигураций.

Перейдем к счету! Для n хорошо отделенных объектов, очевидно, имеем вклад в действие $S = nS_0$, что дает в функциональном интеграле вклад $\sim \exp(-nS_0)$. Детерминант сосчитать сложнее. Рассмотрим оператор временной эволюции e^{-HT} как произведение операторов, связанных с эволюцией между точками, где центрированы инстантоны и антиинстантоны. Если бы их не было, то на всей временной оси мы имели бы $V'' = \omega^2$ и получили бы тот же результат, что и выше, для одноямного потенциала (14.111):

$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}\,. \tag{14.122}$$

Интервалы, на которых расположены инстантоны и антиинстантоны вносят поправку, которую запишем как:

$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} K^n\,, \tag{14.123}$$

где K определим из условия, чтобы эта формула давала правильный ответ для случая одного инстантона. Позже мы найдем соответствующее явное выражение. А пока заметим, для учета всех возможных вкладов в интеграл по траекториям нужно проинтегрировать по произвольным положениям центров:

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int\limits_{-T/2}^{t_1} dt_2 ... \int\limits_{-T/2}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!}\,. \tag{14.124}$$

Нужно еще учесть, что у нас нет полной свободы для расстановки инстантонов и антиинстантонов. Например, если мы стартуем с $-a$, первый объект, который может повстречаться, должен быть инстантоном, следующий – антиинстантоном и т.д. Если при этом мы возвращаемся в $-a$, то n должно быть четным, наоборот, если мы хотим перейти в $+a$, n должно быть нечетным. Таким образом получаем:

$$\langle -a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{\text{Четные } n} \frac{(Ke^{-S_0/\hbar}T)^n}{n!}[1+O(\hbar)]\,, \tag{14.125}$$

тогда как $\langle a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle$ дается таким же выражением, но с суммой по нечетным n. Суммы вполне тривиальны и мы получаем:

$$\langle \pm a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}\frac{1}{2}\left[\exp(Ke^{-S_0/\hbar}T) \mp \exp(-Ke^{-S_0/\hbar}T)\right]\,. \tag{14.126}$$

Вспоминая (14.98)

$$\langle x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i\rangle = \sum_n e^{-E_nT/\hbar}\langle x_f|n\rangle\langle n|x_i\rangle\,, \tag{14.127}$$

понимаем, что два наинизших уровня системы обладают энергиями:

$$E_\pm = \frac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar}\,. \tag{14.128}$$

Если обозначить соответствующие состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$, видим, что:

$$|\langle +|\pm a\rangle|^2 = |\langle -|\pm a\rangle|^2 = \langle a|-\rangle\langle -|-a\rangle = -\langle a|+\rangle\langle +|-a\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{.1/2} \tag{14.129}$$

Это хорошо известные результаты квантовой механики [29]: происходит расщепление уровня в двухъямном потенциале за счет туннелирования (снятие вырождения между уровнями в двух минимумах). Разность энергий при этом $\sim e^{-S_0/\hbar}$. Нижнее состояние $|-\rangle$ — четная комбинация волновых функций, соответствующих частице, локализованной в каждой из ямок (первое возбужденное состояние $|+\rangle$ — нечетная комбинация).

Теперь займемся расчетом фактора K. Для этого нужно изучить свойства решений уравнения (14.104):

$$-\frac{d^2x_n}{dt^2} + V''(\bar{x})x_n = \lambda_n x_n\,, \tag{14.130}$$

где $\bar{x}$ представляет собой одноинстантонное решение. Поскольку имеется инвариантность относительно сдвига по времени (центр инстантона может быть расположен в произвольной точке на оси времени), это уравнение обязательно обладает собственной функцией с собственным значением равным нулю (нулевая трансляционная мода). Явный вид этой функции:

$$x_1 = S_0^{-1/2}\frac{d\bar{x}}{dt}\,. \tag{14.131}$$

Нормировочный фактор здесь возникает из (14.118):

$$\int dt\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 = S_0\,, \tag{14.132}$$

В существовании нулевой моды легко убедиться следующим образом. Инстантон $\bar{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (14.103)

$$-\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + V'(\bar{x}) = 0\,. \tag{14.133}$$

Но $\bar{x}(t+T)$, где T произвольно, есть снова решение этого уравнения:

$$-\frac{d^2\bar{x}(t+T)}{dt^2} + V'(\bar{x}(t+T)) = 0\,. \tag{14.134}$$

Дифференцируя это уравнение по T, получаем

$$-\frac{d^2x_1}{dt^2} + V''(\bar{x})x_1 = 0\,, \tag{14.135}$$

что и доказывает наше утверждение относительно (14.131).

