

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МЕТАЛЛОВ

На правах рукописи

УДК 537.311;537.311.33;537.312.62;538.1

САДОВСКИЙ Михаил Виссарионович

ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ  
ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА АНДЕРСОНА

01.04.02 - теоретическая и математическая физика



Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Свердловск

1985

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	4
1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ . . . . .	17
✓ 1.1. Переход Андерсона и минимальная металлическая проводимость . . . . .	17
✓ 1.2. Элементарная скэйлинговая теория локализации . . . . .	24
2. МЕТОД АНДЕРСОНА В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ . . . . .	41
✓ 2.1. Модель Андерсона . . . . .	41
2.2. Модель случайных фаз . . . . .	58
2.3. Скэйлинг в модели Андерсона . . . . .	72
3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ДВУХЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА . . . . .	85
✓ 3.1. Общий критерий локализации. Локализация из уравнения Бете-Солпитера ? . . . . .	85
✓ 3.2. Основы самосогласованной теории локализации . . . . .	101
✓ 3.3. Самосогласованная теория локализации в модели Андерсона . . . . .	122
3.4. Эффект Холла . . . . .	134
3.5. ЯМР релаксация и локализация . . . . .	143
4. ПОЛЕВОЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ . . . . .	151
✓ 4.1. Эффективная теория поля для электрона в неупорядочен- ной системе. Критерий Гинзбурга . . . . .	151
✓ 4.2. "Паркетное" приближение и область сильной связи. . . . .	158
✓ 4.3. Аналитические свойства по константе связи и инстантоны . . . . .	164
✓ 4.4. Инстантоны и локализация . . . . .	186
4.5. Эффективное действие и неустойчивости . . . . .	191

5. МЕЖЭЛЕКТРОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ . . . . .	201
5.1. Приближение Хартри-Фока. Локализационные вклады. . . . .	201
5.2. Межэлектронное взаимодействие в самосогласованной теории локализации . . . . .	219
5.3. Поляризационный оператор, экранирование и кулоновское взаимодействие . . . . .	228
6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ И СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ . . . . .	239
✓ 6.1. Уравнения Гинзбурга-Ландау . . . . .	239
✓ 6.2. Кулоновское отталкивание в "грязных" сверхпроводниках. . . . .	254
7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ В ФИЗИКЕ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ . . . . .	266
7.1. Локализация спиновых волн в ферромагнетике с хаоти- ческой анизотропией типа "легкая ось" . . . . .	266
7.2. Высокотемпературные разложения в модели Изинга со случайными связями . . . . .	273
7.3. Высокотемпературные разложения в модели Изинга со случайными узлами . . . . .	289
ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ . . . . .	297
ПРИЛОЖЕНИЕ I . . . . .	302
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 . . . . .	305
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 . . . . .	308
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 . . . . .	312
ПРИЛОЖЕНИЕ 5 . . . . .	316
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	318

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Проблема последовательного описания электронных, магнитных, сверхпроводящих и других свойств неупорядоченных систем стала в последнее время одной из центральных в теоретической физике конденсированного состояния вещества. Это связано как с внутренними потребностями теории, которая все более переходит к рассмотрению реальных систем, так и с практическими запросами физики твердого тела и техники, где все большее применение находят системы типа аморфных и сильнолегированных полупроводников, металлических стекол и, наконец, концентрированных сплавов, которые всегда составляли основу технологического применения металлов и полупроводников. В ряде особых случаев значительное структурное разупорядочение может происходить в процессе эксплуатации материала, например в условиях постоянного облучения быстрыми нейтронами.

В ряду проблем теории неупорядоченных систем особое место занимает задача о фазовом переходе металл-диэлектрик, в частности о механизмах такого перехода, обусловленных неупорядоченностью. Выдвинутая Ф.Андерсоном в 1958 году /1/ концепция локализации лежит в основе современного понимания структуры электронного спектра в неупорядоченных системах. Развита применительно к рассмотрению электронных свойств в пионерских работах Н.Мотта /2,3/, эта концепция имеет, фактически, существенно более общее значение и может быть применена как к интерпретации других свойств неупорядоченных систем, например, магнитных, так, по-видимому, и к некоторым фундаментальным проблемам теоретической физики. Вместе с тем, проблема локализации до сих пор не имеет вполне удовлетворительного решения. Это связано как со специфическими трудностями теории неупорядоченных систем, обусловленными недостаточной разработанностью математического аппарата теории, так и с

фундаментальными проблемами, типичными для ряда других областей теоретической физики, такими, как проблема описания сильно взаимодействующих полей.

Значительное число качественных результатов и соображений оценочного характера, основанных на концепции локализации, и используемых в настоящее время при интерпретации экспериментов по неупорядоченным системам, требует последовательного теоретического обоснования. В тоже время, еще недавно теория была вообще неспособна рассчитать какие-либо физические свойства системы вблизи перехода Андерсона. Прежде всего, мы имеем ввиду расчет деталей поведения электропроводности и других кинетических характеристик, диэлектрической проницаемости, плотности электронных состояний и т.д. До сих пор крайне мало исследован вопрос о роли межэлектронного взаимодействия в условиях перехода Андерсона. Не исключено, что учет взаимодействия электронов может привести к новым качественным эффектам, как в физике перехода металл-диэлектрик, так и в других электронных явлениях, таких как сверхпроводимость и магнетизм неупорядоченных систем.

Целью данной диссертации является теоретическое исследование различных аспектов явления локализации в неупорядоченных системах и разработка практических методов расчета физических свойств системы в окрестности перехода Андерсона. К числу рассматриваемых проблем, в частности, относятся: общий критерий локализации, определение положения порога подвижности на шкале энергий и критического беспорядка, требующегося для локализации всех электронных состояний в зоне, развитие самосогласованной теории локализации и расчеты в ее рамках конкретных эффектов. Будет проведен анализ аналогий, существующих между явлением локализации и обычными фазовыми переходами, и проблем, связанных с ограниченным характером

этих аналогий. Рассматривается роль простейших поправок по межэлектронному взаимодействию и анализируются особенности экранирования электрического поля в андерсоновском диэлектрике. Будет рассмотрена взаимосвязь андерсоновского перехода металл-диэлектрик и сверхпроводимости, что позволит предсказать ряд новых качественных эффектов и объяснить аномалии сверхпроводящих свойств, наблюдаемые в сильно разупорядоченных металлах. Наконец, будет показано, что идеи и методы теории локализации могут использоваться при рассмотрении свойств неупорядоченных магнитных систем.

В первой главе рассматриваются качественные представления о локализации электронов в неупорядоченных системах и основные проблемы теории. Обсуждаются теоретические модели, используемые при описании этого явления, вводится соответствующая терминология. В частности рассматриваются представления Иоффе и Регеля о предельной длине свободного пробега электрона /4/ и возникающая на этой основе концепция минимальной металлической проводимости по Мотту /2,3/. Обсуждаются альтернативные возможности поведения статической проводимости (при температуре  $T = 0$ ) на пороге подвижности (скачок или непрерывное обращение в нуль). Приводятся качественные аналогии явления локализации с фазовыми переходами, в частности, существенная зависимость от размерности пространства. Формулируются основные вопросы, на которые должна дать ответ последовательная теория. Кратко изложена элементарная скейлинговая теория локализации /5/, представления и терминология которой в последние годы широко используются при обсуждении экспериментов и которая является наиболее популярным, в настоящее время, описанием порога подвижности (перехода Андерсона). В конце главы приводится предельно краткий обзор ряда экспериментов по наблюдению перехода металл-диэлектрик в реальных неупорядоченных системах.

Во второй главе диссертации рассмотрены основы теории локализации и изучен ряд конкретных моделей этого явления. Прежде всего обсуждается основополагающая модель Андерсона и излагается разработанный им метод анализа задачи /I/, основанный на анализе сходимости стохастического ряда теории возмущений. Показывается, что метод Андерсона не утратил своей актуальности и остается эффективным способом изучения новых моделей беспорядка. Рассматривается предложенная автором модель случайных фаз, являющаяся обобщением модели Андерсона в направлении учета специфического беспорядка в фазах интегралов переноса (недиагональный беспорядок). Отличительной чертой этой модели является наличие локальной калибровочной инвариантности.

В основе метода Андерсона лежит то обстоятельство, что структура ряда теории возмущений для одноэлектронной функции Грина определяется статистикой путей без пересечений на данной решетке. Существует хорошо разработанная скэйлинговая теория путей без пересечений. В диссертации показывается, что использование результатов этой теории в андерсоновском ряду теории возмущений позволяет получить скэйлинговое поведение усредненной (в некотором смысле - наиболее вероятной) одноэлектронной функции Грина в решетке Андерсона вблизи порога подвижности. К сожалению, эта функция Грина не определяет физических величин теории, за исключением лишь поведения радиуса локализации вблизи порога.

Экспериментально наблюдаемые физические характеристики неупорядоченных систем определяются, как известно, функциями Грина, усредненными по случайным конфигурациям. В частности, все кинетические характеристики определяются двухчастичной функцией Грина. Поэтому в третьей главе мы переходим к построению формализма теории локализации, основанного на рассмотрении усредненной двухчастичной функции Грина электрона в неупорядоченной системе. Прежде

всего проводится обсуждение общего критерия локализации. В частности, доказывается эквивалентность критериев локализации Эконому - Коэна и Березинского - Горькова. Затем общий критерий локализации формулируется в виде требования на существование в двухчастичной функции Грина полюсного (по частоте) вклада с факторизующимся (в импульсном представлении) вычетом. Поиск такого решения проводится на основе исследования однородного уравнения Бете-Солпитера, что позволяет найти оценку сверху для положения порога подвижности  $E_c$  на шкале энергий. Такой подход неспособен, однако, описать область энергий  $E < E_c$ , т.е. область локализованных состояний. Для этого, также как и для расчета физических величин вблизи порога подвижности, мы используем самосогласованную теорию локализации, в основе которой лежит уравнение самосогласования для (зависящего от частоты) обобщенного коэффициента диффузии, которое может быть получено из полного уравнения Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина. В диссертации проводится обобщение соответствующего аппарата и решение уравнения самосогласования для пространств с размерностью  $d > 2$ . В рамках такого обобщения выполнен расчет основных физических величин вблизи порога подвижности. Описание порога подвижности в рамках этой теории оказывается эквивалентным основным результатам элементарной скэйлинговой теории локализации. Установлена связь основных результатов самосогласованной теории с общим критерием локализации. Далее в диссертации проводится обобщение самосогласованной теории локализации на случай произвольного исходного спектра электронов, которое применяется к анализу локализации в модели Андерсона. В заключение этой главы на основе самосогласованной теории локализации нами проведено рассмотрение эффекта Холла и времени релаксации  $T_1$  ядерного магнитного резонанса в системе, находящейся вблизи порога подвижности.

В четвертой главе излагается разработанный автором полевой



подход к теории локализации. Рассмотрение проводится на основе использования эффективного лагранжиана теории поля с взаимодействием  $g\phi^4$ , причем число компонент скалярного поля  $n \rightarrow 0$ . Константа связи в задаче об электроне в случайном поле  $g < 0$  (неустойчивая теория поля). Прежде всего на элементарном уровне анализируется вопрос об области применимости теории возмущений, аналогично тому, как это делается в теории критических явлений в связи с выводом так называемого критерия Гинзбурга. Далее мы рассматриваем роль высших поправок теории возмущений в рамках так называемого "паркетного" приближения для размерности пространства  $d = 4 - \varepsilon$ , где допустим соответствующий отбор диаграмм. Показывается, что порог подвижности всегда попадает в область энергий, где теория возмущений неприменима даже в смысле обычной ренормгрупповой идеологии (область "сильной связи").

В дальнейшем, мы переходим к рассмотрению эффективной теории поля методами, не связанными с обычной теорией возмущений. Прежде всего анализируются аналитические свойства теории в плоскости комплексной константы связи  $g$ . Оказывается, что функции Грина теории являются аналитическими в плоскости  $g$  с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Соответственно, для функции Грина может быть написано дисперсионное соотношение по константе связи. При этом скачок функции Грина на разрезе определяется решениями нелинейных классических уравнений теории поля с конечным действием / инстантонов/. Существование таких решений приводит к появлению в функциях Грина неаналитичных по константе связи  $g$  вкладов, соответствующих образованию (при  $E < 0$ ) "лифшицевского хвоста" в плотности электронных состояний, обусловленного флуктуационными локализованными состояниями.

В диссертации предлагается метод расчета предэкспоненциального

множителя в выражении для дальней асимптотики "хвоста" плотности состояний, основанный на использовании дисперсионного соотношения по константе связи и соответствии с поведением корреляторов в теории критических явлений (теории поля  $g\phi^4$  с  $g > 0$ ).

Далее рассматривается инстантонный вклад в двухчастичную функцию Грина и показывается, что этот вклад имеет типичный сингулярный (полюсный) вид, предполагавшийся в связи с обсуждением общего критерия локализации.

В заключении этой главы обсуждается связь двух подходов к нахождению сингулярной части двухчастичной функции Грина: подхода, основанного на рассмотрении однородного уравнения Бете-Соллпитера и инстантонного подхода. Показывается, что оба способа описания естественным образом возникают, как проявления разных, вообще говоря, неустойчивостей системы в рамках единого формализма эффективного действия для составных полей.

В пятой главе диссертации, после краткого обзора литературы, посвященной попыткам учета влияния межэлектронного взаимодействия на переход Андерсона, проводится рассмотрение первых поправок теории возмущений по взаимодействию в окрестности порога подвижности. Используя представление точных собственных функций электрона в случайном поле, мы вычисляем хартриевскую и фоковскую поправки к плотности состояний и термодинамическим величинам. С помощью общего критерия локализации Березинского-Горькова удается выделить локализационные вклады, непосредственно связанные с вероятностью возврата электрона в начальную точку. Появление таких вкладов тесно связано с образованием в области локализации "полоски" однократно занятых электронных состояний под уровнем Ферми. Рассчитываются соответствующие вклады в магнитную восприимчивость, энтропию и теплоемкость системы. После этого, с использо-

ванием результатов самосогласованной теории локализации, проводится обобщение известных результатов Альтшулера и Аронова для поправки к плотности состояний на уровне Ферми, обусловленной интерференцией межэлектронного взаимодействия и рассеяния на беспорядке. Рассмотрение ведется сначала для случая короткодействующего (точечного) взаимодействия электронов. В дальнейшем мы переходим к анализу реального кулоновского взаимодействия. Прежде всего рассматривается вопрос об экранировании электрического поля в системе, испытывающей переход Андерсона. Вычисляется локализационный вклад в поляризационный оператор, связанный с неэргодическим поведением системы в области локализации. Такой вклад возникает только в статическом мацубаровском поляризационном операторе и его появление приводит к различию статических изотермического и адиабатического откликов системы, в частности соответствующих диэлектрических проницаемостей. В заключение, вычисляется поправка к плотности электронных состояний, вызванная кулоновским взаимодействием с учетом эффектов динамического экранирования в неупорядоченной системе. Оказывается, что она с точностью до константы совпадает с результатом, полученным в случае точечного взаимодействия.

В шестой главе рассматривается вопрос о влиянии локализации на сверхпроводимость сильно неупорядоченных электронных систем. Этот вопрос имеет как чисто теоретическое, так и непосредственное практическое значение в связи с изучением свойств сильно разупорядоченных сверхпроводников (например сверхпроводников, разупорядоченных путем облучения быстрыми нейтронами). Согласно известной теореме Андерсона, "нормальный" беспорядок не оказывает существенного влияния на температуру сверхпроводящего перехода  $T_c$  (при заданном притяжении электронов вблизи уровня Ферми). Это утверж-

дение сохраняет силу независимо от того, являются-ли точные одно-электронные состояния локализованными или делокализованными. Возникает вопрос о возможности сверхпроводимости в состоянии андерсоновского диэлектрика. Этот вопрос решается в диссертации путем микроскопического расчета коэффициентов функционала свободной энергии Гинзбурга-Ландау сверхпроводника, с использованием двухчастичной функции Грина, найденной в рамках самосогласованной теории локализации. Оказывается, что сверхпроводящий отклик сохраняется и в области локализации, по крайней мере пока радиус локализации электронных состояний достаточно велик и превышает характерный размер куперовской пары. Далее мы рассчитываем поведение верхнего критического магнитного поля  $H_{c2}$  в пренебрежении влиянием магнитного поля на переход Андерсона, что справедливо вблизи  $T_c$ . Найдены существенные отклонения от соотношений теории Горькова для обычных "грязных" сверхпроводников. После этого, мы переходим к рассмотрению микроскопического механизма образования куперовских пар в сильно неупорядоченной системе. Оказывается, что рост беспорядка в системе приводит к росту эффективного кулоновского псевдопотенциала  $\mu^*$ , определяющего отталкивание электронов в куперовской паре, что связано с замедлением их диффузионного движения при подходе к переходу Андерсона. Этот эффект ведет к существенному снижению сверхпроводящей  $T_c$ . В диссертации проведены подробные расчеты этого эффекта и показано, что в системах с достаточно высокой исходной температурой сверхпроводящего перехода и с достаточно малыми значениями энергии Ферми, возможно достижение области локализации при сохранении заметной величины  $T_c$ . В состоянии андерсоновского диэлектрика вступает в силу дополнительный механизм разрушения сверхпроводимости, интенсивность которого пропорциональна вероятности возврата элек-

трона, и сверхпроводимость быстро подавляется с уменьшением радиуса локализации. Тем не менее, в указанных условиях, в системе возможна узкая область "сосуществования" локализации и сверхпроводимости, в которой реализуется фазовый переход андерсоновский диэлектрик - сверхпроводник. В заключение этой главы кратко обсуждаются экспериментальные данные по некоторым сверхпроводящим соединениям со структурой фаз Шевреля, разупорядоченным облучением быстрыми нейтронами. Показывается, что найденные нами зависимости  $T_c$  от электросопротивления (беспорядка) могут дать разумное объяснение имеющимся экспериментальным данным. Вместе с данными по  $H_{c2}$  это позволяет заключить, что некоторые из обсуждаемых систем действительно остаются сверхпроводящими в окрестности перехода Андерсона.

В седьмой главе диссертации рассматривается приложение некоторых методов теории локализации в физике неупорядоченных магнетиков. В частности, изучаются спин-волновые возбуждения в ферромагнетике с хаотической анизотропией типа "легкая ось". Продемонстрирован изоморфизм задачи о локализации магнонов в рассматриваемой модели с задачей о локализации электронов в модели Андерсона с диагональным беспорядком. Затем мы переходим к исследованию высокотемпературных разложений для свободной энергии моделей Изинга со случайными обменными связями, а также со случайными узлами и конкурирующими обменными взаимодействиями ближайших соседей. Сходимость этих случайных рядов, рассматриваемых в приближении путей без пересечений, исследуется методами, использовавшимися при изучении локализации в модели случайных фаз. Из определения порогов сходимости найдены условия неустойчивости парамагнитного состояния. Для различных двумерных и трехмерных решеток исследована возможность появления концентрационного интервала, в котором отсутствует дальний порядок.

В Заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Некоторые технические расчеты, во избежание загромождения основного текста, вынесены в Приложения.

Научная новизна и практическое значение работы. В диссертации впервые установлена связь общих критериев локализации и проведены конкретные расчеты с использованием этих критериев. Рассмотрены новые модели беспорядка и предложены новые методы определения положения порога подвижности на шкале энергий. Проведено обобщение самосогласованной теории локализации для пространств с размерностью  $d > 2$ , а также расчет физических свойств в рамках этой теории. В частности разработана схема самосогласованной теории для систем с произвольным исходным спектром электронов. Установлена связь этой теории с общими критериями локализации. В рамках метода Андерсона, впервые получено скэйлинговое описание электронных состояний вблизи порога подвижности. Разработана эффективная теория поля для электрона в случайном поле и определены границы области "сильной связи", в которой находится порог подвижности. Установлена связь неустойчивости основного состояния этой теории поля (инстантоны) с образованием "хвоста" плотности электронных состояний. Предложен новый метод расчета предэкспоненциального множителя плотностисостояний в области "хвоста", основанный на использовании дисперсионного соотношения по константе связи и аналогии с теорией фазовых переходов. Установлена связь инстантонных решений с локализацией.

В диссертации впервые рассмотрено влияние первых поправок теории возмущений по межэлектронному взаимодействию на плотность электронных состояний вблизи уровня Ферми в области локализации, т.е. для диэлектрической стороны перехода Андерсона. Проанализировано экранирование внешнего электрического поля и показан металли-

ческий характер экранирования статического поля в диэлектрической фазе. Изучено отличие адиабатического и изотермического статических откликов системы, обусловленное неэргодичностью, связанной с явлением локализации.

Впервые проведено обобщение микроскопической теории Гинзбурга-Ландау-Горькова "грязных" сверхпроводников для случая системы, испытывающей переход Андерсона. Показано, что локализация электронов не исключает возможность сверхпроводящего отклика системы, т.е. фазового перехода андерсоновский диэлектрик-сверхпроводник. Близость перехода Андерсона приводит к ряду аномалий сверхпроводящих свойств, прежде всего верхнего критического магнитного поля. Подобные аномалии наблюдаются экспериментально на ряде сверхпроводников, разупорядоченных облучением быстрыми нейтронами, и теоретические результаты, полученные в диссертации, могут существенно улучшить понимание свойств таких систем. Проанализирована роль кулоновского взаимодействия в определении критической температуры сильно разупорядоченных сверхпроводников. С ростом беспорядка кулоновское отталкивание электронов в куперовской паре возрастает, что ведет к снижению критической температуры. Этот эффект позволяет объяснить экспериментально наблюдаемое поведение  $T_c$  в облученных сверхпроводниках.

Разработанные методы анализа явления локализации применяются к расчету ряда свойств неупорядоченных магнитных систем. Впервые рассмотрена локализация спиновых волн в ферромагнетиках с хаотической анизотропией типа "легкая ось". Методы анализа сходимости случайных рядов применяются к исследованию высокотемпературных рядов в неупорядоченных моделях Изинга, для которых найдены характерные точки неустойчивости состояний с дальним магнитным порядком.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ряде Всесоюзных и Международных конференций, совещаний и школ. В частности, они докладывались на II Всесоюзной конференции по

фазовым переходам металл-диэлектрик (Львов, 1977 г.), на Уральской зимней школе физиков-теоретиков "Коуровка-17" (Свердловск, 1978 г.), на конференции молодых ученых ЕрФИ (Нор-Амберд, 1979 г.), на советско-венгерском симпозиуме по физике конденсированного состояния (Москва, 1980 г.), на Всесоюзном съезждении-семинаре "Неклассические кристаллы" (Севан, 1982 г.), на Всесоюзной конференции по теории твердого тела памяти И.М.Лифшица (Звенигород, 1984 г.), на Школе по физике конденсированного состояния ИАЭ им.И.В.Курчатова (Протвино, 1985 г.), на 7, 9 и II-м Международных симпозиумах по электронной структуре металлов и сплавов (Дрезден, ГДР, 1977, 1979, 1981 г.г.). По работам, включенным в диссертацию, автором читались циклы лекций в Университете им. Карла Маркса в Лейпциге (ГДР, 1982 г.), в Техническом Университете Дрездена (ГДР, 1982 г.) и в Университете Ульма (ФРГ, 1983 г.). Результаты работы докладывались на семинарах ИФМ УНЦ АН СССР, ФИАН СССР, ФТИ АН СССР, в Университете Ганновера и Техническом Университете Мюнхена (ФРГ).

Публикация результатов диссертации. Основное содержание диссертации отражено в 18 статьях, приведенных в списке литературы под номерами /9, 10, 31, 78, 100, 119, 120, 130, 136, 149, 161, 201, 202, 223, 224, 241, 257, 263/.

Работа была выполнена в лаборатории теории твердого тела Института физики металлов УНЦ АН СССР.



# 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ.

## 1.1. Переход Андерсона и минимальная металлическая проводимость.

Как уже отмечалось во Введении, концепция локализации электронов в неупорядоченных системах является центральной для современной теории неупорядоченных систем, на ней базируются основные представления об энергетическом спектре, кинетических и других электронных свойствах этих систем /2,3/.

В последние годы явление локализации рассматривалось в целом ряде обзоров и монографий /6-16/ и основные представления о нем сейчас являются общеизвестными. Тем не менее представляется уместным напомнить основные положения теории локализации и соответствующую терминологию. В основу рассмотрения обычно кладется модель Андерсона /1/, в которой рассматривается электрон, распространяющийся в регулярной решетке узлов в  $d$  - мерном пространстве. На каждом из узлов имеется случайный энергетический уровень  $E_j$  ( $j$  - номер узла в решетке). Принимается также, что существует определенная амплитуда вероятности перехода  $V_{ij}$  с  $j$  - го узла на узел  $i$ . Обычно считается, что эта амплитуда отлична от нуля и равна некоторой константе  $V$  для переходов между ближайшими соседями. Уровни энергии  $E_j$  считаются распределенными независимо на разных узлах, а распределение энергий на данном узле обычно считается однородным в некотором интервале шириной  $W$ . Качественные результаты, по-видимому, не слишком сильно зависят от этих предположений. Другой удобной моделью рассмотрения локализации является, по-видимому, модель почти свободных электронов в поле случайно распределенных в пространстве с плотностью  $\rho$  точечных рассеивателей, каждый из которых имеет одну и ту же амплитуду рассеяния, которую мы также будем обозначать через  $V$  /17/.

Если беспорядок в системе отсутствует ( $W = 0$  в модели Андерсона или  $\rho = 0$  в модели свободных электронов) решение задачи об электронном спектре элементарно. В модели Андерсона электронные состояния образуют при этом зону шириной  $2ZV$ , где  $Z$  - число ближайших соседей. Аналогичным образом возникает и бесконечно широкая зона свободных электронов. Введение беспорядка приводит к важным изменениям, причем возникает существенная зависимость от размерности пространства  $d$ . Так для  $d = 1$  сколь угодно малого значения беспорядка достаточно для того, чтобы полностью изменить характер электронных состояний - все они становятся локализованными, т.е. их волновые функции становятся экспоненциально спадающими в координатном пространстве, а статическая электропроводность системы при температуре  $T = 0$  обращается в нуль /18-23/. Двумерные системы ( $d = 2$ ) представляют собой граничный случай ("нижняя критическая размерность"), в них также, по-видимому, реализуется полная локализация при сколь угодно слабом беспорядке /5, 10, 13, 14/, хотя дискуссия по этому вопросу до сих пор продолжается (см. библиографию в обзоре /10/). Для  $d > 2$ , при достаточно больших значениях отношения  $W/V$  в модели Андерсона, превышающих некоторое критическое значение  $(W/V)_c$ , т.е. при достаточно сильном беспорядке также происходит полная локализация всех электронных состояний в зоне. При  $W/V < (W/V)_c$  происходит локализация электронных состояний по краям зоны, тогда как в центре зоны состояния остаются делокализованными (Рис. I. I(a)). При этом возникают критические значения энергии  $\pm E_c$ , разделяющие области локализованных и делокализованных состояний, которые обычно именуется порогами подвижности. В модели почти свободных электронов качественная картина спектра электронных состояний при  $d > 2$  также хорошо известна (Рис. I. I(б)). Когда уровень Ферми  $E_F$  находится в области достаточно больших энергий, электронные состояния

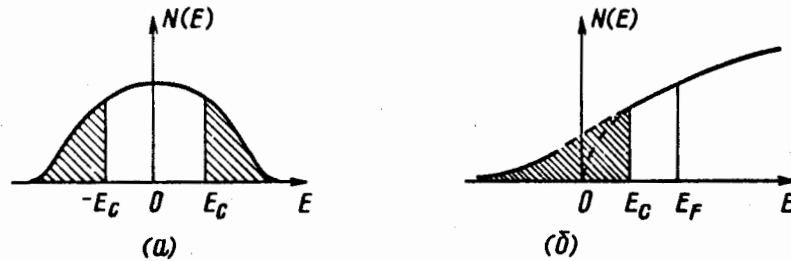


Рис.1.1. Плотность состояний и положение порогов подвижности в модели Андерсона (а) и в модели почти свободных электронов (б). Заштрихованы области локализованных состояний.

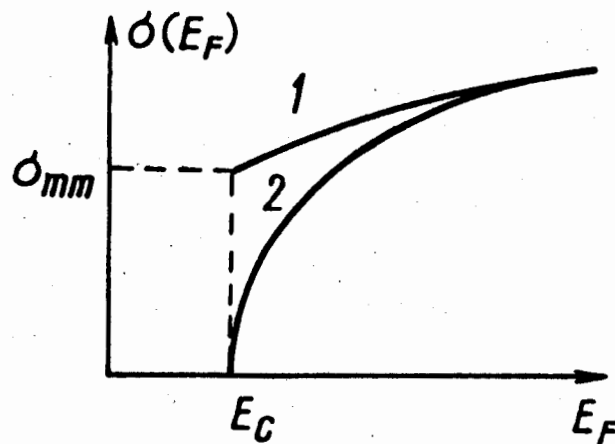


Рис.1.2. Изменение металлической проводимости при прохождении уровня Ферми через порог подвижности:

1 - по Мотту /2,3/ . 2 - по Козну /16/.

вблизи него представляют собой слабо искаженные рассеянием плоские волны. По мере понижения энергии Ферми к краю зоны роль рассеяния на беспорядке возрастает. У края зоны появляется "хвост" плотности состояний, связанный с локализацией электронов флуктуациями случайных рассеивателей /12/, а вблизи прежней границы зоны возникает энергия  $E_c$ , разделяющая делокализованные и локализованные состояния - порог подвижности.

Название "порог подвижности" связано с тем, что локализованные состояния не дают вклада в статическую проводимость при нулевой температуре  $T = 0$ . Если уровень Ферми  $E_F$  многоэлектронной системы при  $T = 0$  попадает в область энергий, соответствующую локализованным состояниям, то система является диэлектриком - проводимость возможна лишь при  $T \neq 0$  или при возбуждении электронов переменным электромагнитным полем. При этом проводимость осуществляется с помощью прыжкового механизма /2,3,8/. Если же уровень Ферми попадает в область делокализованных состояний, проводимость имеет металлический характер. Такой переход металл-диэлектрик, происходящий при пересечении уровнем Ферми порога подвижности, принято называть переходом Андерсона.

Одним из центральных вопросов теории является характер изменения статической металлической проводимости при пересечении уровнем Ферми  $E_F$  порога подвижности  $E_c$  (при  $T = 0$ ). Возможные альтернативы показаны на Рис. 1.2/2,3,24/. Проводимость может скачком обращаться в нуль после достижения некоторой минимальной величины  $\sigma_{min}$  - минимальной металлической проводимости. Такое поведение было предположено Моттом /2,3/ на основании качественного анализа проводимости в модели Андерсона, а также на основании анализа большого числа экспериментов. Однако, вполне возможно и непрерывное обращение проводимости в нуль, когда величина  $\sigma_{min}$  сохраняет смысл характерного масштаба проводимости, начиная с

которого происходит достаточно резкое ее обращение в нуль. Эта альтернатива была впервые предложена Коэном /24/, в основном, исходя из аналогии локализации с явлением перколяции (протекания) /8/. Ясно, что обе возможности могут (при достаточно резком непрерывном убывании проводимости) привести к примерно одинаковым экспериментальным следствиям, по крайней мере при не слишком низких температурах. Экспериментальное решение этого вопроса требует проведения прецизионных измерений при сверхнизких температурах. Современные теоретические представления, основанные на скэйлинговой теории локализации, также, как и новейшие эксперименты в области температур  $\sim 10^{-3}\text{K}$ , как мы увидим ниже, свидетельствуют в пользу непрерывного обращения проводимости в нуль на пороге подвижности. В тоже время нельзя считать, что этот вопрос уже решен окончательно.

Качественные представления о характерном масштабе проводимости вблизи порога подвижности, также как и оценку его положения в зоне, легко получить, основываясь на соображениях, высказанных еще А.Ф.Иоффе и А.Р.Регелем /4/. Суть этих представлений сводится к тому, что концепция металлической проводимости сохраняется до тех пор, пока длина свободного пробега превышает длину волны электрона. При росте беспорядка соответствующее неравенство нарушается и возникают существенные изменения картины проводимости, связанные, в конечном счете, с локализацией. В случае модели Андерсона с наполовину заполненной зоной (один электрон на узел) это происходит, когда длина свободного пробега  $\ell$  становится порядка межатомного расстояния  $a$ . Тогда из обычной формулы Друде

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau \quad (\pi - \text{плотность электронов, } \tau - \text{ время свободного пробега, } m - \text{ масса электрона), используя } n \sim a^{-d}, \tau \sim ma^2/\hbar, \text{ получаем оценку:}$$

$$\sigma_{mm} \sim \text{Const} \frac{e^2}{\hbar a^{d-2}} \quad (\text{I.I})$$

Согласно Мотту /2,3/ постоянная в этой формуле определяется критическим отношением  $(W/V)_c$  и для  $d=3$  лежит в интервале  $0.025 + 0.06$ , что дает  $\sigma_{mm} \sim (1 + 5)10^2 \text{ ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ , для типичных значений  $a \sim 2 + 3 \text{ \AA}$ . Отметим, однако, что "буквенный" масштаб здесь порядка  $10^3 \text{ ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ .

В модели почти свободных электронов критерий Иоффе-Регеля означает, что энергия Ферми  $E_F$  становится порядка обратного времени свободного пробега  $\tau^{-1}$ .<sup>1</sup> Оценивая последнее с помощью обычного борновского выражения  $\tau^{-1}(E) \sim \rho V^2 N(E)$ , где  $N(E) \sim m^{\frac{d}{2}} E^{\frac{d}{2}-1}$  — плотность состояний свободных электронов, из условия  $E_c \sim \tau^{-1}(E_c)$  получаем оценку положения порога подвижности у края зоны:

$$E_c \sim m^{\frac{d}{4-d}} (\rho V^2)^{\frac{2}{4-d}} \quad (1.2)$$

Эта характерная энергия играет существенную роль в дальнейшем. Фактически она определяет область энергий  $|E_0|$  у края зоны, в которой становятся существенными эффекты сильного рассеяния на беспорядке. Для модели Андерсона, отсчитывая энергию от края исходной зоны, аналогичным образом можно получить:

$$E_c \sim V \left( \frac{W}{V} \right)^{\frac{4}{4-d}} \quad (1.3)$$

В сущности, уже из этих оценок видна выделенная роль размерностей пространства  $d=2$  и  $d=4$  в задаче о локализации. Видно, в частности, что для  $d=2$  характерный масштаб проводимости (1.1) определяется только фундаментальными физическими постоянными, а характеристики конкретной системы в достаточной мере несущественны. Действительно-ли это так? Каков закон обращения в нуль

<sup>1</sup> Далее мы всюду используем систему единиц  $\hbar = 1$ , постоянная Планка  $\hbar$  восстанавливается лишь в некоторых конечных формулах.

проводимости на пороге подвижности ? Как меняется (расходится при  $E_F \rightarrow E_C$  со стороны локализованных состояний) радиус локализации волновой функции ? Являются-ли волновые функции локализованных состояний обязательно экспоненциально спадающими с расстоянием от центра локализации или же возможно достаточно быстрое (обеспечивающее нормируемость на единицу) степенное спадание в координатном пространстве ? Нельзя-ли рассмотреть эти вопросы по аналогии с задачей о фазовых переходах и не является-ли поведение вблизи порога подвижности своеобразным критическим явлением ? Наконец, какова роль межэлектронного взаимодействия в явлении локализации ? Таковы некоторые из основных вопросов, на которые должна ответить фундаментальная теория.

## I.2. Элементарная скейлинговая теория локализации.

Поведение системы в окрестности порога подвижности можно попытаться понять с помощью скейлингового рассмотрения, аналогичного тому, которое было успешно использовано в теории критических явлений /25,26/, или, на современном языке, с помощью построения того или иного варианта преобразований группы перенормировки (ренормгруппы) /26,30/. Основная физическая идея такого рассмотрения основана на последовательном переходе от небольших ячеек (масштабов) системы в координатном пространстве, для которых задача может быть решена (хотя-бы грубо!), ко все более крупным ячейкам (масштабам), которые пытаются описать в терминах тех же физических переменных, что и мелкомасштабные ячейки. Последовательность формул, осуществляющих такой переход от мелких масштабов к крупным, называют преобразованиями группы перенормировки (ренормгруппы) в реальном пространстве /28,30/, являющимися современным вариантом масштабных преобразований Каданова /25/. В теории критических явлений построение таких преобразований обычно мотивируется /25-30/ возрастанием корреляционной длины флуктуаций параметра порядка в окрестности критической точки. Аналогом этого явления в теории локализации является рост радиуса локализации электронных состояний при подходе к порогу подвижности со стороны локализованных состояний. Следует, однако, подчеркнуть, что в области дelokализованных состояний аналог такой расходящейся длины строго говоря неизвестен (см. однако ниже!), также, как неизвестен "параметр порядка", связанный с переходом Андерсона. С нашей точки зрения, различные предложения, высказывавшиеся в целом ряде работ (см. обзор /10/), в той или иной мере являются неудовлетворительными и аналогия явления локализации с обычными фазовыми переходами носит довольно ограниченный характер. Тем не менее, вслед за первыми попытками построения последовательной скейлинговой карти-



ны перехода Андерсона /31,32/, в этой области был достигнут существенный прогресс, который был особенно заметным после появления известной работы Абрахамса, Андерсона, Личчиарделло и Рамакришнана /5/, в которой была сформулирована очень простая качественная схема скэйлинга для перехода Андерсона.

Эта работа была целиком основана на процедуре эффективных масштабных преобразований для задачи Андерсона, предложенной в работах группы Таулеса /6,33-37/. Рассмотрим решетку Андерсона и перейдем от элементарной ячейки со стороной  $a$  к новой ячейке со стороной  $L$ , содержащей  $N$  узлов исходной решетки. Тогда исходную решетку можно описать как построенную из новых ячеек, в каждой из которых имеется набор  $N$  случайных уровней (Рис.1.3). Рассмотрим решетку, построенную периодическим повторением одной из таких ячеек. Тогда любой из  $N$  уровней ячейки "расплывается" в зону шириной  $2\Delta E$ . Величина  $\Delta E$  определялась в работах /33-37/ численно через величину сдвига уровней при переходе от периодических к антипериодическим граничным условиям для волновых функций на границе ячейки  $L$ . Хотя полученная таким образом новая решетка и не тождественна масштабно-преобразованной решетке Андерсона, можно при качественном рассмотрении считать, что эффективная связь электронов на двух уровнях в соседних ячейках в решетке Андерсона (т.е. аналог интеграла переноса  $V$  для системы, состоящей из новых ячеек) порядка:

$$V_L \approx \frac{1}{N} \Delta E \quad (1.4)$$

Эта величина определяет меру взаимного влияния волновых функций в соседних ячейках. Если состояния локализованы, то они практически нечувствительны к изменению граничных условий в большой ячейке. Делокализованные состояния, напротив, чувствуют изменение граничных условий, что и приводит к заметному сдвигу уровней  $\Delta E$ .

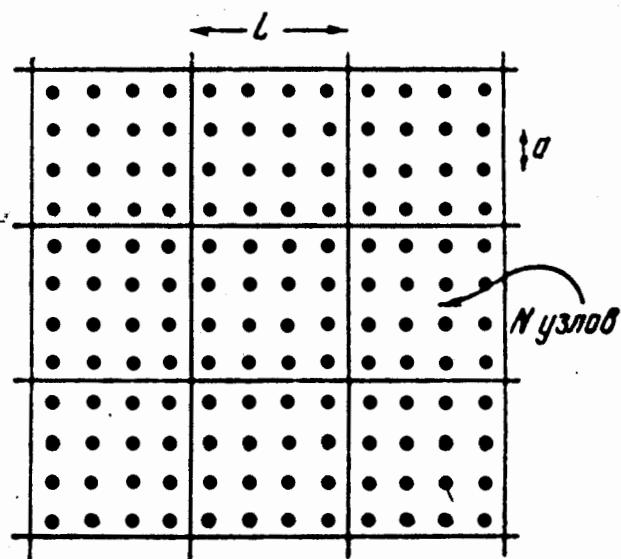


Рис. I.3. Аналог построения Каданова в задаче Андерсона по Личчиарделло-Таулесу.

При периодическом продолжении связь (I.4) приводит к зоне шириной  $2\Delta E$ .