Существование нулевой моды с $\lambda_1 = 0$, казалось бы, приводит к проблеме. Если мы будем считать гауссов интеграл вблизи экстремальной траектории (инстантона) так, как это описано в связи с (14.100), (14.102) и (14.107), то при интегрировании по c_1 мы получим расходимость! Фактически, однако, мы уже проделали соответствующее интегрирование, когда интегрировали по центрам инстантонов (антиинстантонов) в (14.124). В самом деле, изменение $x(t)$ при небольшом сдвиге центра инстантона t_1 равно:

$$dx = \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right) dt_1\,. \tag{14.136}$$

В тоже время, соответствующее изменение за счет изменения коэффициента разложения c_1 в (14.100) есть:

$$dx = x_1 dc_1\,. \tag{14.137}$$

Тогда, записывая в (14.136) $\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right) dt_1 = \sqrt{S_0}x_1 dt_1$, и сравнивая это с (14.137), получаем $dc_1 = \sqrt{S_0}dt_1$, или:

$$(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_1 = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} dt_1\,, \tag{14.138}$$

где $\hbar$ введена для обезразмеривания нормировочного множителя. Поэтому при вычислении детерминанта, связанного с гауссовским интегрированием, в выражении типа (14.107) не нужно включать нулевое собственное значение, но зато нужно включить в K множитель $\left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}$. Поэтому, одноинстантонный вклад в матричный элемент перехода дается выражением:

$$\langle a|e^{-HT/\hbar}|-a\rangle_{1inst} = \mathcal{N}T\left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-S_0/\hbar}[\mathrm{Det}'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2}\,, \tag{14.139}$$

где штрих над знаком детерминанта означает, что при вычислении этого детерминанта опускается нулевое собственное значение. Сравнивая (14.139) с одноинстантонным вкладом в (14.125),находим:

$$K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \left|\frac{\mathrm{Det}(-\partial_t^2 + \omega^2)}{\mathrm{Det}'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))}\right|^{1/2}\,. \tag{14.140}$$

Это завершает наш расчет!

Сделаем некоторые замечания по поводу проделанных вычислений:

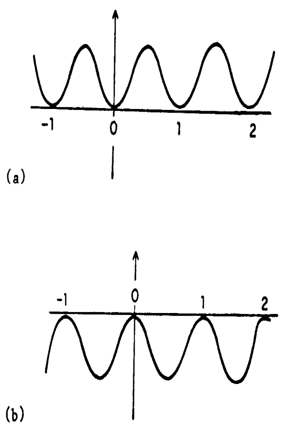


Рис. 14.11:

1. Можно убедиться, что полученные результаты совпадают со стандартными выводами квантовой механики [29].

2. Мы полагали, что все $\lambda_n > 0$ (кроме $\lambda_1 = 0$). Это действительно так, поскольку наинизшее состояние x_1, как легко видеть из его явного вида, не имеет нулей, как и должно быть у одномерного уравнения Шредингера. Это ясно из того, что рассмотренный инстантон является монотонно возрастающей (антиинстантон – убывающей) функцией t, тогда его производная $x_1 \sim \frac{d\bar{x}}{dt}$ не имеет нулей.

3. Коэффициент K пропорционален $\hbar^{-1/2}$, что связано с вкладом нулевой моды. Это, на самом деле, общее правило – каждая нулевая мода (а их может быть и несколько!) дает множитель $\hbar^{-1/2}$.