Средний разброс уровней в соседних ячейках определяется обратной плотностью состояний, рассчитанной на единичный объем в исходной решетке, и размером ячейки  $L$  /33-37/:

$$W_L \approx L^{-d} N^{-1}(E) \quad (I.5)$$

Если фиксировать рассмотрение на одной из  $N$  зон в новой решетке, то  $W_L$  можно считать аналогом параметра  $W$  исходной решетки. Таким образом строится переход от исходной задачи Андерсона с заданным отношением  $W/V$  к новой (масштабно-преобразованной) задаче того же типа с "эффективным" гамильтонианом, характеризующимся новым отношением  $W_L/V_L$ . Процесс таких скейлинговых преобразований можно продолжить:  $L \rightarrow 2L \rightarrow 4L \dots$ , или, в общем случае  $L \rightarrow \nu L$  ( $\nu > 1$ ), переходя ко все более крупным ячейкам, содержащим все больше и больше узлов исходной решетки.

Если данное состояние с энергией  $E$  локализовано, то:

$$V_L \sim \exp \left\{ - \frac{L}{R_{loc}(E)} \right\}; \quad L \gg R_{loc}(E) \quad (I.6)$$

где  $R_{loc}(E)$  - радиус локализации рассматриваемого состояния. Соответственно, в этом случае и отношение  $V_L/W_L$  также экспоненциально убывает с ростом  $L$ . Если предположить существование порогов подвижности, то для любого  $E$  из исходной зоны существует максимальное отношение  $(V_L/W_L)_{max}$ , для которого еще осуществляется такое экспоненциальное убывание. С помощью такого критерия в работах /33-37/ численно определялось положение порогов подвижности в исходной зоне.

Делокализованный электрон в системе ячеек размера  $L \gg \ell$ , где  $\ell$  - длина свободного пробега, в течение времени  $\tau_L \sim \hbar/V_L$  может

равновероятно сместиться (продиффундировать) из данной ячейки в соседнюю - выше уже отмечалось, что величина  $V_L$  определяет эффективную связь электронов на случайных уровнях в соседних ячейках. Это взаимодействие и приводит к уширению уровней, т.е. к конечному, порядка  $\tau_L$ , времени жизни электрона в данной ячейке. Из элементарной кинетической теории ясно, что коэффициент диффузии в рассматриваемой системе  $\mathcal{D}_L \sim L^2/\tau_L$ , так что получаем:

$$V_L \approx \hbar \mathcal{D}_L(E) L^{-2} \quad (I.7)$$

где  $\mathcal{D}_L(E)$  - коэффициент диффузии электрона с энергией  $E$  в системе ячеек с размером  $L$ . Тогда для делокализованных состояний имеем:

$$\frac{V_L}{W_L} \approx \hbar \mathcal{D}_L(E) N(E) L^{d-2} = \frac{\hbar}{e^2} \sigma_L(E) L^{d-2} \equiv g(L) \quad (I.8)$$

где мы воспользовались соотношением  $\sigma(E) = e^2 \mathcal{D}(E) N(E)$  для удельной электропроводности, вытекающим (для случая невзаимодействующих электронов) из общего соотношения Эйнштейна при  $T = 0$ . Величина  $g(L)$ , определенная в правой части (I.8), равна полной проводимости ячейки с размером  $L$ , измеренной в единицах  $\frac{e^2}{\hbar} \approx 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ ом}^{-1}$ . Более строгий вывод соотношения (I.8) приведен в оригинальных работах /6,33-37/.

Из (I.8) видно, что для  $d=2$  универсальная минимальная металлическая проводимость существует, если при масштабных преобразованиях определенная выше величина  $\left(\frac{V_L}{W_L}\right)_{\max}$  выходит на некоторую универсальную константу. Первоначальный численный анализ, проведенный Личчарделло и Таулесом /35,36/ показал существование такой универсальной (не зависящей от типа исходной решетки) константы. Для минимальной металлической проводимости при  $d=2$  они получили:

$$\sigma_{mm} = \frac{e^2}{\hbar} \left( \frac{V_L}{W_L} \right)_{\max} = (0.12 \pm 0.03) \frac{e^2}{\hbar} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ ом}^{-1} \quad (1.9)$$

Однако более поздние численные результаты тех же авторов /37/ привели к несколько неопределенным результатам. Грубо говоря, было замечено, что по мере роста размеров системы  $L$  величина  $\sigma_{mm}$  уменьшается. Это поставило под сомнение существование  $\sigma_{mm}$  для  $d = 2$  и привело авторов работы /37/ к гипотезе о том, что в двумерных системах может осуществляться полная локализация при сколь угодно слабом беспорядке (аналогично одномерному случаю).

Существенное продвижение, осуществленное в работе /5/, было связано с проведением простого качественного анализа поведения функции  $g(L)$ , определенной в (1.8), т.е. полной проводимости ячейки со стороной  $L$ , при масштабных преобразованиях  $L \rightarrow \beta L$ . Предположим простейшее ренормгрупповое уравнение:

$$\frac{d \ln g(L)}{d \ln L} = \beta_d(g(L)) \quad (1.10)$$

представляющее собой дифференциальный вариант общего масштабного преобразования переменных рассматриваемой задачи:  $g(\beta L) = f(\beta, g(L))$ . Дифференциальная запись (1.10) наиболее удобна для качественного анализа и подразумевает переход от ячеек со стороной  $L$  к ячейкам со стороной  $\beta L = L + dL = (1 + \lambda)L$ , где  $\lambda = \frac{dL}{L} \rightarrow 0$ .

Наиболее существенным предположением здесь является зависимость функции  $\beta_d(g)$  в правой части (1.10) только от переменной  $g$  (однопараметрический скейлинг). Уравнение (1.10) является аналогом известного уравнения Гелл-Манна и Лоу в ренормгруппе квантовой теории поля /38-40/. Поведение функции  $\beta_d(g)$  нетрудно понять из простых физических соображений /5/. Учитывая пропорциональность

$g(L)$  — полной электропроводности кубика с ребром  $L$ ,  
 $g(L) \sim \sigma_L L^{d-2}$ , ясно, что в пределе больших  $g$  (малый бес-  
 порядок,  $V_L/W_L \gg 1$ ) мы должны получить постоянную (независящую  
 от  $L$ ) металлическую проводимость:  $\sigma_{L \rightarrow \infty} = \sigma$ . Соответствен-  
 но должно выполняться условие:

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \beta_d(g) \rightarrow d-2 \quad (\text{I.II})$$

т.к. из уравнения  $d \ln g(L)/d \ln L = d-2$  следует  $g(L) = \text{Const } L^{d-2}$ ,  
 а постоянная интегрирования, очевидно, есть просто  $\frac{\hbar}{e^2} \sigma$ .  
 При малых  $g$  ( $V_L/W_L \ll 1$ ) мы должны получить экспоненци-  
 альную локализацию, т.е.  $g(L) = g_c(d) \exp(-\frac{L}{R_{loc}})$  (ср. (I.6), при  
 этом неявно предполагается справедливость соотношения (I.8) и в  
 области локализации). Тогда:

$$\lim_{g \rightarrow 0} \beta_d(g) \rightarrow \ln \frac{g}{g_c(d)} \quad (\text{I.I2})$$

т.к. из  $\ln g = \ln g_c - L/R_{loc}$  следует  $d \ln g(L)/d \ln L = -\frac{1}{R_{loc}} \frac{dL}{d \ln L} =$   
 $= -\frac{L}{R_{loc}} = \ln g/g_c$ . Предполагая далее существование двух раз-  
 ложений "теории возмущений" по "заряду"  $g$  в пределе слабой и  
 сильной связи, можно написать и первые поправки к предельным вы-  
 ражениям (I.II) и (I.I2):

$$\beta_d(g \rightarrow 0) = \ln \left[ \frac{g}{g_c(d)} \right] \{ 1 + b g + \dots \} \quad (\text{I.I3})$$

$$\beta_d(g \rightarrow \infty) = d-2 - \frac{\alpha}{g} + \dots \quad (\text{I.I4})$$

Можно высказать аргументы в пользу неравенств  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$  [5].  
 Используя найденные асимптотики функции Гелл-Манна и Лоу  $\beta_d(g)$ ,  
 в предположении ее монотонности и непрерывности, нетрудно изобра-  
 зить поведение этой функции во всем интервале изменения  $g$ .  
 Оно показано на Рис. I.4. Видно, что  $\beta_d(g)$  заведомо не имеет  
 нулей при  $d < 2$ . Если справедливо разложение (I.I4) и пред-

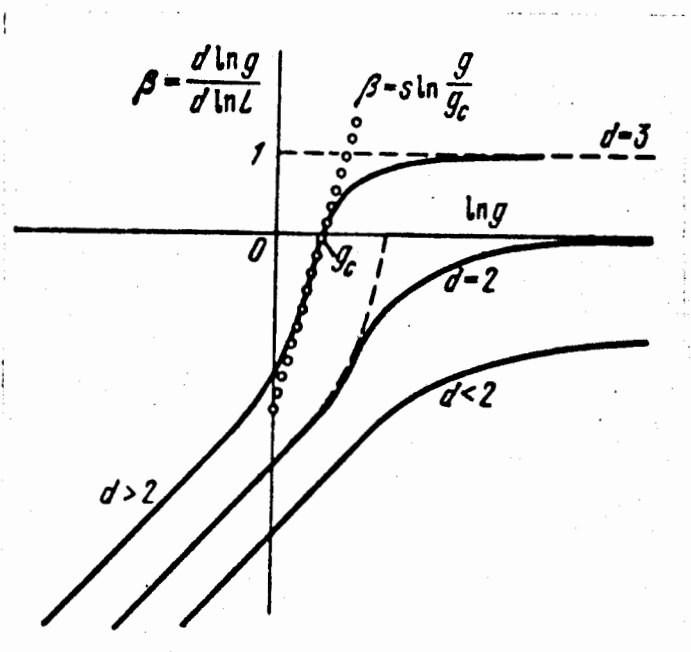


Рис. I.4. Качественный вид функции Гелл-Манна и Лоу для различных  $d$ .

Штриховой линией показано поведение, необходимое для получения скачка проводимости на пороге подвижности при  $d=2$ .

положение о монотонности  $\beta_d(g)$ , то нет нуля и для  $d=2$ . При  $d>2$  функция  $\beta_d(g)$  обязательно имеет нуль  $\beta_d(g_c)=0$  хотя его положение  $g_c$  не может быть найдено из столь простого рассмотрения (ясно, что  $g_c \sim 1$ , вблизи  $g_c$  "не работает" теория возмущений как по  $g$ , так и по  $g^{-1}$ ). Наличие нуля функции  $\beta_d(g)$  означает существование неустойчивой фиксированной точки уравнения (I.10). Отметим, что скейлинговое поведение в теории критических явлений обычно определяется устойчивыми фиксированными точками уравнений ренормгруппы /26-30/.

Вблизи  $g_c$  можно воспользоваться аппроксимацией (показано точками на Рис. I.4):

$$\beta_d(g) \approx \frac{1}{\nu} \ln \frac{g}{g_c} \approx \frac{1}{\nu} \frac{g - g_c}{g_c} \quad (\text{I.15})$$

где  $\nu < 1$  (в силу неравенства  $b > 0$  в (I.13)). Тогда, если при интегрировании уравнения (I.10) мы стартуем с начальной точки

$g_0 \geq g_c$  ( $g(L=a) = g_0$ , где  $a$  - некоторая длина порядка межатомного расстояния), то  $\sigma_L$  выходит на следующую асимптотику при  $L \rightarrow \infty$ :

$$\sigma \approx A \frac{e^2}{h} \frac{g_c}{a^{d-2}} \left( \ln \frac{g_0}{g_c} \right)^{(d-2)\nu} \underset{g_0 \geq g_c}{\approx} A \frac{e^2}{h} \frac{g_c}{a^{d-2}} \left( \frac{g_0 - g_c}{g_c} \right)^{(d-2)\nu} \quad (\text{I.16})$$

Здесь  $A = \text{const} \sim 1$ . Видно, что наличие фиксированной точки означает существование порога подвижности, а поведение  $\beta_d(g)$  вблизи нуля определяет критическое поведение на пороге подвижности. При сделанных предположениях проводимость непрерывным образом обращается в нуль при  $g_0 \rightarrow g_c$ , а величина  $e^2/h a^{d-2}$  (т.е.  $\sigma_{\text{mt}}$  по Мотту) играет роль характерного масштаба проводимости, на котором происходит переход металл-диэлектрик. Для того, чтобы получить на пороге подвижности моттовский скачок проводимости,



функция  $\beta_d(g)$  должна вести себя немонотонно, например как это показано пунктиром для случая  $d=2$  на Рис.4. Из качественных соображений такое поведение кажется маловероятным, как противоречащее разложению (I.I4).

Интегрирование уравнения (I.I0) с начальной точкой  $g_0 \leq g_c$  дает (при больших  $L$ ):

$$g \approx g_c \exp \left\{ -A \left| \ln \frac{g_0}{g_c} \right|^{\nu} \frac{L}{a} \right\} \quad (\text{I.I7})$$

Отсюда (ср. с (I.6)) следует, что:

$$R_{loc} \sim a \left| \frac{g_0 - g_c}{g_c} \right|^{-\nu} \quad (\text{I.I8})$$

т.е.  $\nu$  играет роль критического индекса радиуса локализации. Для  $d=2$   $\beta_d(g) < 0$  во всем интервале изменения переменной  $g$ . Тогда  $\sigma_{L \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  для любых начальных условий, порога подвижности нет, все состояния локализованы (статическая проводимость бесконечной системы равна нулю).

Для  $d > 2$ , ограничиваясь для  $\beta_d(g)$  первыми членами разложения теории возмущений по  $g^{-1}$ , выписанными в (I.I4), из условия  $\beta_d(g_c) = 0$ , легко находим:

$$g_c = \frac{\alpha}{d-2} \quad (\text{I.I9})$$

откуда видно, что при  $d \rightarrow 2$  (сверху!) порог подвижности "уходит на бесконечность". При этом из (I.I4) имеем:

$$\beta_d(g - g_c) \approx (d-2) \left( \frac{g - g_c}{g_c} \right) \quad (\text{I.20})$$

так что для критического индекса радиуса локализации (ср.(I.I5)) в этом приближении получаем:

$$\nu \approx \frac{1}{d-2} \quad (I.21)$$

что можно рассматривать как главный член  $\epsilon$  - разложения вблизи  $d=2$  ( $\epsilon = d-2$ ) /41/. Размерность пространства  $d=2$  играет, таким образом, роль "нижней критической размерности" для явления локализации.

В работе /42/ была предпринята попытка придать физический смысл "локализационной корреляционной длине"

$$\xi_{loc} \sim a \left| \frac{g_0 - g_c}{g_c} \right|^{-\nu} \quad (I.22)$$

в металлической области,  $g_0 \geq g_c$ . (При  $g_0 \leq g_c$  - эта длина совпадает с радиусом локализации (I.18)). Легко видеть, что выражение (I.16) для проводимости вблизи порога подвижности может быть переписано в виде:

$$\sigma = A g_c \frac{e^2}{h \xi_{loc}^{d-2}} \quad (I.23)$$

Отсюда видно, что длина  $\xi_{loc}$  определяет поведение проводимости достаточно близко к порогу подвижности, в ситуации, когда эта длина становится гораздо больше межатомного расстояния и длины свободного пробега. Согласно соображениям, высказанным в /42/  $\xi_{loc}$  определяет масштаб, на котором проводимость становится "омической", в том смысле, что сопротивление ячейки со стороной  $L$ , в случае  $d=3$ , уменьшается пропорционально  $L^{-1}$ , т.е.  $\sigma_L$  в (I.8) перестает зависеть от  $L$ . Вблизи порога подвижности только образцы возрастающих размеров ( $\xi_{loc} \rightarrow \infty$ !) могут рассматриваться как макроскопические, а при  $L < \xi_{loc}$  величина  $\sigma_L$  зависит от  $L$ . По-видимому, эти соображения позволяют придать определенный смысл расходящейся длине скейлинговой теории

и в металлической области.

Зависимость (I.16) , (I.23) для проводимости вблизи порога подвижности принято называть скейлинговым законом Вегнера, поскольку впервые она была предложена в работе /32/. Критический индекс проводимости на пороге подвижности  $t$  связывается, таким образом, с индексом радиуса локализации (локализационной корреляционной длины)  $\nu$  соотношением:

$$t = (d-2)\nu \quad (\text{I.24})$$

Это соотношение открывает путь для экспериментального определения индекса  $\nu$  , описывающего поведение физических характеристик в области локализации, из измерений критического поведения металлической проводимости при подходе к точке перехода металл-диэлектрик. В реальных системах физический смысл экспериментально контролируемого параметра, определяющего переход металл-диэлектрик может быть разным. Выше речь шла, в основном, о классической задаче локализации в центре зоны, когда изменяется отношение  $V/W$  параметров гамильтониана Андерсона. При этом, согласно (I.8), можно положить  $g_0 \sim V/W$  . При рассмотрении перехода, вызываемого пересечением уровнем Ферми  $E_F$  порога подвижности у края зоны, можно считать, что  $\frac{g_0 - g_c}{g_c} \sim \frac{E_F - E_c}{E_c}$  . В реальном эксперименте, критическое отношение  $(W/V)_c$  или пересечение порога подвижности уровнем Ферми обычно достигается при изменении какого-либо "внешнего" параметра  $x$  (плотность примесей, давление, плотность атомов системы и т.п.). Тогда можно воспользоваться очевидными разложениями:

$$\begin{aligned} \frac{V}{W} &\approx \left. \frac{V}{W} \right|_c + \left. \frac{d}{dx} \left( \frac{V}{W} \right) \right|_{x=x_c} (x - x_c) + \dots \\ E_F &\approx E_c + \left. \frac{dE_F}{dx} \right|_{x=x_c} (x - x_c) + \dots \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

предполагающими аналитическую зависимость микроскопических параметров, определяющих переход Андерсона, от "внешнего" параметра  $X$ . Тогда для проводимости вблизи точки перехода металл-диэлектрик по параметру  $X$  имеем:

$$\sigma \sim \frac{e^2}{\hbar a^{d-2}} \left\{ x_c \frac{d}{dx} \left( \frac{V}{W} \right) \right\}_{x=x_c}^{(d-2)\nu} \left( \frac{x-x_c}{x_c} \right)^{(d-2)\nu} \quad (I.26)$$

$$\sigma \sim \frac{e^2}{\hbar a^{d-2}} \left\{ \frac{x_c}{E_F} \frac{d}{dx} E_F \right\}_{x=x_c}^{(d-2)\nu} \left( \frac{x-x_c}{x_c} \right)^{(d-2)\nu}$$

Из этих простых соотношений ясно, что универсальной здесь является лишь зависимость типа  $\sim (x-x_c)^{(d-2)\nu}$ , а масштаб проводимости не универсален, хотя в основном он определяется величиной  $e^2/\hbar a^{d-2}$ , которая может на порядок превышать  $\sigma_{mm}$ , определенную по Мотту.

В заключение этого раздела мы проведем предельно краткий обзор некоторых экспериментов по изучению перехода металл-диэлектрик в неупорядоченных системах, которые, по-видимому, подтверждают обсуждавшиеся выше закономерности. При этом мы ограничимся обсуждением трехмерных систем и совершенно не будем рассматривать эксперименты на тонких проволочках и пленках, которые были особенно стимулированы развитием скейлинговой теории локализации. Подобные эксперименты уже получили широкое отражение в обзорной литературе /10, 14, 43/, тогда как новейшие результаты по трехмерным системам еще не пользуются столь же широкой известностью.

При обсуждении экспериментов по переходу металл-диэлектрик в реальных системах, всегда возникает серьезная проблема выяснения истинного механизма перехода: обусловлен ли он неупорядоченностью (переход Андерсона) или же сильным межэлектронным взаимодействием (переход Мотта) /2/. Решение этой проблемы, как правило, достаточно затруднительно и может быть осуществлено, по-видимому, лишь при комплексном исследовании электронных свойств системы.

К настоящему времени накоплено большое число данных по таким переходам, причем в большинстве случаев (особенно это касается более ранних работ), эксперименты свидетельствуют в пользу концепции минимальной металлической проводимости /2,3,9,10/. Речь при этом идет о самых разнообразных системах - от сильнолегированных, аморфных и жидких полупроводников до металлов в закритическом состоянии. Однако, вывод о существовании  $\sigma_{mm}$  делается обычно на основании данных по электропроводности, полученных при не слишком низких температурах (по температурной зависимости проводимости). Величина  $\sigma_{mm}$  определялась просто, как характерная проводимость, при которой происходит переход к экспоненциальной температурной зависимости проводимости (термическая активация, прыжковая проводимость) /2,3,9,10,44/. В тоже время, по самому смыслу  $\sigma_{mm}$ , вопрос о ее существовании следовало бы решать при  $T \rightarrow 0$ , а при конечных температурах довольно трудно отличить скачок проводимости от достаточно резкого ее изменения в окрестности порога подвижности. С этой точки зрения представляют большой интерес проведенные в последнее время прецизионные исследования электронных свойств в окрестности перехода полупроводник-металл в Si, легированном P, который уже давно рассматривался в качестве возможного кандидата для изучения перехода Андерсона /45,46/. В серии работ /47-52/ были проведены измерения широкого набора электронных свойств этой системы при температурах до  $10^{-3}$  К. Оказалось, что экстраполированные к  $T = 0$  значения проводимости, как функции концентрации доноров, отвечают непрерывному переходу металл-диэлектрик. Оценка  $\sigma_{mm}$  для этой системы дает:

$$\sigma_{mm} \approx 0.05 \frac{e^2}{\hbar n_c^{-1/3}} \approx 20 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1} \quad (1.27)$$

где  $n_c^{-1/3} \approx 64 \text{ \AA}^3$  соответствует критической концентрации  $n_c$

доноров, при которой происходит переход. В тоже время, металлическое поведение  $\sigma(T)$  наблюдалось в /47,48,50,51/ при значительно меньших значениях проводимости. При этом зависимость  $\sigma(T \rightarrow 0)$  от концентрации доноров  $n$  (играющей здесь роль "внешнего" параметра  $\chi$ ) прекрасно описывалась выражением вида:

$$\sigma = \sigma_c \left( \frac{n - n_c}{n_c} \right)^\nu \quad (I.28)$$

где  $\sigma_c = 260 \pm 20 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1} \approx 13 \sigma_{mm}$  и  $\nu = 0.55 \pm 0.1$  /47/, что находится в очевидном соответствии с предсказаниями скейлинговой теории локализации (I.16), (I.26). Возражения Мотта /53/ относительно возможной роли макроскопических неоднородностей в эксперименте работы /47/ были, в значительной степени, сняты работой /48/, в которой была продемонстрирована воспроизводимость результатов по электропроводности при многократном прохождении через точку перехода с помощью процедуры одноосного сжатия-растяжения образца. При этом было найдено значение  $\nu = 0.48 \pm 0.07$ , однако данные /48/ находятся в хорошем согласии и со значением  $\nu$ , найденным в работе /47/.

В работах /49,50,54/ была найдена расхожимость диэлектрической проницаемости при подходе к точке перехода из диэлектрической фазы. Эта расхожимость хорошо описывается скейлинговой зависимостью типа:

$$\epsilon \approx \epsilon_c \left| \frac{n - n_c}{n_c} \right|^{-\zeta} \quad (I.29)$$

где для индекса  $\zeta$  с неплохой точностью (см. Таблицу I.1) выполняется соотношение  $\zeta \approx 2\nu$ .

К настоящему времени аналогичные результаты получены и для целого ряда других неупорядоченных систем, испытывающих переход металл-диэлектрик /55-60/. Главный вывод об отсутствии минимальной металлической проводимости, по-видимому, получает серьезное экспериментальное подтверждение.

В Таблице I.I мы суммируем имеющиеся экспериментальные данные по критическим индексам электропроводности ( $\nu$ ), радиуса локализации ( $\nu$ ) и диэлектрической проницаемости ( $\zeta$ ). Индекс  $\nu$  в металлической области получен из обработки данных по электропроводности (при  $T \rightarrow 0$ ) по формуле типа (I.26), в диэлектрической области он может быть найден из обработки данных по температурной зависимости прыжковой проводимости /8,57-58/. Нужно отметить не слишком высокую точность определения индексов в большинстве работ. Существенная неопределенность при этом может быть связана с неопределенностью размеров "критической" области, в которой "работают" скейлинговые формулы /50,51,60/. Нельзя исключить и возможность неуниверсального поведения, связанного, например, с различной ролью межэлектронного взаимодействия в разных системах.

Таблица I.I. Экспериментальные значения критических индексов для перехода металл-диэлектрик в различных неупорядоченных системах.

Ссылка	Система	$\nu$ (металл)	$\nu$ (диэлектрик)	$\zeta$ (диэлектрик)
47	Si : P	$0.55 \pm 0.1$		
48	Si : P	$0.48 \pm 0.07$		
49,50	Si : P	$0.55 \pm 0.1$		$1.15 \pm 0.15$
51	Si : P	$0.51 \pm 0.05$		$1.15 \pm 0.15$
54	Si : P			$1.09 \pm 0.1$
55	Si : As	$0.64 \begin{matrix} +0.20 \\ -0.15 \end{matrix}$		
56	Ge : Sb	$0.55 \div 1.0^1$		
57	Ge : As		$0.60 \pm 0.04^2$	$1.38 \pm 0.07$
58	Ge : As	$0.8 \pm 0.1$	$0.80 \pm 0.2$	$1.30 \pm 0.15$
59	$Nb_x Si_{1-x}$	$\sim 1$		
60	Hg - Xe	$0.6 \pm ?$		

<sup>1</sup>Индекс  $\nu$  в этой работе зависел от степени компенсации, что интерпретировалось как его зависимость от межэлектронного взаимодействия.

<sup>2</sup>Независимо от степени компенсации.



## 2. МЕТОД АНДЕРСОНА В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ.

### 2.1. Модель Андерсона.

Существует два альтернативных подхода к строгому обоснованию представлений теории локализации. Один из них (в котором, до недавнего времени, и были получены все основные утверждения теории) восходит к пионерской работе Андерсона /1/. Главной особенностью этого подхода является его известная нетрадиционность, связанная с рассмотрением неусредненных по ансамблю случайных конфигураций системы функций Грина электрона. В определенном смысле этот подход оперирует с наиболее вероятной функцией Грина /61, 62/. Это связано с тем, что усредненная одночастичная функция Грина, как хорошо известно /1, 6, 7, 61, 62/, не дает никакой информации о возможной локализации электронов. В тоже время, для изучения этого вопроса можно рассмотреть сходимость стохастического ряда теории возмущений для неусредненной одночастичной функции Грина /1, 61, 62/. Другой подход к теории локализации, восходящий к известной работе Эдвардса /17/, использует функции Грина, усредненные по ансамблю случайных конфигураций системы. Преимуществом этого подхода является его автоматизм (наличие удобной диаграммной техники). Усредненные функции Грина определяют, в принципе, все физические величины теории (чего нельзя сказать о наиболее вероятной функции Грина в подходе Андерсона), однако для изучения локализации (статической проводимости при  $T = 0$ ), необходимо найти усредненную двухчастичную функцию Грина электрона, что сразу же существенно усложняет задачу. В силу своей традиционности и удобства именно такой подход используется большинством теоретиков.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Эта двойственность подходов в теории неупорядоченных систем хорошо отражена в диалоге "автора" и "теоретика" в известном обзоре А.Л.Эфроса /7/.

В этой главе мы рассмотрим подход Андерсона. Гамильтониан модели Андерсона имеет вид /1/:

$$H = \sum_j E_j a_j^+ a_j + \sum_{ij} V_{ij} a_i^+ a_j \quad (2.1)$$

где  $a_j$  и  $a_j^+$  - соответственно обычные операторы уничтожения и рождения электрона на узле  $j$ . Уровни энергии  $E_j$  считаются распределенными независимо на разных узлах. Распределение на данном узле принимается обычно в виде:

$$P(E_j) = \begin{cases} \frac{1}{W} & ; \quad |E_j| < \frac{1}{2}W \\ 0 & ; \quad |E_j| > \frac{1}{2}W \end{cases} \quad (2.2)$$

т.е. считается однородным в некотором интервале энергий шириной  $W$ . Качественные результаты, по-видимому, не зависят от вида распределения  $P(E_j)$ , вместо (2.2) может фигурировать любое распределение с эффективной шириной  $W$ .

При изложении метода Андерсона в этом разделе мы будем, в основном, следовать работе Эконому и Коэна /63/. Предположим, что в начальный момент времени  $t=0$  электрон находится на узле  $i$  и описывается волновой функцией  $|i\rangle$ , являющейся собственной функцией первого слагаемого в гамильтониане (2.1). Для  $t>0$  волновая функция электрона представляет собой суперпозицию:

$$\psi(t) = \sum_i c_i(t) |i\rangle \quad (2.3)$$

Основной интерес представляет величина  $p_{ii} = \lim_{t \rightarrow \infty} |c_i(t)|^2$  - вероятность нахождения частицы в состоянии  $|i\rangle$  в момент времени  $t = \infty$ . Очевидно, что условие  $p_{ii} \neq 0$  означает наличие состояния, локализованного у узла  $i$  в течение всего времени на-

блюдения. Точнее, следует рассмотреть /1/ сглаженную по времени вероятность:

$$P_{ii} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{t}{T}} p_{ii}(t) \quad (2.4)$$

Характер электронных состояний определяется матричными элементами одноэлектронной функции Грина:

$$G_{ij}(E) = \langle i | \frac{1}{E - H} | j \rangle \quad (2.5)$$

удовлетворяющими уравнению:

$$[E - E_i] G_{ij}(E) - \sum_k V_{ik} G_{kj}(E) = \delta_{ij} \quad (2.6)$$

В частности, имеем (при  $t=0$   $C_i(0)=1$ ):

$$C_i(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} G_{ii}(E) \quad (2.7)$$

Прямыми вычислениями нетрудно показать, что /63/:

$$P_{ii} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE G_{ii}(E+i\delta) G_{ii}(E-i\delta) \quad (2.8)$$

Аналогично, учитывая физический смысл функции Грина  $G_{ij}(t)$ , как амплитуды вероятности перехода  $i \rightarrow j$  за время  $t$ , можно ввести вероятность перехода  $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} |G_{ij}(t)|^2$  и сглаженную вероятность перехода ( $G_{ij}^*(E+i\delta) = G_{ji}(E-i\delta)$ ):

$$P_{ij} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE G_{ij}(E+i\delta) G_{ji}(E-i\delta) \quad (2.9)$$

Соотношение (2.8) можно переписать в виде:

$$P_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} dE f_i(E) \quad (2.10)$$

где:

$$f_i(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\pi} G_{ii}(E+i\delta) G_{ii}(E-i\delta) \quad (2.11)$$

- неотрицательная величина, о которой можно говорить как о вероятности локализации электрона ( на узле  $i$  ) с данной энергией  $E$  .  
Отличие (2.11) от нуля составляет содержание критерия локализации по Эконому и Коэну /63/.

Одноэлектронная функция Грина может быть представлена в виде:

$$G_{ii}(E) = \frac{1}{E - E_i - \Delta_i(E)} \quad (2.12)$$

где  $\Delta_i(E)$  - собственно-энергетическая часть, учитывающая влияние амплитуды перехода  $V_{ij}$  в (2.1). Нетрудно видеть, что:

$$\begin{aligned} f_i(E) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{2i\delta - [\Delta_i(E+i\delta) - \Delta_i(E-i\delta)]} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{E-i\delta - E_i - \Delta_i(E-i\delta)} - \frac{1}{E+i\delta - E_i - \Delta_i(E+i\delta)} \right\} \quad (2.13) \\ &= \pi_i(E) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2i\delta} [\Delta_i(E+i\delta) - \Delta_i(E-i\delta)]} \end{aligned}$$

где ввели "узельную" плотность состояний:

$$\pi_i(E) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Im} G_{ii}(E-i\delta) \quad (2.14)$$

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях возможно выполнение требования  $f_i(E) \neq 0$  . Прежде всего, должно выполняться условие  $\pi_i(E) \neq 0$  , которое просто означает существование собственных состояний, отвечающих энергии  $E$  и перекрывающихся с узлом  $i$  .  
Кроме того нужно потребовать, чтобы:

$$Z_i(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2i\delta} [\Delta_i(E+i\delta) - \Delta_i(E-i\delta)]} \neq 0 \quad (2.15)$$

Для распространенных (делокализованных) состояний, очевидно, имеем

$\pi_i(E) \neq 0$ , однако  $f_i(E) = 0$  в силу  $Z_i(E) = 0$ , что связано с наличием у  $G_{ii}(E)$  разреза вдоль вещественной оси:  $\Delta_i(E+i\delta) \neq \Delta_i(E-i\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Отсюда ясно, что для локализованных состояний должно быть  $Z_i(E) \neq 0$ , что возможно лишь в том случае, когда  $\Delta_i(E)$  аналитична в точке  $E$  вещественной оси:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_i(E+i\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_i(E-i\delta); \Delta_i(E+i\delta) - \Delta_i(E-i\delta) \sim O(\delta).$$

Особенности  $G_{ii}(E)$  (и  $\Delta_i(E)$ ) на вещественной оси  $E$  представляют собой или простые полюса (соответствующие локализованным состояниям) или разрезы (соответствующие распространённым состояниям) /63/. При этом полюса  $G_{ii}(E)$  и  $\Delta_i(E)$  не могут совпадать, т.к. полюс  $\Delta_i(E)$ , очевидно, является нулем  $G_{ii}(E)$ . (Такой полюс физически неинтересен:  $G_{ii}(E) = 0$  влечет  $\pi_i(E) = 0$ ). С другой стороны очевидно, что разрезы (ветвления)  $G_{ii}(E)$  и  $\Delta_i(E)$  совпадают всегда (ср. (2.12)). Отсюда приходим к центральному выводу: состояние с энергией  $E$ , перекрывающееся с узлом  $i$ , локализовано тогда и только тогда, когда собственно-энергетическая часть  $\Delta_i(E)$  аналитична в точке  $E$  вещественной оси энергий /63/.

Рассмотрим теорию возмущений по амплитуде перехода  $V_{ij}$  в (2.1), которую будем считать отличной от нуля только для переходов между ближайшими соседями. Тогда для собственно-энергетической части  $\Delta_i(E)$  можно написать разложение вида:

$$\Delta_i(E) = \sum_{\ell} V_{i\ell} \frac{1}{E - E_{\ell}} V_{\ell i} + \sum_{\ell\ell'} V_{i\ell} \frac{1}{E - E_{\ell}} V_{\ell\ell'} \frac{1}{E - E_{\ell'}} V_{\ell' i} + \dots (2.16)$$

Каждому члену разложения (2.16) можно сопоставить определенный путь на решетке, начинающийся и заканчивающийся в узле  $i$ : каждому узлу  $\ell$ , через который проходит этот путь, сопоставляется фактор  $\frac{1}{E - E_{\ell}}$ , а каждому шагу от узла  $\ell$  к одному из его ближайших соседей  $\ell'$  сопоставляется фактор  $V_{\ell\ell'}$  (Рис. 2.1(a)). В (2.16) возможно многократное повторение одного и того же узла, т.е. на-

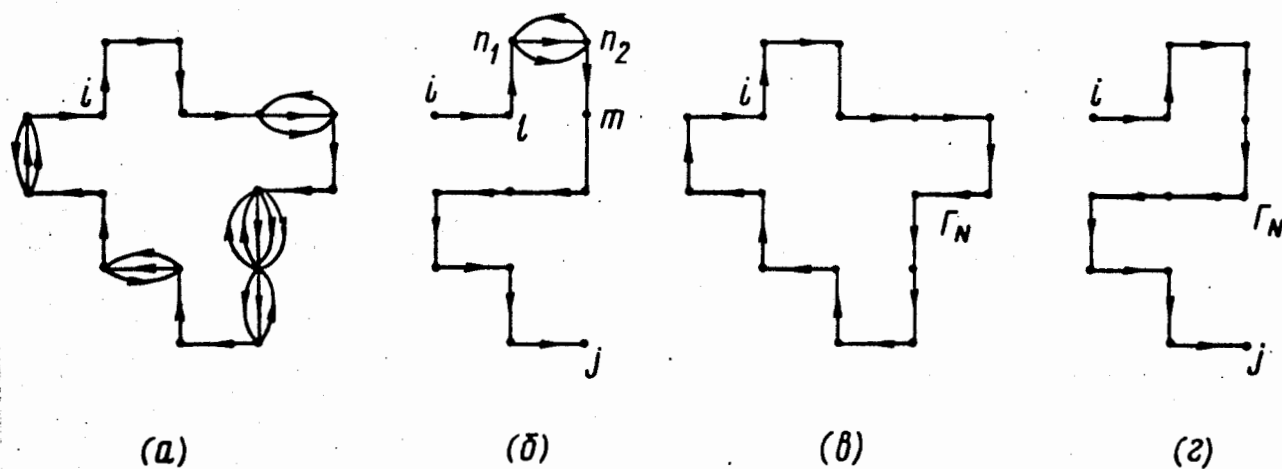


Рис.2.1. Графическое представление типичных членов ряда теории возмущений для собственно-энергетической части  $\Delta_i(E)$  (а) и функции Грина  $G_{ij}(E)$  (б). Пути без пересечения, сопоставляемые соответствующим вкладом в ряды перенормированной теории возмущений для  $\Delta_i(E)$  (в) и для  $G_{ij}(E)$  (г).

личные вклады типа:

$$V_{il} \frac{1}{E - E_l} \dots V_{mj} \frac{1}{E - E_j} V_{jk} \frac{1}{E - E_k} V_{kj} \frac{1}{E - E_j} \times$$

$$\times V_{jk} \frac{1}{E - E_k} V_{kl''} \dots \frac{1}{E - E_{l'}} V_{l'i}$$
(2.17)

При этом, многократно повторяющиеся знаменатели  $E - E_j$  и  $E - E_k$  могут случайно ( $E_j, E_k$  - случайные величины!) оказаться малыми и их повторение приведет к расходимости ряда для  $\Delta_i(E)$ . Эта расходимость не имеет отношения к проблеме локализации /1/ и может быть устранена введением перенормированного ряда теории возмущений для  $\Delta_i(E)$  /1, 63, 64/.

Аналогичным образом можно представить разложение теории возмущений и для функции Грина  $G_{ij}(E)$ :

$$G_{ij}(E) = \delta_{ij} \frac{1}{E - E_i} + \frac{1}{E - E_i} V_{ij} \frac{1}{E - E_j} +$$

$$+ \frac{1}{E - E_i} \sum_l V_{il} \frac{1}{E - E_l} V_{lj} \frac{1}{E - E_j} + \quad (2.18)$$

$$+ \frac{1}{E - E_i} \sum_{ll'} V_{il} \frac{1}{E - E_l} V_{ll'} \frac{1}{E - E_{l'}} V_{l'j} \frac{1}{E - E_j} + \dots$$

Каждому члену этого разложения также сопоставляется путь на решетке, начинающийся в узле  $i$  и заканчивающийся в узле  $j$  (Рис.2.1(б))

Здесь тоже возникает проблема повторяющихся узлов. Для ее решения рассмотрим, например, участок пути от узла  $l$  до узла  $m$  на Рис.2.1(б). Очевидно, ему соответствует вклад:

$$G_l^0 V_{ln_1} G_{n_1}^0 V_{n_1 n_2} G_{n_2}^0 V_{n_2 n_1} G_{n_1}^0 V_{n_1 n_2} G_{n_2}^0 V_{n_2 m} G_m^0 \quad (2.19)$$

где, для краткости, ввели обозначение:

$$G_l^0(E) = \frac{1}{E - E_l} \quad (2.20)$$

для затравочной (нулевой) функции Грина. Наиболее общий путь, стартующий с узла  $l$  и заканчивающийся в узле  $m$ , может быть составлен путем "декорирования" некоторого "скелетного" пути (терминология и последующие рассуждения заимствованы из /64/). Скелетный путь, очевидно, задается путем без самопересечений на решетке, связывающим узлы  $l$  и  $m$ . "Декорации" состоят из замкнутых путей, начинающихся и заканчивающихся на узлах скелетного пути. Для скелетного пути, представленного на Рис.2.1(б) путем без пересечений из  $l$  в  $m$  ( $l \rightarrow n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow m$ ), на этом рисунке показана одна декорация  $n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow n_1$ , связанная с узлом  $n_1$ . Также самая декорация может быть связана и с узлом  $n_2$  ( $n_2 \rightarrow n_1 \rightarrow n_2$ ) и нужно проявить осторожность, чтобы избежать двойного учета графов такого типа. Теперь мы можем перейти к выполнению частичного суммирования графов, приводящего к построению упомянутой выше перенормированной теории возмущений /1,64/. Для этого рассмотрим множество всех путей, отличающихся только декорациями, связанными, например, с узлом  $l$ . Вклад всех таких путей представляется в виде:

$$V G_l^0 \dots V G_j^0 \sum_l \quad (2.21)$$

где  $\sum_l$  - сумма всех декораций, связанных с узлом  $l$ , т.е. сумма вкладов всевозможных путей, начинающихся и заканчивающихся в узле  $l$ , которая, очевидно, равна полной функции Грина  $G_{ll}(E)$ . Таким образом, можно опустить все декорации, связанные с узлом  $l$ , если одновременно заменить  $G_l^0$ , связанную с узлом  $l$ , на полную функцию Грина  $G_{ll}$ . Это же справедливо для следующего (вдоль пути) узла  $n_1$ , однако с одним отличием: нужно опустить те из декораций, связанных с узлом  $n_1$ , которые хотя-бы один раз



проходят через узел  $\ell$ , предшествующий  $n_1$ : они уже учтены в декорациях, связанных с узлом  $\ell$ ! Поэтому все декорации, связанные с узлом  $n_1$  заменяются на  $G_{n_1 n_1}^\ell$ , где верхний индекс означает, что при вычислении  $G_{n_1 n_1}^\ell$  нужно исключить пути, проходящие через узел  $\ell$ , что может быть обеспечено автоматически, если положить при этом вычислении  $E_\ell = \infty$ . Аналогично, все декорации, связанные со следующим узлом  $n_2$  можно опустить, заменяя  $G_{n_2}^0$  на полную функцию Грина  $G_{n_2 n_2}^{ln_1}$ , которая вычисляется с помощью такого же разложения теории возмущений, но соответствующего гамильтониану (2.1), в котором  $E_\ell = E_{n_2} = \infty$ . Таким образом удается избежать двойного учета декораций при переходе от узла к узлу.

В результате описанного пересуммирования, собственно-энергетическая часть  $\Delta_i(E)$  представляется в виде /I/ (Рис.2.1(в)):

$$\Delta_i(E) = \sum_{k \neq i} V_{ik} \frac{1}{E - E_k - \Delta_k^i(E)} V_{ki} + \quad (2.22)$$

$$+ \sum_{k \neq i, \ell \neq ik} V_{i\ell} \frac{1}{E - E_\ell - \Delta_\ell^i(E)} V_{\ell k} \frac{1}{E - E_k - \Delta_k^{\ell i}(E)} V_{ki} + \dots$$

где  $\Delta_k^{ijl\dots}(E)$  выражаются аналогичными рядами, но для задачи (2.1) с  $E_i = E_j = E_\ell = \dots = \infty$ ! Аналогично, для недиагонального по узлам элемента функции Грина  $G_{ij}(E)$  ( $i \neq j$ ) имеем (Рис.2.1(г)):

$$G_{ij}(E) = F_{ij}(E) G_{jj}(E) \quad (2.23)$$

где ("начальным" считаем узел  $j$ ):

$$F_{ij}(E) = \frac{1}{E - E_i - \Delta_i^j(E)} V_{ij} + \quad (2.24)$$

$$+ \sum_{\ell \neq i, j} \frac{1}{E - E_i - \Delta_i^{\ell j}(E)} V_{i\ell} \frac{1}{E - E_\ell - \Delta_\ell^j(E)} V_{\ell j} + \dots$$

$G_{jj}(E)$  - полная функция Грина, связанная с узлом  $j$ . Суммирование в (2.22) и (2.24) уже идет вдоль всевозможных путей без пересечений  $\Gamma_N$  (из  $N$  шагов в  $N$ -м порядке по  $V$ ) на данной решетке (Рис. 2.1(в, г)).

Выше мы видели, что локализация эквивалентна требованию аналитичности  $\Delta_i(E)$  в соответствующей точке на вещественной оси энергий. Если  $E$  лежит на разрезе (распространенные состояния), то члены перенормированного ряда теории возмущений (2.22) не определены (определены лишь пределы  $\Delta_i(E+i\delta) \neq \Delta_i(E-i\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ ). Ряд для  $\Delta_i(E)$ , таким образом, сходится лишь в том случае, когда  $E$  не принадлежит разрезу. Пусть данное значение  $E$  не принадлежит разрезу. Тогда сингулярности  $\Delta_i(E)$  могут быть только полюсами (соответственно, в этих точках оси энергий  $G_{ii}(E) = 0$ ), в остальных точках, не принадлежащих разрезу, ряд (2.22) сходится, причем сходится /63/ к действительному числу, так что функция Грина представляется в виде:

$$G_{ii}(E) \approx \frac{A_i}{E - \mathcal{E}_i(E)} \quad (2.25)$$

где  $\mathcal{E}_i(E) \in \text{Re}$ , а условие  $E - \mathcal{E}_i(E) = 0$  определяет простой полюс  $G_{ii}(E)$ , т.е. энергию локализованного состояния  $E = \mathcal{E}_i$ . Можно показать /63/, что  $\text{Im} \Delta_i(E) \neq 0$  (для  $E$  не принадлежащих разрезу) на дискретном наборе точек действительной оси, совпадающих с нулями  $G_{ii}(E)$ , где возникают соответствующие  $\delta$ -функциональные сингулярности. Для распространённых состояний ( $E$  принадлежит разрезу)  $\text{Im} \Delta_i(E)$  представляет собой непрерывную функцию  $E$ . Это различие в поведении  $\text{Im} \Delta_i(E)$  для локализованных и делокализованных состояний полностью "стирается" при усреднении по случайным конфигурациям /61, 63/.

Таким образом, критерий локализации, фактически, сводится к

условию сходимости перенормированного ряда теории возмущений (2.22) для  $\Delta_i(E)$  /1/. Вещественная ось  $E$ , при этом, разбивается на области, в которых ряд сходится или расходится, и соответствующие локализованным или делокализованным состояниям.

Исследование сходимости ряда (2.22) представляет собой чрезвычайно сложную математическую задачу. Ввиду случайного характера энергий  $E_i$  на узлах, все члены ряда являются случайными функциями  $E_i$ . Исследование сходимости такого ряда нужно проводить в смысле сходимости по вероятности /1,63/. Ряд (2.22) сходится по вероятности, если абсолютная величина  $N$ -го члена ряда  $|\Delta_i^{(N)}(E)|$  ограничена сверху  $N$ -м членом сходящейся геометрической прогрессии с вероятностью, стремящейся к единице при  $N \rightarrow \infty$  /63/:

$$\text{Prob} \left\{ |\Delta_i^{(N)}(E)| < F^N \right\} \rightarrow 1 ; N \rightarrow \infty ; F < 1 \quad (2.26)$$

Отсюда видно, что исследование вопроса о сходимости (2.22) подразумевает нахождение функции распределения произвольного члена ряда и поиск его наиболее вероятного (а не среднего !) значения /1/, так что можно говорить об изучении наиболее вероятной одноэлектронной функции Грина /61,62/, как носителя информации о локализации. Положение усложняется тем, что в каждое из слагаемых ряда (2.22) входят неизвестные собственно-энергетические части  $\Delta_i^{jkl\dots}(E)$ , каждая из которых определяется бесконечным стохастическим рядом типа (2.22). Таким образом, речь идет об исследовании сходимости по вероятности бесконечного числа бесконечных рядов. Ясно, что такая задача неразрешима. Поэтому, в большинстве работ по теории локализации в рамках подхода Андерсона использовались различные приближенные методы исследования сходимости (2.22), в которых эта трудность обходилась с помощью тех или иных простых предположений о поведении знаменателей /1,6,63,65/. Именно к этому сводилась

значительная часть теоретических работ, посвященных проблеме локализации, появившихся в период до 1975 года. Хорошее резюме различных приближений можно найти в работе /65/. Все они приводят к одним и тем же качественным результатам, несколько изменяются лишь численные значения для критического отношения  $(W/V)_c$ , при котором происходит полная локализация всех состояний в зоне (и, соответственно, положения порогов подвижности в зоне при  $(W/V) < (W/V)_c$ ).

Поэтому, для дальнейшего обсуждения, мы принимаем наиболее простой подход. Рассмотрим в (2.22) модуль члена  $N+1$ -го порядка по  $V$  :

$$|\Delta_i^{(N)}(E)| = V \left| \sum_{\Gamma_N^i} T_{\Gamma_N^i}(E) \right| \quad (2.27)$$

где:

$$T_{\Gamma_N^i}(E) = V^N G_{j_1 j_1}^i(E) G_{j_2 j_2}^{i j_1}(E) \dots G_{j_N j_N}^{i \dots j_{N-1}}(E) \quad (2.28)$$

-вклад одного из путей без пересечений  $\Gamma_N^i$  из  $N$  шагов, начинающегося и оканчивающегося в узле  $i$  (Рис.2.1(в)), причем введены очевидные обозначения для функций Грина, входящих в разложение типа (2.22). Суммирование в (2.27) идет по всем путям  $\Gamma_N^i$  (индексы  $j_1 \dots j_N$  пробегает вдоль данного  $\Gamma_N^i$ ). В работе /63/ были приведены аргументы в пользу того, что относительные знаки  $T_{\Gamma_N^i}(E)$  в (2.27) не могут быть случайными. В /1/ использовалось противоположное допущение. По-видимому, конечные результаты не очень чувствительны к предположениям такого рода. В случае сильной корреляции знаков, в /63/ было показано, что при  $N \rightarrow \infty$ , с вероятностью, стремящейся к единице:

$$|\Delta_i^{(N)}(E)| = V \left| \sum_{\Gamma_N^i} V^N \tilde{G}_{j_1 j_1}^i(E) \tilde{G}_{j_2 j_2}^{i j_1}(E) \dots \tilde{G}_{j_N j_N}^{i \dots j_{N-1}}(E) \right| \quad (2.29)$$

где определено:

$$\ln \tilde{G}_{kk}^{ij\dots l}(E) = \left\langle \ln \left| \frac{1}{E - E_k - \Delta_k^{ij\dots l}(E)} \right| \right\rangle \quad (2.30)$$

причем угловые скобки обозначают усреднение по распределению энергий на узлах, задаваемому произведением функций распределения (2.2).

Определим тогда функцию локализации /63/ с помощью предела:

$$L(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} V \left\{ \left| \sum_{\Gamma_N^i} \tilde{G}_{j_1 j_1}^i(E) \tilde{G}_{j_2 j_2}^{i j_1}(E) \dots \tilde{G}_{j_N j_N}^{i \dots j_{N-1}}(E) \right| \right\}^{\frac{1}{N}} \quad (2.31)$$

Тогда при  $L(E) > 1$  ряд (2.22) расходится (состояния с соответствующей  $E$  делокализваны), а при  $L(E) < 1$  - сходится (состояния с энергией  $E$  локализованы). Положение порогов подвижности в зоне определяется условием  $L(E_c) = 1$ .

Выражение (2.31) все еще слишком сложно для проведения конкретных вычислений, что связано с необходимостью учета вкладов  $\Delta_k^{ij\dots l}(E)$  в знаменателях. Наиболее совершенным из известных приближений является, по-видимому, методика работы /65/, в которой произведение  $\tilde{G}_{j_1 j_1}^i \dots \tilde{G}_{j_N j_N}^{i \dots j_{N-1}}$  в (2.32) заменялось на  $(\tilde{G}_{jj}^i)^N$ , причем  $\tilde{G}_{jj}^i$  рассчитывалась с помощью приближения когерентного потенциала. Мы же воспользуемся гораздо более простым (и грубым!) приближением Займана /66/, которое эквивалентно полному пренебрежению вкладом величин  $\Delta_k^{ij\dots l}(E)$  при вычислении (2.30), (2.31). Основным достоинством этого приближения является возможность проведения всех расчетов в аналитическом виде. Мы имеем:

$$\tilde{G}_{kk}^{ij\dots l}(E) \approx \exp \left\{ - \langle \ln |E - E_k| \rangle \right\} \quad (2.32)$$

так, что из (2.29)-(2.31) получаем:

$$L^N(E) \approx V^N U_N \exp \left\{ -N \langle \ln |E - E_k| \rangle \right\} \quad (2.33)$$

где  $U_N$  - число замкнутых путей без пересечений из  $N$  шагов ( $N \rightarrow \infty$ ) на решетке, начинающихся и заканчивающихся в заданном узле. Воспользуемся определением константы связности  $K$  решетки /67/:

$$\ln K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N \quad (2.34)$$

где  $Z_N$  - число всех путей без пересечений из  $N$  шагов, относящихся к данному узлу. Видно, что при  $N \rightarrow \infty$   $Z_N \sim K^N$ . Это же (в смысле пропорциональности) справедливо и для  $U_N$ :  $U_N \sim K^N$  - замкнутые пути без пересечений составляют (при  $N \rightarrow \infty$ ) конечную долю полного числа таких путей  $Z_N$  /67/. Тогда из (2.33) получаем функцию локализации в виде:

$$L\left(E, \frac{W}{V}\right) \approx \alpha K \exp F\left(E, \frac{W}{V}\right) \quad (2.35)$$

где (с использованием (2,2)):

$$F\left(E, \frac{W}{V}\right) = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{+W/2} dE_k \ln \left| \frac{V}{E - E_k} \right| = \quad (2.36)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{2E}{W}\right) \ln \left| \frac{W}{2V} + \frac{E}{V} \right| + \left(1 - \frac{2E}{W}\right) \ln \left| \frac{W}{2V} - \frac{E}{V} \right| \right\}$$

Здесь введен поправочный множитель  $\alpha = Z/K$  ( $Z$  - число ближайших соседей в данной решетке) /63/, позволяющий правильно описать предел регулярной решетки ( $W = 0$ ). Необходимость введения такого множителя отражает грубость использованных приближений, только с его учетом из (2.35) следует  $L(E) \geq 1$  при  $|E| < ZV$  для  $W = 0$ , так что воспроизводится правильная ширина зоны де-локализованных (блоховских) состояний регулярной решетки. Положение порогов подвижности при заданном отношении  $W/V$  определяется из уравнения  $L\left(E_c, \frac{W}{V}\right) = 1$ . Условие  $L\left(0, \left(\frac{W}{V}\right)_c\right) = 1$

дает порог локализации в центре зоны, т.е. критический беспорядок  $(W/V)_c$ . Для  $W/V < (W/V)_c$  пороги подвижности находятся внутри зоны, но вблизи ее центра имеется область делокализованных состояний. Из (2.35) и (2.36) получаем результат Займана /66/:

$$\left(\frac{W}{V}\right)_c = 2eZ ; (e = 2.718...) \quad (2.37)$$

Значения (2.37) для разных решеток, вместе с соответствующими значениями  $Z$  и  $K$ , приведены в Таблице 2.1. Здесь же для сравнения приведены значения критического отношения  $(W/V)_c$ , полученные в работах /1,65/, а также результаты ряда работ, где локализация в модели Андерсона исследовалась численными методами /35-37,68-72/. Видно, что приближение Займана (2.37) /66/ дает завышенное значение  $(W/V)_c$  для всех решеток (также, как и приближение Андерсона /1/). В тоже время, рассмотрение Личчиарделло-Эконому /65/ дает вполне удовлетворительное согласие с результатами, полученными численными методами /35-37,68-72/. Отсюда следует качественный вывод о том, что корректный учет вкладов  $\Delta_i^{jk\dots l}(E)$  при вычислении функции локализации  $L(E)$ , т.е. фактически процессов многократного рассеяния "с возвратом" (ср. Рис. 2.1(a)), способствует проявлению локализации, понижая критическое отношение  $(W/V)_c$ . Известно, что точный учет этих процессов, который можно провести, ограничиваясь лишь членами второго порядка по  $V$  в (2.22), также приводит к реализации перехода Андерсона (точное решение на решетке Бете) /6,73,74/.

Рассмотренные выше методы анализа локализации в модели Андерсона приводят к существованию порогов подвижности и для двумерных систем, вопреки излагавшимся выше в Главе I представлениям элементарной скейлинговой теории локализации. По-видимому, это связано с недостаточно корректным учетом в этих подходах процессов многократного рассеяния с "возвратом", приводящих к появлению вкладов

Таблица 2.1. Значения критического беспорядка  $\left(\frac{W}{V}\right)_c$ , приводящего к локализации всех состояний в зоне, для различных решеток, полученные разными методами для модели Андерсона.

$Z$  - число ближайших соседей,  $K$  - константа связности решетки.

Решетка	$Z$	$K$	Критический беспорядок $\left(\frac{W}{V}\right)_c$						
			Аналитическое рассмотрение	Численный анализ					
			(2.37)/66/	/1/	/65/	/35-37/	/68-69/	/70/	/71-72/
Треугольная	6	4.1515	32.62			9.4			
Квадратная	4	2.6390	21.75	28	7.2	6.1	$6.5 \pm 0.5$	$\sim 6$	Полная I локализ.
Алмаз	4	2.878	21.75	32	8.2	$\sim 8$	$8 \pm 0.5$		
ПК	6	4.6826	32.62	62	14.5			15	$16 \pm 0.5$
ОЦК	8	6.5288	43.49						
ГЦК	12	10.035	65.24						

I В работах /71, 72/ получены численные свидетельства в пользу полной локализации всех состояний в зоне двумерной решетки Андерсона при сколь угодно слабом беспорядке.



$\Delta_i^{jk\dots l}(E)$  в знаменателях ряда (2.22). Эта проблема в подходе Андерсона не решена до сих пор. Аналогичным образом, в большинстве численных расчетов /6, 10, 33-37, 68-70/ также демонстрируется возникновение порогов подвижности в двумерном случае, хотя здесь это, по-видимому, связано с трудностью получения тонких эффектов слабой двумерной локализации на фоне сравнительно больших ошибок численного счета. Некоторое подтверждение высказанной выше точки зрения о том, что полная двумерная локализация связана с учетом процессов многократного рассеяния, получено в недавних работах /75, 76/..

Численный расчет точной функции локализации  $L(E)$ , проведенный в /75/ для двумерных решеток без беспорядка, показал, что в пределах точности расчета  $L(E) = 1$ , так что введение сколь угодно слабого беспорядка приводит, по-видимому, к  $L(E) < 1$ , т.е. к полной локализации. Для трехмерных решеток это не так /76/ и аналогичные расчеты дают результаты, близкие к получающимся при использовании методов работ /63, 65/.

## 2.2. Модель случайных фаз.

До сравнительно недавнего времени подавляющее большинство работ по теории локализации было посвящено рассмотрению модели Андерсона с диагональным (узельным) беспорядком уровней электрона в решетке. Серьезному рассмотрению роли недиагонального беспорядка (интегралов переноса) посвящено лишь небольшое число работ (см. например /77/), которые сразу же привели к выводам о его необычной роли. В частности оказалось, что полная локализация в зоне за счет одного лишь беспорядка такого типа вообще невозможна, в центре зоны всегда остается "полоска" делокализованных состояний. В этом разделе мы рассмотрим, следуя работе автора /78/, явление локализации в специфической модели недиагонального беспорядка (модель случайных фаз), интересной отличительной чертой которой является наличие локальной калибровочной инвариантности. При этом мы используем подход Андерсона.

Пусть снова задан гамильтониан (2.1), причем диагональный беспорядок (2.2), вообще говоря, тоже имеется. Интегралы переноса опять будем считать отличными от нуля только между ближайшими соседями. Рассмотрим модель недиагонального беспорядка, в которой случайной является фаза интеграла переноса, а не его модуль (что рассматривалось в работе /77/). Таким образом, мы принимаем:

$$V_{ij} = V \exp(i\phi_{ij}) \equiv V U_{ij} \quad (2.38)$$

$$V_{ij} = V_{ji}^* ; \quad \phi_{ij} = -\phi_{ji}$$

где  $\phi_{ij}$  - случайная величина, распределение которой в решетке будет предполагаться факторизующимся по связям:

$$P\{\phi_{ij}\} = \prod_{\langle ij \rangle} P(\phi_{ij}) \quad (2.39)$$

а для  $P(\phi_{ij})$  будут рассмотрены различные случаи:

$$P(\phi_{ij}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \phi} \exp\left\{-\frac{\phi_{ij}^2}{2\phi^2}\right\} \quad (2.40)$$

$$P(\phi_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{\phi} ; & |\phi_{ij}| < \phi \\ 0 ; & |\phi_{ij}| > \phi \end{cases} \quad (2.41)$$

$$P(\phi_{ij}) = c \delta(\phi_{ij} - \pi) + (1-c) \delta(\phi_{ij}) ; \quad 0 < c < 1 \quad (2.42)$$

и т.п. Случай (2.42) соответствует случайному включению ( с концентрацией  $c$  ) "антиферромагнитных" связей:

$$V_{ij} = V A_{ij} \quad (2.43)$$

$$P(A_{ij}) = \begin{cases} c ; & A_{ij} = -1 \\ 1-c ; & A_{ij} = +1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Легко видеть, что гамильтониан Андерсона (2.1) обладает локальной калибровочной симметрией. Он инвариантен относительно преобразования следующего вида:

$$\begin{aligned} a_i^+ &\rightarrow \exp(i\phi_i) a_i \\ a_j &\rightarrow \exp(-i\phi_j) a_j \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$V_{ij} \rightarrow \exp(-i\phi_i) V_{ij} \exp(i\phi_j)$$

Это есть аналог локального калибровочного преобразования в теории полей Янга-Миллса на решетке /79/, которое в последнее время активно используется в теории случайных спиновых систем (спиновых стекол) /80,81/. Из такой инвариантности следует, как известно, ряд нетривиальных выводов для магнитных систем /80,81/, часть которых непосредственно переносится и на рассматриваемую модель.

В частности, если в (2.38):

$$\phi_{ij} = \alpha_i + \alpha_j \quad (2.46)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\alpha_j$  - случайные величины, то такой беспорядок тривиален и может быть устранен соответствующим локальным калибровочным преобразованием. Это распространяется и на случай (2.43), если  $A_{ij} = C_i C_j$ , причем  $C_i = \pm 1$  случайным образом по узлам (аналог так называемой модели Маттиса в теории спиновых стекол /80,81/). Интерес представляет нетривиальный (калибровочно-инвариантный) беспорядок, который определяется распределением так называемых фрустраций на рассматриваемой решетке /80,81/. Определение фрустрации /80/ (или угла фрустрации /81/) может быть дано в рассматриваемой электронной модели вполне аналогично тому, как это делается в теории случайных спиновых систем.

Переходя к рассмотрению электронных функций Грина в решетке Андерсона заметим, что одноэлектронная функция Грина:

$$G_{ij}(E) = \langle i | \frac{1}{E - H} | j \rangle = \langle 0 | a_i \frac{1}{E - H} a_j^+ | 0 \rangle \quad (2.47)$$

не является калибровочно-инвариантной. При выполнении (2.45) она преобразуется как:

$$G_{ij}(E) \rightarrow G_{ij}(E) \exp [i(\phi_i - \phi_j)] \quad (2.48)$$

Калибровочно инвариантен лишь ее диагональный по узлам элемент  $G_{ii}(E)$ , который и используется при изучении локализации в подходе Андерсона (переход Андерсона, естественно, калибровочно-инвариантное явление).

По аналогии с задачей о спиновом стекле /81/ можно ввести калибровочно-инвариантные "функции Грина":

$$y_{ij}^{\Gamma}(E) = \langle 0 | a_i \frac{1}{E - H} \prod_{\Gamma} U_{kl} a_j^+ | 0 \rangle \quad (2.49)$$

где  $\prod_{\Gamma} U_{kl}$  определяет произведение элементов  $U_{kl}$  из (2.38) (или  $\prod_{\Gamma} A_{kl}$  из (2.43)) вдоль произвольного пути  $\Gamma$  на решетке, связывающего узлы  $i$  и  $j$ . Достоинством "функции Грина" (2.49) является ее калибровочная инвариантность, что, возможно, делает ее полезной для изучения локализации в рассматриваемой модели, а ее недостатком является явная зависимость от пути  $\Gamma$ . В тоже время стандартный подход Андерсона оказывается вполне приспособленным для рассмотрения локализации и в модели случайных фаз, ввиду локальной калибровочной инвариантности  $G_{ii}^i(E)$  и собственно-энергетической части  $\Delta_i(E)$ .

Следуя методу Андерсона, мы исследуем сходимость перенормированного ряда теории возмущений для  $\Delta_i(E)$ , определенного выше в (2.22). Рассматривая в нем опять модуль члена  $N+1$ -го порядка по  $V_{ij}$ , получим, что в данной модели, (2.29) обобщается следующим образом:

$$|\Delta_i^{(N)}(E)| = VL^N(E) \approx V \left| \sum_{\Gamma_N^i} V \exp(i\phi_{ij}) \tilde{G}_{jj}^i(E) \times \right. \\ \left. \times V \exp(i\phi_{jk}) \tilde{G}_{kk}^{ij}(E) \dots V \exp(i\phi_{li}) \right| \quad (2.50)$$

где  $\tilde{G}_{kk}^{ij\dots l}(E)$  определяются по (2.30), т.е. как некоторые средние по диагональному беспорядку. Величина  $L^N(E)$ , очевидно, калибровочно-инвариантна, что связано с замкнутостью путей  $\Gamma_N^i$  на решетке. Воспользуемся опять приближением Займана (2.32), тогда (2.50) дает:

$$L^N(E) \approx V^N \left| \sum_{\Gamma_N^i} \exp(i\phi_{\Gamma_N^i}) \right| \exp\{-N \langle \ln |E - E_k| \rangle\} \quad (2.51)$$

где:

$$\phi_{\Gamma_N^i} = \phi_{ij} + \phi_{jk} + \dots + \phi_{li} \quad (2.52)$$

- "набег" фазы вдоль пути  $\Gamma_N^i$ . В (2.52) имеется всего  $N$

слагаемых,  $\sum_{\Gamma_N}^i$  в (2.51) содержит  $\sim K^N$  слагаемых ( $K$  - константа связности решетки). Рассмотрим сумму:

$$X_N = \sum_{\Gamma_N} \exp(i\phi_{\Gamma_N}) \quad (2.53)$$

Если все фазы в (2.53) равны нулю (или фиксированы), то, очевидно  $|X_N| \sim K^N$  и из (2.51) следует обычный результат (2.33)-(2.36). В модели случайных фаз  $|X_N|$  представляет собой длину пути, проходящего на плоскости при случайном блуждании за счет  $\sim K^N$  шагов единичной длины. Наиболее существенный эффект достигается при полнотью случайных фазах, когда  $\phi_{ij}$  распределены по (2.41), причем  $\phi = 2\pi n$  ( $n=1,2,\dots$ ). Тогда мы имеем дело с броуновским движением на плоскости, а  $|X_N|$  распределена по Рэлею [82, 83]:

$$P(|X_N|) = \frac{2|X_N|}{K^N} \exp\left\{-\frac{|X_N|^2}{K^N}\right\} \quad (2.54)$$

так что

$$\langle |X_N|^2 \rangle = K^N \quad (2.55)$$

Наиболее вероятное значение  $|X_N| \sim \langle |X_N|^2 \rangle^{1/2} \sim K^{N/2}$ . Тогда имеем:

$$L^N(E) \approx V^{N+1} K^{N/2} \exp\left\{-N \langle \ln |E - E_k| \rangle\right\} \quad (2.56)$$

$$L(E) \approx \alpha K^{1/2} \exp F\left(E, \frac{W}{V}\right)$$

где обозначения те же, что и в (2.35), (2.36). Поправочный множитель  $\alpha = \frac{Z}{K}$  снова вводится для того, чтобы правильно воспроизвести ширину исходной зоны в отсутствие беспорядка. Из (2.56) видно, что стохастизация фаз приводит к уменьшению эффективной константы связности решетки. Соответственно, условие полной локализации (аналогичное (2.37)) при полной случайности фаз имеет вид:

$$\left(\frac{W}{V}\right)_c^{RPM} = 2e\alpha K^{1/2} = 2eZ K^{-1/2} \quad (e = 2.718\dots) \quad (2.57)$$

Очевидно, что  $\left(\frac{W}{V}\right)_c^{RPM} < \left(\frac{W}{V}\right)_c$ , так что условие локализации

"облегчается" по сравнению с (2.37).

В отсутствие диагонального беспорядка  $E_k = E_0$  для всех  $k$ . Тогда в отсутствие и недиагонального беспорядка имеем /63/:

$$L(E) = \alpha K \frac{V}{|E - E_0|} = Z \frac{V}{|E - E_0|} \quad (2.58)$$

а при полной хаотичности фаз /78/:

$$L(E) = \alpha K^{1/2} \frac{V}{|E - E_0|} = \frac{Z}{K^{1/2}} \frac{V}{|E - E_0|} \quad (2.59)$$

Тогда из условия  $L(E) \geq 1$  получаем ширину зоны делокализованных состояний в модели полностью хаотических фаз:

$$B_{\text{ext}}^{\text{RPM}} = K^{-1/2} B \quad (2.60)$$

где  $B = 2ZV$  - обычная ширина зоны в регулярном случае. Таким образом, при отсутствии диагонального беспорядка полная локализация во всей зоне невозможна, всегда остается область делокализованных состояний шириной  $B_{\text{ext}}^{\text{RPM}}$  вокруг центра зоны. Используя Таблицу 2.1 видим, что фазовый беспорядок во всех случаях может локализовать от  $1/3$  до  $2/3$  исходной зоны. Это предсказание работы /78/ было впоследствии подтверждено при численном моделировании задачи случайных фаз, предпринятом в работе /84/.

Очевидно, что в общем случае не полностью хаотических фаз мы имеем  $K^{N/2} < |X_N| < K^N$ . Задача вычисления статистического распределения сумм типа (2.53) подробно исследовалась в связи с различными проблемами статистической радиотехники /82, 83, 85/. Это распределение может быть сравнительно легко найдено, если распределение величин  $\phi_{r_N}$  таково, что выполняется центральная предельная теорема. В этом случае получаем так называемое распределение Накагами /85/:

$$P(|X_N|) = \frac{|X_N| e^{-S}}{(s_1 s_2)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m I_m(\rho) I_{2m}(\sqrt{Q^2 + R^2}) \cos\left\{2m \arctg \frac{R}{Q}\right\} \quad (2.61)$$

Здесь  $I_m(x)$  - модифицированная функция Бесселя порядка  $m$ ,  $\varepsilon_0=1$ ,  $\varepsilon_m=2$  при  $m \neq 0$ ,

$$S = \frac{s_1 + s_2}{4s_1 s_2} |X_N|^2 + \frac{\alpha^2}{2s_1} + \frac{\beta^2}{2s_2} \quad (2.62)$$

$$\rho = \frac{s_1 - s_2}{4s_1 s_2} |X_N|^2; \quad Q = \frac{\alpha}{s_1} |X_N|; \quad R = \frac{\beta}{s_2} |X_N|$$

$$\alpha = \sum_{\Gamma_N} \int d\phi_{\Gamma_N} P(\phi_{\Gamma_N}) \cos \phi_{\Gamma_N} \equiv \sum_{\Gamma_N} \alpha_{\Gamma_N} \quad (2.63)$$

$$\beta = \sum_{\Gamma_N} \int d\phi_{\Gamma_N} P(\phi_{\Gamma_N}) \sin \phi_{\Gamma_N} \equiv \sum_{\Gamma_N} \beta_{\Gamma_N}$$

$$s_1 = \sum_{\Gamma_N} \int d\phi_{\Gamma_N} P(\phi_{\Gamma_N}) \cos^2 \phi_{\Gamma_N} - \sum_{\Gamma_N} \alpha_{\Gamma_N}^2$$

$$s_2 = \sum_{\Gamma_N} \int d\phi_{\Gamma_N} P(\phi_{\Gamma_N}) \sin^2 \phi_{\Gamma_N} - \sum_{\Gamma_N} \beta_{\Gamma_N}^2$$

где  $P(\phi_{\Gamma_N})$  - функция распределения  $\phi_{\Gamma_N}$ . Нетрудно показать /85/, что:

$$\langle |X_N|^2 \rangle = s_1 + s_2 + \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.64)$$

т.е. полностью определяется средними значениями  $\alpha$ ,  $\beta$  и дисперсиями  $s_1$  и  $s_2$  из (2.63). Распределение Рэлея (2.54) получается из (2.61) в частном случае  $\alpha = \beta = 0$ ,  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2} K^N$ .

Рассмотрим некоторые конкретные примеры. Начнем со случая гауссова распределения (2.40). Тогда легко видеть, что

$$P(\phi_{\Gamma_N}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \phi_N} \exp\left\{-\frac{\phi_{\Gamma_N}^2}{2\phi_N^2}\right\} \quad (2.65)$$

где:

$$\phi_N^2 = \langle \phi_{ij}^2 \rangle + \langle \phi_{jk}^2 \rangle + \dots + \langle \phi_{li}^2 \rangle = N \phi^2 \quad (2.66)$$

Из (2.63), (2.64) получаем:



$$\langle |X_N|^2 \rangle = K^{2N} \exp(-N\phi^2) + K^N [1 - \exp(-N\phi^2)] \quad (2.67)$$

В общем случае из (2.5I) имеем:

$$L(E) \approx \alpha \mathcal{K} \exp F(E, \frac{W}{V}) \quad (2.68)$$

где "эффективная константа связности" определена как:

$$\mathcal{K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle |X_N|^2 \rangle^{1/2N} \quad (2.69)$$

Соответственно, для случая (2.65)-(2.67) нетрудно показать, что:

$$\mathcal{K} = \begin{cases} K \exp(-\frac{1}{2}\phi^2) ; \phi^2 < \ln K \\ K^{1/2} ; \phi^2 > \ln K \end{cases} \quad (2.70)$$

С ростом дисперсии  $\phi^2$  сначала идет убывание  $\mathcal{K}$ , а затем при  $\phi^2 > \ln K$  происходит полная стохастизация фаз и  $\mathcal{K}$  выходит на асимптотику  $K^{1/2}$ .

Рассмотрим теперь случай распределения (2.4I) с  $\phi \neq \pi n$  ( $n=1,2,\dots$ )  
Тогда, очевидно:

$$P(\phi_{r_N}) = \begin{cases} \frac{1}{N\phi} ; |\phi_{r_N}| < N\phi \\ 0 ; |\phi_{r_N}| > N\phi \end{cases} \quad (2.71)$$

и нетрудно показать, что:

$$\mathcal{K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ K^{2N} \frac{\sin^2 N\phi}{(N\phi)^2} + K^N \left( 1 - \frac{\sin^2 N\phi}{(N\phi)^2} \right) \right\}^{1/2N} = K \quad (2.72)$$

Таким образом, в этом случае не происходит даже частичной стохастизации фаз. Недиагональный беспорядок такого типа не влияет на локализацию. С другой стороны, из (2.72) видно, что при  $\phi = \pi n$  ( $n=1,2,\dots$ ) мы возвращаемся к полной стохастизации фаз, рассмотренной выше.

Аналогичным образом можно рассмотреть и случай (2.42)-(2.44).  
Выражение (2.51) изменяется при этом следующим образом:

$$L^N(E) \approx V^N \left| \sum_{\Gamma_N^i} (-1)^{n_{\Gamma_N^i}} \exp \left\{ -N \langle \ln |E - E_k| \rangle \right\} \right| \quad (2.73)$$

где  $n_{\Gamma_N^i}$  - число отрицательных связей, "выпавших" вдоль данного пути  $\Gamma_N^i$ . Вероятность реализации такого распределения связей задается биномиальным распределением:

$$P_N(n_{\Gamma_N}) = C_N^{n_{\Gamma_N}} c^{n_{\Gamma_N}} (1-c)^{N-n_{\Gamma_N}} \quad (2.74)$$

Тогда нетрудно найти средние значения:

$$\begin{aligned} \langle (-1)^{n_{\Gamma_N}} \rangle &= \sum_{n_{\Gamma_N}=0}^N C_N^{n_{\Gamma_N}} c^{n_{\Gamma_N}} (1-c)^{N-n_{\Gamma_N}} (-1)^{n_{\Gamma_N}} = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} (1-c)^{N-n} (-c)^n = (1-2c)^N \quad (2.75) \\ \langle (-1)^{2n_{\Gamma_N}} \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Дисперсия отдельного слагаемого в сумме

$$X_N = \sum_{\Gamma_N^i} (-1)^{n_{\Gamma_N^i}} \quad (2.76)$$

оказывается равной

$$\langle (-1)^{2n_{\Gamma_N}} \rangle - \langle (-1)^{n_{\Gamma_N}} \rangle^2 = 1 - (1-2c)^{2N} \quad (2.77)$$

Оценим наиболее вероятное значение  $|X_N|$  снова с помощью  $\langle X_N^2 \rangle^{1/2}$ . Дисперсия суммы независимых случайных переменных равна сумме дисперсий отдельных слагаемых. Тогда, предполагая независимость  $K^N$  ( $N \geq 1$ ) слагаемых в  $X_N$  получаем:

$$\langle X_N^2 \rangle - \langle X_N \rangle^2 \approx K^N [1 - (1-2c)^{2N}] \quad (2.78)$$

Предположение о независимости вкладов различных путей  $\Gamma_N$  является наиболее существенным в нашем анализе. Очевидно, что некото-

рые из  $\sim K^N$  путей имеют общие участки. Мы предполагаем, таким образом, что соответствующая корреляция их вкладов пренебрежимо мала в пределе  $N \rightarrow \infty$ . Это предположение, в неявной форме, фигурировало и выше в условиях применимости центральной предельной теоремы, обеспечивающей корректность распределения (2.6I).

Воспользовавшись теперь

$$\langle X_N \rangle \approx K^N \langle (-1)^{\Gamma_N} \rangle = K^N (1-2c)^N \quad (2.79)$$

получаем:

$$\langle X_N^2 \rangle \approx K^N [1 - (1-2c)^{2N}] + K^{2N} [1-2c]^{2N} \quad (2.80)$$

так, что "эффективная константа связности" (2.69) становится равной:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ K^{2N} (1-2c)^{2N} + K^N [1 - (1-2c)^{2N}] \right\}^{1/2N} = \\ &= \begin{cases} K |1-2c| & ; c < c_1^* ; c > c_2^* \\ K^{1/2} & ; c_1^* < c < c_2^* \end{cases} \quad (2.81) \end{aligned}$$

где "критические" концентрации  $c_{1,2}^*$  определяются из уравнения  $K(1-2c)^2 = 1$  и равны:

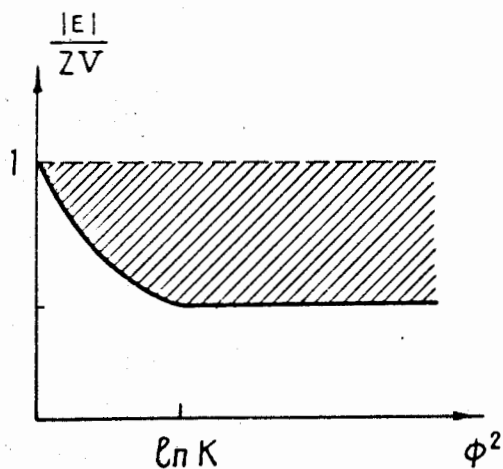
$$c_{1,2}^* = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{K}} \quad (2.82)$$

Значения  $c_1^*$  и  $c_2^*$  для различных решеток приведены в Таблице 2.2. В работе /78/ было отмечено, что эти концентрации очень напоминают (и близки численно) критические концентрации антиферромагнитных (ферромагнитных) связей, при которых исчезает ферромагнетизм (антиферромагнетизм) в соответствующих решетках Изинга. Впоследствии (Глава 7) мы увидим, что это обстоятельство не является случайным.

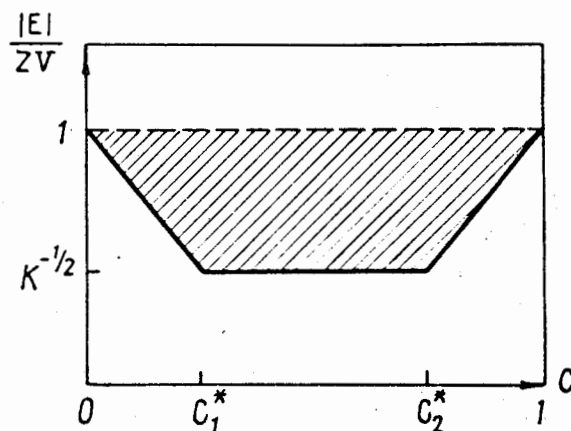
Интересно заметить, что в отсутствие диагонального беспорядка

Таблица 2.2. Критические концентрации  $c_1^*$  и  $c_2^*$  (2.82) для различных решеток.