Аналогичным образом можно проанализировать и задачу о частице в периодическом потенциале, показанном на Рис. 14.11. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что теперь отсутствует условие чередования инстантонов и антиинстантонов, что связано с существованием множества эквивалентных минимумов потенциала. В тоже время, полное число инстантонов минус полное число антиинстантонов должно, в этом случае, равняться изменению $\bar{x}$ между начальной и конечной координатами. Тогда, вместо (14.126), можно написать:

$$\langle j_+|e^{-HT/\hbar}|j_-\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\bar{n}!}(Ke^{-S_0/\hbar}T)^{n+\bar{n}}\delta_{n-\bar{n}-j_++j_-}\,, \tag{14.141}$$

где n — число инстантонов, а $\bar{n}$ — число антиинстантонов. Используем теперь:

$$\delta_{ab} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(a-b)}\,, \tag{14.142}$$

чтобы переписать (14.141) как:

$$\langle j_+|e^{-HT/\hbar}|j_-\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp[2KT\cos\theta e^{-S_0/\hbar}]\exp[-i\theta(j_+ - j)]\,. \tag{14.143}$$

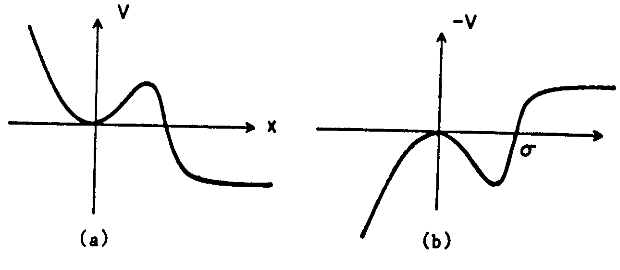


Рис. 14.12:

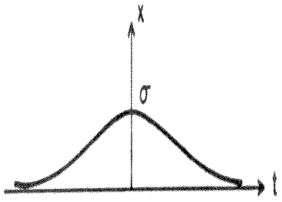


Рис. 14.13:

В этом случае мы имеем континуум собственных значений энергии частицы (зону!), параметризованных "углом" θ:

$$E(\theta) = \frac{1}{2}\hbar\omega - 2\hbar K e^{-S_0/\hbar}\cos\theta\,. \tag{14.144}$$

Матричные элементы:

$$\langle\theta|j\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}(2\pi)^{-1/2}e^{ij\theta} \tag{14.145}$$

представляют собой, по сути дела, соответствующую блоховскую волну.

Инстантоны и метастабильные состояния.

Рассмотрим потенциал, изображенный на Рис. 14.12(a). Если бы было можно пренебречь туннелированием, то существовало бы связанное состояние вблизи начала координат. Перевернутый потенциал показан на Рис. 14.12(b). Классические уравнения движения имеют очевидное решение, соответствующее частице, стартующей на вершине холма при $x = 0$, которая затем отражается от классической точки поворота σ и возвращается обратно на вершину, как показано на Рис. 14.13. Посчитаем матричный элемент перехода из $x = 0$ в $x = 0$, суммируя по всем состоящим из удаленных друг от друга инстантонов Рис. 14.13. Тут, вроде бы, надо делать все как и выше (с очевидным переопределением S_0, ω^2 и т.п.), однако без ограничений на четность числа инстантонов. Тогда при суммировании "набирается" полная экспонента:

$$\langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}\exp[KTe^{-S_0/\hbar}] \tag{14.146}$$

и собственное значение энергии основного состояния есть:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega - \hbar K e^{-S_0/\hbar} \tag{14.147}$$

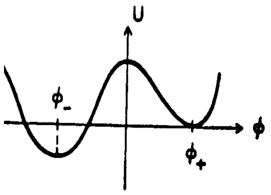


Рис. 14.14:

Но это неверно! Фактически, в этой ситуации есть туннелирование и возникает нестабильное состояние! Из вида инстантона Рис. 14.13 ясно, что собственная функция $x_1 \sim \frac{d\bar{x}}{dt}$ имеет нуль и не может быть функцией, соответствующей наинизшей энергии. Но ее то энергия равна нулю, это значит, что существует еще состояние с $\lambda_0 < 0$ и собственной функцией, не имеющей нулей. Поэтому фактор K, в который входит корень из произведения собственных значений, есть *мнимая* величина. Поэтому, на самом деле, таким способом получается:

$$\operatorname{Im} E_0 = \frac{\Gamma}{2} \sim \hbar |K| e^{-S_0/\hbar} \tag{14.148}$$

что отвечает *ширине уровня*, соответствующей метастабильному состоянию.

14.4 Инстантоны и нестабильный вакуум в теории поля.