Решетка	Треугольная	Квадрат	Алмаз	ПК	ОЦК	ГЦК
$c_1^*$	0.2546	0.1922	0.2052	0.2689	0.3043	0.3421
$c_2^*$	0.7454	0.8078	0.7948	0.7311	0.6957	0.6579



(a)



(б)

Рис.2.2. "Траектории" порогов подвижности на плоскости энергия - беспорядок:

(а) "гауссова" модель случайных фаз

(б) "модель Изинга"

Заштрихована область локализованных состояний,  
пунктир - граница исходной зоны.

зависимость "эффективной константы связности" от беспорядка задает "траекторию порогов подвижности". В самом деле, порог подвижности в этом случае определяется условием (ср. (2.58), (2.59)):

$$L(E_c) = 1 = \alpha \mathcal{K} \frac{V}{|E_c|} = \frac{\mathcal{K}}{K} \frac{ZV}{|E_c|} \quad (2.83)$$

где мы отсчитываем энергию от центра исходной зоны ( $E_0 = 0$ ).

Тогда имеем:

$$\frac{|E_c|}{ZV} = \frac{\mathcal{K}}{K} \quad (2.84)$$

Графически эти "траектории" показаны на Рис.2.2.

Рассмотрим теперь физический смысл полученных результатов. Проведенный анализ сходимости по вероятности позволяет дать очень простую интерпретацию в терминах распределения фрустраций. Произведение интегралов переноса  $V_{ij}$  вдоль замкнутого пути без пересечений  $\Gamma_N^i$ , в "изинговском" случае (2.43), равно (для простоты имеем ввиду двумерный случай):

$$\begin{aligned} V_{ij} V_{jk} \dots V_{li} &= V^N \text{Sign } V_{ij} V_{jk} \dots V_{li} = \\ &= V^N A_{ij} A_{jk} \dots A_{li} = V^N \prod_p \phi_p \end{aligned} \quad (2.85)$$

где /80, 81/

$$\phi_p = \text{Sign } V_{ij} V_{jk} V_{kl} V_{li} = A_{ij} A_{jk} A_{kl} A_{li} \quad (2.86)$$

- произведение  $A_{ij}$  вокруг элементарной грани (plaquette) ( $\phi_p = \pm 1$ ) на данной решетке. В случае, если  $\phi_p = -1$  грань называется фрустрированной /80/. Произведение  $\phi_p$  в (2.85) берется по всем граням внутри контура  $\Gamma_N^i$ . Его знак положителен или отрицателен в зависимости от того, попадает внутрь контура  $\Gamma_N^i$  четное или нечетное число фрустрированных граней. При достаточно высокой концентрации отрицательных (положительных) связей, превышающей  $c_1^*$  ( $c_2^*$ ), величина произведения  $\prod_p \phi_p$  равна  $+1$  или  $-1$  с одинаковой

вероятностью. Это означает, что в концентрационном интервале  $c_1^* < c < c_2^*$  четное или нечетное число фрустрированных граней попадает внутрь контура  $\Gamma_N^i$  равновероятно (при  $N \gg 1$ ), что аналогично обсуждавшейся выше полной стохастизации фаз на пути при достаточно большом фазовом беспорядке.

Проведенное выше рассмотрение модели случайных фаз позволяет сделать некоторые замечания относительно локализации во внешнем магнитном поле [78]. Включение постоянного внешнего магнитного поля  $\vec{H}$  приводит, в модели сильной связи, к возникновению у интегралов переноса  $V_{ij}$  дополнительного фазового множителя (фактор Пайерлса):

$$V_{ij}^{\vec{H}} = \exp(-i\phi_{ij}) V_{ij} \quad (2.87)$$

где:

$$\phi_{ij} = \frac{1}{2} \frac{e}{\hbar c} \vec{H} \cdot [\vec{R}_i \times \vec{R}_j] \quad (2.88)$$

Здесь  $\vec{R}_i$  - радиус-вектор, определяющий положение  $i$ -го узла в решетке. Основное свойство этих факторов состоит в том, что их сумма вдоль замкнутого пути  $\Gamma_N$  на решетке калибровочно инвариантна и равна потоку магнитного поля  $\vec{H}$  через площадь  $\vec{S}_{\Gamma_N}$ , охватываемую контуром  $\Gamma_N$ , измеренному в единицах кванта магнитного потока  $\phi_0 = 2\pi \frac{\hbar c}{e}$ :

$$\phi_{\Gamma_N} = \phi_{ij} + \phi_{jk} + \dots + \phi_{li} = \frac{2\pi}{\phi_0} \vec{H} \cdot \vec{S}_{\Gamma_N} \quad (2.89)$$

Результат (2.87) справедлив для не слишком сильных полей, для которых можно пренебречь деформацией атомных волновых функций в магнитном поле (что меняет и модуль  $V_{ij}$ ):  $Ha^2 \ll \phi_0$ , где  $a$  - длина порядка постоянной решетки.

Видно, что влияние магнитного поля на локализацию может быть аналогичным рассмотренному выше влиянию случайных фаз  $V_{ij}$ .

В пренебрежении спиновыми эффектами, оно полностью определяется (в рамках подхода Андерсона) статистикой площадей  $\vec{S}_{\Gamma_N}$  путей без пересечений на решетке. Насколько известно автору, задача о статистическом распределении площадей путей без пересечений никем не рассматривалась. По-видимому, надежные результаты здесь можно получить только с помощью машинного моделирования. В предположении статистической независимости вкладов различных путей  $\Gamma_N$ , из предыдущего изложения ясно, что появление фазовых множителей типа (2.89) может только способствовать сходимости ряда теории возмущений в модели Андерсона, или, в случае аналогичном (2.72), не влиять на нее. Влияние магнитного поля сведется тогда к уменьшению эффективной константы связности решетки (или отсутствию такового) при возрастании магнитного поля в масштабе полей до  $Ha^2 \sim \phi_0$  /78/. Магнитное поле в такой модели способствует локализации, сдвигая пороги подвижности внутрь зоны (или не влияет на нее). В работе /78/ приведены некоторые простые оценки, основанные на элементарных предположениях относительно статистики площадей  $\vec{S}_{\Gamma_N}$ . Здесь мы не будем на них останавливаться, поскольку задача о локализации с учетом внешнего магнитного поля представляется далекой от полного решения.

### 2.3. Скэйлинг в модели Андерсона.

Как уже отмечалось выше, в течение долгого времени большинство работ по модели Андерсона было посвящено доказательству локализации электронных состояний при достаточно большом отношении параметра разброса уровней  $W$  к амплитуде перехода электрона с узла на узел  $V$ , определению критического отношения  $(W/V)_c$ , а также определению положений порогов подвижности. В тоже время ясно, что больший интерес представляет изучение характера электронных состояний вблизи порога подвижности. Первые попытки в этом направлении были предприняты в работах Андерсона /87/, Фрида /88/ и Абрама и Эдвардса /89,90/. Вскоре целым рядом авторов (см. обзор /10/) была осознана аналогия явления локализации с обычными фазовыми переходами и были предприняты усилия по построению скэйлинговой картины перехода Андерсона. По-видимому, первой работой, в которой удалось построить некоторый вариант такого описания была работа автора /31/. Ниже мы, в основном, следуем этой работе, основанной на методе, предложенном Андерсоном /87/.

Рассмотрим недиагональный по узлам матричный элемент андерсоновской функции Грина (2.23). Очевидно, что

$$G_{ij}(E) = \sum_{\nu} \frac{\varphi_{\nu}(\vec{R}_i) \varphi_{\nu}^*(\vec{R}_j)}{E - \epsilon_{\nu}} \quad (2.90)$$

где  $\varphi_{\nu}(\vec{r})$  - точные собственные функции электрона в случайном поле модели Андерсона, а  $\epsilon_{\nu}$  - соответствующие точные собственные значения энергии (гамильтониана (2.1)). Из (2.90) ясно, что пространственное поведение  $G_{ij}(E)$  определяется таковым для точных собственных функций (и наоборот!).  $G_{ij}(E)$  может спадать с расстоянием быстрее  $\varphi_{\nu}(\vec{r})$  из-за сокращения вкладов разных  $\nu$ , но не медленнее. Фактически, всегда доминирует вклад одного или нескольких  $\nu$ .



Для оценки пространственного поведения  $G_{ij}(E)$  воспользуемся разложением (2.24) и проанализируем его в тех же приближениях, в которых рассматривалась сходимость ряда (2.22) для  $\Delta_i(E)$ . Ограничиваясь моделью Андерсона с диагональным беспорядком, видим, что модуль  $N$ -го члена разложения (2.24) представляется в виде:

$$|F_{ij}^{(N)}(E)| = \left| \sum_{\Gamma_N(i,j)} T_{\Gamma_N(i,j)}(E) \right| \quad (2.91)$$

где

$$T_{\Gamma_N(i,j)} = V^N G_{j_1 j_1}^i(E) \dots G_{j_N j_N}^{i \dots j_{N-1}}(E) \quad (2.92)$$

аналогичный (2.28) вклад одного из путей без пересечений  $\Gamma_N(i,j)$ , начинающегося в узле  $i$  и заканчивающегося в узле  $j$ . Суммирование в (2.91) идет по всем таким путям из  $N$  шагов. Воспользуемся опять приближением Займана (2.32). Тогда ряд (2.24) приближенно представляется следующим образом /87/:

$$\begin{aligned} F_{ij}(E) &= \sum_{N=1}^{\infty} Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \exp\{-N \langle \ln |E - E_k| \rangle\} = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \exp\left\{NF\left(E, \frac{W}{V}\right)\right\} = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j) K^{-N} L^N\left(E, \frac{W}{V}\right) \end{aligned} \quad (2.93)$$

где  $Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j)$  - число путей без пересечений из  $N$  шагов, связывающих узел  $i$  с узлом  $j$ , остальные обозначения те же, что и в (2.33)-(2.36). Заметим, что ряд, стоящий в правой части (2.93), фактически, является мажорирующим для истинного ряда (2.24), поскольку каждый член последнего оценивается по модулю. Зависимость от разности аргументов  $\vec{R}_i - \vec{R}_j$  в  $Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j)$  возникает ( $N \gg 1$ ) для среднего числа путей без пересечений. Из (2.93) видно, что в обычных приближениях метода Андерсона, пространственное поведение

$G_{ij}(E)$  целиком определяется статистикой путей без пересечений на данной решетке, т.е. чисто геометрическим объектом. В работе /87/ при рассмотрении разложения (2.93) использовалась функция  $Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j)$  полученная в результате машинного моделирования статистики путей без пересечений. Основная идея работы автора /31/ состояла в использовании в (2.93) аналитической теории путей без пересечений, основанной на теории критических явлений, предложенной Де Женном и Де Клуазо /91-93/, что и позволило получить скейлинговое поведение.

В пределе  $N \gg 1$  пути без пересечений можно рассмотреть в непрерывной модели - структура решетки становится несущественной, подобно тому, как это происходит в теории критических явлений. Тогда статистика таких путей описывается континуальным интегралом по мере Винера /94/:

$$G(\vec{r} - \vec{r}'; L) = \frac{Z_N(\vec{r} - \vec{r}'; L)}{Z_N} = \int_{\vec{r}(0) = \vec{r}'}^{\vec{r}(L) = \vec{r}} \mathcal{D}\vec{r}(s) \exp \left\{ -\frac{3}{2l} \int_0^L ds \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_0 a^2 \int_0^L ds \int_0^L ds' \delta[\vec{r}(s) - \vec{r}'(s')] \right\}; \quad g_0 > 0 \quad (2.94)$$

где

$$Z_N = \int d^d \vec{r} Z_N(\vec{r}; L) \quad (2.95)$$

- полное число путей из  $N$  шагов. В (2.94), (2.95)  $L = Na$ , где  $a$  - длина отдельного шага,  $N$  - полное число шагов,  $\vec{r}(0) = \vec{r}'$  - начальная точка пути,  $\vec{r}(L) = \vec{r}$  - конечная точка пути. В (2.94) введено отталкивательное "взаимодействие"  $g_0 \delta[\vec{r}(s) - \vec{r}'(s')]$  между отдельными точками траектории, исключающее пути с самопересечением. С помощью (2.94) обычно моделируется задача о полимерной цепи (состоящей из  $N$  мономеров - звеньев длины  $a$ ) с "исключенным объемом" (за счет отталкивания между звеньями) /94/.

Континуальный интеграл (2.94) может быть вычислен с помощью теории возмущений по степеням  $g_0$  /94/:

$$G(\vec{r}-\vec{r}'; L) = G_0(\vec{r}-\vec{r}'; L) - g_0 a^2 \int_0^L d^d \vec{r}'' \int_0^L ds'' \int_0^L ds''' \cdot \\ \cdot G_0(\vec{r}''-\vec{r}'s'') G_0(\vec{r}''-\vec{r}'''s'''-s'') G_0(\vec{r}-\vec{r}'''L-s''') + \dots \quad (2.96)$$

где 
$$G_0(\vec{r}-\vec{r}'; L) = \theta(L) \left( \frac{3}{2\pi L a} \right)^{\frac{d}{2}} \exp \left\{ -\frac{3}{2a} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{L} \right\} \quad (2.97)$$

Различным членам разложения (2.96) могут быть сопоставлены диаграммы, показанные на Рис.2.3(а). Эта диаграммная техника практически идентична стандартной технике Эдвардса в задаче об электроде в поле примесей (гауссовом случайном поле) /17/. В импульсном представлении (при любом  $d$ ) имеем:

$$G_0(\vec{p}L) = \theta(L) \exp \left\{ -L \frac{a}{3} p^2 \right\} \quad (2.98)$$

Введем лапласовский образ:

$$G_0(\vec{p}\tau) = \frac{a}{3} \int_0^\infty dL e^{-\frac{a}{3}L\tau} G_0(\vec{p}L) = \frac{1}{p^2 + \tau} \quad (2.99)$$

который совпадает по форме с коррелятором Орнштейна-Цернике теории критических явлений /26-30/. Обратное преобразование имеет вид:

$$G_0(\vec{p}L) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\tau}{2\pi i} e^{\tau \frac{a}{3}L} G_0(\vec{p}\tau) = \theta(L) \exp \left\{ -L \frac{a}{3} p^2 \right\} \quad (2.100)$$

где выбор контура интегрирования определяется обычными правилами. Перейдем в (2.96) к импульсному пространству и сделаем преобразование Лапласа по переменной  $L$ . Тогда, как следствие теоремы

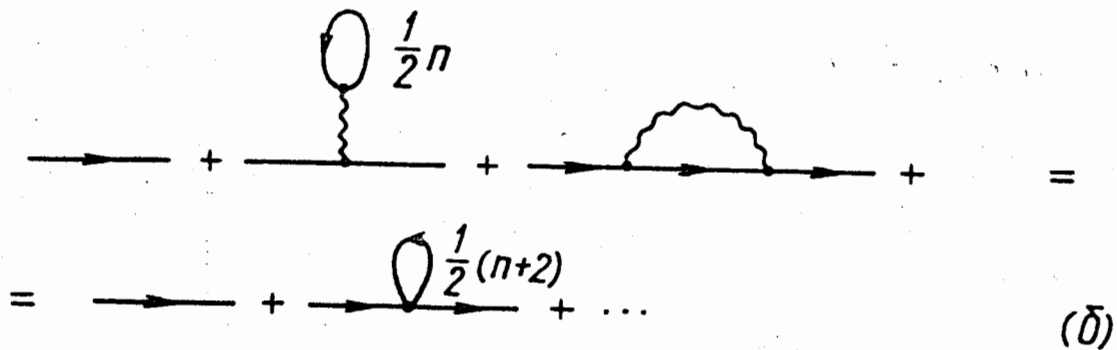
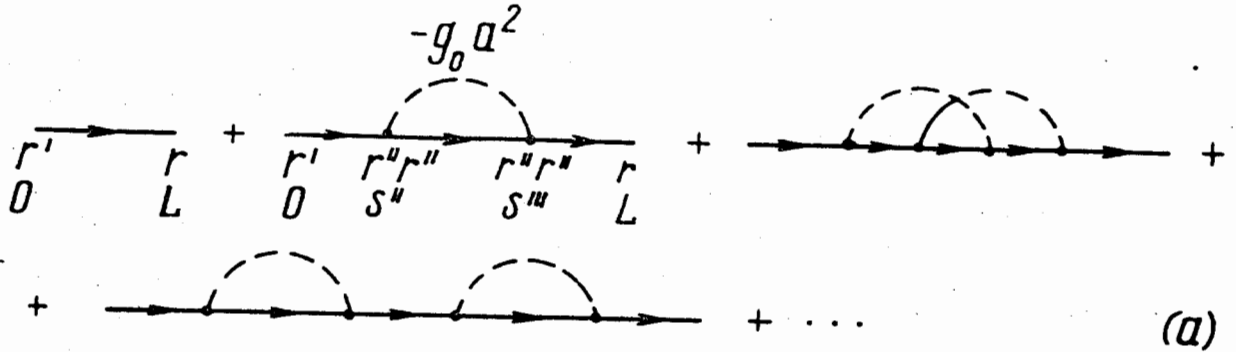


Рис.2.3. (а) Графическое представление разложения (2.96).

(б) Графики теории возмущений для пропагатора теории поля (2.102). Первая строка - диаграммная техника

/30/: 
$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{8} g_0 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)^2$$

Вторая строка - симметризованная техника /29/:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{4!} \Gamma_{ijkl}^{(0)} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(0)} = g_0 (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

о свертке, получаем разложение в виде

$$G(\vec{p}, \tau) = \frac{1}{p^2 + \tau} - g_0 \frac{1}{p^2 + \tau} \int \frac{d^d \vec{p}'}{(2\pi)^d} \frac{1}{p'^2 + \tau} \frac{1}{p^2 + \tau} + \dots \quad (2.101)$$

Рассмотрим теперь теорию Ландау-Гинзбурга с эффективным лагранжианом (плотностью свободной энергии флуктуаций)  $\mathcal{L}$  - компонентного поля стандартного вида /26-30/ (  $O(n)$  - симметричная евклидова теория поля):

$$\mathcal{L}(r) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{ (\nabla \phi_j)^2 + \tau \phi_j^2 \} + \frac{1}{8} g_0 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)^2; \quad g_0 > 0 \quad (2.102)$$

Мы принимаем обозначения (выбор констант) из книги /30/, там же приведены подробные правила диаграммной техники (см. также /29/). Первые члены разложения в ряд теории возмущений для пропагатора (функции Грина) поля  $\phi$  графически представлены на Рис.2.3(б). Аналитически это дает:

$$G_{\phi\phi}(\vec{p}, \tau) = \frac{1}{p^2 + \tau} - \frac{g_0(n+2)}{2} \frac{1}{p^2 + \tau} \int \frac{d^d \vec{p}'}{(2\pi)^d} \frac{1}{p'^2 + \tau} \frac{1}{p^2 + \tau} + \dots \quad (2.103)$$

Сравнивая (2.103) и (2.101) видим, что они эквивалентны, если в (2.103) положить  $n=0$ . Переход к  $n=0$  ликвидирует "лишние" графики разложения Рис.2.3(б) с замкнутыми петлями (пропорциональные числу компонент  $n$ ), отсутствующие в разложении Рис.2.3(а). Обобщение на высшие порядки проводится непосредственно, можно дать и формальное доказательство, не основанное на теории возмущений /95/, в котором демонстрируется эквивалентность континуального интеграла (2.94) и функционального интеграла для пропагатора теории поля (2.102) при  $n=0$  и отталкивательном взаимодействии.

В итоге получаем, что искомая функция  $Z_N(\vec{r}-\vec{r}'; L)$  определяется (ср.(2.100)) обратным преобразованием Лапласа от корреляционной функции (функции Грина) теории критических явлений, описы-

ваемой лагранжианом Ландау-Гинзбурга (2.102), с числом компонент поля  $n \rightarrow 0$  /91,92/:

$$Z_N(\bar{r}-\bar{r}'; L) = Z_N \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\tau}{2\pi i} e^{\tau \frac{a}{3} L} G_{\phi\phi}(\bar{r}-\bar{r}'; \tau) \sim$$

$$\sim a^{-2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{Ns} G_{\phi\phi}(\bar{r}-\bar{r}'; s) \quad (2.104)$$

где ввели безразмерный параметр  $s = \tau a^2$  (2.105)

Теория критических явлений /26-30/ дает при  $s \rightarrow s_c$  ( $\tau \rightarrow \tau_c$ ,

$\tau$  - перенормированный параметр лагранжиана (2.102), фазовому переходу соответствует обращение в нуль перенормированного  $\tilde{\tau} = \tau - \tau_c$ ) скейлинговую сингулярность функции Грина, записываемую стандартным образом как /92/:

$$G_{\phi\phi}(\bar{r}s) \sim a^2 (s-s_c)^{-\gamma} f \{ \rho a (s-s_c)^{-\nu} \} \quad (2.106)$$

Согласно (2.104) эта сингулярность определяет асимптотику  $Z_N(\bar{r}-\bar{r}')$  при  $N \gg 1$  /92/:

$$Z_N(r) = a^{-d} Z_N N^{-\nu d} F\left(\frac{r}{N^\nu a}\right) \quad (2.107)$$

где

$$Z_N \sim N^{\gamma-1} e^{Ns_c} \quad (2.108)$$

Критические индексы  $\nu$ ,  $\gamma$  определяются обычными формулами  $\epsilon$ -разложения ( $d = 4 - \epsilon$ ) Вильсона для  $O(n)$ -симметричной теории Ландау-Гинзбурга (2.102) /26-30/ при  $n=0$  :

$$\gamma \simeq 1 + \frac{\epsilon}{8} + \frac{13\epsilon^2}{256} + \dots \simeq 1.176 \quad (\epsilon=1, d=3)$$

$$\nu \simeq \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16} + \frac{15\epsilon^2}{512} + \dots \simeq 0.592 \quad (\epsilon=1, d=3). \quad (2.109)$$

Из (2.108) очевидно, что

$$S_c = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N = \ln K \quad (2.110)$$

(ср.(2.34)) т.е. константа  $S_c$  представляет собой логарифм константы связности решетки, на которой рассматриваются пути без самопересечений. Естественно, что подобно температуре фазового перехода в теории критических явлений, она не определяется из континуального (полевого) лагранжиана (2.102), а фигурирует в нем как параметр (зависящий от структуры конкретной решетки). В остальном статистика путей без пересечений универсальна, т.е. от такой структуры не зависит. Для дальнейшего определяющим является общий результат (2.104) /91,92/.

Воспользуемся этим общим выражением для  $Z_N(\vec{r} - \vec{r}')$  в разложении (2.93). Рассмотрим сначала центр зоны  $E = 0$ , тогда из (2.35), (2.36) имеем  $L(0, \frac{W}{V}) = \alpha \left( \frac{2eV}{W} \right) K$ , так что (2.93) дает:

$$G_{ij}(E=0) \sim \sum_{N=1}^{\infty} \left( \alpha \frac{2eV}{W} \right)^N Z_N(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \sim$$

$$\sim \sum_{N=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \exp\{N(s-s_c)\} \left( \frac{2eV}{W} K \right)^N G_{\phi\phi}(s, \vec{R}_i - \vec{R}_j) = \quad (2.111)$$

$$= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} G_{\phi\phi}(s, \vec{R}_i - \vec{R}_j) \sum_{N=1}^{\infty} \exp\left\{N(s-s_c) + N \ln \frac{W_c}{W}\right\}$$

где использовали  $K^{-N} = e^{-Ns_c}$  (см.(2.84)) и  $W_c = 2e\alpha VK = 2ZVe$  (см.(2.37)) (мы считаем  $V$  фиксированным, в общем случае во все формулы входят отношения  $W/V$  и  $(W/V)_c$ ). Тогда из (2.111) получаем:

$$G_{ij}(E=0) \sim \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} G_{\phi\phi}(s, \vec{R}_i - \vec{R}_j) \left\{ 1 - \exp\left[\ln \frac{W}{W_c} - s + s_c\right] \right\}^{-1} \sim \quad (2.112)$$

$$\sim G_{\phi\phi}(\vec{R}_i - \vec{R}_j; s_c + \ln \frac{W}{W_c}) \quad (2.II2)$$

поскольку фигурная скобка в (2.II2) дает простой полюс при  $S = s_c + \ln W/W_c$ . Контур интегрирования в (2.II2) показан на Рис.2.4. Проведенное рассмотрение годится для  $W > W_c$ , когда сходится андерсоновский ряд теории возмущений (область локализации).

В общем случае ( $E \neq 0$ ) все вычисления вполне аналогичны и из (2.93) получаем:

$$G_{ij}(E) \sim \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} G_{\phi\phi}(s, \vec{R}_i - \vec{R}_j) \sum_{N=1}^{\infty} \exp\{N(s-s_c) + N \ln L(E, \frac{W}{V})\} \sim \quad (2.II3)$$

$$\sim G_{\phi\phi}(\vec{R}_i - \vec{R}_j; s_c + \ln L(E, \frac{W}{V}))$$

что также годится только в области сходимости перенормированного ряда теории возмущений, т.е. в области локализованных состояний.

При  $W \gtrsim W_c$  имеем  $\ln \frac{W}{W_c} \approx \frac{W - W_c}{W_c}$ , аналогично при  $E \sim E_c$ :

$$L(E, \frac{W}{V}) \approx 1 + L'(E_c, \frac{W}{V})(E - E_c) + \dots \quad (2.II4)$$

$$\ln L(E, \frac{W}{V}) \approx L'(E_c, \frac{W}{V})(E - E_c)$$

где учтено, что  $L(E_c, W/V) = 1$ , по определению порога подвижности. Функция локализации  $L(E, W/V)$  возрастает (убывает) когда  $E$  проходит через  $E_c$ , так что производная  $L'(E_c, W/V)$  в общем случае отлична от нуля, а ее знак зависит от того, вблизи которого из двух порогов  $E_c$  в зоне ведется разложение (2.II4).

Таким образом из (2.II2) и (2.II3) получаем:

$$G_{ij}(E=0; W \gtrsim W_c) \sim G_{\phi\phi}(\vec{R}_i - \vec{R}_j; s_c + \frac{W - W_c}{W_c})$$

$$G_{ij}(E \sim E_c; W < W_c) \sim G_{\phi\phi}(\vec{R}_i - \vec{R}_j; s_c + L'(E_c, \frac{W}{V})(E - E_c)) \quad (2.II5)$$



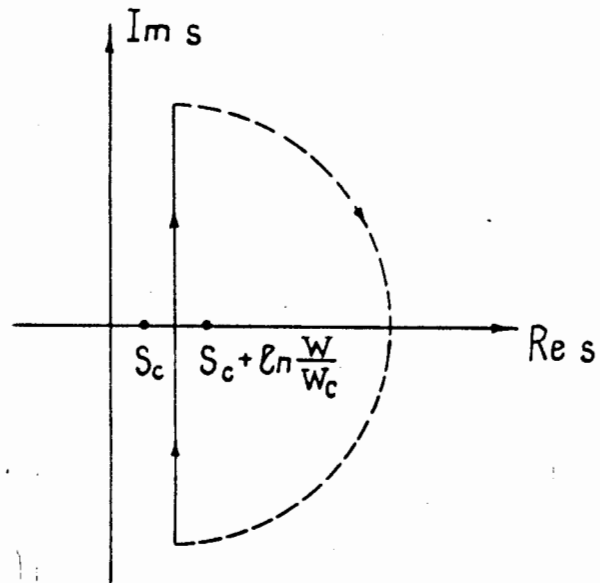


Рис.2.4. Контур интегрирования при обратном преобразовании Лапласа в (2.112).

так, что пространственное поведение андерсоновской функции Грина (в области локализации) определяется корреляционной функцией стандартной теории критических явлений (2.102) с  $\nu = 0$ , причем порог подвижности соответствует точке перехода. Вблизи порога подвижности функция Грина экспоненциально спадает с расстоянием:

$$G_{ij} \sim \exp \left\{ -\frac{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|}{R_{loc}} \right\} ; |\vec{R}_i - \vec{R}_j| \geq R_{loc} \quad (2.116)$$

где радиус локализации

$$R_{loc} \sim a \left[ \frac{W - W_c}{W_c} \right]^{-\nu} ; W \geq W_c \quad (2.117)$$

для локализации в центре зоны, и, аналогично:

$$R_{loc}(E) \sim a \left\{ L'(E_c, \frac{W}{V}) E_c \right\}^{-\nu} \left( \frac{E_c - E}{E_c} \right)^{-\nu} \quad (2.118)$$

для локализации при  $E \lesssim E_c$  (где, для определенности, имеем ввиду "левый" порог подвижности).

Критический индекс радиуса локализации  $\nu$  совпадает с критическим индексом корреляционной длины теории критических явлений с  $\nu = 0$ . Для  $d = 3$  из (2.109) имеем  $\nu \approx 0.59$ , что практически совпадает с результатом Андерсона  $\nu \approx 0.6$  /87/, полученным с помощью машинного моделирования статистики путей без пересечений. Отметим также очень неплохое количественное согласие нашего результата для  $\nu$  с его значениями, найденными в целом ряде экспериментальных работ по переходу металл-диэлектрик в неупорядоченных системах /47-57/ (см. Таблицу I.1), если принять интерпретацию этих экспериментов на основе представлений скейлинговой теории локализации.

При  $W = W_c$  или  $E = E_c$  (т.е. на самом пороге подвижности) имеем:

$$G_{ij} \sim |\bar{R}_i - \bar{R}_j|^{-(d-2+\eta)} \quad (2.119)$$

где индекс  $\eta = 2 - \delta/\nu$  в рамках  $\varepsilon$ -разложения ( $d = 4 - \varepsilon, n = 0$ ) равен /26-30/:

$$\eta \approx \frac{\varepsilon^2}{64} \left[ 1 + \frac{17}{16} \varepsilon + \dots \right] \approx 0.032 \quad (\varepsilon = 1, d = 3) \quad (2.120)$$

Малость критического индекса  $\eta$  означает, что в данной модели невозможна локализация со степенным характером спада волновых функций, предполагавшимся в работе /34/. Согласно этой работе для реализации степенной локализации показатель степени в (2.119) должен попадать в интервал значений от  $3/2$  до  $5/2$ , а в нашем случае  $d-2+\eta \approx 1.032$  (для  $d = 3$ ).

Численное значение индекса  $\nu$  может быть весьма важным. Согласно качественным аргументам Мотта /53,96/ для существования скачка проводимости на пороге подвижности (т.е. для существования минимальной металлической проводимости) необходимо выполнение неравенства:

$$\nu > \frac{2}{d} \quad (2.121)$$

Для  $d = 4 - \varepsilon$  это эквивалентно требованию  $\nu > \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{16} + \dots \right]$  и сравнение с (2.109) показывает, что в нашем случае  $\nu < 2/d$ . Согласно Мотту /53,96/ при этом условии возникают сильные флуктуации волновых функций вблизи порога подвижности, что может привести к непрерывному обращению проводимости в нуль (в согласии с представлениями элементарной скэйлинговой теории локализации).

Проведенное рассмотрение неприменимо в одномерном случае, так как в рассматриваемом варианте модели Андерсона с взаимодействием  $V$  только между ближайшими соседями, перенормированный ряд Андерсона для электронной функции Грина содержит всего два слагаемых, соответствующих двум возможным путям без пересечений /97/.

Вопрос о локализации сводится к исследованию сходимости некоторой непрерывной дроби, а статистика путей без пересечений не играет роли. Поэтому одномерная модель фазового перехода Ландау-Гинзбурга ( с  $\mu = 0$  ), по-видимому, не имеет прямого отношения к задаче о локализации электронов в одномерной неупорядоченной системе. Из других соображений этот же вывод был получен в работе /98/.

К сожалению, найденная описанным выше способом, андерсоновская "наиболее вероятная" функция Грина не имеет никакого отношения к усредненной одночастичной функции Грина, определяющей плотность состояний, или к усредненной двухчастичной функции Грина, определяющей проводимость системы. Из найденного скейлингового поведения андерсоновского ряда трудно сделать какие-либо выводы относительно скейлинга физических величин вблизи порога подвижности. В некотором смысле можно говорить лишь о скейлинговом поведении волновых функций локализованных состояний. Нельзя сделать определенных выводов и о возникновении какого-либо дальнего порядка на пороге подвижности - андерсоновский ряд теории возмущений просто не определен (расходится) в металлической области. Тем не менее, приведенная схема рассмотрения делает скейлинговое поведение электронных состояний вблизи порога подвижности вполне вероятным и дает конструктивную оценку критического индекса радиуса локализации.

### 3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ДВУХЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА.

#### 3.1. Общий критерий локализации. Локализация из уравнения Бете-Солпитера ?

Существенным недостатком использовавшегося выше метода Андерсона является почти полная невозможность расчета в его рамках каких-либо наблюдаемых физических величин, которые, как хорошо известно, определяются корреляционными функциями (функциями Грина), усредненными по ансамблю случайных конфигураций неупорядоченной системы. Для расчета таких величин существует хорошо разработанный формализм и диаграммная техника /17,99/. К сожалению, до недавнего времени был сравнительно мало исследован вопрос о том, каким образом локализация проявляет себя в основных величинах с которыми оперирует стандартная теория, таких например, как усредненные функции Грина. Недостаток ясности в этом вопросе создает существенные трудности на пути решения проблемы локализации и связи этого явления с наблюдаемыми характеристиками системы. Ясно, например, что вопрос о реализации самого явления локализации отличается, вообще говоря, от проблемы поведения электропроводности вблизи порога подвижности, решение которого может оказаться существенно более сложным.

В этом разделе, следуя работе автора /100/, мы рассмотрим вопрос об общем критерии локализации в рамках стандартного формализма. При этом мы будем иметь ввиду традиционную для подхода Эдвардса /17/ задачу о невзаимодействующих электронах, движущихся в поле хаотически расположенных в пространстве рассеивателей. Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \int d^d \vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \left\{ -\frac{\nabla^2}{2m} + \sum_i V(\vec{r} - \vec{R}_i) \right\} \psi(\vec{r}) \quad (3.1)$$

где  $V(\vec{r}-\vec{R}_i)$  - потенциал рассеивателя (например примеси в кристалле), расположенного в точке  $\vec{R}_i$ ,  $\psi^+(\vec{r})$  и  $\psi(\vec{r})$  - электронные операторы рождения и уничтожения.

Введем полную ортонормированную систему точных волновых функций  $\varphi_\nu(\vec{r})$  гамильтониана (3.1):

$$H\varphi_\nu(\vec{r}) = \varepsilon_\nu \varphi_\nu(\vec{r}) \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon_\nu$  - точные собственные значения энергии электрона в поле случайных рассеивателей. Очевидно, что каждая  $\varphi_\nu(\vec{r})$  и каждое  $\varepsilon_\nu$  являются также и функционалами положений рассеивателей  $\vec{R}_i$  в данной реализации случайной системы. Подразумевая такую зависимость мы не будем выписывать ее явно в аргументах этих функций. В отсутствие внешнего магнитного поля функции  $\varphi_\nu(\vec{r})$  можно, не ограничивая общности, считать вещественными, однако в дальнейшем мы будем явно выписывать операцию комплексного сопряжения. Следуя работе Березинского и Горькова /101/, определим двухчастичную спектральную плотность следующего вида:

$$\langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle = \frac{1}{N(E)} \left\langle \sum_{\nu\nu'} \varphi_\nu^*(\vec{r}) \varphi_{\nu'}(\vec{r}) \varphi_{\nu'}^*(\vec{r}') \varphi_\nu(\vec{r}') \delta(E-\varepsilon_\nu) \delta(E+\omega-\varepsilon_{\nu'}) \right\rangle \quad (3.3)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по случайным конфигурациям рассеивателей, а

$$N(E) = \left\langle \sum_\nu \varphi_\nu(\vec{r}) \varphi_\nu^*(\vec{r}) \delta(E-\varepsilon_\nu) \right\rangle \quad (3.4)$$

- одноэлектронная (усредненная) плотность состояний. Спектральная плотность (3.3) обладает следующими общими свойствами /101/, которые легко проверяются с использованием условий полноты и ортонормированности системы функций  $\varphi_\nu(\vec{r})$ :

$$\int d^d \vec{r}' \langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle = \delta(\omega)$$

$$\int d\omega \langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (3.5)$$

Для пространственного фурье-образа (3.3)  $\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}}$  аналогичным образом имеем:

$$\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}=0} = \delta(\omega) \quad (3.6)$$

$$\int d\omega \langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}} = 1 \quad ; \quad \langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}} \geq 0$$

В выражении (3.3), вообще говоря, присутствуют члены, соответствующие вкладу  $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\nu'}$ . Однако, если соответствующие состояния делокализованы, то их волновые функции  $\varphi_{\nu}(\vec{r})$  нормированы на полный объем системы  $\Omega$  и потому соответствующий вклад в (3.3) пропорционален  $\Omega^{-1}$  и обращается в нуль при  $\Omega \rightarrow \infty$ . Ситуация резко меняется, если состояния локализованы. В этом случае волновые функции нормированы на объем  $\sim R_{loc}^d$ , где  $R_{loc}$  - радиус локализации. Тогда простая оценка дает для  $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\nu'}$ -вклада в (3.3) конечную величину порядка  $\sim R_{loc}^{-d}$ . Соответственно в спектральной плотности (3.3) возникает  $\delta$ -функциональный по частоте  $\omega$  вклад:

$$\langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle = A_E(\vec{r}-\vec{r}') \delta(\omega) + \rho_E(\vec{r}-\vec{r}', \omega) \quad (3.7)$$

или, в импульсном представлении:

$$\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}} = A_E(\vec{q}) \delta(\omega) + \rho_E(\vec{q}, \omega) \quad (3.8)$$

где вторые слагаемые регулярны по  $\omega$ . Появление сингулярного вклада в (3.3) было предложено в работе Березинского и Горькова /101/ в качестве общего критерия локализации. Нетрудно видеть, что:

$$A_E(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{N(E)} \left\langle \sum_{\nu} \delta(E - \epsilon_{\nu}) |\varphi_{\nu}(\vec{r})|^2 |\varphi_{\nu}(\vec{r}')|^2 \right\rangle \quad (3.9)$$

и представляет собой обобщенное *inverse participation ratio*, отличие которого от нуля неоднократно рассматривалось в качестве критерия локализации, альтернативного критерию Эконому-Козна, обсуждавшемуся выше в разделе 2.1 /6,102/. Грубо говоря, эта величина, взятая при  $\vec{r} = \vec{r}'$ , обратно пропорциональна числу атомных орбиталей, дающих эффективный вклад в суперпозицию, соответствующую состоянию  $\nu$ .

Появление  $\delta(\omega)$  - особенности в спектральной плотности (3.7), (3.8) является проявлением неэргодичности в системе /103/, и соответствует появлению постоянных по времени вкладов в соответствующих корреляционных функциях. В данном случае, такие вклады возникают, например, в запаздывающей функции Грина типа плотность-плотность /101/. Важно однако, что  $\delta(\omega)$  - аномалия спектральной плотности не дает вклада в коммутаторные функции Грина, определяющие линейный отклик в теории Кубо /103,104/. Появление этих аномалий приводит к отличию статического адиабатического и изотермического откликов системы /104,105/. Мы еще вернемся (Глава 5) к обсуждению этого вопроса. Связь локализации с неэргодическим поведением, фактически, отмечалась еще в первой работе Андерсона /1/.

Из общих свойств (3.5), (3.6), при  $\vec{q} \rightarrow 0$  получаем /101/:

$$\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle_{\vec{q}} \approx \{1 - R_{loc}^2(E) q^2\} \delta(\omega) + q^2 \rho_E(\omega) \quad (3.10)$$

где

$$R_{loc}^2(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho_E(\omega) = \frac{1}{2dN(E)} \int d^d r r^2 \left\langle \sum_{\nu} \delta(E - \epsilon_{\nu}) |\varphi_{\nu}(\vec{r})|^2 |\varphi_{\nu}(0)|^2 \right\rangle \quad (3.11)$$

что можно принять в качестве определения радиуса локализации.

Делокализация соответствует расплыванию  $\delta$  - функциональной особенности в (3.8) при конечных  $\vec{q}$ . Простейший вариант такого расплывания, дающий диффузионное поведение, имеет вид:



$$\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}} = \frac{1}{\pi} \frac{\mathcal{D}_E q^2}{\omega^2 + (\mathcal{D}_E q^2)^2} \quad (3.12)$$

и представляет собой, как это было подчеркнуто в /101/, лишь частный случай возможного "металлического" поведения  $\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}}$  при малых  $\vec{q}$ .

Нетрудно показать /101/, что электропроводность системы:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \left( -\frac{i\omega}{q^2} \right) e^2 \chi^R(\vec{q}, \omega) = \\ &= \lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \frac{i\omega}{q^2} e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' N(E) \frac{f(E) - f(E+\omega')}{\omega - \omega' + i\delta} \langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega'} \rangle\rangle_{\vec{q}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $\chi^R(\vec{q}, \omega)$  - запаздывающая функция отклика типа плотность-плотность, определяемая соответствующей коммутаторной функцией Грина,  $f(E)$  - функция Ферми,  $e$  - заряд электрона. Используя здесь (3.8), видим, что в соответствии с отмеченным выше общим свойством, величина  $A_E(\vec{q})$  не дает вклада в проводимость.

С учетом (3.10) получаем:

$$\sigma(\omega) \simeq -i\omega e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' N(E) \omega' \left( -\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) \frac{\rho_E(\omega')}{\omega - \omega' + i\delta} \quad (3.14)$$

$$\text{Re } \sigma(\omega) \simeq \pi e^2 \omega^2 N(E_F) \rho_{E_F}(\omega)$$

так что поведение  $\text{Re } \sigma(\omega)$  при малых частотах целиком определяется функцией  $\rho_E(\omega)$  ("регулярной" частью спектральной плотности (3.8)). Таким образом "сигнал о локализации" (величина  $A_E(\vec{q})$ ) и частотная зависимость проводимости, при столь общем рассмотрении, строго говоря связаны лишь косвенным образом (например лишь через правила сумм типа (3.5), (3.6)). В диффузионном (металлическом) режиме, используя (3.12) получаем:

$$\sigma(\omega) \approx \frac{e^2}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' N(E) \left( -\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) \frac{1}{\pi} \frac{D_E \omega'}{\omega - \omega' + i\delta} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \quad (3.15)$$

$$\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} e^2 N(E_F) D_{E_F}$$

т.е. стандартный результат для металлической проводимости, причем величина  $D_E$  представляет собой коэффициент диффузии электрона с энергией  $E$ .

Поскольку величина  $A'_E(\vec{q})$  в (3.8) "сигнализирует" о локализации электронных состояний с энергией  $E$ , полезно перейти /100/ к ее определению из стандартного формализма (функций Грина). Используя обычное определение неусредненной запаздывающей и опережающей одноэлектронных функций Грина:

$$G^{R,A}(\vec{r}\vec{r}'E) = \sum_{\nu} \frac{\varphi_{\nu}(\vec{r})\varphi_{\nu}^*(\vec{r}')}{E - \epsilon_{\nu} \pm i\delta} \quad (3.16)$$

и определение (3.3), немедленно получаем:

$$\langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle = \frac{1}{\pi^2 N(E)} \langle \text{Im} G^{R,A}(\vec{r}\vec{r}'E+\omega) \text{Im} G^{R,A}(\vec{r}\vec{r}'E) \rangle = \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 N(E)} \text{Re} \left\{ \langle G^R(\vec{r}\vec{r}'E+\omega) G^A(\vec{r}\vec{r}'E) \rangle - \langle G^{R,A}(\vec{r}\vec{r}'E+\omega) G^{R,A}(\vec{r}\vec{r}'E) \rangle \right\}$$

или, в импульсном представлении:

$$\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}} = \frac{1}{\pi N(E)} \text{Im} \left\{ \phi_E^{RA}(\omega\vec{q}) - \phi_E^{RR}(\omega\vec{q}) \right\} \quad (3.18)$$

где ввели, для краткости, следующее обозначение для двухчастичной функции Грина /106/:

$$\phi_E^{RA(R)}(\vec{q}\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\vec{p}\vec{p}'} \langle G^R(\vec{p}_+\vec{p}'_+E+\omega) G^{A(R)}(\vec{p}_-\vec{p}'_-,E) \rangle \quad (3.19)$$

где  $\vec{p}_\pm = \vec{p} \pm \frac{1}{2}\vec{q}$ . При малых  $\vec{q}$  и  $\omega$  функции  $\phi_E^{RR}(\vec{q}, \omega)$  и  $\phi_E^{AA}(\vec{q}, \omega)$  не сингулярны [106, 107]. Поэтому ясно, что  $\delta$ -функциональный вклад в (3.7), (3.8), отвечающий появлению локализованных состояний, может возникнуть только из первого члена в (3.18). Используя в (3.8) формальный переход от  $\omega$  к  $\omega + i\delta$  ( $\delta \rightarrow 0^+$ ), т.е. "размазывая"  $\delta$ -функцию и сравнивая с (3.18), немедленно получаем выражение для "амплитуды"  $A_E(\vec{q})$  перед  $\delta$ -функцией в (3.8) через двухчастичную функцию Грина [100]:

$$A_E(\vec{q}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N(E)} \delta \operatorname{Im} \phi_E^{RA}(\omega + i\delta, \vec{q}) \Big|_{\omega=0} = \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{2\pi N(E)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \operatorname{Re} \langle G^R(\vec{p}_+, \vec{p}'_+, E + i\delta) G^A(\vec{p}'_-, \vec{p}_-, E - i\delta) \rangle$$

Переходя к координатному представлению, имеем:

$$A_E(\vec{r} - \vec{r}') = \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{q}(\vec{r} - \vec{r}')} A_E(\vec{q}) = \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi N(E)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \langle |G(\vec{r}\vec{r}'E + i\delta)|^2 \rangle$$

Полезно ввести также величину:

$$A_E \equiv A_E(\vec{r} - \vec{r}') \Big|_{\vec{r} = \vec{r}'} = \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} A_E(\vec{q}) = \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{2\pi N(E)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \langle |G(\vec{r}\vec{r}E + i\delta)|^2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi N(E)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \operatorname{Re} \langle G^R(\vec{p}_+, \vec{p}'_+, E + i\delta) G^A(\vec{p}'_-, \vec{p}_-, E - i\delta) \rangle$$

Очевидно, что в области локализованных состояний ( $E < E_c$ , "ниже" порога подвижности) имеем  $A_E > 0$ . В тоже время, учитывая физический смысл функции Грина, как амплитуды вероятности перехода,

и сравнивая (3.22) с (2.4), (2.8), видим, что величина (3.22) пропорциональна усредненной вероятности возврата электрона с данной энергией  $E$  в начальную точку за бесконечное время. Поэтому условие отличия (3.22) от нуля представляет собой не что иное, как усредненный критерий локализации Эконому-Коэна, обсуждавшийся выше в связи с моделью Андерсона. В этом смысле критерии локализации Эконому-Коэна и Березинского-Горькова просто эквивалентны /100/.

Как мы видели в (3.10), при  $\vec{q} = 0$  имеем общее свойство  $A_E(\vec{q}=0) = 1$ , легко убедиться, что оно эквивалентно условию:

$$\phi_E^{RA}(\omega 0) = -\frac{N(E)}{\omega} \quad (3.23)$$

Такая расходимость при  $\omega \rightarrow 0$  является следствием сохранения числа частиц (уравнения непрерывности) /106, 107/.

Для нахождения величины  $\phi_E^{RA}(\omega \vec{q})$  (3.19) нужно уметь вычислять двухчастичную функцию Грина вида (Рис.3.1(а)):

$$\phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) = -\frac{1}{2\pi i} \langle G^R(\vec{p}_+\vec{p}_+ E+\omega) G^A(\vec{p}'_-\vec{p}_- E) \rangle \quad (3.24)$$

Хорошо известно /17, 99, 106, 107/, что в рамках диаграммной техники Эдвардса она определяется интегральным уравнением Бете-Солпитера (Рис.3.1(г)):

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) = & G^R(E+\omega\vec{p}_+) G^A(E\vec{p}_-) \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \delta(\vec{p}-\vec{p}') + \right. \\ & \left. + \sum_{\vec{p}''} U_{\vec{p}\vec{p}''}^E(\vec{q}\omega) \phi_{\vec{p}''\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $G^{R,A}(E\vec{p})$  - полная усредненная запаздывающая (опережающая) одноэлектронная функция Грина, а неприводимая вершинная часть  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$  определяется суммой всех графиков, неразрезаемых

$$\begin{aligned}
 & -2\pi i \Phi_{pp'}^{RA}(Eq\omega) = \frac{G^R(E+\omega p_+)}{G^A(Ep_-)} + \frac{G^R(E+\omega p_+) G^R(E+\omega p'_+)}{G^A(Ep_-) G^A(Ep'_-)} \quad (a) \\
 & \begin{array}{c} \circ \\ E+\omega p_+ \quad E+\omega p'_+ \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ E p_- \quad E p'_- \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ U \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ U \quad \Gamma \end{array} \quad (b) \\
 & \begin{array}{c} E+\omega p_+ \quad E+\omega p'_+ \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ E p_- \quad E p'_- \end{array} = \begin{array}{c} p_+ \quad p'_+ \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ p_- \quad p'_- \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \quad (b) \\
 & -2\pi i \Phi_{pp'}^{RA}(Eq\omega) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ U \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ U \quad \Gamma \end{array} = \\
 & = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \left\{ 1 + \boxed{U} (-2\pi i \Phi_{pp'}^{RA}(Eq\omega)) \right\} \quad (g)
 \end{aligned}$$

Рис.3.1. (а) Графическое определение двухчастичной функции Грина (3.24).

(б) Уравнение для полной вершинной части  $\Gamma_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$ .

(в) Типичные графики для неприводимой вершины  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$ .

(г) Уравнение Бете-Солпитера (3.25).

Пунктирная линия обозначает "взаимодействие"

$U_0(\vec{p}-\vec{p}') = \rho |V(\vec{p}-\vec{p}')|^2$ , где  $\rho$  - плотность рассеивателей,  $V(\vec{p}-\vec{p}')$  - фурье-образ потенциала отдельного рассеивающего центра.

по двум линиям (опережающей и запаздывающей) (Рис.3.1(в)).

Исследуем теперь вопрос о том, может-ли решение уравнения (3.25) привести к двухчастичной функции Грина, содержащей особенности, отвечающие локализации. Предположим, что в области энергий, где в системе существуют локализованные состояния  $\Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega)$  имеет полюсный вклад:

$$\Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega) = -\frac{\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E)\Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E)}{\omega + i\delta} + \tilde{\Phi}_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega) \quad (3.26)$$

где  $\tilde{\Phi}_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega)$  - регулярная часть, а факторизация вычета в полюсе (в импульсном представлении!) предполагается по аналогии с задачей о связанном состоянии. Впоследствии мы увидим, что это предположение может быть, в определенном смысле, оправдано.

Из (3.19) и (3.26) сразу же получаем:

$$\Phi_E^{RA}(\vec{q}\omega) = -\frac{\chi_{\vec{q}}(E)\chi_{-\vec{q}}(E)}{\omega + i\delta} + \sum_{\vec{p}\vec{p}'} \tilde{\Phi}_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega) \quad (3.27)$$

где ввели:

$$\chi_{\vec{q}}(E) = \sum_{\vec{p}} \Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E) \quad (3.28)$$

Тогда из (3.20) следует:

$$A_E(\vec{q}) = \frac{1}{N(E)} \chi_{\vec{q}}(E)\chi_{-\vec{q}}(E) \quad (3.29)$$

Нетрудно видеть, что  $\chi_{\vec{q}}^*(E) = \chi_{-\vec{q}}(E)$ ,  $A_E(\vec{q}) > 0$ . Из общего свойства  $A_E(\vec{q}=0) = 1$  следует условие нормировки:

$$\chi_0(E) = \sqrt{N(E)} \quad (3.30)$$

а из предельного поведения (3.10) получаем:

$$\chi_{\pm\vec{q}}(E) \approx \sqrt{N(E)} \{1 \pm iR_{lc}(E)q\}^{-1}; \quad q \rightarrow 0 \quad (3.31)$$

Для "вероятности возврата" (3.22) из этих формул следует:

$$A_E = \frac{1}{N(E)} \sum_{\vec{q}} \chi_{\vec{q}}(E) \chi_{-\vec{q}}(E) \quad (3.32)$$

При подстановке (3.26) в (3.25) полюсный член доминирует ( $\omega \rightarrow 0$ ), и мы получаем, в полной аналогии с задачей о связанном состоянии, однородное интегральное уравнение Бете-Солпитера, определяющее  $\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E)$  :

$$\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E) = G^R(E\vec{p}_+) G^A(E\vec{p}_-) \sum_{\vec{p}'} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega=0) \Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E) \quad (3.33)$$

Локализации отвечало-бы возникновение нетривиального решения  $\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E) \neq 0$  уравнения (3.33), которое оставалось-бы отличным от нуля в целой области энергий  $E < E_c$ , где  $E_c$  - порог подвижности. Однако может оказаться, что с помощью уравнения (3.33) можно определить лишь положение порога  $E_c$ , как точки на оси энергий, в которой возникает первое нетривиальное решение этого уравнения. Для описания же области  $E < E_c$  может потребоваться выход за рамки теории возмущений, определяющей структуру уравнения Бете-Солпитера.

Очевидно, что анализ уравнения (3.33) в общем виде невозможен и нужно использовать какие-то приближения для функций  $G^{R,A}(E\vec{p})$  и  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega=0)$ . Мы воспользуемся простейшим приближением для  $G^{R,A}(E\vec{p})$ , справедливым в области применимости теории возмущений [17,99,107]:

$$G^{R,A}(E\vec{p}) = \frac{1}{E - p^2/2m \pm i\gamma(E)} \quad (3.34)$$

где

$$\gamma(E) = \pi \rho V^2 N(E) \quad (3.35)$$

"борновское" затухание за счет столкновений электронов с примесями. Для простоты считаем рассеиватели точечными. Этот результат, как

известно, получается суммированием графиков Рис.3.2(а), не содержащих перекрещивающихся линий "взаимодействия", т.е. графиков типа показанного на Рис.3.2(б). Условием применимости этого приближения обычно является выполнение неравенства  $E \gg \gamma(E)$ .

Как было впервые замечено в работе /108/, по крайней мере для  $d \rightarrow 2$ , эффекты локализации тесно связаны со специфической последовательностью "максимально-перекрещивающихся" графиков для  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$ , показанных на Рис.3.2(в). Еще раньше такая последовательность графиков была рассмотрена в работе Лангера и Нила /109/. С использованием (3.34) эта последовательность без труда суммируется и мы получаем ("куперон") /106,108/:

$$U_{\vec{p}\vec{p}'}^{EC}(\vec{q}\omega) = \frac{2\gamma(E)\rho V^2}{\Phi_0^E (\vec{p} + \vec{p}')^2 - i\omega} \quad (3.36)$$

где:

$$\Phi_0^E = \frac{E}{m d \gamma(E)} \equiv \frac{1}{d} \frac{v_E^2}{2\gamma(E)} \quad (3.37)$$

- классический коэффициент диффузии. Помимо уже использованного условия применимости теории возмущений  $\gamma(E) \ll E$  следует иметь в виду, что для справедливости выражения (3.36) нужно еще потребовать выполнения условия применимости диффузионного приближения  $|\vec{p} + \vec{p}'| \ll \ell^{-1}$ , где  $\ell \sim \sqrt{\frac{E}{m}} \gamma^{-1}(E)$  - длина свободного пробега электрона. Вблизи порога подвижности, когда как мы увидим (см. также Главу I),  $E \sim \gamma(E)$ , это условие эквивалентно  $|\vec{p} + \vec{p}'| \ll \ll \sqrt{2mE} \simeq p_F$  ( $p_F$  - фермиевский импульс электрона).

В итоге, с использованием (3.34), (3.36) уравнение (3.33) принимает вид:

$$\left\{ E - \frac{1}{2m} (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q})^2 + i\gamma(E) \right\} \left\{ E - \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q})^2 - i\gamma(E) \right\} \Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E) = \\ = \lambda(E) \int \frac{d^d \vec{p}'}{(2\pi)^d} \frac{\Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E)}{(\vec{p} + \vec{p}')^2} \quad (3.38)$$



$$\begin{aligned}
 G(E\rho) &= \text{---} \rightarrow + \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow + \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow + \dots \\
 (a) &+ \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow + \dots \\
 (b) &+ \text{---} \rightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow + \dots \\
 U_{pp'}^{EC}(q\omega) &= \begin{array}{c} E+\omega \\ \rho_+ \text{---} \rho'_+ \\ | \\ p-p' \\ | \\ \rho_- \text{---} \rho'_- \\ E \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \rightarrow \end{array} + \dots \\
 (b) &
 \end{aligned}$$

Рис.3.2. (а),(б) Графики, определяющие одноэлектронную функцию Грина.

(в) Графики Лангера-Нила для неприводимой вершинной части уравнения Бете-Солпитера ("куперон").

где  $\lambda(E) = 2dm\gamma^2(E)\rho V^2/E$ . После перехода к безразмерным переменным  $\vec{p} \rightarrow \vec{p}/\sqrt{2mE}$ , это уравнение переписывается как:

$$\Psi_{-\vec{p}}^{\vec{q}}(E) = \frac{\lambda_E}{\left\{1 - (\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q})^2 + \frac{i\chi}{E}\right\} \left\{1 - (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q})^2 - \frac{i\chi}{E}\right\}} \int d^d\vec{p}' \frac{\Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E)}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2} \quad (3.39)$$

где  $\lambda_E = \frac{4m^2}{(2\pi)^d} (2mE)^{\frac{d}{2}-3} \lambda(E)$ . Интегрирование в (3.39) идет по  $d$ -мерному шару с радиусом  $\sim p_0/\sqrt{2mE}$ , где  $p_0 \sim a^{-1}$  ( $a$  - "наименьшая длина" в рассматриваемой модели).

Однородное интегральное уравнение (3.39) напоминает аналогичное уравнение, возникающее в релятивистской модели Вика-Каткосского /ИЮ-ИИ2/, описывающей образование связанных состояний скалярных частиц за счет обмена безмассовым квантом. Нетрудно перейти к симметризованному уравнению:

$$\tilde{\Psi}_{-\vec{p}}^{\vec{q}}(E) = \lambda_E \int d^d\vec{p}' K_{\vec{q}}^E(\vec{p}, \vec{p}') \tilde{\Psi}_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E) \quad (3.40)$$

где:

$$\tilde{\Psi}_{-\vec{p}}^{\vec{q}}(E) = \sqrt{R_{\vec{q}}^{-1}(\vec{p})} \Psi_{-\vec{p}}^{\vec{q}}(E)$$

$$R_{\vec{q}}(\vec{p}) = \left\{1 - (\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q})^2 + \frac{i\chi}{E}\right\}^{-1} \left\{1 - (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q})^2 - \frac{i\chi}{E}\right\}^{-1} \quad (3.41)$$

$$R_{\vec{q}}(\vec{p}) = R_{\vec{q}}^*(-\vec{p}) ; R_{\vec{q}}(\vec{p}) = R_{-\vec{q}}^*(\vec{p})$$

Здесь

$$K_{\vec{q}}^E(\vec{p}, \vec{p}') = R_{\vec{q}}^{1/2}(\vec{p}) R_{\vec{q}}^{1/2}(-\vec{p}') \frac{1}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2} \quad (3.42)$$

- симметричное (эрмитово) ядро положительного типа /ИИ3/:

$$K_{\vec{q}}^E(\vec{p}, \vec{p}') = K_{\vec{q}}^{*E}(\vec{p}', \vec{p}) ; K_{-\vec{q}}^E(\vec{p}, \vec{p}') = K_{\vec{q}}^{*E}(\vec{p}, \vec{p}') \\ K_{\vec{q}=0}^E(\vec{p}, \vec{p}') > 0 \quad (3.43)$$

Очевидно, что

$$|K_{\vec{q}}^E(\vec{p}, \vec{p}')| < \frac{E^2}{\gamma^2} \frac{1}{|\vec{p} - \vec{p}'|^2} \quad (3.44)$$

Отсюда видно, что при  $2 < d < 4$  рассматриваемое уравнение является уравнением со слабой особенностью /IIЗ/, при  $d \geq 4$  имеем уравнение Фредгольма. Будучи вполне непрерывным оператором, интегральное ядро рассматриваемого типа обладает конечным или счетным спектром собственных значений, лежащим на отрезке вещественной оси, длина которого определяется нормой интегрального оператора  $\|K\|$ , которая, в данном случае, определяется неравенством:

$$\|K\Psi\|^2 \equiv \left\{ \int d^d \vec{p}' K_{\vec{q}}^E(\vec{p}, \vec{p}') \Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E) \right\}^2 \leq \|K\|^2 \left\{ \int d^d \vec{p}' \Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E) \right\}^2 \quad (3.45)$$

для любой интегрируемой с квадратом функции  $\Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E)$ . Интегрируемость  $\Psi_{\vec{p}'}^{\vec{q}}(E)$  нужна хотя бы для того, чтобы решение (3.39) определяло  $\chi_{\vec{q}}(E)$  по (3.28). Известно, что первое собственное значение такого ядра является положительным и простым, а соответствующая собственная функция является положительно определенной /IIЗ/. Из (3.44) очевидно, что норма рассматриваемого оператора

$$\|K\| < \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{E^2}{\gamma^2} \frac{\mathcal{D}_\Omega^{d-2}}{d-2} \quad (3.46)$$

где  $\mathcal{D}_\Omega$  - диаметр области интегрирования. Может показаться, что  $\mathcal{D}_\Omega \sim p_0/\sqrt{2mE}$ , однако легко видеть, что обрезание интегрирования по  $\vec{p}'$  в (3.40), фактически обеспечивается множителем  $\left\{ (1-p'^2)^2 + \gamma^2/E^2 \right\}^{-1/2}$ , который при  $\gamma \ll E$  имеет острый максимум при  $p' \approx 1$  с шириной  $\sim \gamma/E$ . Поэтому обрезание происходит при  $p' \approx 1$  (т.е.  $p' \sim \sqrt{2mE}$  в размерных переменных) так, что  $\mathcal{D}_\Omega \sim 1$ . Отсюда ясно, что анализируемое уравнение не имеет нетривиальных решений при:

$$\lambda_E < \left\{ \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{d-2} \frac{E^2}{\gamma^2} \right\}^{-1} \quad (3.47)$$

Видим, что нетривиальные решения отсутствуют в области энергий, определяемой неравенством:

$$E > \left( \frac{A_d}{d-2} \right)^{\frac{2}{4-d}} E_{sc} \quad (3.48)$$

где ввели характерную энергию (ср. Главу I) /10, 100/:

$$E_{sc} = m \frac{d}{0} (\rho V^2)^{\frac{2}{4-d}} \quad (3.49)$$

$A_d = 2^{1-d/2} \pi^{-d/2} d / \Gamma(d/2)$ . Как мы уже видели в Главе I, условие  $E \sim E_{sc}$  эквивалентно  $\chi(E) \sim E$  и определяет порог применимости теории возмущений. В области "сильной связи"  $E \lesssim E_{sc}$  проведенный отбор диаграмм несправедлив и требуется учет всех диаграмм теории возмущений. Из (3.48) ясно, что пороговая энергия  $E_c$ , в которой возникает первое нетривиальное решение уравнения (3.38) попадает при  $d=3$  непосредственно в область "сильной связи"  $E < E_{sc} = m^3 (\rho V^2)^2$ . При  $d \rightarrow 2$  область энергий, где решение заведомо отсутствует, "уходит" на бесконечность:  $E_c \rightarrow \infty$ , что соответствует представлениям о полной локализации при  $d=2$  (Глава I). Может показаться, что при  $d \rightarrow 2$ , в силу  $E_c \gg E_{sc}$ , порог подвижности оказывается в области применимости теории возмущений. Ниже мы увидим, что это не так, поскольку критерий применимости теории возмущений для  $d \rightarrow 2$  требует уточнения и, фактически, совпадает с неравенством (3.48) (см. обсуждение в Главе 4).

Из проведенного анализа ясно, что однородное уравнение Бете-Солпитера типа (3.33), основанное на теории возмущений, не может корректно описать область энергий, соответствующих локализованным состояниям, хотя-бы ввиду дискретности его спектра в области  $E < E_c$ , которая, вероятно, сохраняется и в более сложных приближениях. В тоже время ясно, что положение самого порога подвижности, как точки "неустойчивости" металлической "фазы", которой впервые возникает нетривиальное решение  $\psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E) \neq 0$  этого уравнения, искать можно, используя те или иные приближения для  $G^{R,A}(E\vec{p})$ ,  $U_{\vec{p}\vec{p}}^E(\vec{q}\omega)$ .

## 3.2. Основы самосогласованной теории локализации.

Существенным шагом вперед в развитии теории локализации, позволившем перейти к практическим вычислениям физических величин вблизи порога подвижности в рамках стандартного формализма усредненных функций Грина, стала разработка так называемой самосогласованной теории локализации. Первоначальный вариант этой теории был предложен в работах Гётце /114-116/. В дальнейшем значительный вклад в развитие этой теории был внесен работами Фоллхарда и Волфле /106, 117, 118/, которые дали диаграммную формулировку этой теории, основанную на некотором самосогласованном обобщении формализма уравнения Бете-Солпитера. Основным преимуществом этого подхода является его простота и известный автоматизм, позволяющий проводить дальнейшие обобщения. В этом разделе мы, в основном, следуем схеме изложения, принятой в обзоре автора /119/, имея в виду рассмотреть результаты, полученные в этом подходе автором совместно с А.В.Мясниковым /120/, а также привести ряд результатов, необходимых для понимания в дальнейшем.

Используя в (3.25) соотношение:

$$G^R(E+\omega\vec{p}_+) G^A(E\vec{p}_-) = - \frac{\Delta G_{\vec{p}}}{\omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} - \sum^R(E+\omega\vec{p}_+) + \sum^A(E\vec{p}_-)} \quad (3.50)$$

где

$$\Delta G_{\vec{p}} = G^R(E+\omega\vec{p}_+) - G^A(E\vec{p}_-) \quad (3.51)$$

а  $\sum^{R,A}(E\vec{p})$  - собственно-энергетическая части соответствующих функций Грина, перепишем уравнение Бете-Солпитера (3.25) в виде:

$$\left\{ \omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} - \sum^R(E+\omega\vec{p}_+) + \sum^A(E\vec{p}_-) \right\} \phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega) = \\ = \Delta G_{\vec{p}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \delta(\vec{p}-\vec{p}') - \sum_{\vec{p}'} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega) \phi_{\vec{p}'\vec{p}'}^{RA}(E\vec{q}\omega) \right\} \quad (3.52)$$

Имея ввиду электронную систему при  $T = 0$  положим сразу  $E = E_F$ . Суммируя обе части (3.53) по  $\vec{p}$  и  $\vec{p}'$ , и используя точное тождество Уорда /106/:

$$\sum^R (E + \omega \vec{p}_+) - \sum^A (E \vec{p}_-) = \sum_{\vec{p}'} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega) \Delta G_{\vec{p}} \quad (3.54)$$

получаем уравнение (в низшем порядке по  $\omega$  и  $\vec{q}$ )

$$\omega \phi_E^{RA}(\omega \vec{q}) - v_F q \phi_{1E}^{RA}(\omega \vec{q}) = -N(E) \quad (3.55)$$

где

$$\phi_{1E}^{RA}(\omega \vec{q}) = \sum_{\vec{p}\vec{p}'} (\hat{p} \cdot \hat{q}) \phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E \vec{q} \omega) \quad (3.56)$$

Здесь  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$  - единичные вектора в направлении  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ ,  $v_F = \frac{p_F}{m} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$  - скорость Ферми. Умножая теперь (3.53) на  $(\hat{p} \cdot \hat{q})$  и снова суммируя по  $\vec{p}$ ,  $\vec{p}'$  с использованием (3.54), а также приближенного представления /106/:

$$\sum_{\vec{p}'} \phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E \omega \vec{q}) \approx -\frac{\Delta G_{\vec{p}}}{2\pi i N(E)} \sum_{\vec{p}'\vec{p}''} \{1 + d(\hat{p} \cdot \hat{q})(\hat{p}'' \cdot \hat{q})\} \phi_{\vec{p}''\vec{p}'}^{RA}(E \omega \vec{q}) \quad (3.57)$$

после некоторых преобразований получаем:

$$\{\omega + M_E(\vec{q}\omega)\} \phi_{1E}^{RA}(\omega \vec{q}) - \frac{2E}{m d} q^2 \phi_E^{RA}(\omega \vec{q}) = 0 \quad (3.58)$$

где введено релаксационное ядро /106/:

<sup>I</sup>В (3.57) оставлены лишь два первых члена разложения по соответствующей угловой переменной. Приближенная справедливость (3.57) (при  $\omega \rightarrow 0, \vec{q} \rightarrow 0$ ) легко проверяется суммированием обеих частей по  $\vec{p}$ , в том числе с домножением на  $(\hat{p} \cdot \hat{q})$ . В Приложении I приводится несколько более общая формальная схема, включающая вывод выражений для "треугольных" вершин теории через релаксационное ядро (3.59).

$$M_E(\vec{q}\omega) = 2i\gamma(E) + \frac{id}{2\pi N(E)} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} (\hat{p} \cdot \hat{q}) \Delta G_{\vec{p}} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega) \Delta G_{\vec{p}'} (\hat{p}' \cdot \hat{q}) \quad (3.59)$$

причем при записи (3.59) мы использовали также и простейшее приближение (3.34) при выписывании явных выражений для  $\sum^{RA}(E\vec{p})$ . Таким образом удастся перейти от точного уравнения Бете-Солпитера для  $\Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q})$  к приближенной, но замкнутой системе уравнений (3.55), (3.58), решение которой сразу же дает функцию  $\Phi_E^{RA}(\omega\vec{q})$  знания которой достаточно, согласно рассмотрению предыдущего раздела, для нахождения всех интересующих нас характеристик системы:

$$\Phi_E^{RA}(\vec{q}\omega) = -N(E) \frac{\omega + M_E(\vec{q}\omega)}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{2E}{md} q^2} \quad (3.60)$$

Посмотрим, каким образом из этих общих соотношений может быть получено явление локализации. Нетрудно видеть, что в условиях существования предела:

$$R_{\vec{q}}^2(E) = -\frac{2E}{dm} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega M_E(\vec{q}\omega)} > 0 \quad (3.61)$$

из (3.60) выделяется сингулярный вклад типа (3.27):

$$\begin{aligned} \Phi_E^{RA}(\vec{q}\omega) &\underset{\omega \rightarrow 0}{\approx} -\frac{N(E)}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{2E}{md} \frac{q^2}{\omega M_E(\vec{q}\omega)}} \\ &= -\frac{N(E)}{\omega} \frac{1}{1 + R_{\vec{q}}^2(E) q^2} = -\frac{1}{\omega} \chi_{\vec{q}}(E) \chi_{-\vec{q}}(E) \end{aligned} \quad (3.62)$$

причем

$$\chi_{\pm\vec{q}}(E) = \frac{\sqrt{N(E)}}{1 \pm iq R_{\vec{q}}(E)} \quad (3.63)$$

что удовлетворяет всем общим требованиям (3.29)-(3.31), в частности:

$$\begin{aligned} A_E(\vec{q}) &= \frac{1}{N(E)} \chi_{\vec{q}}(E) \chi_{-\vec{q}}(E) = \frac{1}{1 + R_{\vec{q}}^2(E) q^2} \\ &\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{1 - R_{loc}^2(E) q^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

где ввели радиус локализации как:

$$R_{loc}^2(E) = -\frac{2E}{\pi d} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega M_E(0\omega)} \quad (3.65)$$

Удобно ввести характерную частоту /106/:

$$\omega_0^2 = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega M_E(0\omega) > 0 \quad (3.66)$$

так, что

$$R_{loc}(E) = \sqrt{\frac{2E}{\pi d}} \frac{1}{\omega_0(E)} \quad (3.67)$$

Отсюда видно, что наличие локализации эквивалентно требованию конечности предела  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega M_E(0\omega)$ , т.е. конечности  $R_{loc}(E)$  или  $\omega_0(E)$ , или, иными словами, требованию расходимости релаксационного ядра (3.59):  $Re M_E(0\omega) = -\omega_0^2/\omega$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Именно такое поведение релаксационного ядра рассматривалось в качестве критерия локализации в работах /106, 114-118/. Здесь мы вывели его /119/ из несколько более общих соображений, основанных на критерии локализации, рассмотренном выше.

Нетрудно показать /106/, что при малых  $\omega$  и  $\vec{q}$ , запаздывающая функция отклика плотность-плотность  $\chi^R(\vec{q}\omega)$  определяется как:

$$\chi^R(\vec{q}\omega) = \omega \phi_E^{RA}(\vec{q}\omega) + N(E) + O(\omega, q^2) \quad (3.68)$$

Тогда из (3.60) имеем:

$$\chi^R(\vec{q}\omega) = -N(E) \frac{\frac{1}{d} v_F^2 q^2}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_F^2 q^2} \quad (3.69)$$

При малых  $\omega$ , пренебрегая  $\omega^2$  в знаменателе (3.60), (3.69), можем записать:

$$\phi_E^{RA}(\vec{q}\omega) = -N(E) \frac{1}{\omega + i D_E(\vec{q}\omega) q^2} \quad (3.70)$$

$$\chi^R(\vec{q}\omega) = N(E) \frac{i D_E(\vec{q}\omega) q^2}{\omega + i D_E(\vec{q}\omega) q^2} \quad (3.71)$$



где ввели, по-определению, обобщенный коэффициент диффузии /106/:

$$D_E(\vec{q}, \omega) = i \frac{2E}{dm} \frac{1}{M_E(\vec{q}, \omega)} = \frac{v_F^2}{d} \frac{i}{M_E(\vec{q}, \omega)} \quad (3.72)$$

Тогда из (3.13) и (3.69) получаем общее выражение для проводимости:

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi e^2}{m} \frac{i}{\omega + M_E(0, \omega)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} e^2 D_E(0, \omega) N(E) \quad (3.73)$$

где в первом выражении учтено  $\frac{\pi}{N(E)} = \frac{2E}{d}$ , где  $\pi$  - плотность электронов. Отсюда, в частности, видно, что обычному "металлическому" поведению (отличная от нуля статическая проводимость при  $T = 0$ ) соответствует  $M_E(0, \omega \rightarrow 0) = \frac{L}{\tau_E}$ , где  $\tau_E$  - играет роль обобщенного времени свободного пробега.

Итог проведенного обсуждения можно сформулировать в виде следующего поведения релаксационного ядра (3.59) при  $\vec{q} = 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ :

$$M_E(0, \omega) \approx \begin{cases} \frac{L}{\tau_E}; & E \geq E_c \\ \frac{L}{\tau_E} - \frac{\omega_0^2(E)}{\omega}; & E < E_c \end{cases} \quad (3.74)$$

Используя (3.74) в (3.60) и определяя спектральную плотность Березинского-Горькова с помощью (3.18), пренебрегая в нем вкладом

$\text{Im} \phi_E^{RR}(\omega, \vec{q})$  не сингулярным при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\vec{q} = 0$ , получаем для нее явное выражение, справедливое при малых  $\omega$  и  $\vec{q}$ :

$$\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle_{\vec{q}} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{D_E q^2}{\omega^2 + (D_E q^2)^2}; & E \geq E_c \\ A_E(\vec{q}) \delta(\omega) + \frac{1}{\pi} \frac{D_E q^2}{\omega^2 + [\omega_0^2(E) \tau_E + D_E q^2]^2}; & E < E_c \end{cases} \quad (3.75)$$

где

$$A_E(\vec{q}) = \frac{\omega_0^2(E) \tau_E}{\omega_0^2(E) \tau_E + D_E q^2} = \frac{1}{1 + R_{loc}^2(E) q^2} \quad (3.76)$$

причем мы ввели, по-определению, еще и перенормированный коэффициент

ент диффузии:

$$\mathcal{D}_E = \frac{2E}{dm} \tau_E = \frac{1}{d} v_F^2 \tau_E \quad (3.77)$$

Нашей задачей является теперь получение поведения (3.74) как решения общих уравнений микроскопической теории. После использования приближения (3.34) для одноэлектронной функции Грина вид релаксационного ядра  $M_E(\vec{q}\omega)$  целиком определяется аппроксимацией вершинной части  $U_{pp'}^E(\vec{q}\omega)$  в (3.59). Приближение Фоллхарда и Вольфле /106/ основано на использовании для  $U_{pp'}^E(\vec{q}\omega)$  выражения (3.36), полученного суммированием графиков Лангера-Нила (Рис.3.2(в)). После некоторых преобразований из второго члена в (3.59) при этом возникает следующий вклад в  $M_E(0\omega)$  :

$$\delta M_E^C(0\omega) = -2\rho V^2 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega + i\mathcal{D}_0^E k^2} \quad (3.78)$$

Этого приближения, самого по себе, еще недостаточно для получения локализации. Основная идея самосогласованной теории локализации состоит в замене классического коэффициента диффузии в знаменателе (3.78) на обобщенный коэффициент диффузии (3.72), который в свою очередь определяется через релаксационное ядро /II4, II5, II6/. В результате (3.59) дает уравнение самосогласования для определения ядра  $M_E(0\omega)$  или обобщенного коэффициента диффузии /106, II8/:

$$M_E(\omega) = 2i\gamma(E) \left\{ 1 + \frac{1}{\pi N(E)} \sum_{|\vec{k}| < k_0} \frac{i}{\omega - \frac{2E}{dm} \frac{k^2}{M_E(\omega)}} \right\} \quad (3.79)$$

или

$$\frac{\mathcal{D}_0^E}{\mathcal{D}_E(\omega)} = 1 + \frac{1}{\pi N(E)} \sum_{|\vec{k}| < k_0} \frac{1}{-i\omega + \mathcal{D}_E(\omega) k^2} \quad (3.80)$$

Выбор величины импульса обрезания  $k_0$  в (3.79), (3.80) подробно обсуждается ниже. Наиболее строгий вывод уравнения самосогласования (3.79), (3.80), основанный на общем диаграммном анализе с от-

брасыванием менее сингулярных при  $\omega \rightarrow 0$ , для  $d \geq 2$ , вкладов был дан в работе /118/. Ниже мы еще вернемся к анализу ряда простейших поправок к (3.79), (3.80).

Первоначально /106/ уравнение самосогласования (3.79), (3.80) рассматривалось лишь для случая  $d \leq 2$ . Фактически, используемое приближение, основанное на суммировании диаграмм Лангера-Нила, специально приспособлено для этого случая, поскольку эти диаграммы приводят к вкладам, доминирующим при  $d \rightarrow 2$  (см. ниже). Мы, однако, рассмотрим его решение для случая  $d > 2$ , представляющее наибольший интерес и проведенное независимо в работах /118, 120/. При этом, как мы увидим, получаются вполне разумные и, по-видимому, качественно правильные результаты для положения порога подвижности в зоне, а также и для поведения всех основных величин в его окрестности.