Рассмотрим теперь скалярную теорию поля с евклидовым действием:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi) \right] , \tag{14.149}$$

где потенциал $U(\phi)$ показан на Рис. 14.14: имеется два неэквивалентных минимума ϕ_+ и ϕ_-, причем ϕ_- — абсолютный минимум. Выберем начало отсчета энергии так, чтобы $U(\phi_+) = 0$. В квантовой теории минимум при $\phi = \phi_+$ играет роль "ложного" (метастабильного) вакуума. Описание распада такого "ложного" вакуума во многом аналогично описанию процесса зародышеобразования в статистической физике (например, при кристаллизации пересыщенного раствора или вскипании перегретой жидкости). В квантовой теории поля эта задача интересна с точки зрения применений к задачам космологии [43]. Кто сказал, что *наш вакуум* является устойчивым, а не метастабильным?

Наша задача состоит в расчете величины $\frac{\Gamma}{V}$ — вероятности распада метастабильного вакуума в единицу времени и в расчете на единичный объем. Прежде всего, нужно найти соответствующий инстантон $\bar{\phi}$, как решение евклидовых уравнений движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = U'(\bar{\phi}) \, , \tag{14.150}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\lim_{x_4 \to \pm\infty} \bar{\phi}(\mathbf{x}, x_4) = \phi_+ \, . \tag{14.151}$$

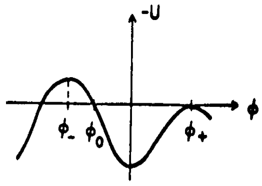


Рис. 14.15:

Нетрудно понять, что для обеспечения конечности действия на инстантоне должно также выполняться условие:

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \bar{\phi}(\mathbf{x}, x_4) = \phi_+ \,. \tag{14.152}$$

Если инстантон найден, то в ведущем приближении по $\hbar$ имеем:

$$\frac{\Gamma}{V} = K e^{-S_0} \,, \tag{14.153}$$

где $S_0 = S(\bar{\phi})$, а предэкспонента K определяется соответствующим детерминантом.

Тривиальное решение $\bar{\phi} = \phi_+$ неинтересно, для него $\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2}$ не имеет отрицательных собственных значений, так что вклад в распад вакуума не возникает. Уравнения (14.150) – (14.152) инвариантны относительно преобразований группы четырехмерных вращений $O(4)$. Полагаем, что инстантон тоже $O(4)$ инвариантен[8], так что соответствующее $\bar{\phi}$ является функцией только от радиус-вектора r. Тогда уравнение (14.150) сводится к:

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\bar{\phi}}{dr} = U'(\bar{\phi}) \,, \tag{14.154}$$

а из (14.151) и (14.152) следует:

$$\lim_{r\to\infty} \bar{\phi}(r) = \phi_+ \,. \tag{14.155}$$

Очевидно также, что нужно потребовать:

$$\left.\frac{d\bar{\phi}}{dr}\right|_{r=0} = 0 \,, \tag{14.156}$$

иначе $\bar{\phi}$ будет сингулярно в начале координат.

Уравнение (14.154) можно интерпретировать, как уравнение движения (считая r временем!) частицы, движущейся в потенциале *минус* U, показанном на Рис. 14.15, и под действием зависящей от времени силы трения ($\sim \frac{1}{r}\times$ скорость). Частица стартует из состояния покоя (ср.(14.156)) в момент времени $r = 0$ и, при надлежащем выборе начальной позиции, останавливается при $r \to \infty$ в точке ϕ_+ – такое движение и соответствует инстантону. Очевидно, что это решение существует:

- Частица, отпущенная правее ϕ_0 не доедет до ϕ_+, для этого ей не хватит энергии из-за трения.

[8]Это предположение можно строго обосновать — сферически симметричный инстантон обладает наименьшим действием.

- Если мы правильно выберем начальную точку левее ϕ_0, но правее ϕ_-, мы можем добиться, что при больших r частица подойдет к ϕ_+ и там остановится.

В самом деле, для ϕ вблизи ϕ_- мы можем линеаризовать уравнение движения и записать его в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d}{dr} - \mu^2\right)(\bar{\phi} - \phi_-) = 0\,, \tag{14.157}$$

где $\mu^2 = U''(\phi_-)$. Это уравнение достаточно легко решается [58], и решение выражается через модифицированную функцию Бесселя. Тогда видно, что если мы выберем $\bar{\phi}(0)$ достаточно близко к ϕ_-, мы можем добиться, что и при больших r частица останется сколь угодно близко к ϕ_-. Но для достаточно больших r можно пренебречь трением, поскольку оно $\sim 1/r$. Но если трения нет, то частица перекатится через горку с вершиной в ϕ_+. Это означает, что в нашей задаче всегда существует промежуточная точка (между ϕ_- и ϕ_0), стартуя с которой частица при $r \to \infty$ остановится в ϕ_+.

Пусть $U_+(\phi)$ — некоторая четная функция ϕ:

$$U_+(\phi) = U_+(-\phi) \tag{14.158}$$

с минимумом в точках $\pm a$:

$$U'_+(\pm a) = 0\,. \tag{14.159}$$

Определим

$$\mu^2 = U''_+(\pm a)\,. \tag{14.160}$$

Добавим к U_+ маленькую добавку, нарушающую симметрию минимумов:

$$U = U_+ + \varepsilon(\phi - a)/2a\,, \qquad \varepsilon > 0\,. \tag{14.161}$$

Это просто конкретизирует вид нашего потенциала. В первом порядке по ε имеем:

$$\phi_\pm = \pm a\,. \tag{14.162}$$

Величина ε определяет разность энергий между истинным и “ложным” вакуумом. Выберем начальную позицию частицы $\bar{\phi}(0)$ очень близко к ϕ_-. Тогда частица остается вблизи ϕ_- до какого-то большого момента времени $r = R$, а после этого она быстро проходит через долину и медленно приближается к ϕ_+ при $r \to \infty$. Таким образом наш инстантон выглядит как большой четырехмерный сферически симметричный “пузырь” радиуса R с тонкой стенкой, разделяющей “ложный” вакуум ϕ_+ (вне пузыря) и истинный вакуум ϕ_- (внутри пузыря). Соответственно, наш пузырь (инстантон) представляет собой зародыш нового (истинного) вакуума внутри метастабильного (“ложного”) вакуума.

Для $r \sim R$ можно пренебречь трением, а также ε-зависящим членом в U. Тогда уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2\bar{\phi}}{dr^2} = U'_+(\bar{\phi})\,, \tag{14.163}$$

что представляет собой классическое уравнение движения частицы в двухъямном потенциале, которое подробно анализировалось выше. Оно имеет своим решением известный уже нам простейший одномерный инстантон Рис. 14.9 (который описывает переход из $-a$ в $+a$ при росте r через момент "времени" R). Таково приближенное описание инстантона в рассматриваемой полевой задаче.

Но мы еще не определили R. Действие на инстантоне имеет вид:

$$S = 2\pi^2 \int_0^\infty dr\, r^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dr} \right)^2 + U(\bar{\phi}) \right] . \tag{14.164}$$

Этот интеграл разбивается на три области интегрирования: вне пузыря, вблизи его поверхности и внутри. Снаружи можно считать $\bar{\phi} = \phi_+$ и $U = 0$, так что этот вклад в интеграл просто равен нулю (что, кстати, обеспечивает конечность действия на инстантоне). Внутри пузыря имеем $\bar{\phi} = \phi_-$, $U = -\varepsilon$, так что соответствующий вклад в интеграл есть:

$$-\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon . \tag{14.165}$$

Вблизи поверхности пузыря, т.е. при $r \sim R$, можно пренебречь членом $\sim \varepsilon$ в U, так что интеграл сводится к:

$$2\pi^2 R^3 \int dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dr} \right)^2 + U_+ \right] = 2\pi^2 R^3 S_1 , \tag{14.166}$$

где

$$S_1 = \int_{-a}^{a} d\phi \sqrt{2U_+} \tag{14.167}$$

— действие одномерного инстантона (14.118). В итоге получаем:

$$S = -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon + 2\pi^2 R^3 S_1 . \tag{14.168}$$