Из выражения (3.59) для  $M_E(\vec{q}\omega)$  видно, что в силу  $\Delta G_{\vec{p}} \sim \sim \text{Im } G^R(E, \vec{p}) \sim \delta(E - \frac{p^2}{2m})$  (последняя оценка, строго говоря, верна лишь при  $\gamma(E) \ll E$ , т.е. при слабом беспорядке), суммарный импульс  $\vec{k} = \vec{p} + \vec{p}'$  в  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$ , являющийся импульсом интегрирования в (3.79), (3.80), изменяется (по модулю) от нуля до импульсов порядка  $2p_F$ . С другой стороны, как отмечалось после выражения (3.36), оно справедливо лишь для  $|\vec{p} + \vec{p}'| \leq \ell^{-1}$ , где  $\ell \sim v_F \gamma^{-1}$  — длина свободного пробега (в борновском приближении). Отсюда ясно, что импульс обрезания в (3.79), (3.80) можно оценить как:

$$k_0 \sim \text{Min} \{ p_F; \ell^{-1} \} \sim \text{Min} \left\{ \sqrt{2mE}; m^{\frac{d+1}{2}} \rho V^2 E^{\frac{d-3}{2}} \right\} \quad (3.81)$$

Тогда видно, что при  $d < 4$  и при  $E \rightarrow 0$  (энергия Ферми уменьшается к краю зоны!), импульс обрезания определяется, по порядку величины, импульсом Ферми /120/:

$$k_0 = \chi_0 p_F = \chi_0 \sqrt{2mE} \quad (3.82)$$

где  $\chi_0 = \text{Const} \sim 1 \div 2$  (ср. также /II4-II6/). По нашему мнению такой выбор однозначен в наиболее интересной для нас области энергий, точка же зрения авторов работ /I06, II7, II8/ на эту проблему не вполне ясна. Впрочем, как это уже отмечалось выше, в связи с оценками, проведенными в Главе I, вблизи порога подвижности в силу  $E \sim \gamma(E)$  имеем и  $p_F \sim \ell^{-1}$ , так что оба выбора обрезания в этой области фактически эквивалентны. Это может быть не так при "отходе"  $E$  от  $E_c$  в металлическую область, когда с ростом  $E$  (или, что тоже самое  $p_F$ ), обрезание будет определяться критерием применимости "диффузионного" приближения  $k_0 \sim \ell^{-1}$ .

Переходя в (3.79) к безразмерной переменной интегрирования  $y = k / \chi_0 \sqrt{2mE}$ , представим это уравнение в следующем, удобном для вычислений виде /I20/:

$$M_E(\omega) = 2i\gamma(E) + d\lambda \chi_0^{d-2} M_E(\omega) \int_0^1 dy y^{d-1} \frac{1}{y^2 - \frac{d\omega}{4\chi_0 E^2} M_E(\omega)} \quad (3.83)$$

где

$$\lambda = \frac{\gamma(E)}{\pi E} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{d/2} \frac{E^{d/2-1}}{\Gamma(d/2)} \rho V^2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{d-4} \quad (3.84)$$

- безразмерная "константа связи" теории, при выводе которой мы использовали явный вид плотности состояний свободных электронов

$N(E) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{d/2} E^{d/2-1} / \Gamma(d/2)$ , а также определение энергии "сильной связи"  $E_{sc}$  (3.49). Обычное условие применимости теории возмущений, как отмечалось выше, подразумевает выполнение условия

$$\lambda \ll 1, \quad \text{что эквивалентно } E \gg E_{sc} \quad (\text{для } d < 4).$$

Полагая в (3.83)  $\omega = 0$  и рассматривая металлический режим, когда, согласно (3.74),  $\text{Re } M_E(\omega=0) = 0$ ,  $\text{Im } M_E(\omega=0) = \frac{1}{\tau_E}$ , получаем:

$$\tau_E = \frac{1}{2\gamma(E)} \left\{ 1 - \frac{d}{d-2} \lambda x_0^{d-2} \right\} \quad (3.85)$$

Тогда из (3.73) получаем статическую проводимость в виде:

$$\sigma = \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma(E)} \left\{ 1 - \left( \frac{E_c}{E} \right)^{\frac{4-d}{2}} \right\}; \quad 2 < d < 4 \quad (3.86)$$

где

$$E_c = \left\{ \frac{d}{d-2} \frac{x_0^{d-2}}{\Gamma(d/2)} (2\pi)^{-d/2} \right\}^{\frac{2}{4-d}} E_{sc} \quad (3.87)$$

причем опять возникла энергия  $E_{sc}$ , определенная выше в (3.49). Из (3.86) видно, что  $E_c$  играет роль порога подвижности, причем при  $E \gg E_c$ :

$$\sigma \approx \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma(E)} \left( \frac{4-d}{2} \right) \left( \frac{E - E_c}{E_c} \right); \quad 2 < d < 4 \quad (3.88)$$

так, что проводимость обращается в нуль на пороге подвижности линейно по  $E - E_c$ . Результат (3.87) находится в полном соответствии с оценкой  $E_c$ , полученной выше в (3.48).

Приведем явные оценки для  $d=3$ . В выражении (3.87) для  $E_c$  имеется явная зависимость от выбора параметра обрезания (константы  $\lambda_0$  в (3.82)). Принимая, для определенности,  $\lambda_0 = 1$  имеем:

$$E_c = \frac{9}{2\pi^4} m^3 (\rho V^2)^2 \quad (3.89)$$

Нетрудно видеть, что в терминах "безразмерной константы"  $\lambda$  из (3.84) это соответствует критическому значению  $\lambda_c = \frac{d-2}{d} x_0^{2-d} = \frac{1}{3}$  т.е.

$$\frac{E}{\gamma(E)} \Big|_{E=E_c} = \frac{3}{\pi}; \quad \rho_F \ell \Big|_{E=E_c} = \frac{3}{\pi} \quad (3.90)$$

где  $\ell = v_F / 2\gamma(E)$  - "борновская" длина свободного пробега, являющаяся мерой беспорядка в системе. "Критической" длине пробега из (3.90) соответствовала-бы "друдевская" проводимость:

$$\sigma_c = \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma(E_c)} = \frac{e^2 \rho_F}{3\pi^2 \hbar^2} \left( \frac{\rho_F \ell}{\hbar} \right) \Big|_{E=E_c} = \frac{e^2 \rho_F}{\pi^3 \hbar^2} \quad (3.91)$$

где учли, что  $\pi = \rho_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3$  и "восстановили"  $\hbar$ . Для  $\rho_F \sim \frac{\hbar}{a}$ , где  $a$  - межатомное расстояние,  $\sigma_c$  из (3.91) по порядку величины совпадает с моттовской оценкой минимальной металлической проводимости  $\sigma_{mm} / 2,3$ . Согласно (3.88) величина  $\sigma_c$  определяет характерный масштаб изменения проводимости вблизи порога подвижности (т.е. при  $E \gtrsim E_c$ ). Перепишывая (3.85) как ( $d=3, x_0=1$ ):

$$\tau_{E_F} = \frac{1}{2\gamma(E)} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi E} \gamma(E) \right\} = \frac{1}{2\gamma(E)} \left\{ 1 - \frac{\gamma(E)}{\gamma(E_c)} \right\}$$

можно представить (3.86) в виде:

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right\} = \sigma_0 - \sigma_c \quad (3.92)$$

где "друдевская" проводимость  $\sigma_0 = \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma(E)}$  выступает в качестве меры беспорядка. Очевидно, что при слабом беспорядке (большой длине пробега)  $\sigma_0 \gg \sigma_c$  и из (3.92) получим обычный результат  $\sigma \approx \sigma_0$ . При росте беспорядка (уменьшении длины пробега)  $\sigma \rightarrow 0$  при  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_c \approx \sigma_{mm}$ .

Из проведенных оценок видно, что для  $d=3$  порог подвижности  $E_c$  попадает в область "сильной связи"  $E_{sc} = m^3 (\rho V^2)^2$ , где безразмерная "константа связи"  $\lambda$  из (3.84) становится порядка единицы и где, строго говоря, нужен учет всех диаграмм теории возмущений. С другой стороны, при  $d \rightarrow 2$  имеем  $E_c \rightarrow \infty$ , в соответствии с картиной полной локализации при сколь угодно слабом ( $\lambda \ll 1$ ) беспорядке для  $d=2$ .

Сейчас уместно рассмотреть роль некоторых графиков, не учтенных выше. Неприводимую вершину  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}, \omega)$  в (3.59) можно взять и в более сложном виде, дополнив "куперонный" вклад (3.36) (Рис.3.2(в)) "диффузионным", т.е. графиками (Рис.3.3(а)), содержащим диффузионный пропагатор /106,107/ (Рис.3.3(б),  $\vec{q} \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned}
 U_{pp'}^{ED}(\vec{q}\omega) &= \text{(a)} \quad \begin{array}{c} \rho_+ \xrightarrow{\quad} \rho'_+ \\ \Gamma^D \\ \rho_- \xleftarrow{\quad} \rho'_- \end{array} + \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Gamma^D \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \\
 & \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Gamma^D \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} + \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Gamma^D \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \\
 \Gamma_{pp'}^{ED}(\vec{q}\omega) &= \text{(б)} \quad \begin{array}{c} \rho_+ \xrightarrow{\quad} \rho'_+ \\ \Gamma^D \\ \rho_- \xleftarrow{\quad} \rho'_- \end{array} = \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} + \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} + \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} + \dots
 \end{aligned}$$

Рис.3.3. (а) Простейший "диффузионный" вклад в неприводимую вершину  $U_{pp'}^E(\vec{q}\omega)$ .

(б) Графики для диффузионного "пропэгатора" ("лестничное" приближение).

$$\Gamma_{\vec{p}\vec{p}'}^{ED}(\vec{q}\omega) = \frac{2\gamma(E)\rho V^2}{-i\omega + \mathcal{D}_0^E q^2} \quad (3.93)$$

Соответствующий вклад в  $M_E(\vec{q}\omega)$  (3.59) имеет вид /106/:

$$\delta M_E^D(\vec{q}\omega) = -\frac{d}{p_F^2} \rho V^2 \sum_{\vec{k}} \frac{q^2 + q^{-2}(\vec{k} \cdot \vec{q})^2}{\omega + i\mathcal{D}_0^E k^2} \quad (3.94)$$

С учетом такого вклада, после проведения процедуры самосогласования, получаем вместо (3.79) следующее уравнение для  $M_E(\omega)$  /119/:

$$M_E(\omega) = 2i\gamma(E) \left\{ 1 + \frac{i}{\pi N(E_F)} \sum_{|\vec{k}| < k_0} \frac{1 + k^2/2p_F^2}{\omega - \frac{2E}{d\pi} \frac{k^2}{M_E(\omega)}} \right\} \quad (3.95)$$

Отсюда, аналогично (3.85), находим для  $\omega=0$  в металлической области:

$$\tau_E = \frac{1}{2\gamma(E)} \left\{ 1 - \left[ \frac{d}{d-2} + \frac{x_0^2}{2} \right] x_0^{d-2} \lambda \right\} \quad (3.96)$$

Видим, что учет графиков Рис.3.3(а) приводит к изменению константы в (3.85). При  $d \rightarrow 2$  вклад "куперона" доминирует, при  $d=3$  "диффузионный" вклад того же порядка, что и "куперонный". Положение порога подвижности несколько сдвигается: в (3.87)  $d/d-2$  заменяется на  $\frac{d}{d-2} + \frac{x_0^2}{2}$ . "Критическое поведение" остается неизменным: проводимость обращается в нуль по закону (3.88).

В дальнейшем мы ограничимся приближением (3.79), (3.80), в отношении которого можно надеяться, что оно "работает", по крайней мере при  $d \rightarrow 2$ . Поскольку при  $d \rightarrow 2$  порог подвижности  $E_c \rightarrow \infty$ , кажется ясным, что при  $d \geq 2$  применимо и простейшее приближение (3.34) для одноэлектронной функции Грина, т.к. в этой ситуации  $E_c \gg \gamma(E_c)$ . Фактически, мы еще убедимся (Глава 4), что вопрос о применимости теории возмущений при  $d \rightarrow 2$  не так прост. Для  $d=3$  заведомо нужен учет всех графиков теории возмущений, как для  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$ , так и, что весьма существен-



но, для одноэлектронной функции Грина. Заметим, что использование приближения (3.36) для  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$  совместно с приближением (3.34) для  $G^{R,A}(E\vec{p})$ , вообще говоря, противоречит тождеству Уорда (3.54): учет "перекрестных" графиков для  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$  означает необходимость учета таких же графиков для  $\sum^{R,A}(E\vec{p})$  (см. вывод тождества (3.54) в работе /106/). Из нескольких примеров точно решаемых моделей /121-124/, в которых удавалось провести суммирование "перекрестных" графиков (типа Рис.3.2(б)) для  $\sum^{R,A}(E\vec{p})$  известно, что получающаяся в результате одноэлектронная функция Грина имеет структуру, радикально отличающуюся от простейшего приближения (3.34). Это ясно также и из того, что (3.34) не дает правильного вида одноэлектронной плотности состояний, в частности, в этом приближении не возникает "хвост" плотности состояний. Его появление в рамках теории возмущений возможно /121,122/ лишь с учетом "перекрестных" графиков (или невозможно принципиально (ср. ниже, Глава 4)). Поэтому учет "перекрестных" графиков для одноэлектронной функции Грина, заведомо существенных вблизи порога подвижности, может, по нашему мнению, сильно изменить вид функции Грина и в рассматриваемой задаче. Это, по-видимому, может привести и к изменению "критического поведения" (3.88) (критического индекса проводимости). В тоже время, самосогласованная теория локализации, вероятно, вполне удовлетворительно оценивает положение порога подвижности (3.87). Также представляется маловероятным изменение качественного вывода о непрерывном обращении в нуль проводимости на пороге подвижности. В точной теории могут, по-видимому, измениться лишь значения критических индексов.

Переходя к рассмотрению области локализованных состояний ( $E < E_c$ ) ищем решение уравнения (3.83) в виде второго выражения в (3.74). Выделяя действительную часть (3.83), при  $\omega \rightarrow 0$ , находим уравнение, определяющее  $\omega_0^2(E)$  :

$$1 = d\lambda x_0^{d-2} \int_0^1 dy y^{d-1} \frac{1}{y^2 + \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2}} \quad (3.97)$$

Аналогичным образом из мнимой части (3.83), при  $\omega \rightarrow 0$ , находим уравнение для  $\tau_E$  в области локализации:

$$1 - 2\gamma(E)\tau_E = d\lambda x_0^{d-2} \int_0^1 dy y^{d+1} \frac{1}{\left[ y^2 + \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} \right]^2} \quad (3.98)$$

Используя (при  $\omega_0^2 \rightarrow 0$ ) простейшую оценку интеграла в (3.97), имеем:

$$1 \approx d\lambda x_0^{d-2} \int_0^1 dy y^{d-3} = \begin{cases} d\lambda x_0^{d-2} \frac{1}{d-2} \left\{ 1 - \left( \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \right\} & (2 < d < 4) \\ \lambda \ln \frac{2x_0^2 E^2}{\omega_0^2(E)} & (d=2) \end{cases} \quad (3.99)$$

откуда, с помощью (3.87), получаем:

$$\omega_0^2(E) = \begin{cases} \frac{4}{d} x_0^2 E^2 \left[ 1 - \left( \frac{E}{E_c} \right)^{\frac{4-d}{2}} \right]^{\frac{2}{d-2}} & (2 < d < 4) \\ 2x_0^2 E^2 \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right) & (d=2) \end{cases} \quad (3.100)$$

Положение порога подвижности, естественно, определяется условием  $\omega_0^2(E_c) = 0$ . Интеграл в (3.97) можно вычислить и точно /120/, при этом первое выражение в (3.100) домножается на  $\left[ \frac{d}{d-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \right]^{-\frac{2}{d-2}}$  ( $\sim 1$  для  $d \sim 3$ ), а второе выражение в (3.100) не меняется /106/.

Используя теперь "представление единицы" с помощью (3.97) в (3.98), получаем связь  $\tau_E$  с  $\omega_0^2(E)$  в виде:

$$2\gamma(E)\tau_E = d\lambda x_0^{d-2} \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} \int_0^1 dy \frac{y^{d-1}}{\left[ y^2 + \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} \right]^2} \approx \quad (3.101)$$

$$\approx d \lambda x_0^{d-2} \frac{1}{d-4} \left\{ \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} - \left( \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \right\} \quad (d < 4) \quad (3.101)$$

так, что при  $\omega_0^2(E) \rightarrow 0$ , т.е. вблизи порога подвижности имеем:

$$2\gamma(E)\tau_E \approx \begin{cases} \frac{d}{4-d} \lambda x_0^{d-2} \left( \frac{d\omega_0^2(E)}{4x_0^2 E^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} & (2 < d < 4) \\ \lambda \left[ 1 - \frac{\omega_0^2(E)}{2x_0^2 E^2} \right] & (d=2) \end{cases} \quad (3.102)$$

Из (3.67) и (3.100) находим радиус локализации:

$$R_{loc}(E) = \frac{1}{x_0 \sqrt{2mE}} \left\{ 1 - \left( \frac{E}{E_c} \right)^{\frac{4-d}{2}} \right\}^{-\frac{1}{d-2}} \sim \quad (3.103)$$

$$\sim \frac{1}{p_F} \left| \frac{E - E_c}{E_c} \right|^{-\nu}; \quad E \leq E_c$$

где критический индекс радиуса локализации:  $\nu = \frac{1}{d-2}$  (3.104)

Вводя локализационную корреляционную длину (совпадающую с  $R_{loc}$  при  $E < E_c$ ) с помощью соотношения (ср.(I.22)):

$$\zeta_{loc}(E) = \frac{1}{x_0 \sqrt{2mE}} \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{E}{E_c} \right)^{\frac{4-d}{2}} \right]^{-\frac{1}{d-2}}; & E < E_c \\ \left[ 1 - \left( \frac{E_c}{E} \right)^{\frac{4-d}{2}} \right]^{-\frac{1}{d-2}}; & E > E_c \end{cases} \sim \quad (3.105)$$

$$\sim p_F^{-1} \left| \frac{E - E_c}{E_c} \right|^{-\nu}; \quad E \sim E_c$$

можем переписать выражение (3.86) для металлической проводимости в виде:

$$\sigma = \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma(E)} (x_0 p_F \zeta_{loc}(E))^{2-d} = \frac{\sigma_0}{(x_0 p_F \zeta_{loc}(E))^{d-2}} \quad (3.106)$$

аналогичном (I.23). В частности, для  $d=3$  (при  $x_0=1$ ):

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{p_F \zeta_{loc}(E)} \quad (3.107)$$

Из (3.88), (3.104), (3.106) ясно, что для критического индекса проводимости в этой теории выполняется скейлинговое соотношение Вег-

нера (1.24):  $t = (d-2)\nu$ . Из (3.102) видно, что этот же индекс определяет обращение в нуль  $\tau_E$  и в области локализации. Полученные значения критических индексов совпадают с результатами главного приближения  $\varepsilon = d-2$  - разложения в элементарной скэйлинговой теории локализации (ср. (1.21)). Как было показано Фоллхардом и Вольфле /117, 118/, основные уравнения элементарной скэйлинговой теории могут быть непосредственно выведены из самосогласованной теории локализации. В тоже время, как отмечено выше, к полученным численным значениям критических индексов не следует относиться слишком серьезно. В частности, значение  $\nu = 1$  для  $d = 3$ , следующее из (3.88), (3.104), достаточно плохо согласуется с большинством экспериментальных данных, приведенных в Таблице I.I.

В качестве еще одного примера вычисления физической величины рассмотрим диэлектрическую проницаемость в области локализации. Используя связь диэлектрической проницаемости с функцией отклика типа плотность-плотность /125/:

$$\varepsilon(\vec{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^R(\vec{q}, \omega) \quad (3.108)$$

Из (3.69) и (3.100), (3.103) имеем:

$$\varepsilon(0, \omega \rightarrow 0) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2(E)} = 1 + \chi_0^2 R_{loc}^2(E) \sim \left| \frac{E - E_c}{E_c} \right|^{-2\nu} \quad (3.109)$$

где  $\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$  - квадрат плазменной частоты,  $\chi_0^2 = 4\pi e^2 N(E)$  - обратный квадрат радиуса экранирования в металле. Выражение (3.109) определяет закон расходимости статической диэлектрической проницаемости при подходе к переходу диэлектрик-металл. Видим, что критический индекс  $\zeta$  (ср. (1.29)) диэлектрической проницаемости удовлетворяет в рассматриваемой теории соотношению  $\zeta = 2\nu$ . Из данных Таблицы I.I видно, что это соотношение неплохо выполняется на эксперименте, если для  $\nu$  пользоваться "реальными" значениями из этой же Таблицы.

Полученные результаты справедливы в пределе  $\omega \rightarrow 0$ . Полное исследование частотной зависимости проводимости (обобщенного коэффициента диффузии) в самосогласованной теории локализации было проведено в работах /118,126/. Приведем сводку соответствующих результатов, поскольку они потребуются нам в дальнейшем. Уравнение (3.80) для обобщенного коэффициента диффузии может быть переписано в виде /126/ ( для  $2 < d < 4$  ):

$$\frac{\mathcal{D}_E(\omega)}{\mathcal{D}_0^E} = 1 - \frac{d\lambda}{d-2} x_0^{d-2} + d\lambda x_0^{d-2} \left[ -\frac{i\omega \mathcal{D}_0^E}{2\gamma(E)\mathcal{D}_E(\omega)} \right] \int_0^1 dy \frac{y^{d-3}}{y^3 - \frac{i\omega \mathcal{D}_0^E}{2\gamma(E)\mathcal{D}_E(\omega)}} \quad (3.110)$$

При выполнении условия  $\left| \frac{\omega}{2\gamma(E)} \frac{\mathcal{D}_0^E}{\mathcal{D}_E(\omega)} \right| \ll 1$ , верхний предел интеграла в (3.110) можно устремить к бесконечности. Тогда получаем /118,126/:

$$\frac{\mathcal{D}_E(\omega)}{\mathcal{D}_0^E} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_c} + p_d \frac{\lambda}{\lambda_c} \left\{ -\frac{i\omega}{2\gamma(E)} \frac{\mathcal{D}_0^E}{\mathcal{D}_E(\omega)} \right\}^{\frac{d-2}{2}} \quad (3.111)$$

где  $\lambda_c = \frac{d-2}{d} x_0^{2-d}$  - критическое значение безразмерной "константы связи" (3.84) в точке перехода,  $p_d = \Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(2 - \frac{d}{2})$ . Из (3.111) следует, что  $\mathcal{D}_E(\omega)$ , а в соответствии с (3.73) и проводимость  $\sigma(\omega)$ , удовлетворяют скейлинговому соотношению:

$$\frac{\mathcal{D}_E(\omega)}{\mathcal{D}_0^E} = \frac{\sigma(\omega)}{\sigma_0} = \left( -\frac{i\omega}{2\gamma(E)} \right)^{\frac{d-2}{d}} F_d \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (3.112)$$

где при  $\omega \ll \omega_c$  имеем:

$$F_d \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \sim \left( -\frac{i\omega}{\omega_c} \right)^{2/d}; \quad \lambda > \lambda_c \quad (\text{диэлектрик})$$

(3.113)

$$F_d \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \sim \left( -\frac{i\omega}{\omega_c} \right)^{\frac{2-d}{d}}; \quad \lambda < \lambda_c \quad (\text{металл})$$

а при  $\omega \gg \omega_c$

$$F_d \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \sim \text{Const}; \quad \lambda \geq \lambda_c \quad (3.114)$$

При этом характерная частота  $\omega_c$  определяется соотношением:

$$\omega_c \approx 2\gamma(E) \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_c} \right|^{\frac{d}{d-2}} \sim 2\gamma(E) \left[ \rho_F \zeta_{loc}(E) \right]^{-d} \quad (3.115)$$

Неравенство, использованное при сведении (3.110) к (3.111) выполнено, если  $\omega_c \ll 2\gamma(E)$ , что заведомо верно вблизи порога подвижности. Для  $d=3$  уравнение (3.111) принимает вид:

$$\frac{\mathcal{D}_E(\omega)}{\mathcal{D}_0^E} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_c} + \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_c} \left\{ -\frac{i\omega}{2\gamma(E)} \frac{\mathcal{D}_0^E}{\mathcal{D}_E(\omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \lambda_c = \frac{1}{3x_0} \quad (3.116)$$

и может быть решено /118/ в явном виде. С достаточной для наших целей точностью результат может быть представлен в виде:

$$\mathcal{D}_E(\omega) \approx \begin{cases} \mathcal{D}_E; & \omega \ll \omega_c; E \geq E_c & \text{(металл)} \\ \mathcal{D}_0^E \left( -\frac{i\omega}{2\gamma(E)} \right)^{1/3}; & \omega \geq \omega_c; E \leq E_c & \\ \mathcal{D}_E \frac{-i\omega}{-i\omega + \frac{3\mathcal{D}_E}{v_F^2} \omega_0^2(E)}; & \omega \ll \omega_c; E < E_c & \text{(диэлектрик)} \end{cases} \quad (3.117)$$

где  $\mathcal{D}_E$  - определенный выше в (3.77) перенормированный коэффициент диффузии, который, с учетом (3.85), (3.100), (3.102), (3.105), может быть записан как:

$$\mathcal{D}_E = \frac{\mathcal{D}_0^E}{\rho_F \zeta_{loc}(E)} \quad (3.118)$$

На самом пороге подвижности  $\zeta_{loc}(E = E_c) = \infty$ , так что  $\omega_c = 0$ , и мы получаем  $\omega^{1/3}$  - закон Гётце /116/:

$$\mathcal{D}_E(\omega) = \mathcal{D}_0^E \left( -\frac{i\omega}{2\gamma(E)} \right)^{1/3} \quad (3.119)$$

Частота  $\omega_c$ , фактически, определяется условием  $\mathcal{D}_E(\omega_c) \sim \mathcal{D}_E \sim \mathcal{D}_0^E \left( \frac{\omega_c}{2\gamma(E)} \right)^{1/3}$ .

Неоднократно отмечавшееся выше условие  $\omega \rightarrow 0$  нужно понимать в смысле  $\omega \ll \omega_c$ . Отметим, наконец, что при  $\omega \gtrsim 2\gamma(E)$  из уравнений самосогласованной теории нетрудно получить переход к обычному "друдевскому" поведению:  $\mathcal{D}_E(\omega) \approx \mathcal{D}_0^E \left[ 1 - \frac{i\omega}{2\gamma(E)} \right]^{-1}$ .

Соответственно  $\omega$  - зависимости обобщенного коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_E(\omega)$  из (3.117), найденное выше выражение (3.75) для спектральной плотности Березинского-Горькова справедливо лишь при  $\omega \ll \omega_c$ . При  $\omega_c \lesssim \omega \lesssim 2\gamma(E)$ , используя (3.119) в (3.70) и общее соотношение (3.18), получим:

$$\langle\langle \rho_E \rho_{E+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\alpha^{2/3} \omega^{1/3} q^2}{\omega^2 + \alpha^{2/3} \omega^{4/3} q^2 + \alpha^{4/3} \omega^{2/3} q^4} \quad (3.120)$$

где ввели  $\alpha = \mathcal{D}_0^E \frac{v_F}{2\gamma(E)} = \mathcal{D}_0^E \ell$ . Поскольку при  $E = E_c$  имеем  $\omega_c = 0$ , выражение (3.120) "работает" и на самом пороге подвижности.

Перейдем теперь к краткому рассмотрению случая  $d=2$ . Из (3.67) и (3.100) получим /106/:

$$R_{loc}(E) = \frac{1}{x_0 \sqrt{2mE}} \exp \left\{ \frac{\pi E}{m\rho V^2} \right\} \quad (3.121)$$

Таким образом, в двумерном случае радиус локализации экспоненциально велик при  $E \gtrsim m\rho V^2$ , и мы имеем "слабую локализацию". Полезно привести подробные результаты по частотной зависимости проводимости. Как следует из довольно громоздкого, но простого анализа уравнения (3.83), при  $d=2$  можно выделить несколько интервалов частот, в которых поведение  $\mathcal{G}(\omega)$  является существенно различным /120/. Для предельно малых частот  $\omega \ll \lambda^{-1} \exp(-\frac{1}{\lambda}) \gamma$  ( $\lambda \ll 1$ ), имеем поведение, найденное в работе /106/:

$$\mathcal{G}(\omega) \approx \frac{\pi e^2}{m} \frac{\gamma}{\lambda} \exp \left( \frac{2}{\lambda} \right) \frac{\omega^2}{2(x_0 E)^4} \quad (3.122)$$

При несколько больших частотах  $\lambda^{-1} \exp(-\frac{1}{\lambda}) \gamma \ll \lambda^{-2} \exp(-\frac{1}{\lambda}) \gamma$  имеем:

$$\sigma(\omega) \cong \frac{\pi e^2}{m} \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{\omega}{2(\chi_0 E)^2} \quad (3.123)$$

При дальнейшем росте частоты, для  $\lambda^{-2} \exp(-\frac{1}{\lambda}) \ll \omega \ll \lambda^2 \gamma$ , получаем логарифмическое поведение работы /108/:

$$\sigma(\omega) \approx \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma} \left[ 1 - \lambda \ln \frac{2\gamma}{\omega} \right] \quad (3.124)$$

Наконец, для  $\lambda^2 \gamma \ll \omega \ll \gamma$ , самосогласованная теория дает /120/:

$$\sigma(\omega) \approx \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma} \left[ 1 - \frac{\tilde{E}_c}{E} \right] \quad (3.125)$$

где  $\tilde{E}_c = \frac{\pi \rho V^2}{2\pi} \chi^*$ , а  $\chi^*$  определяется как наибольший корень уравнения  $\chi^* = \ln \frac{\chi_0^2}{\pi} + 2 \ln \chi^*$ . Решение существует для  $\chi_0 > \sqrt{\pi}$ . Для  $\chi_0 \approx 2$  имеем  $\chi^* \approx 1$ . Видим, что в этом интервале частот проводимость практически имеет вид постоянной (независящей от  $\omega$ ) металлической проводимости с "порогом подвижности"  $\tilde{E}_c$ . Возможно, что этот результат разъясняет известные противоречия между численными результатами разных авторов по двумерной проводимости /10/: логарифмические поправки и изоляторное поведение проявляются лишь при предельно малых частотах, но существует (широкий, при  $\lambda \ll 1$ ) интервал частот, где в системе "симулируется" конечный порог подвижности  $\tilde{E}_c$ , "противоречащий" картине полной двумерной локализации. При  $E \gtrsim \tilde{E}_c$ , как мы видели, начинает экспоненциально расти и радиус локализации.

Для  $d > 4$  анализ уравнения (3.83) приводит к нефизическим результатам /120/. Происхождение этих результатов ясно уже из того, что согласно (3.84), в рассматриваемой модели разложение теории возмущений идет по параметру  $\left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{\frac{d-4}{4}}$ . Соответственно, при  $d < 4$  разложение расходится при  $E \rightarrow 0$ , а при  $d > 4$  при  $E \rightarrow \infty$ , т.е. происходит "инверсия" областей сильной и слабой связи на оси энергий. При этом проводимость обращается в нуль, а радиус локализации



становится конечным по мере роста энергии Ферми в зоне. Граничный случай  $d=4$  требует специального рассмотрения. Из (3.83), при малой безразмерной константе связи четырехмерной теории  $m^2 \rho V^2 \ll 1$ , всегда получается металлическая проводимость, а уравнение (3.97) не имеет действительных решений  $\omega_0^2(E) > 0$ . Это справедливо, по-видимому, при любых энергиях вне экспоненциально малой (по  $m^2 \rho V^2 \ll 1$ ) окрестности края зоны (см. подробное обсуждение случая  $d=4$  в Главе 4). Такое поведение при  $d \geq 4$  отражает известную неадекватность модели с точечным взаимодействием (корреляция случайного потенциала типа "белого" шума) /127/. Ситуация меняется, если считать, что параметр обрезания  $k_0$  в (3.79), (3.80) определяется не импульсом Ферми, а радиусом действия потенциала (или парного коррелятора случайных потенциалов), причем  $k_0 \ll p_F$ . При этом для  $d < 4$  получаются те же результаты, что и выше, но порог подвижности определяется соотношением /120/:

$$E_c = \frac{d}{d-2} \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{d/2} \frac{\tilde{E}_0^{\frac{d}{2}-1}}{\Gamma(d/2)} \rho V^2 = \frac{d}{d-2} \frac{1}{\pi} \gamma(\tilde{E}_0) \quad (3.126)$$

где  $\tilde{E}_0 = k_0^2/2m$ . Для  $d \geq 4$  имеем /120/:

$$\sigma \approx \frac{\pi e^2}{m} \frac{1}{2\gamma(E)} \frac{E - E_c}{E_c} ; \quad E \geq E_c \quad (3.127)$$

$$\omega_0^2(E) \approx \frac{4}{d} \frac{d-4}{d-2} \left[ 1 - \frac{E}{E_c} \right] ; \quad E \leq E_c$$

Соответственно, используя (3.67), получаем, что критический индекс радиуса локализации при  $d \geq 4$   $\nu = 1/2$ . В этом смысле можно говорить о  $d=4$ , как о "верхней критической размерности" в теории локализации.

### 3.3. Самосогласованная теория локализации в модели Андерсона.

Выше мы рассматривали свободный электрон в поле случайных рассеивателей. Можно провести обобщение самосогласованной теории локализации на случай электрона с произвольным энергетическим спектром в решетке с беспорядком андерсоновского типа. Такое обобщение интересно, прежде всего, ввиду существования обширной литературы по локализации в модели Андерсона /1, 6, 7, 10, 63, 65/ (см. Главу 2).

В рамках самосогласованной теории, локализация в модели Андерсона рассматривалась впервые на основе формализма Гётце /II4-II6/ в работах /I28, I29/. На основе подхода Фоллхарда и Вольфле такое рассмотрение было проведено в работе автора, выполненной совместно с Е.А.Котовым /I30/, в которой использовалась обычная теория возмущений по андерсоновскому беспорядку. Альтернативный подход, основанный на разложении теории возмущений по интегралу переноса (ср. метод Андерсона, Глава 2), был использован в формализме Фоллхарда и Вольфле в недавних работах /I31, I32/. Изложение в этом разделе целиком основано на работе /I30/.

В качестве исходного мы принимаем гамильтониан Андерсона (2.1), однако для распределения уровней  $E_j$  на узлах решетки, вместо однородного закона (2.2), предположим гауссовское распределение:

$$P(E_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tilde{W}} \exp \left\{ -\frac{E_j^2}{2\tilde{W}^2} \right\} \quad (3.128)$$

что существенно упрощает диаграммную технику. Естественно считаем, что уровни  $E_j$  на различных узлах распределены независимо, так что:

$$\langle E_i E_j \rangle = \tilde{W}^2 \delta_{ij} \quad (3.129)$$

После перехода к импульсному представлению (в решетке) гамильтониан представляется в виде:

$$H = \sum_{\vec{p}} \varepsilon(\vec{p}) a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} + \sum_{\vec{p}\vec{q}} U_{\vec{q}} a_{\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}} \quad (3.130)$$

где

$$\varepsilon(\vec{p}) = V \sum_{\vec{h}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{h}} \quad (3.131)$$

обычный спектр электрона в приближении сильной связи. Вектор  $\vec{h}$  в (3.131) пробегает по набору векторов, соединяющих данный узел решетки с его ближайшими соседями. При этом мы предположили, что электроны на узлах находятся в атомных  $S$  - состояниях, а амплитуда перехода  $V_{ij}$  в (2.1) отлична от нуля и равна константе  $V$  для переходов между ближайшими соседями.

Гауссово случайное поле  $U_{\vec{q}}$ , входящее во второй член в (3.130) ( $N$  - число атомов в решетке):

$$U_{\vec{q}} = \frac{1}{N} \sum_j E_j e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}_j} \quad (3.132)$$

обладает в импульсном представлении коррелятором ( $\Omega_0$  - объем, приходящийся на один узел решетки):

$$\langle U_{\vec{q}} U_{\vec{q}'} \rangle = \frac{\tilde{W}^2}{N} \delta_{\vec{q}, -\vec{q}'} = \tilde{W}^2 \Omega_0 \delta_{\vec{q}, -\vec{q}'} \quad (3.133)$$

что соответствует коррелятору (3.129) в прямой решетке. В дальнейшем рассматриваем решетки кубической симметрии и считаем полный объем системы единичным. Тогда  $N^{-1} = \Omega_0$  представляет собой объем примитивной ячейки кристалла. Высшие корреляторы для гауссова случайного поля факторизуются через парные, так что вид диаграммной техники для вычисления усредненных функций Грина, соответствующих гамильтониану (3.130), очевиден. Фактически речь идет об обобщении проведенного выше рассмотрения на случай электронов с произвольным исходным спектром  $\varepsilon(\vec{p})$ .

В основу рассмотрения снова положим уравнение Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина  $\Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\omega\vec{q})$ , определенной в

(3.24), которое в данном случае имеет вид:

$$\left\{ \omega - \vec{q} \cdot \vec{v}_{\vec{p}} - \sum^R (E + \omega \vec{p}_+) + \sum^A (E \vec{p}_-) \right\} \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA} (E\omega\vec{q}) =$$

$$= \Delta G_{\vec{p}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} - \sum_{\vec{p}''} U_{\vec{p}\vec{p}''}^E(\vec{q}\omega) \Phi_{\vec{p}''\vec{p}'}^{RA} (E\omega\vec{q}) \right\}$$
(3.134)

где

$$\vec{v}_{\vec{p}} = \frac{\partial \varepsilon(\vec{p})}{\partial \vec{p}}$$
(3.135)

- групповая скорость электрона, соответствующая произвольному закону дисперсии. Для одночастичной функции Грина принимаем, аналогично (3.34):

$$G^{R,A}(E\vec{p}) = \frac{1}{E - \varepsilon(\vec{p}) - \sum^{R,A}(E\vec{p})} \approx \frac{1}{E - \varepsilon(\vec{p}) \pm i\gamma(E)}$$

где

$$\gamma(E) = \pi \tilde{W}^2 \Omega_0 N(E)$$
(3.136)

- частота рассеяния электронов на случайных уровнях. Некоторые уточнения, связанные с учетом эффекта сдвига края исходной зоны в случайном поле, приведены в Приложении 2.

Аналогично (3.55) получаем:

$$\omega \Phi_E^{RA}(\omega\vec{q}) - q \Phi_{1E}^{RA}(\omega\vec{q}) = -N(E)$$
(3.137)

где ввели:

$$\Phi_{1E}^{RA}(\omega\vec{q}) = \sum_{\vec{p}\vec{p}'} (\vec{v}_{\vec{p}} \cdot \hat{q}) \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA} (E\omega\vec{q})$$
(3.138)

Для получения уравнения для  $\Phi_{1E}^{RA}(E\omega\vec{q})$  домножим уравнение (3.134) на  $(\vec{v}_{\vec{p}} \cdot \hat{q})$  и просуммируем по  $\vec{p}$  и  $\vec{p}'$ . При этом для "замыкания" системы уравнений в терминах функций  $\Phi_E^{RA}(\omega\vec{q})$  и  $\Phi_{1E}^{RA}(\omega\vec{q})$  воспользуемся следующим приближенным представлением, являющимся естественным обобщением (3.57) для случая электронов с произвольным законом дисперсии:

$$\sum_{\vec{p}'} \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) \cong -[2\pi i N(E)]^{-1} \Delta G_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'\vec{p}''} \left\{ 1 + \frac{(\vec{v}_{\vec{p}} \cdot \hat{q})(\vec{v}_{\vec{p}''} \cdot \hat{q})}{v_E^2(\hat{q})} \right\} \Phi_{\vec{p}'\vec{p}''}^{RA}(E\omega\vec{q}) \quad (3.139)$$

где

$$v_E^2(\hat{q}) = -\frac{1}{2\pi i N(E)} \sum_{\vec{p}} (\vec{v}_{\vec{p}} \cdot \hat{q})^2 \Delta G_{\vec{p}} \quad (3.140)$$

представляет собой усредненный в окрестности изоэнергетической поверхности  $\varepsilon(\vec{p}) = E$  квадрат проекции групповой скорости  $\vec{v}_{\vec{p}}$  на направление  $\hat{q}$ . В кристаллах кубической симметрии (которые только и будем рассматривать) в силу изотропии их физических свойств, имеем просто:

$$v_E^2(\hat{q}) = \frac{1}{d} v_E^2 = -\frac{1}{2\pi i N(E)d} \sum_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2 \Delta G_{\vec{p}} \approx \approx \frac{1}{N(E)d} \sum_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2 \delta(E - \varepsilon(\vec{p})) \quad (3.141)$$

где последнее равенство приближенно верно в пределе слабого рассеяния. Тогда для  $\Phi_{IE}^{RA}(\omega\vec{q})$  получаем уравнение, обобщающее (3.58)

$$\{\omega + M_E(\vec{q}\omega)\} \Phi_{IE}^{RA}(\omega\vec{q}) - \frac{1}{d} v_E^2 \Phi_E^{RA}(\omega\vec{q}) = 0 \quad (3.142)$$

где релаксационное ядро имеет вид, аналогичный (3.59):

$$M_E(\vec{q}\omega) = \frac{1}{2\pi i N(E) v_E^2} \sum_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2 \Delta G_{\vec{p}} [\sum^R(E+\omega\vec{p}_+) - \sum^A(E\vec{p}_-)] - \frac{d}{2\pi i N(E) v_E^2} \sum_{\vec{p}\vec{p}'} (\vec{v}_{\vec{p}} \cdot \hat{q}) \Delta G_{\vec{p}} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega) \Delta G_{\vec{p}'} (\vec{v}_{\vec{p}'} \cdot \hat{q}) \approx \approx 2i\gamma(E) - \frac{d}{2\pi i N(E) v_E^2} \sum_{\vec{p}\vec{p}'} (\vec{v}_{\vec{p}} \cdot \hat{q}) \Delta G_{\vec{p}} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega) \Delta G_{\vec{p}'} (\vec{v}_{\vec{p}'} \cdot \hat{q}) \quad (3.143)$$

где последнее равенство справедливо при малых  $\vec{q}$  и  $\omega$ , с учетом (3.136).