Определим теперь R из условия экстремальности действия:

$$\frac{dS}{dR} = -2\pi^2 R^3 \varepsilon + 6\pi^2 R^2 S_1 = 0 , \tag{14.169}$$

что дает:

$$R = \frac{3S_1}{\varepsilon} . \tag{14.170}$$

Тогда имеем[9]:

$$S_0 = \frac{27\pi^2 S_1^4}{2\varepsilon^3} . \tag{14.171}$$

Величину радиуса пузыря (14.170) можно найти на основе элементарных энергетических соображений, применяемых в теории критических зародышей — выигрыш энергии в объеме пузыря должен скомпенсировать проигрыш, связанный с поверхностной энергией стенок:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varepsilon = 4\pi R^2 \sigma , \qquad \text{что и дает} \qquad R = \frac{3\sigma}{\varepsilon} , \tag{14.172}$$

[9] Наше рассмотрение справедливо в пределе малых ε и в пределе, когда радиус пузыря много больше толщины его стенки: $R \gg \mu^{-1}$, что сводится к условию $3S_1\mu \gg \varepsilon$.

где σ — поверхностная энергия стенки. В нашем случае $\sigma = S_1$.

В итоге, для вероятности распада "ложного" вакуума получаем:

$$\frac{\Gamma}{V} \sim \exp(-S_0)\,. \tag{14.173}$$

Детерминанты и перенормировка.

Предэкспоненциальный множитель в (14.173) следует определить тем же способом, что и в рассмотренной выше квантовомеханической задаче. Но тут есть важные отличия и вопросы:

1. В квантовой механике существовала только одна нулевая трансляционная мода, здесь их четыре.

2. Нам было весьма существенно, что существовало только одно отрицательное собственное значение, приводившее к возникновению мнимого вклада. Так ли это в рассматриваемой задаче?

3. В квантовой теории поля существуют ультрафиолетовые расходимости и нужно проводить перенормировку. Какова их роль здесь?

Рассмотрим сначала вопрос о нулевых модах. В рассматриваемой задаче имеется четыре направления трансляций инстантона (он может быть расположен в любой точке четырехмерного евклидова пространства), соответственно существует четыре собственные функции дифференциального оператора, связанного со второй вариационной производной действия, с нулевыми собственными значениями. Эти функции $\sim \partial_\mu \bar{\phi}$. Условие их нормировки сводится к:

$$\int d^4x \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \bar{\phi} = \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} \int d^4x \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} = \delta_{\mu\nu} S_0\,. \tag{14.174}$$

В результате в предэкспоненте (14.173) возникает четыре множителя $\left(\frac{S_0}{2\pi}\right)^{1/2}$ вместо одного.

Доказательство последнего равенства в (14.174) сводится к следующему. Рассмотрим $\phi_\lambda(x) = \bar{\phi}(x/\lambda)$. Тогда действие:

$$S(\phi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi})^2 + \lambda^4 \int d^4x U(\bar{\phi})\,. \tag{14.175}$$

Поскольку $\bar{\phi}$ является решением уравнений движения, должно выполняться условие стационарности действия (14.175) при $\lambda = 1$. Это дает:

$$\int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi})^2 = -4 \int d^4x U(\bar{\phi}) \tag{14.176}$$

или

$$S_0 = \frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi})^2 > 0\,. \tag{14.177}$$

Итак, мы получаем предэкспоненциальный фактор в виде:

$$K = \frac{S_0^2}{4\pi^2} \left| \frac{\mathrm{Det}'[-\partial_\mu \partial_\mu + U''(\bar{\phi})]}{\mathrm{Det}[-\partial_\mu \partial_\mu + U''(\phi_+)]} \right|^{-1/2}, \tag{14.178}$$

в предположении, что с отрицательными собственными значениями и перенормировкой проблем не возникает.

Что касается отрицательных собственных значений, то это действительно так. Понятно, что $\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}$ (на инстантоне) имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение. Можно *строго* показать, что более одного отрицательного собственного значения в этой задаче не возникает [58]. Поэтому (14.173) действительно дает вероятность распада.

Проблему проведения перенормировки (14.173) мы подробно обсуждать не будем. В принципе, достаточно ясно, что в теориях с перенормируемым $U(\varphi)$, все выражения, включая (14.178), можно переписать через перенормированные величины и сделать, таким образом, конечными. Некоторые дополнительные подробности можно найти в [58].

Пузырь, расширяющийся в реальном пространстве-времени Минковского, можно получить аналитическим продолжением инстантона:

$$\phi(x_0,\mathbf{x}) = \bar{\phi}(r = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - x_0^2})\,. \tag{14.179}$$

Таким образом, при малых ε имеем тонкую стенку при $r = R$, разделяющую два вакуума, а при расширении пузырь удовлетворяет уравнению:

$$|\mathbf{x}|^2 - x_0^2 \approx R^2\,. \tag{14.180}$$

Величина R определяется, как мы видели, параметрами теории и является некоторой микроскопической длиной. Тогда уравнение (14.180) означает, что расширяющаяся поверхность пузыря летит практически со скоростью света ($v \sim 1$)! При этом стенка переносит энергию (в расчете на единицу площади) $\frac{S_1}{\sqrt{1-v^2}}$. К моменту, когда радиус пузыря достигает $|\mathbf{x}|$, энергия стенки становится равной:

$$E_{wall} = \frac{4\pi|\mathbf{x}|^2 S_1}{\sqrt{1-v^2}}\,. \tag{14.181}$$

Из (14.180) легко найти, что:

$$v = \frac{d|\mathbf{x}|}{dt} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}}\,. \tag{14.182}$$

Тогда энергия стенки есть:

$$E_{wall} = \frac{4\pi|\mathbf{x}|^3 S_1}{R} = \frac{4\pi\varepsilon|\mathbf{x}|^3}{3}\,, \tag{14.183}$$

так что практически вся энергия, высвобождающаяся при распаде “ложного” вакуума идет на ускорение стенки. Никаких частиц при этом не рождается, с обеих сторон стенки пребывает соответствующий вакуум. Таким образом, “наблюдатель” никогда не узнает, что на него налетела такая стенка, в этом случае он тоже “распадется” за соответствующее микроскопическое время.

Примеры использования рассмотренного формализма к задачам релятивистской космологии можно найти в книге [43].

Концепция инстантонов играет большую роль во многих задачах квантовой теории поля и статистической физики. В качестве примера, упомянем снова теорию

$g\varphi^4$ с $g < 0$ и с числом компонент поля $n = 0$, описывающую, как отмечалось в предыдущей Главе, движение электрона в случайном поле примесей. В этой теории с неустойчивым, с точки зрения теории поля, основным состоянием существуют инстантонные решения, которые определяют вид такой важнейшей характеристики электронной системы, как плотность электронных состояний в области так называемого ее "хвоста", вызванного локализацией электронов флуктуациями случайного потенциала[10].

Особое значение имеют нетривиальные инстантонные решения в неабелевых калибровочных теориях, где они тесно связаны с топологическими свойствами калибровочных преобразований и сложной структурой янг-миллсовского вакуума [24, 58, 59]. У нас нет возможности обсуждать здесь эти важнейшие аспекты теории и их значение для физики элементарных частиц (КХД). Подробное изложение теории можно найти в книге [59], а обзор применений к задачам КХД дан в [60].

[10] М.В. Садовский. УФН **133**, 223 (1981), И.М. Суслов. УФН **168**, 503 (1998)

Литература

[1] В.Б. Берестецкий. Е.М. Лифшиц. Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. "Наука", М, 1980.

[2] А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. "Наука", М, 1969

[3] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Квантовые поля. "Наука", М, 1980.

[4] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М, 1976 .

[5] С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман. Мезоны и поля, т.1, ИЛ, М, 1957 .

[6] С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М, 1963 .

[7] Д. Бьеркен, С. Дрелл. Релятивистская квантовая теория поля, т.1,2. "Наука", М, 1978 .

[8] Л. Райдер. Квантовая теория поля. "Мир", М, 1987 .

[9] П. Рамон. Теория поля. "Мир", 1984 .

[10] К. Ициксон, Ж. Зюбер. Квантовая теория поля, т.1,2. "Мир", М, 1984 .

[11] Т. Ченг, Л. Ли. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. "Мир", М, 1987 .

[12] К. Хуанг. Кварки, лептоны и калибровочные поля. "Мир", М, 1985 .

[13] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, М, 1963 .

[14] Ш. Ма. Современная теория критических явлений. "Мир", М, 1980 .

[15] D. Amit. Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena. McGraw - Hill, NY, 1978.