Из (3.137) и (3.142) находим:

$$\phi_E^{RA}(\omega\vec{q}) = -N(E) \frac{\omega + M_E(\vec{q}\omega)}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_E^2 q^2} \quad (3.144)$$

и соответствующую функцию отклика типа плотность-плотность:

$$\begin{aligned} \chi(\vec{q}\omega) &= \omega \phi_E^{RA}(\omega\vec{q}) + N(E) + O(\omega, q^2) = \\ &= -N(E) \frac{\frac{1}{d} v_E^2 q^2}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_E^2 q^2} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Эти выражения переписываются в виде (3.70), (3.71), если ввести обобщенный коэффициент диффузии, аналогично (3.72):

$$\mathcal{D}_E(\vec{q}\omega) = \frac{v_E^2}{d} \frac{i}{M_E(\vec{q}\omega)} \quad (3.146)$$

где  $v_E^2$  определена в (3.141). Из (3.13) и (3.145), аналогично (3.73), получаем для проводимости:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{d} N(E) v_E^2 \frac{i}{\omega + M_E(0\omega)} \quad (3.147)$$

В области локализованных состояний, аналогично (3.65), (3.66), имеем:

$$R_{loc}^2(E) = \frac{v_E^2}{d \omega_0^2(E)} ; \quad \omega_0^2(E) = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega M_E(0\omega) > 0 \quad (3.148)$$

Неприводимая вершинная часть  $U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega)$  в приближении Лангера-Нила, в рассматриваемой теории имеет вид: (ср. (3.36))

$$U_{\vec{p}\vec{p}'}^{EC}(\vec{q}\omega) \approx \frac{2\gamma(E) \tilde{W}^2 \Omega_0}{-i\omega + \mathcal{D}_0^E(\vec{p}+\vec{p}')^2} \quad (3.149)$$

где  $\mathcal{D}_0^E = \frac{1}{d} \frac{v_E^2}{2\gamma(E)}$  - классический коэффициент диффузии и предполагается, что  $|\vec{p}+\vec{p}'|$  достаточно мал по сравнению с характерными размерами поверхности Ферми и зоны Бриллюэна. Тогда используя

(3.148) в (3.143), вместе с обсуждавшейся выше процедурой самосогласования, после некоторых преобразований получаем обобщение уравнения (3.79) в следующем виде:

$$M_E(\omega) = 2i\gamma(E) \left\{ 1 + \frac{\theta_E}{\pi N(E)} \sum_{\vec{k}} \frac{i}{\omega - \frac{v_E^2 k^2}{d M_E(\omega)}} \right\} \quad (3.150)$$

где

$$\theta_E = \frac{2\tilde{W}^2 \Omega_0}{v_E^2} \sum_{\vec{p}} v_{\vec{p}}^2 [Im G_{\vec{p}}(E)]^2 \quad (3.151)$$

В принципе, не составляет труда выписать аналогичные формулы для решеток произвольной симметрии, когда возникает явная зависимость основных величин от направления вектора  $\hat{q}$  (ср. (3.139), (3.140)).

При  $\omega = 0$  из (3.147), (3.150) получаем:

$$\sigma(0) = \frac{e^2}{d} N(E) v_E^2 \frac{i}{M_E(00)} = \quad (3.152)$$

$$= \frac{e^2}{d} N(E) \frac{v_E^2}{2\gamma(E)} \left\{ 1 - \frac{2d\tilde{W}^2 \Omega_0}{v_E^2} \theta_E \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \right\}$$

Определяя порог подвижности из условия  $\sigma(0) = 0$  получаем для него уравнение:

$$1 = \frac{2d\tilde{W}^2 \Omega_0}{v_{E_c}^2} \theta_{E_c} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \quad (3.153)$$

В области локализованных состояний, используя как и выше  $Re M_E(\omega) = -\omega_0^2(E)/\omega$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega Im M_E(\omega) = 0$ , из (3.148) и (3.150) легко находим уравнение, определяющее  $\omega_0^2(E)$  :

$$1 = 2\tilde{W}^2 \Omega_0 \theta_E \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_0^2(E) + \frac{1}{d} v_E^2 k^2} \quad (3.154)$$

При  $\omega_0^2(E=E_c) = 0$  это уравнение, естественно, совпадает с (3.153).

Учитывая, что использованное выше выражение (3.149) справедливо при достаточно малом суммарном импульсе, суммирование по  $\vec{k}$  в (3.150), (3.152)–(3.154) должно быть ограничено областью значений

$\vec{k}$ , лежащих внутри некоторой изоэнергетической поверхности в импульсном пространстве, с размером порядка поверхности Ферми.

Полученные выражения носят достаточно общий характер и справедливы для произвольного исходного спектра электронов  $\mathcal{E}(\vec{p})$ , с ограничением лишь случаем кубической симметрии решетки, что позволяет не рассматривать анизотропию физических свойств. Конкретные вычисления мы проведем, для простоты, аппроксимируя  $\mathcal{E}(\vec{p})$  приближением эффективной массы, когда все интегралы по импульсам вычисляются элементарно. Вблизи "левого" края зоны, определяемой спектром (3.151), имеем:

$$\mathcal{E}(\vec{p}) \approx -ZV + \frac{p^2}{2m^*} \quad (3.155)$$

где  $Z$  - число ближайших соседей, а эффективная масса  $m^* = \frac{1}{2Va^2}$ , где  $a$  - постоянная решетки. В этом приближении, прямыми вычислениями в (3.151) нетрудно убедиться, что  $\theta_E \approx 1$ . Выбирая параметр обрезания в импульсном пространстве, как и выше в виде  $k_0 = \chi_0 p_F = \chi_0 \sqrt{2m^* \mathcal{E}}$ , где  $\mathcal{E} = E + ZV$  - энергия (Ферми), отсчитанная от края зоны,  $\chi_0 = \text{Const} \sim 1+2$ , и выполняя интегрирование в (3.152) в сферической системе координат  $d$ -мерного импульсного пространства, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^2}{d} N(\mathcal{E}) \frac{v_F^2}{2\gamma(\mathcal{E})} \left\{ 1 - \frac{d}{d-2} \lambda \chi_0^{d-2} \right\} = \\ &= \frac{e^2}{2\pi d} \frac{v_F^2}{\tilde{W}^2 \Omega_0} \left\{ 1 - \frac{d}{d-2} \lambda \chi_0^{d-2} \right\}; \quad (2 < d < 4) \end{aligned} \quad (3.156)$$

где

$$\lambda = \frac{\gamma(\mathcal{E})}{\pi \mathcal{E}} = \left( \frac{m^*}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\tilde{W}^2 \Omega_0}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \mathcal{E}^{\frac{d-4}{2}} \quad (3.157)$$

- безразмерная "константа связи", аналогичная (3.84),  $v_F = \frac{p_F}{m^*}$  - скорость на поверхности Ферми. Аналогичным образом, из (3.153) имеем:



$$\left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)^2 = \frac{d-2}{d} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{m^*}{2\pi}\right)^{-d/2} \frac{x_0^{2-d}}{V^2 \Omega_0} \varepsilon^{\frac{4-d}{2}} \quad (3.158)$$

При фиксированном беспорядке  $\left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)$  это уравнение определяет  $\varepsilon = \varepsilon_c$  - положение порога подвижности в зоне. При фиксированном  $\varepsilon$  (энергия Ферми) из (3.158) получается критическое отношение  $\left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)_c$ , при котором происходит локализация электронов на поверхности Ферми. В частности, для наполовину заполненной зоны  $\varepsilon = ZV$  ( $E = 0$ , локализация всей зоны) получаем:

$$\left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)_c^2 = \frac{d-2}{d} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{m^*V}{2\pi}\right)^{-d/2} \frac{x_0^{2-d}}{\Omega_0} Z^{\frac{4-d}{2}} \quad (3.159)$$

а при  $\tilde{W}/V < \left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)_c$  для положения порога подвижности имеем:

$$\varepsilon_c = \left\{ \frac{d}{d-2} \frac{x_0^{d-2}}{\Gamma(d/2)} (2\pi)^{-d/2} \right\}^{\frac{2}{4-d}} E_{sc} \quad (3.160)$$

где

$$E_{sc} = (m^*)^{\frac{d}{4-d}} (\Omega_0)^{\frac{2}{4-d}} V^{\frac{4}{4-d}} \left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)^{\frac{4}{4-d}} \sim V \left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)^{\frac{4}{4-d}} \quad (3.161)$$

играет в рассматриваемой модели роль энергии "сильной связи", аналогичной определенной выше в (3.49) для задачи об электроне в поле точечных рассеивателей. При понижении энергии Ферми в зоне вблизи этой энергии ( $\varepsilon \sim E_{sc}$ ) теряет применимость теория возмущений по беспорядку ( $\lambda \sim 1$ ). Необходимые уточнения полученных результатов для положения порога подвижности, связанные с учетом сдвига края зоны, приведены в Приложении 2.

При сравнении наших результатов с литературой по модели Андерсона следует иметь в виду, что наш параметр  $\tilde{W}^2$  имеет смысл дисперсии гауссова распределения (3.128). Для однородного распределения (2.2) дисперсия равна  $W^2/12$ . Поэтому для андерсоновского критического отношения получаем:  $\left(\frac{W}{V}\right)_c^2 = 12 \left(\frac{\tilde{W}}{V}\right)_c^2$ . Конечно, такая процедура дает лишь приближенное описание беспорядка Андер-

сона (2.2), поскольку при этом мы пренебрегаем всеми диаграммами теории возмущений, связанными с высшими кумулянтами случайного поля  $E_j$ , отличными от нуля для распределения (2.2).

В Таблице 3.1 мы приводим значения критического беспорядка для полной локализации всех состояний в зоне, найденные из (3.159) для различных трехмерных решеток кубической симметрии, при двух значениях безразмерного параметра обрезания  $\chi_0$ . Сравнение этих результатов с данными численных расчетов локализации в ПК решетке, приведенными в Таблице 2.1 (для андерсоновского беспорядка) /70 - 72/ дает вполне хорошее (несмотря на очевидную грубость теории) согласие. Очень неплохим является также согласие с результатами наиболее последовательного рассмотрения локализации в рамках подхода Андерсона /65/ (см. также Таблицу 2.1). Формулировка самосогласованной теории локализации на основе теории возмущений по интегралу переноса  $V$ , т.е. метод, в определенном смысле противоположный использованному нами, дает значение  $(\bar{W}/V)_c \approx 11$  (при  $\chi_0=1$ ) для ПК решетки /132/, что также демонстрирует определенную "устойчивость" полученных результатов. Нам неизвестны численные расчеты локализации для ОЦК и ГЦК решеток, однако приведенные в Таблице 3.1 данные, несомненно, правильно отражают тенденцию к росту  $(\bar{W}/V)_c$  с ростом  $Z$ .

В дальнейшем явные результаты будут приведены только для гиперкубической решетки в  $d$ -мерном пространстве. В частности, для статической проводимости наполовину заполненной зоны из (3.156) получаем ( $2 < d < 4$ ):

$$\sigma \approx \sigma_{mm} \frac{\left| \frac{\tilde{W}}{V} - \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c \right|}{\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c}; \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)^2 \leq \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c^2 = \frac{d-2}{d} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (4\pi)^{\frac{d}{2}} \chi_0^{2-d} Z^{\frac{4-d}{2}} \quad (3.162)$$

где определили:

Таблица 3.1. Критический беспорядок, соответствующий локализации всех состояний в зоне для гауссова распределения энергетических уровней  $(\tilde{W}/V)_c$  и для андерсоновского беспорядка  $(W/V)_c$  в решетках кубической симметрии.

Решетка	Z	$\Omega_0$	$(\tilde{W}/V)_c$	$(\tilde{W}/V)_c$	$(W/V)_c$	$(W/V)_c$
			$x_0=1$	$x_0=2$	$x_0=1$	$x_0=2$
ПК	6	$a^3$	5.67	4.01	19.67	13.91
ОЦК	8	$a^{3/2}$	8.63	6.10	29.88	21.18
ГЦК	12	$a^{3/4}$	13.50	9.55	46.78	33.08

$$\sigma_{mm} = \frac{4Z}{\pi d} \frac{e^2}{a^{d-2}} \left( \frac{V}{\tilde{W}} \right)_c^2 \quad (3.163)$$

что практически совпадает с минимальной металлической проводимостью по Мотту /2,3/. В частности, для  $d=3$ , в модели с андерсоновским беспорядком  $\sigma_{mm} \approx 0.013 \frac{e^2}{h a} \approx 10^2 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$  при  $a = 3\text{А}^\circ$ . Любопытно отметить, что при  $d \rightarrow 2$   $\sigma_{mm} \sim \frac{e^2}{a^{d-2}} \frac{1}{d-2} \rightarrow \infty$ , ввиду  $\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c \rightarrow 0$  (ср.(3.159)), что отражает переход к полной локализации при  $d=2$ .

Аналогичным образом, вблизи произвольного порога подвижности (3.160) внутри зоны ("слева" от ее центра), получаем:

$$\sigma \approx \sigma_0 \frac{4-d}{2} \left( \frac{\epsilon - \epsilon_c}{\epsilon_c} \right); \quad \epsilon \gtrsim \epsilon_c \quad (3.164)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{e^2 v_F^2}{d} N(\epsilon) \frac{1}{2\gamma(\epsilon)} \approx \frac{\pi e^2}{m^*} \frac{1}{2\gamma(\epsilon)} \quad (3.165)$$

что аналогично (3.88).

Рассмотрим теперь следствия уравнения (3.154), ограничиваясь случаем наполовину заполненной зоны. Все вычисления вполне аналогичны проделанным выше в модели электрона в поле случайных рассеивающих центров. Для характерной частоты  $\omega_0^2(\epsilon)$  в этом случае находим /130/:

$$\begin{aligned} \omega_0^2(\epsilon = ZV) &\approx \frac{4}{d} Z^2 V^2 \chi_0^2 \left\{ 1 - \frac{\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c^2}{\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)^2} \right\}^{\frac{2}{d-2}} \approx \frac{\tilde{W}}{V} \gtrsim \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c \quad (3.166) \\ &\approx \frac{4}{d} Z^2 V^2 \chi_0^2 \left\{ 2 \frac{\frac{\tilde{W}}{V} - \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c}{\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c} \right\}^{\frac{2}{d-2}} \end{aligned}$$

и, соответственно

$$R_{loc}(\epsilon = ZV) \approx a \left\{ 2 \frac{\frac{\tilde{W}}{V} - \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c}{\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c} \right\}^{-\frac{1}{d-2}} \quad (3.167)$$

где использовали (3.148) и учли, что  $v_{\epsilon=ZV}^2 = 4ZV^2 a^2$ . Видим, что критический индекс радиуса локализации определяется (3.104) и для локализации в центре зоны.

Рассмотрим в заключение, совсем кратко, случай  $d=2$  (полная локализация). В центре зоны ( $\epsilon = ZV$ ) получаем:

$$\omega_0^2(\epsilon = ZV) = 2Z^2V^2\chi_0^2 \exp\left\{-2Z\left(\frac{V}{\tilde{W}}\right)^2\right\} \quad (3.168)$$

а для радиуса локализации в центре зоны квадратной решетки:

$$R_{loc}(\epsilon = ZV)\Big|_{z=4} = aV\sqrt{2Z}\omega_0^{-1}(\epsilon = ZV)\Big|_{z=4} = \frac{a}{2\chi_0} \exp\left\{4\left(\frac{V}{\tilde{W}}\right)^2\right\} \quad (3.169)$$

Де Бройлевская длина волны электрона в этом случае  $\sim a/2$  и из (3.169) видно, что  $R_{loc}$  экспоненциально возрастает от этого значения с уменьшением  $(\tilde{W}/V)$  от  $(\tilde{W}/V)_c^2 = 4/\ln\chi_0$ , что соответствует  $(\tilde{W}/V)_c \approx 2.40$  при  $\chi_0 = 2$ . Заметим, что значение  $(\tilde{W}/V)_c$  очень чувствительно к выбору  $\chi_0$  в интервале  $1 \leq \chi_0 \leq 2$ .

Возможно, что такое поведение  $R_{loc}$  позволяет, в определенном смысле, понять получающиеся во многих численных расчетах конечные значения  $(\tilde{W}/V)_c$  в двумерной модели Андерсона (Таблица 2.1).

## 3.4. Эффект Холла.

Эффект Холла относится к числу важнейших кинетических характеристик электронной подсистемы. Вместе с тем, возможные особенности холловского поведения для системы, находящейся в окрестности порога подвижности, исследованы очень мало. При интерпретации экспериментов используются лишь самые простые качественные предположения, степень обоснованности которых неясна /2,3/. В последние годы выполнены последовательные расчеты первых локализационных поправок к эффекту Холла в слабонеупорядоченном двумерном металле /14,133,134/, а также проведено рассмотрение эффекта Холла в рамках элементарной скэйлинговой теории локализации /41/. Поэтому микроскопический анализ эффекта Холла в рамках самосогласованной теории локализации представляет несомненный интерес и может служить хорошей иллюстрацией применения методов этой теории. Первая попытка такого рода была предпринята, в рамках формализма Гётце /114-116/, в работе /135/. В этом разделе мы проведем рассмотрение эффекта Холла, основываясь на подходе Фоллхарда и Вольфле. Приведенные ниже результаты получены автором совместно с Е.А. Котовым /136/.

Наши расчеты основаны на общих соотношениях для проводимости в слабом магнитном поле, полученных в работе Фукуямы, Эбисавы и Вадды /137/. Рассматривается система электронов в поле хаотически расположенных в пространстве рассеивающих центров, помещенная также в поле статического пространственно-неоднородного вектор-потенциала  $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{r}}$ . Тогда, в линейном приближении по  $\vec{A}_{\vec{q}}$  тензор электропроводности системы, описывающий отклик на однородное внешнее электрическое поле с частотой  $\omega$ , может быть представлен в виде /137/ ( $c$  - скорость света):

$$\sigma_{\mu\nu}(\vec{q}, \omega) = \sigma(\vec{q}, \omega) \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{i\omega} K_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}, \omega) A_{\vec{q}}^{\alpha} \quad (3.170)$$

где

$$\sigma(\vec{q}\omega)\delta_{\mu\nu} = \frac{1}{i\omega} \left\{ \Phi_{\mu\nu}(\vec{q}\omega+i\delta) - \Phi_{\mu\nu}(\vec{q}0+i\delta) \right\} \quad (3.171)$$

$$K_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}\omega) = \frac{e^2}{mc} \delta_{\nu\alpha} \left\{ \mathcal{L}_{\mu}(\vec{q}\omega+i\delta) - \mathcal{L}_{\mu}(\vec{q}0+i\delta) \right\} + \frac{1}{c} \left\{ \mathcal{L}_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}\omega+i\delta) - \mathcal{L}_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}0+i\delta) \right\} \quad (3.172)$$

причем  $\Phi_{\mu\nu}(\vec{q}\omega)$ ,  $\mathcal{L}_{\mu}(\vec{q}\omega)$  и  $\mathcal{L}_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}\omega)$  получаются обычным аналитическим продолжением  $i\omega_m \rightarrow \omega+i\delta$  ( $\delta \rightarrow 0^+$ ) из соответствующих мацубаровских корреляторов плотностей тока  $J_{\mu}(\vec{q}\tau)$  и заряда  $\rho(\vec{q}\tau)$  ( $\tau$  - мацубаровское время,  $T_{\tau}$  - операция T-упорядочения,  $\omega_m = 2\pi mT$ ,  $T$  - температура):

$$\Phi_{\mu\nu}(\vec{q}\omega_m) = T \int_0^{1/T} d\tau \int_0^{1/T} d\tau' \exp\{i\omega_m(\tau-\tau')\} \langle T_{\tau} J_{\mu}(\vec{q}\tau) J_{\nu}(0\tau') \rangle \quad (3.173)$$

$$\mathcal{L}_{\mu}(\vec{q}\omega_m) = -T \int_0^{1/T} d\tau \int_0^{1/T} d\tau' \exp\{i\omega_m(\tau-\tau')\} \langle T_{\tau} J_{\mu}(\vec{q}\tau) \rho(-\vec{q}\tau') \rangle \quad (3.174)$$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}\omega_m) = T \int_0^{1/T} d\tau \int_0^{1/T} d\tau' \int_0^{1/T} d\tau'' \exp\{i\omega_m(\tau-\tau')\} \langle T_{\tau} J_{\mu}(\vec{q}\tau) J_{\nu}(0\tau') J_{\alpha}(-\vec{q}\tau'') \rangle \quad (3.175)$$

где угловые скобки, в данном случае, обозначают усреднение по ансамблю Гиббса. С использованием обычной "примесной" диаграммной техники /17,99/ эти корреляторы могут быть приближенно представлены графиками, показанными на Рис.3.4, где "треугольная" (токовая) вершина описывается уравнением, графически представленным на Рис.3.5 :

$$J_{\mu}(\vec{p}\omega\vec{q}) = \frac{e}{m} p_{\mu} + \sum_{\vec{p}'} U_{\vec{p}\vec{p}'}^E(\vec{q}\omega) G^R(E+\omega\vec{p}_+) G^A(E\vec{p}_-) J_{\mu}(\vec{p}'\omega\vec{q}) \quad (3.176)$$

Из Рис.3.4 видно, что мы пренебрегаем вкладом "треугольных" гра-

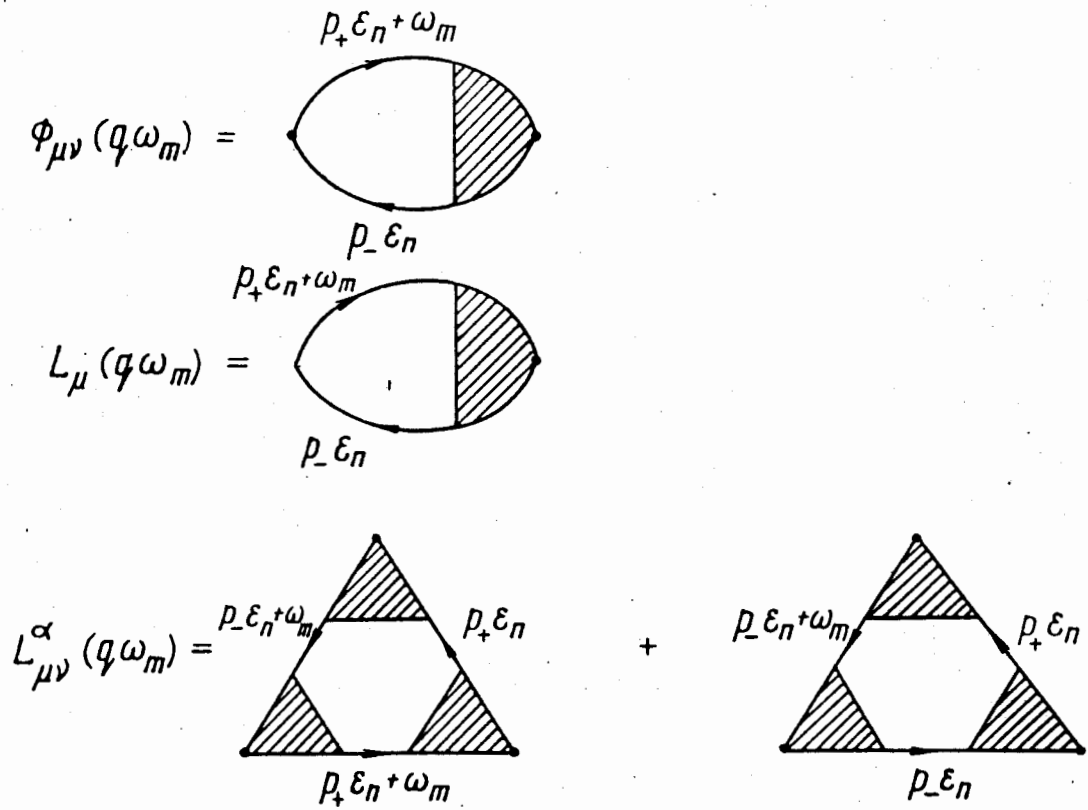


Рис.3.4. Графики для мацубаровских корреляторов, определяющих тензор электропроводности в магнитном поле. Здесь точка обозначает векторный (токовый) характер вершины, отсутствие точки - скалярную вершину.

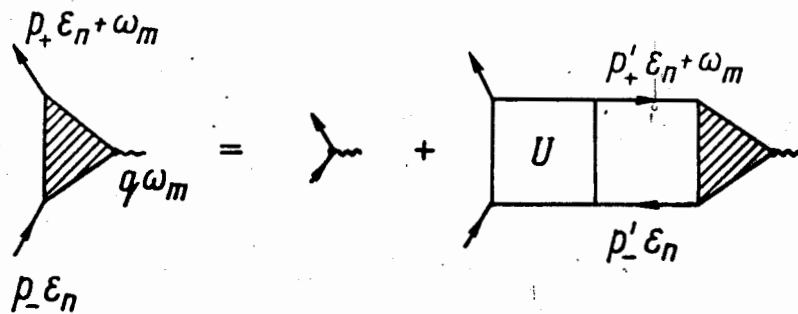


Рис.3.5. Уравнение для "треугольной" (токовой) вершины.



фиков, в которых топология линий рассеяния на беспорядке не сводится к перенормировке "треугольных" вершин. Мы полагаем, что учета "треугольных" вершин достаточно для качественного описания роли локализации в эффекте Холла, так как при этом учитываются все процессы рассеяния, рассматриваемые в самосогласованной теории.

После довольно громоздкого анализа общих выражений (3.173) - (3.175), существенно использующего тождества Уорда, оказывается, что компоненты тензора электропроводности системы в магнитном поле для случая вырожденной статистики электронов ( $T \rightarrow 0$ ) представляется в виде /137/:

$$\sigma_{xx}(\omega) = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{\vec{p}} \frac{p_x^2}{m^2} \chi(\vec{p}\omega) G^R(E+\omega\vec{p}) G^A(E\vec{p}) \quad (3.177)$$

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{e^2}{4\pi i} \omega_c \sum_{\vec{p}} \frac{p_x}{m} \chi^2(\vec{p}\omega) \left\{ G^R(E+\omega\vec{p}) \frac{\partial}{\partial p_x} G^A(E\vec{p}) - \right. \\ \left. - G^A(E\vec{p}) \frac{\partial}{\partial p_x} G^R(E+\omega\vec{p}) \right\} \quad (3.178)$$

Здесь  $\chi(\vec{p}\omega)$  определяется как предел  $\vec{q} \rightarrow 0$  в выражении для токовой вершины (3.176):

$$J_{\mu}(\vec{p}\omega\vec{q}) = \frac{e}{m} p_{\mu} \chi(\vec{p}\omega\vec{q}) \quad (3.179)$$

$\omega_c = \frac{eH}{mc}$  - циклотронная частота электрона в магнитном поле  $H$ , ориентированном вдоль оси  $Z$ .

Нетрудно видеть, что интересующая нас токовая вершина следующим образом выражается через двухчастичную функцию Грина (3.24):

$$G^R(E+\omega\vec{p}_+) G^A(E\vec{p}_-) J_{\mu}(\vec{p}\omega\vec{q}) = - \frac{2\pi i e}{m} \sum_{\vec{p}'} p_{\mu}' \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) \quad (3.180)$$

Явное выражение для этой вершины через релаксационное ядро  $M_E(\vec{q}\omega)$  (3.59) самосогласованной теории найдено в Приложении I (см. (П1.16)).

Имеем:

$$J_{\mu}(\vec{p}\omega\vec{q}) = \frac{e}{m} p_{\mu} \frac{\omega^2 + 2i\gamma(E)\omega - \frac{1}{d} v_F^2 q^2}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_F^2 q^2} \quad (3.181)$$

При  $\omega \ll \gamma(E)$ ,  $v_F q \ll \gamma(E)$  (3.181) сводится к:

$$J_{\mu}(\vec{p}\omega\vec{q}) \approx \frac{e}{m} p_{\mu} \frac{\mathcal{D}_E(\omega)}{\mathcal{D}_0^E} \frac{-i\omega}{-i\omega + \mathcal{D}_E(\omega)q^2} \quad (3.182)$$

где воспользовались (3.37), (3.72). Тогда из (3.179), (3.181), (3.182) немедленно получаем:

$$\chi(\vec{p}\omega) = \frac{\omega + 2i\gamma(E)}{\omega + M_E(\omega)} \underset{\omega \ll \gamma(E)}{\approx} \frac{\mathcal{D}_E(\omega)}{\mathcal{D}_0^E} \quad (3.183)$$

Вычисляя компоненту  $\sigma_{xx}$  тензора электропроводности по формулам (3.177), (3.178), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\omega) &= \frac{e^2}{2\pi} \frac{p_F^2}{dm^2} \frac{\omega + 2i\gamma(E)}{\omega + M_E(\omega)} \sum_{\vec{p}} G^R(E + \omega\vec{p}) G^A(E\vec{p}) = \\ &= \frac{e^2}{2\pi} \frac{p_F^2}{dm^2} N(E) \frac{i}{\omega + M_E(\omega)} = \frac{\pi e^2}{\pi} \frac{i}{\omega + M_E(\omega)} \end{aligned} \quad (3.184)$$

что, естественно, совпадает с (3.73). При этом мы, как и выше, использовали простейшее приближение для одноэлектронной функции Грина в виде (3.34), что, в частности соответствует пренебрежению перенормировкой плотности состояний.

Аналогичным образом получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\omega) &= \frac{e^2}{4\pi i} \omega_c \frac{[\omega + 2i\gamma(E)]^2}{[\omega + M_E(\omega)]^2} \frac{p_F^2}{dm} \sum_{\vec{p}} \left\{ G^R(E + \omega\vec{p}) [G^A(E\vec{p})]^2 - \right. \\ &\left. - [G^R(E + \omega\vec{p})]^2 G^A(E\vec{p}) \right\} = - \frac{e^2 p_F^2}{dm^2} N(E) \omega_c \frac{1}{[\omega + M_E(\omega)]^2} = (3.185) \\ &= \frac{\pi e^2}{\pi} \omega_c \left\{ \frac{i}{\omega + M_E(\omega)} \right\}^2. \end{aligned}$$

Сравнивая (3.184) и (3.185), получаем:

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{H}{\pi e c} [\sigma_{xx}(\omega)]^2 \quad (3.186)$$

Очевидно, что этот результат не зависит от конкретных приближений для неприводимой вершины  $U_{\vec{r}\vec{r}'}(\vec{q}\omega)$ , используемых в выражении (3.59) для  $M_E(\vec{q}\omega)$ , т.е. и от того или иного приближения в уравнении самосогласования (3.79), (3.80) (или (3.95)).

В металлической области, где  $M_E(\omega)$  определяется первым выражением в (3.74), можно перейти в (3.186) к статическому пределу ( $\omega \rightarrow 0$ ) и, используя обычное определение, найти константу Холла:

$$R_H = \frac{\sigma_{xy}}{H \sigma_{xx}^2} = \frac{1}{\pi e c} \quad (3.187)$$

которая оказывается равной своему классическому значению. Соответственно, для холловской подвижности  $\mu_H$  (угла Холла  $\theta_H$ ) получим:

$$\mu_H \approx \frac{c}{H} \theta_H = \frac{c}{H} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = R_H c \sigma_{xx} \quad (3.188)$$

При  $E \rightarrow E_c$  в металле (при  $T = 0$ )  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$ , так что холловская подвижность обращается в нуль на пороге подвижности, пропорционально статической проводимости.

Заметим, что учет возможной перенормировки перенормировки плотности состояний (отсутствующей согласно (3.34) в самогласованной теории) может привести к некоторому изменению этих результатов (ср. /2,3,138/).

Полученные результаты совпадают с найденными в работе Шапиро и Абрахамса /41/ в рамках предложенного в ней обобщения элементарной скэйлинговой теории локализации, что не является неожиданным, поскольку самосогласованная теория локализации воспроизводит, как отмечалось выше, скэйлинговую картину перехода Андерсона /117,118/.

Аналогично работе /41/ мы пренебрегаем влиянием внешнего магнитного поля  $H$  на обобщенный коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_E(\omega)$ . Как уже отмечалось в Главе 2, роль магнитного поля в физике перехода Андерсона еще не вполне ясна. Однако, уже из простейших соображений /14, 133/ ясно, что его влияние определяется величиной "циклотронной" частоты  $\frac{e}{c} \mathcal{D}_E(\omega) H$ , связанной с диффузионным характером движения электрона в неупорядоченной системе (ср. (3.70)). Очевидно, что при выполнении неравенства  $\frac{e}{c} \mathcal{D}_E H \ll T$ , влиянием магнитного поля на диффузию (локализацию) можно пренебречь. В этом случае несущественны эффекты отрицательного магнетосопротивления, рассмотренные в /14, 133/. При  $T \rightarrow 0$  речь идет, таким образом, об эффекте Холла в инфинитезимальном магнитном поле /41/. С другой стороны, при  $E \rightarrow E_c$  имеем  $\mathcal{D}_E(\omega=0) \rightarrow 0$ , так что в реальном эксперименте полученные формулы имеют конечную область применимости. Более последовательный учет магнитного поля в самосогласованной теории локализации требует рассмотрения в духе работы /139/, где предложена схема самосогласования с двумя релаксационными ядрами. Наше рассмотрение справедливо для слабого внешнего поля  $H$  и достаточно высокой температуры  $T$ .

При  $T = 0$  и  $\omega \rightarrow 0$  в области андерсоновского диэлектрика ( $E < E_c$ )  $\mu_H = 0$  и мы не можем осмысленным образом определить константу Холла. Эта же трудность отмечена в работе /41/. В рамках самосогласованной теории можно, однако, предложить содержательные формулы для эффекта Холла и в андерсоновском диэлектрике, воспользовавшись искусственным приемом, предложенным в работе /140/. При конечных температурах проводимость в андерсоновском диэлектрике осуществляется посредством прыжкового механизма. Согласно /140/, при не слишком низких температурах этот механизм проводимости можно описать формулами самосогласованной теории (полученными при  $T = 0$ ) путем простой замены  $\omega$  на  $\omega + i/\tau_{in}$ , где  $\tau_{in}$  -

время свободного пробега относительно неупругих процессов рассеяния (электрон-фононные и электрон-электронные столкновения), которое, очевидно, определяется зависимостью типа:

$$\frac{1}{\tau_{in}(T)} = A \omega^* \left( \frac{T}{\omega^*} \right)^n \quad (3.189)$$

где  $\omega^*$  - характерная частота,  $A \ll 1$  - константа взаимодействия,  $n$  - целое число, большее или равное единице для всех известных процессов неупругого рассеяния. Этот подход качественно справедлив пока энергетическое расстояние между близкими в пространстве электронными уровнями (в пределах области с размерами порядка  $R_{loc}(E)$ ) много меньше температуры, что выражается неравенством вида:

$$T \gg \frac{1}{N(E)R_{loc}^d(E)} \sim \omega_0^2(E)\tau_E \quad (3.190)$$

При более низких температурах проводимость определяется обычным прыжковым механизмом /2,3,8/, что приводит к экспоненциальной (а не степенной) зависимости проводимости от температуры. Ограничиваясь областью температур, определяемой неравенством (3.190), которое может быть легко удовлетворено в непосредственной окрестности порога подвижности, можно выполнить переход  $\omega \rightarrow 0$  и в диэлектрической области. Тогда нетрудно убедиться, что результат (3.187) остается в силе.

Для холловской подвижности, с учетом того, что  $\tau_{in} \gg \tau_E$ , получаем:

$$\mu_H \approx \begin{cases} \frac{e}{m} \tau_E \left[ 1 - \frac{\tau_E}{\tau_{in}(T)} \right] ; & E > E_c \\ \frac{e}{m} \frac{\tau_E}{1 + \omega_0^2(E)\tau_E\tau_{in}(T)} ; & E < E_c \end{cases} \quad (3.191)$$

В частности, в области локализации ( $E < E_c$ ) имеем:

$$\mu_H \approx \begin{cases} \frac{e}{m} \tau_E ; \omega_0^2(E) \tau_E \ll \tau_{in}^{-1} & (\text{высокие } T) \\ \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2(E) \tau_{in}(T)} ; \omega_0^2(E) \tau_E \gg \tau_{in}^{-1} & (\text{низкие } T) \end{cases} \quad (3.192)$$

При  $T \rightarrow 0$  имеем  $\mu_H \rightarrow 0$ , естественно, что "низкие" температуры в (3.192) подразумеваются не нарушающими общего условия (3.190). При высоких температурах из (3.191), (3.192) видно, что переход Андерсона не проявляется и в холловской подвижности. При "низких" температурах это, конечно, не так. Подчеркнем еще раз, что наше рассмотрение годится лишь в непосредственной окрестности перехода, когда выполняется условие (3.190), и прыжковая проводимость описывается степенной зависимостью от температуры.

Пользуясь общим результатом (3.185), (3.186) и выражениями для  $\sigma_{xx}(\omega)$ , приведенными выше в (3.112)–(3.114) /118, 126/, легко написать формулы для явной зависимости  $\sigma_{xy}$  от частоты  $\omega$ :

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{\pi e^3}{m^2} \frac{H}{c} \frac{1}{4\gamma^2(E)} \left( -\frac{i\omega}{2\gamma(E)} \right)^{\frac{2(d-2)}{d}} \left\{ F_d \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right\}^2 \quad (3.193)$$

где асимптотики  $F_d(\omega/\omega_c)$  приведены в (3.113), (3.114), а характерная частота  $\omega_c$  определена в (3.115). Из (3.193) и (3.114), в частности видно, что на самом пороге подвижности ( $E = E_c, \omega_c = 0$ )  $\text{Re} \sigma_{xy}(\omega) \sim \text{Im} \sigma_{xy}(\omega) \sim \omega^{2/3}$  (для  $d=3$ ).

### 3.5. ЯМР релаксация и локализация.

Как уже отмечалось выше в Главе I, экспериментальные свидетельства о локализации остаются в достаточной мере косвенными и основываются, главным образом, на данных по электронной кинетике /2,3,10/. Поэтому представляет интерес проведение других измерений, при которых можно было-бы получить явные свидетельства о локализации электронов (переходе Андерсона). В этом разделе, будет показано, что к числу возможных экспериментов такого рода относятся и измерение времени спин-решеточной релаксации  $T_I$  в условиях ЯМР. Эти результаты получены автором совместно с Л.Н.Булаевским. Фактически, уже довольно давно Уорреном /141,142/ было указано, что измерение  $T_I$  может быть эффективным средством изучения локализации, причем соответствующие эксперименты были реализованы им на расплавах полупроводников, что существенно способствовало лучшему пониманию электронной структуры этих систем. Качественные выводы Уоррена были подтверждены в недавней работе Гётце и Каттерле /143/, основанной на самосогласованной теории локализации. Основной вывод работ /141-143/ сводится к демонстрации роста обратного времени релаксации  $T_I^{-1}$  в металлической области при приближении системы к переходу Андерсона (по сравнению с обычной частотой релаксации Корринги в металле /144/). В дополнение к результатам /141-143/ мы покажем, что на диэлектрической стороне перехода Андерсона происходит падение  $T_I^{-1}$  с уменьшением радиуса локализации электронов (ростом беспорядка). Таким образом, пересечение уровнем Ферми  $E$  порога подвижности  $E_c$  (переход Андерсона) сопровождается максимумом  $T_I^{-1}$ , что может, по-видимому, использоваться как экспериментальное свидетельство в пользу реализации андерсоновского перехода металл-диэлектрик.