[16] Л.Б. Окунь. Физика элементарных частиц. "Наука", М, 1988.

[17] К. Готтфрид, В. Вейскопф. Концепции физики элементарных частиц. "Мир", М, 1988 .

[18] Ф. Хелзен, А. Мартин. Кварки и лептоны. "Мир", М, 1987.

[19] Д. Перкинс. Введение в физику высоких энергий. "Энергоатомиздат", М, 1991 .

[20] Г. Кейн. Современная физика элементарных частиц. “Мир”, М, 1990 .

[21] Л.Б. Окунь. УФН **168**, 625 (1998).

[22] Я.Б. Зельдович. УФН **86**, 303 (1965).

[23] В.И. Захаров, Б.Л. Иоффе, Л.Б. Окунь. УФН **117**, 227 (1975).

[24] А.М. Поляков. Калибровочные поля и струны. ИТФ им. Л.Д.Ландау, 1995.

[25] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. “Наука”, М, 1973 .

[26] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. “Наука”, М, 1973.

[27] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория. Часть 2. “Наука”, М, 1971 .

[28] Элементарные частицы и компенсирующие поля. Под ред. Д.Д. Иваненко. “Мир”, М, 1964.

[29] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. “Наука”, М, 1974 .

[30] Нильс Бор и развитие физики. Под ред. В. Паули. ИЛ, М, 1958.

[31] Р. Фейнман. Квантовая электродинамика. “Мир”, М, 1964 .

[32] В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. “Наука”, М, 1967 .

[33] Дж. Чью. Аналитическая теория S-матрицы. “Мир”, М, 1968 .

[34] В.Б. Берестецкий. Проблемы физики элементарных частиц. “Наука”, М, 1979.

[35] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. Часть 1. “Наука”, М, 1976

[36] Е. Уитеккер, Г. Ватсон. Курс современного анализа, т.1. Физматгиз, М, 1963 .

[37] Р. Фейнман, А. Хибс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. “Мир”, М, 1968 .

[38] Р. Фейнман. Статистическая механика. “Мир”, М, 1975 .

[39] А.З. Паташинский, В.Л. Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. “Наука”, М, 1982 .

[40] А.Н. Васильев. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и в стохастической динамике. ПИЯФ, СПб, 1998 .

[41] Ф.А. Березин. Метод вторичного квантования. “Наука”, М, 1965 .

[42] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Статистическая физика. Часть 2. “Наука”, М, 1978 .

[43] А.Д. Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. “Наука”, М, 1990.

[44] А.Д. Долгов, Я.Б. Зельдович, М.В. Сажин. Космология ранней Вселенной. МГУ, М, 1988 .

[45] A.V. Smilga. Lectures on the Foundations of QCD. ArXiv: hep-ph/9901412.

[46] K. Rajagopal, F. Wilczek. The Condensed Matter Physics of QCD. ArXiv: hep-ph/0011333 .

[47] F. Wilczek. QCD in Extreme Conditions. ArXiv: hep-ph/0003183 .

[48] F. Wilczek. The Future of Particle Physics as a Natural Science. ArXiv: hep-ph/9702371.

[49] М. Кройц. Кварки, глюоны и решетки. "Мир", М, 1987 .

[50] J.B. Kogut. Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979) .

[51] М. Фишер. Природа критического состояния. "Мир", М, 1968 .

[52] Г. Стенли. Фазовые переходы и критические явления. "Мир", М, 1973 .

[53] В.А. Казаков. В кн. "Эксперимент на дисплее", "Наука", М, 1989 .

[54] Ю.М. Макеенко. УФН **143**, 161 (1984) .

[55] Ю.А. Симонов. УФН **166**, 337 (1966) .

[56] H. Meyer-Ortmanns. Rev. Mod. Phys. **68**, 473 (1996) .

[57] J. Illiopoulos, C. Itzykson, A.Martin. Rev.Mod.Phys. **47**, 165 (1975) .

[58] S. Coleman. The Uses of Instantons. In "The Whys of Subnuclear Physics", Ed. by A. Zichichi. Plenum Press, NY, 1979 .

[59] Р. Раджараман. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. "Мир", М, 1985 .

[60] T. Schäfer, E.V. Shuryak. Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998) .