В системах со свободными электронами основным механизмом, осуществляющим связь между электронами и ядерными спинами, является

контактное взаимодействие Ферми, приводящее к следующему общему выражению для обратного времени релаксации  $T_1^{-1}$  /I44/:

$$\frac{1}{T_1} = 2A^2 \frac{T}{g_e^2 \mu_B^2 \omega_N} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \text{Im} \chi(\vec{q} \omega_N) \quad (3.188)$$

где:

$$\chi(\vec{q} \omega_N) = g_e^2 \mu_B^2 \left\langle \sum_{\vec{p} \vec{p}'} \sum_{\nu \nu'} \varphi_{\nu' \uparrow}(\vec{p}_+) \varphi_{\nu' \uparrow}^*(\vec{p}_+) \varphi_{\nu \downarrow}(\vec{p}_-) \varphi_{\nu \downarrow}^*(\vec{p}_-) \times \frac{f_{\nu' \uparrow} - f_{\nu \downarrow}}{\epsilon_{\nu \downarrow} - \epsilon_{\nu' \uparrow} + \omega_N + i\delta} \right\rangle \quad (3.189)$$

- электронная восприимчивость на волновом векторе  $\vec{q}$  и частоте ЯМР  $\omega_N$ . В выражении (3.188)  $A$  - обычная константа сверхтонного взаимодействия /I44/,  $g_e$  - электронное гиромагнитное отношение,  $\mu_B$  - электронный магнетон Бора,  $T$  - температура. Выражение (3.189) записано в представлении точных функций  $\varphi_\nu(\vec{r})$  электрона в случайном поле неупорядоченной системы,  $\epsilon_\nu$  - соответствующие точные собственные значения энергии. Угловые скобки в (3.189) снова обозначают усреднение по случайным конфигурациям, а стрелки - направление электронного спина.

Используя неравенства  $\omega_N \ll \omega_e \ll T$  непосредственными вычислениями получаем:

$$\frac{1}{T_1} \text{Im} \chi(\vec{q} \omega_N) \approx g_e^2 \mu_B^2 \omega_N N(E) \langle \rho_E \rho_{E+\omega_e} \rangle_{\vec{q}} \quad (3.190)$$

где введен фурье-образ спектральной плотности Березинского-Горькова (3.3), а  $\omega_e$  - электронная зеемановская частота. Используя связь с двухчастичной функцией Грина (3.18), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &= 2A^2 T N(E) \pi \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \langle \rho_E \rho_{E+\omega_e} \rangle_{\vec{q}} = \\ &= 2A^2 T \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \text{Im} \phi_E^{RA}(\vec{q} \omega_e), \end{aligned} \quad (3.191)$$



где опять пренебрегли несингулярным вкладом  $\text{Im} \Phi_E^{RR}(\vec{q}\omega_e)$ .

Для дальнейших вычислений нужно принять конкретную модель перехода Андерсона. Мы снова воспользуемся самосогласованной теорией локализации в форме, предложенной Фоллхардом и Вольфле. Тогда мы можем сразу же воспользоваться полученными выше выражениями (3.70), (3.75), (3.120) для вычисления  $T_I$  по формуле (3.191). При этом нужно ввести обрезание интеграла по  $q$  на импульсах порядка обратной длины свободного пробега  $\ell^{-1}$ , поскольку, как отмечалось выше, выражения (3.70), (3.75), (3.120) справедливы лишь при  $q \ll \ell^{-1}$ . Вблизи порога подвижности, естественно, имеем  $\ell^{-1} \sim p_F$ . После прямых вычислений для металлической области ( $E > E_c$ ) получаем:

$$\frac{1}{T_I} \approx \frac{1}{T_I^K} \begin{cases} 1 + \frac{1}{p_F \ell} \frac{\sigma_c}{\sigma} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_e}{E}\right)^{1/2} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^{3/2}; & \sigma \gg \sigma_c \left(\frac{\omega_e}{2\gamma(E)}\right)^{1/3} \\ \frac{1}{(p_F \ell)^2} \left(\frac{\omega_e}{2\gamma(E)}\right)^{-1/3}; & \sigma \lesssim \sigma_c \left(\frac{\omega_e}{2\gamma(E)}\right)^{1/3} \end{cases} \quad (3.192)$$

$$\approx \frac{1}{T_I^K} \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{3} \frac{\sigma_c^2}{\sigma(\sigma + \sigma_c)}; & \sigma \gg \sigma_c \left(\frac{\omega_e}{E}\right)^{1/3} \\ \left(\frac{E}{\omega_e}\right)^{1/3}; & \sigma \lesssim \sigma_c \left(\frac{\omega_e}{E}\right)^{1/3} \end{cases}$$

где  $T_I^K$  - время релаксации Корринги /144/, определяющее релаксацию ядерных спинов в "хорошем" металле:

$$\frac{1}{T_I^K} = 2A^2 T \pi [N(E)]^2 \quad (3.193)$$

Характерная проводимость  $\sigma_c$  определена выше в (3.91). При переходе к второму выражению в (3.192) мы воспользовались тем, что  $p_F \ell = \frac{3}{\pi} \frac{\sigma_0}{\sigma_c} = \frac{3}{\pi} \frac{\sigma + \sigma_c}{\sigma_c}$  (ср. (3.92)) и выразили ответ через наблюдаемую величину - проводимость  $\sigma$ . Кроме того в последнем выражении мы пренебрегли членами порядка  $(\omega_e/E)^{1/2}$ , которые малы практически в любой реальной ситуации ( $E$  - энергия Ферми!). Единица в правой части (3.192) приписана из соображений соответствия с обычными результатами в "чистом" пределе, когда  $\sigma \approx \sigma_0$  ( $p_F \ell \gg 1$ ).

Непосредственный переход к "чистому" пределу в интеграле по  $\sigma$  в (3.191), при использовании выражений (3.70), (3.75), (3.120), справедливых для "грязного" случая, невозможен. Соответственно, (3.192) должно рассматриваться как интерполяционная формула. Первое выражение в (3.192) практически совпадает с соответствующими выражениями в работе /143/, однако, по нашему мнению, здесь он получен более прямым и ясным способом.

Из (3.192) видно, что при подходе к переходу Андерсона ( $\sigma \lesssim \sigma_c$ ) должно наблюдаться существенное возрастание частоты релаксации  $T_I^{-1}$ , по сравнению с частотой релаксации Корринги. Кроме того, согласно (3.192) в узкой области вблизи перехода возникает зависимость  $T_I$  от  $\omega_e$ , т.е. от внешнего магнитного поля, аналогичная по своей природе зависимости времени релаксации от  $\omega_e$  (магнитного поля), наблюдавшейся в квазиодномерных системах /145/. Однако, эта зависимость начинает "работать" лишь при  $\sigma \lesssim \sigma_c \left(\frac{E}{\omega_e}\right)^{-1/3} \ll \sigma_c$ , т.е. в очень узкой окрестности перехода, когда металлическая проводимость крайне мала. Поэтому, экспериментальное наблюдение  $\omega_e^{-1/3}$  - зависимости частоты релаксации представляется крайне затруднительным, даже для систем с весьма малыми значениями энергии Ферми  $E$ , типа легированных полупроводников. В этой области может стать существенной роль температурной зависимости проводимости, которой всюду пренебрегалось (выше  $\sigma$  - остаточная проводимость системы, получающаяся экстраполяцией к  $T = 0$ ). Возрастание же частоты релаксации  $T_I^{-1}$  с падением проводимости (уменьшением параметра  $\rho_f l$ ) должно наблюдаться в достаточно широкой области, от проводимости порядка известного предела Иоффе-Регеля /4/ :  $\sigma_0 \sim 10^3 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ . Именно такое поведение  $T_I$  наблюдалось в экспериментах Уоррена на жидких полупроводниках /142/ и оно хорошо согласуется с теоретическими результатами /143/, т.е. с (3.192). При обсуждении имеющихся экспериментов по легированным полупроводникам (см. например данные по ЯМР в  $\text{Si:P}$  и  $\text{Ge:As}$  /146/)

следует иметь в виду, что полученные выше формулы описывают рост  $T_I^{-1}$  по сравнению с частотой Корринги  $(T_I^K)^{-1}$ , которая, в свою очередь, является функцией  $N(E)$  (см. (3.193)). При движении уровня Ферми  $E$  к  $E_C$  (т.е. одновременно и к краю зоны в легированном полупроводнике), плотность состояний  $N(E)$  падает, что маскирует обсуждаемый эффект. По-видимому, падением  $N(E)$  можно объяснить большую часть результатов из /146/. Для обнаружения эффектов локализации нужны прецизионные измерения в непосредственной окрестности перехода металл-диэлектрик (в духе работ /47-53/). Насколько известно автору, подобные измерения ЯМР в легированных полупроводниках, с соответствующей обработкой, никем еще не проводились.

В области локализации ( $E < E_C$ ), вычисления аналогичные использовавшимся при выводе (3.192), дают:

$$\frac{1}{T_I} \approx \frac{1}{T_I^K} \begin{cases} \frac{1}{(\rho_F l)^2} \left( \frac{\omega_e}{2\gamma(E)} \right)^{-1/3} \approx \left( \frac{E}{\omega_e} \right)^{1/3} ; R_{loc}(E) \geq [N(E)\omega_e]^{-1/3} \\ \rho_F R_{loc}(E) ; R_{loc}(E) \leq [N(E)\omega_e]^{-1/3} \end{cases} \quad (3.194)$$

Очевидно, что  $\omega_e^{-1/3}$  - зависимость и здесь "работает" лишь в очень узкой области вблизи перехода, когда радиус локализации  $R_{loc}(E)$  очень велик. По мере того, как уровень Ферми  $E$  движется вглубь области локализации (или с ростом беспорядка)  $R_{loc}(E)$  уменьшается так, что частота релаксации  $T_I^{-1}$  падает вместе с параметром  $\rho_F R_{loc}(E)$ . Второе выражение в (3.194) справедливо до значений  $\rho_F R_{loc}(E) \sim 1$ , когда  $T_I^{-1}$  "возвращается" к значениям порядка частоты Корринги. Для меньших значений  $R_{loc}(E)$  нельзя пользоваться приближениями, основанными на использовании самосогласованной теории локализации (согласно (3.103) в этой теории  $R_{loc}(E)$  не может стать меньше  $\rho_F^{-1}$ !). Таким образом, частота релаксации ЯМР

$T_I^{-1}$  проходит через максимум, когда уровень Ферми пересекает порог подвижности. Высота этого максимума порядка  $(\frac{E}{\omega_e})^{1/3} \frac{1}{T_I^K}$ , т.е. может наблюдаться весьма существенное возрастание частоты релаксации. Экспериментальное наблюдение такого максимума может, по нашему мнению, служить важным независимым свидетельством в пользу реализации в данной системе перехода Андерсона.

Физический смысл этого результата прост. Релаксация идет за счет переворота ядерного спина пролетающим мимо ядра электроном, который переворачивает свой спин. По мере приближения системы к переходу Андерсона, электроны проводимости все более медленно диффундируют в окрестности данного ядерного спина и, соответственно, взаимодействуют с ним в течение все большего времени, что и приводит к росту частоты релаксации  $T_I^{-1}$  /142/. Этот эффект максимален в точке перехода, однако в дальнейшем, когда электроны остаются локализованными в окрестности данного ядра с размером порядка  $R_{loc}(E)$ , радиус локализации уменьшается с ростом беспорядка и электрон все менее эффективно "уносит информацию" о ядерном спине, что и ведет к уменьшению  $T_I^{-1}$ . Максимальное значение  $T_I^{-1}$  достигается на пороге локализации.

В общем случае обобщенный коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_E(\vec{q}, \omega)$  (3.72) является функцией как  $\omega$ , так и  $\vec{q}$ . В тоже время, самосогласованная теория локализации, целиком основанная на уравнении типа (3.80), фактически использует предел  $\mathcal{D}_E(\vec{q} \rightarrow 0, \omega)$  в качестве универсальной зависимости. В настоящее время неясно, как провести обобщение этой теории для учета возможной  $\vec{q}$ -зависимости.

Основываясь на скейлинговых соображениях, Ли /147/ предложил следующую  $\vec{q}$ -зависимость для  $\mathcal{D}_E(\vec{q}, \omega \rightarrow 0)$  при  $E \gg E_c$ , когда  $\xi_{loc}(E) \gg l; \rho_F^{-1}$ :

$$D_E (\bar{q} \omega \rightarrow 0) q^2 \approx \begin{cases} D_E q^2 ; q_{loc}^3(E) \ll 1 \\ \alpha q^3 ; q_{loc}^3(E) \gg 1 \end{cases} \quad (3.195)$$

в металлической области, где  $D_E$  — перенормированный коэффициент диффузии (3.77), а  $\alpha$  имеет тот же смысл, что и в (3.120). Используя (3.195) в (3.70) и вычисляя интеграл по  $q$  в (3.191), как это было сделано в работе /147/, получаем:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_1^K} \begin{cases} \text{Const} ; \sigma \gg \sigma_c \left(\frac{\omega_e}{E}\right)^{1/3} \\ \text{Const} \ln \frac{E}{\omega_e} ; \sigma \lesssim \sigma_c \left(\frac{\omega_e}{E}\right)^{1/3} \end{cases} \quad (3.196)$$

Таким образом, скейлинговая гипотеза работы /147/ не приводит к существенному росту  $T_1^{-1}$  при подходе к порогу подвижности, лишь в очень узкой области вблизи порога происходит логарифмический рост с уменьшением  $\omega_e$ . Поведение типа (3.195) противоречит основному уравнению (3.80) самосогласованной теории, хотя последняя дает обычное скейлинговое поведение вблизи порога подвижности /117, 118/, неизвестно также обобщение (3.195) для области локализации. Результат (3.196) не соответствует также и упоминавшимся выше экспериментам Уоррена /141/. Поэтому мы предпочитаем результаты, полученные выше в рамках самосогласованной теории локализации.

В нашем рассмотрении пренебрегалось температурной зависимостью проводимости. В частности, это означает пренебрежение прыжковой проводимостью в области локализации. Кроме того, мы полностью пренебрегли возможной ролью межэлектронного взаимодействия, поскольку вопрос о его влиянии на переход Андерсона все еще мало изучен.

Наиболее существенным является, однако, пренебрежение влиянием внешнего магнитного поля  $H$  на обобщенный коэффициент диффузии и на локализацию. В принципе, влияние магнитного поля может оказаться сильным [14, 133]. Однако, как уже отмечалось при обсуждении эффекта Холла, влияние поля определяется величиной "циклотронной частоты"  $eH\mathcal{D}_E/c$ , сопоставляемой диффузионному движению электрона в неупорядоченной системе, помещенной в магнитное поле. Очевидно, что при  $eH\mathcal{D}_E/cT \ll 1$  влиянием поля можно пренебречь.

Таким образом, изучение ЯМР релаксации в неупорядоченных системах дает, в принципе, прямую информацию о переходе Андерсона, не связанную с тонкими деталями электронной кинетики. Для проведения таких экспериментов не требуется, в частности, получение очень низких температур, что, как отмечалось в Главе I, существенно при изучении локализации обычными методами.

## 4. ПОЛЕВОЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ.

## 4.1. Эффективная теория поля для электрона в неупорядоченной системе. Критерий Гинзбурга.

Последовательное рассмотрение окрестности порога подвижности представляется разумным вести путем построения эффективной теории поля, соответствующей переходу Андерсона, подобно тому, как это делается в задаче о критических явлениях в теории фазовых переходов /26-30/. Действительно, первоначальные идеи скейлингового описания порога подвижности возникли сразу же после появления современной теории критических явлений и были сформулированы, практически одновременно, целым рядом авторов /31,32,148-151/. В настоящее время существует уже довольно обширная литература на эту тему, предложен и целый ряд эффективных лагранжианов для электрона вблизи порога подвижности /10,13,14,16/. Мы рассмотрим результаты, полученные автором в рамках первоначального полевого подхода /31, 149/. С нашей точки зрения, достоинством этого подхода является ясная демонстрация трудностей, возникающих при попытке последовательного решения интересующей нас проблемы. Изложение в этой Главе следует, в основном, обзору автора /119/.

Рассмотрим опять задачу о свободном электроне в поле случайных рассеивающих центров. Тогда, если ограничиться случаем гауссовой статистики случайного поля, создаваемого этими центрами, что справедливо, если иметь ввиду /88,89/ предельный переход  $V \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\rho V^2 \rightarrow \text{const}$ , то нетрудно убедиться, что диаграммное разложение Эдвардса /17,99,107/ для усредненной функции Грина  $G^{R,A}(E\vec{r})$  порождается стандартным разложением в ряд теории возмущений /30/ пропагатора (функции Грина) скалярной  $O(n)$  - симметричной евклидовой теории поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{2m} (\nabla \phi_j)^2 - E \phi_j^2 \right\} - \frac{1}{8} \rho V^2 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)^2; \quad E = E \pm i\delta; \delta \rightarrow 0^+ \quad (4.1)$$

где  $m$  - масса электрона,  $E$  - его энергия. При этом число компонент поля  $n \rightarrow 0$  ( в конце вычислений ), что исключает "петлевые" графики, отсутствующие в диаграммной технике Эдвардса ( ср. Рис.2.3 ). Ситуация здесь вполне аналогична рассмотренной выше ( Глава 2 ) в связи с задачей о путях без пересечений ( исключенном объеме ) /91,92/. В частности, легко видеть, что аналитическое продолжение  $\tau \rightarrow -E \mp i\delta$ ,  $g_0 \rightarrow -\rho V^2$  в разложении теории возмущений (2.103) для лагранжиана (2.102) порождает при  $n \rightarrow 0$  эдвардсовский ряд теории возмущений для  $G^{R,A}(E\bar{p})$ , соответственно и (2.102) переходит в (4.1) /149/.

Функция Грина, соответствующая лагранжиану (4.1) может быть формально определена функциональным интегралом:

$$G(\bar{r}-\bar{r}'E) = -\frac{1}{Z} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int \{ \delta\phi(\bar{r}) \} \phi_j(\bar{r}) \phi_j(\bar{r}') \exp \{ -S[\phi] \} \quad (4.2)$$

где

$$S[\phi] = \int d^4\bar{r} \mathcal{L}(\bar{r}) \quad (4.3)$$

- функционал действия теории поля (4.1), а нормировочный интеграл:

$$Z = \int \{ \delta\phi(\bar{r}) \} \exp \{ -S[\phi] \} \quad (4.4)$$

Знак минус в (4.2) выбран из соображений соответствия с видом нулевой функции Грина электрона. При формальном вычислении, функциональный интеграл (4.2) расходится в силу "неправильного" знака константы связи (притяжение!) /31/, что отражает неустойчивость основного состояния в теории поля (4.1). Поэтому его следует также понимать в смысле аналитического продолжения по константе связи от произвольной константы  $g > 0$  на "физическую"  $g = -\rho V^2 < 0$ . Подробнее этот вопрос обсуждается ниже, пока для нас достаточно понимать (4.2) просто как сокращенную запись диаграммных правил теории возмущений для теории с лагранжианом (4.1).



Отметим, что в (4.1) отсутствуют случайные параметры, усреднение уже проведено. Поэтому о (4.1) говорят как об "эффективном" лагранжиане. В тоже время за такое удобство приходится "платить": для вычисления усредненной двухчастичной функции Грина нужен уже другой эффективный лагранжиан. Мы видели выше, что для решения задачи о локализации требуется знание корреляторов типа (3.19), (3.24), в которые входят одноэлектронные функции Грина от разных энергетических переменных. Нетрудно непосредственно выписать эффективный лагранжиан, который сразу же "порождает" диаграммную технику для двухчастичной функции Грина (Ср. Рис. 3.1). Для этого нужен лагранжиан двух взаимодействующих полей  $\phi$  ( $n$  компонент,  $n \rightarrow 0$ ) и  $\varphi$  ( $m$  компонент,  $m \rightarrow 0$ ), обладающий  $O(n) \times O(m)$  - симметрией /10, 151/:

$$\mathcal{L}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{2m} (\nabla \phi_j)^2 - (E + \omega + i\delta) \phi_j^2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{2m} (\nabla \varphi_i)^2 - (E - i\delta) \varphi_i^2 \right\} - \quad (4.5)$$

$$- \frac{1}{8} \rho V^2 \left\{ \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i^2 \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \phi_j^2 \varphi_i^2 \right\} : \delta \rightarrow 0^+$$

Появление лагранжиана двух взаимодействующих полей указывает на усложнения, возникающие при переходе к двухчастичной функции Грина. Тем не менее, основная трудность теории, связанная с "неправильным" знаком константы связи, проявляется уже в (4.1).

Прежде всего проанализируем на элементарном уровне вопрос об области применимости теории возмущений, аналогично тому как это делается в теории критических явлений в связи с выводом так называемого критерия Гинзбурга, определяющего размер критической области, где существенны флуктуации параметра порядка /152/. Следуем, в общих чертах, рассмотрению, проведенному в работе автора /100/.

Собственно-энергетическая часть функции Грина в "однопетлевом" приближении, соответствующем суммированию графиков типа Рис.3.2(а), определяется уравнением:

$$\sum(E_0) = \rho V^2 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{E_0 - \sum(E_0) - p^2/2m} \quad (4.6)$$

где  $E_0$  - "затравочная" энергия свободного электрона. Определим перенормированную энергию  $E$  с помощью соотношения:

$$E(E_0) = E_0 - \text{Re} \sum(E_0) \quad (4.7)$$

Тогда (4.6) переписывается в виде:

$$E_0 - E(E_0) + i \text{Im} \sum(E_0) = \rho V^2 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{E(E_0) - p^2/2m - i \text{Im} \sum(E_0)} \quad (4.8)$$

Определим теперь, в этом приближении, перенормированный (сдвинутый) край зоны  $E_{oc}$  из условия обращения в нуль плотности состояний (Ср. аналогичное рассмотрение для модели Андерсона в Приложении II /130/):

$$N(E_0) = \mp \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \text{Im} G^{R,A}(E_0, \vec{p}) \xrightarrow{E_0 \rightarrow E_{oc}} 0 \quad (4.9)$$

Имеем:

$$\text{Im} G^{R,A}(E_0, \vec{p}) = \begin{cases} \mp \pi \delta \left[ E(E_0) - \frac{p^2}{2m} \right]; & \text{Im} \sum(E_0) = 0 \\ \frac{\text{Im} \sum(E_0)}{\left[ E(E_0) - \frac{p^2}{2m} \right]^2 + \left[ \text{Im} \sum(E_0) \right]^2}; & \text{Im} \sum(E_0) \neq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Для выполнения (4.9) должно удовлетворяться необходимое условие  $\text{Im} \sum(E_0 \rightarrow E_{oc}) \rightarrow 0$ , но кроме того нужно потребовать

$$N(E_0 \rightarrow E_{oc}) = \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \delta \left[ E(E_0) - \frac{p^2}{2m} \right] \xrightarrow{E_0 \rightarrow E_{oc}} 0 \quad (4.11)$$

что эквивалентно условию:

$$E(E_0) \xrightarrow{E_0 \rightarrow E_{oc}} 0 \quad (4.12)$$

и следовательно  $E(E_0) = 0$

Тогда из (4.8) получаем уравнение, определяющее  $E_{oc}$  :

$$E_{oc} = -\rho V^2 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2/2m} \equiv -\rho V^2 \mathcal{D}(0) = -\rho V^2 2m S_d \frac{p_0^{d-2}}{d-2} \quad (4.13)$$

где  $S_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-\frac{d}{2}} / \Gamma(\frac{d}{2})$ ,  $p_0 \approx a^{-1}$  - импульс обрезания порядка обратной наименьшей длины в задаче, определяемой радиусом корреляции случайных потенциалов, т.е. длины, на которой "размазывается" точечное взаимодействие в (4.1). Наше определение сдвинутого края зоны отличается от принятого в работе /153/, но соответствует определению сдвига точки фазового перехода за счет флуктуаций /152/.

Вычитая  $E_{oc} + \rho V^2 \mathcal{D}(0) = 0$  из (4.7), получаем:

$$E(E_0) = E_0 - E_{oc} - \text{Re} \sum(E_0) - \rho V^2 \mathcal{D}(0) \quad (4.14)$$

Пренебрегая  $\text{Im} \sum(E_0)$  в (4.8) имеем:

$$\text{Re} \sum(E_0) \approx \rho V^2 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{E(E_0) - p^2/2m} \equiv \rho V^2 \mathcal{D}[E(E_0)] \quad (4.15)$$

Тогда из (4.14) получаем уравнение, связывающее перенормированную энергию  $E(E_0)$  с расстоянием от края зоны в терминах затравочной энергии  $E_0 - E_{oc}$  :

$$E(E_0) = E_0 - E_{oc} - \rho V^2 \left\{ \mathcal{D}[E(E_0)] - \mathcal{D}(0) \right\} \quad (4.16)$$

"Критерий Гинзбурга" /100/ следует (аналогично /152/) из требования справедливости простейшей формулы:

$$E \approx E_0 - E_{oc} \quad (4.17)$$

означающей равенство перенормированной энергии, энергии электрона, отсчитанной от сдвинутого (в однопетлевом приближении) края зоны.

Очевидно, что (4.17) выполнено при ( $2 < d < 4$ ):

$$|E| \gg \rho V^2 |\mathcal{D}(E) - \mathcal{D}(0)| = \rho V^2 \pi m S_d (2mE)^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{|\text{Sin} \pi(\frac{d}{2}-1)|}$$

или

$$|E| \gg \left\{ \frac{B_d}{|\text{Sin} \frac{\pi d}{2}|} \right\}^{\frac{2}{4-d}} E_{sc} \quad (4.18)$$

где  $B_d = 2^{-\frac{d}{2}} \pi^{1-\frac{d}{2}} / \Gamma(\frac{d}{2})$ ,  $E_{sc} = m^{\frac{d}{4-d}} (\rho V^2)^{\frac{2}{4-d}}$  (см. (1.2) и (3.49)).  
 При  $d \rightarrow 2$   $|\sin \frac{\pi}{2} d| \rightarrow \frac{\pi}{2} (d-2)$ , а  $\frac{2}{\pi} B_d = A_d$  из формулы (3.48).  
 Видим, что (4.18) эквивалентно (3.48). При  $d \rightarrow 2$  условие (4.18) является более жестким, нежели простое требование  $E \geq \gamma(E)$  (или  $E \geq E_{sc}$ ), рассматривавшееся выше в качестве критерия применимости теории возмущений. Пренебрежение  $\text{Im} \sum (E_0)$  в (4.15) в условиях (4.18) является вполне оправданным. Только в этих условиях справедливо и простейшее приближение для одноэлектронной функции Грина (3.34), в котором (как и всюду выше) подразумевалось, что переменная  $E$  имеет смысл расстояния от сдвинутого случайным полем края зоны. Согласно (3.48) и (3.87) порог подвижности попадает в "гинзбурговскую критическую область" (4.18), где существенны высшие порядки теории возмущений даже при  $d \rightarrow 2$  /100/. Расходимость области (4.18) при  $d \rightarrow 2$  вполне аналогична расходимости критической области в задаче о двумерном фазовом переходе /152/.

В нашем дальнейшем рассмотрении теории поля (4.1) мы будем всюду понимать под  $E$  (в (4.1), (4.5) и т.д.) перенормированную в однопетлевом приближении энергию электрона (4.14)-(4.17), что позволяет исключить из рассмотрения реальную часть графика типа Рис. 3.2(а), приводящую к сдвигу края зоны. Формально это можно обеспечить, приписывая к (4.1) соответствующий контрчлен перенормировки "массы".

Случаи  $d = 2, 4$  нужно рассмотреть отдельно. Для  $d = 4$  рассмотрение, по сути дела, не отличается от предыдущего. Сдвиг края зоны, в соответствии с (4.13) равен:

$$E_{oc} = \rho V^2 \frac{m}{8\pi^2} \frac{p_0^2}{2} = \rho V^2 \frac{m^2}{8\pi^2} \tilde{E}_0 \quad (4.19)$$

где ввели  $\tilde{E}_0 = p_0^2/2m$  - энергию, связанную с импульсом обреза-

ния. Уравнение (4.16) для  $d = 4$  дает:

$$E = E_0 - E_{oc} + 2\rho V^2 \frac{m^2}{2\pi^2} E \ln \frac{\sqrt{2mE}}{p_0} \quad (4.20)$$

Условие  $E \gg \gamma(E)$  для  $d = 4$  сводится к условию малости безразмерной константы связи  $\frac{m^2}{4\pi} \rho V^2 \ll 1$ . Требование же  $E \approx E_0 - E_{oc}$  приводит, согласно (4.20), к неравенству:

$$E \gg \tilde{E}_0 \exp \left\{ - \frac{4\pi^2}{m^2} \frac{1}{\rho V^2} \right\} \quad (4.21)$$

что определяет экспоненциально малую по константе связи "гинзбургскую критическую область" четырехмерной теории.

Для  $d = 2$  ситуация сложнее. Определенный с помощью (4.13) сдвиг края зоны обращается в бесконечность, а из (4.15) получаем:

$$\operatorname{Re} \Sigma(E\vec{p}) \approx \rho V^2 \frac{m}{2\pi} \ln \left| \frac{\tilde{E}_0}{E} \right| ; E \ll \tilde{E}_0 = \frac{p_0^2}{2m} \quad (4.22)$$

Поправка к  $E_0$  в (4.7) не мала всюду при  $E \ll \tilde{E}_0$ , что и означает формальную неприменимость теории возмущений при  $d = 2$ . Поэтому в дальнейшем будем понимать  $d = 2$  в смысле  $d = 2 + \epsilon$ , когда определения (3.13), (3.18) сохраняют ясный смысл.

## 4.2. "Паркетное" приближение и область сильной связи.

В предыдущем разделе была рассмотрена простейшая поправка теории возмущений. Ниже будет показано, что учет высших поправок приводит (в отличие от обычной теории критических явлений) к трудностям принципиального характера.

Роль высших поправок теории возмущений в теории (4.1) удобно рассмотреть в так называемом "паркетном" приближении /149/. Хорошо известно /26,154/, что в этом приближении можно дать полный анализ теории критических явлений для  $d = 4$  или  $d = 4 - \epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ). Это связано с тем обстоятельством, что "паркет" образует доминирующую последовательность графиков для  $d \sim 4$ . Сам по себе, этот факт не зависит от знака константы взаимодействия. Мы выпишем соответствующие уравнения для теории (4.1), введя новую переменную  $-E = \tau > 0$  и только в конце вычислений совершим аналитическое продолжение  $\tau \rightarrow -E \mp i\delta$ , где  $E > 0$ . Такой способ рассмотрения удобнее, т.к. он позволяет воспользоваться обычным анализом логарифмических интегралов. Рассмотрим простейшие поправки к затравочному взаимодействию  $-\rho V^2$ , изображаемые суммой диаграмм, показанных на Рис. 4.1. Результат, естественно, зависит от выбора импульсов на внешних концах. Пусть для определенности все внешние импульсы равны нулю. Тогда имеем:

$$\Gamma(\vec{p}_i = 0, \tau) \approx -\rho V^2 \left\{ 1 + \rho V^2 \left( \frac{n}{2} + 4 \right) \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p^2/2m + \tau]^2} + \dots \right\} \quad (4.23)$$

$$\approx -\rho V^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2}(n+8)u_s + \dots \right\}_{n \rightarrow 0} = -\rho V^2 \left\{ 1 + 4u_s + \dots \right\}$$

где ввели безразмерную константу взаимодействия:

$$u = \frac{m^2}{2\pi^2} a^{-\epsilon} \rho V^2 \quad (4.24)$$

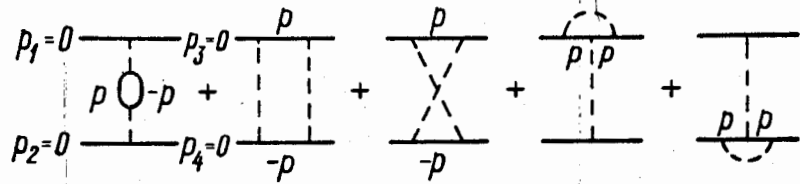


Рис.4.1. Поправки первого порядка ( диаграммы второго порядка по  $\rho V^2$  ) к затравочному взаимодействию в теории поля (4.1).

и "логарифмическую переменную":

$$S = \begin{cases} \ln \frac{p_0}{\text{Max}[\sqrt{2m\tau}, \vec{p}_i]} ; d = 4 \\ \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( \frac{p_0}{\text{Max}[\sqrt{2m\tau}, \vec{p}_i]} \right)^\epsilon - 1 \right] ; d = 4 - \epsilon \end{cases} \quad (4.25)$$

Отсюда видно, что отбор графиков теории возмущений следует вести по параметру  $uS$ . При  $\tau \rightarrow 0$  ( $\vec{p}_i = 0$ ) легко достигается ситуация, когда  $uS \gg 1$ , т.е. когда поправка превышает затратное взаимодействие. Процедура суммирования "паркетных" графиков отбирает "главные логарифмы", т.е. вклады  $\sim (uS)^n$ , пренебрегая вкладом типа  $\sim u^k (uS)^n$  ( $k \geq 1, u \ll 1$ ). Не имея места для подробного изложения "паркетного формализма" /26, I54/, приведем лишь основные результаты /II9, I49/. Полная вершинная часть  $\Gamma(s)$  обезразмеренная домножением на  $m^2 a^{-\epsilon} / 2\pi^2$ , определяется в "паркетном" приближении интегральным уравнением следующего вида:

$$\Gamma(s) = -u - \frac{1}{2}(\pi+8) \int_0^s dt \Gamma^2(t) \quad (4.26)$$

которое эквивалентно дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\Gamma(s)}{ds} = -\frac{1}{2}(\pi+8) \Gamma^2(s) \quad (4.27)$$

с начальным условием  $\Gamma(s=0) = -u$ . Решение его дает:

$$\Gamma(s) = -\frac{u}{1 - \frac{1}{2}(\pi+8)us} \stackrel{(\pi=0)}{=} -\frac{u}{1 - 4us} \quad (4.28)$$

Видим, что при  $\tau \rightarrow 0$  в  $\Gamma(s)$  имеется "ложный" полюс при  $S_c = \frac{1}{4u}$  отражающий неприменимость теории возмущений при  $S \gtrsim u^{-1}$ . На языке теоретико-полевой ренормгруппы такое поведение соответствует росту инвариантного заряда теории при  $S \rightarrow S_c \sim u^{-1}$ , что



является признаком неприменимости теории возмущений /38-40/. В рассматриваемом приближении уравнение (4.27), по сути дела, представляет собой уравнение Гелл-Манна и Лоу для инвариантного заряда. Полученный результат (4.28) отражает асимптотическую свободу рассматриваемой теории (в теории критических явлений реализуется "нуль-зарядная" ситуация), теория возмущений применима лишь при больших энергиях (импульсах). Аналитическое продолжение  $\tau \rightarrow -E \mp i\delta$  дает: ( $d=4-\epsilon$ )

$$\Gamma(E) = - \frac{u}{1 - \frac{4u}{\epsilon} \left\{ \left( -\frac{2mE}{p_0^2} \right)^{-\epsilon/2} - 1 \right\}} \approx \quad (4.29)$$

$$\approx - \frac{u}{1 - \frac{4u}{\epsilon} \left\{ \left( \frac{2m|E|}{p_0^2} \right)^{-\epsilon/2} - 1 \right\} \pm iu \left( \frac{2m|E|}{p_0^2} \right)^{-\epsilon/2} \theta(E) \frac{\pi}{2}}$$

и аналогично:

$$\Gamma(E) = - \frac{u}{1 - 4u \ln \frac{p_0}{\sqrt{2m|E|}} \pm iu \frac{\pi}{2} \theta(E)} \quad (d=4) \quad (4.30)$$

Видим, что при этом "ложный" полюс сохраняется, хотя и лежит на отрицательной части оси энергий (где, в этом приближении, нет электронных состояний /149/) при:

$$E \approx -E^* = - \frac{p_0^2}{2m} \left( \frac{4u}{\epsilon} \right)^{\frac{2}{\epsilon}} = - \left( \frac{2}{\pi^2(4-d)} \right)^{\frac{2}{4-d}} E_{sc} \quad (d=4-\epsilon) \quad (4.31)$$

$$E = -E^* = - \frac{p_0^2}{2m} \exp \left\{ - \frac{\pi^2}{m^2} \frac{1}{\rho V^2} \right\} \quad (d=4)$$

Таким образом, выполнение критерия Гинзбурга (4.18), (4.21) фактически означает, что по теории возмущений могут быть рассмотрены энергии, достаточно далекие от ложного полюса. Теория возмущений становится неприменимой уже при  $E \gtrsim E^* \sim E_{sc}$  ( $d < 4$ ), по-

сколькo, как легко видеть из (4.29), (4.30)

$$|\Gamma(E \approx +E^*)| \approx \frac{8}{\pi \varepsilon} \gg 1 \quad (d = 4 - \varepsilon) \quad (4.32)$$

$$|\Gamma(E = +E^*)| = \frac{2}{\pi} \sim 1 \quad (d = 4)$$

так что эффективное взаимодействие  $\Gamma(E)$  становится сильным. Отметим, впрочем, что учет "мнимости" в знаменателе (4.28), (4.29) является превышением точности, поскольку "паркетное" приближение отвечает только за большие логарифмические ( $\sim u/\varepsilon$  при  $\varepsilon \ll 1$ ) вклады, тогда как "мнимость" здесь  $\sim u$ .

Таким образом, "паркетное" приближение не позволяет получить физически корректное описание эффективного взаимодействия в теории (4.1). При расчете физических величин, например плотности состояний, возникают нефизические особенности при  $E \sim E_{sc}$  определяющей размеры области "сильной связи" /149/. При  $E \gg E_{sc}$  плотность состояний разлагается в ряд по параметру теории возмущений  $(E/E_{sc})^{\frac{d-4}{2}}$  /149, 150/.

Перейдем теперь к краткому рассмотрению лагранжиана двух взаимодействующих полей (4.5), непосредственно связанного с задачей локализации /119/. "Паркетные" уравнения для аналогичной задачи в теории фазовых переходов рассматривались в работе /155/. В дифференциальном по логарифмической переменной ( $d = 4 - \varepsilon$ )

$$S = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\rho_0}{\text{Max}[\sqrt{2m\tau}, \sqrt{2m\tau'}, \vec{p}_i]} \right)^\varepsilon - 1 \right\} \quad (4.33)$$

$$\tau = -(E + \omega) > 0 ; \quad \tau' = -E > 0.$$

виде, они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_\phi}{ds} &= -\frac{1}{2} (n+8) \Gamma_\phi^2 - \frac{1}{2} m \Gamma^2 \\ \frac{d\Gamma_\psi}{ds} &= -\frac{1}{2} (m+8) \Gamma_\psi^2 - \frac{1}{2} n \Gamma^2 \\ \frac{d\Gamma}{ds} &= -\frac{1}{2} \left\{ (n+2) \Gamma_\phi + (m+2) \Gamma_\psi + 4\Gamma \right\} \Gamma \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $\Gamma_\phi$  - описывает взаимодействие  $\phi^4$ ,  $\Gamma_\psi$  -  $\psi^4$ , а  $\Gamma$  - представляющее основной интерес взаимодействие типа  $\phi^2\psi^2$ .  
Для  $m=0$ ,  $n=0$  система (4.34) упрощается:

$$\frac{d\Gamma_\phi}{ds} = -4\Gamma_\phi^2 \quad ; \quad \frac{d\Gamma_\psi}{ds} = -4\Gamma_\psi^2 \quad (4.35)$$

$$\frac{d\Gamma}{ds} = -(\Gamma_\phi + \Gamma_\psi)\Gamma - 2\Gamma^2$$

Уравнения для  $\Gamma_\phi$  и  $\Gamma_\psi$  становятся независимыми и совпадают с (4.27) (при  $n=0$ ), их решение имеет вид (4.28):

$$\Gamma_\phi = \Gamma_\psi = -\frac{u}{1-4us} \quad (4.36)$$

Уравнение для  $\Gamma$  имеет тогда вид:

$$\frac{d\Gamma}{ds} = -\frac{2u\Gamma}{1-4us} + 2\Gamma^2; \quad \Gamma(0) = -u \quad (4.37)$$

и сводится к уравнению Риккати. Решение его сразу дает:

$$\Gamma = \Gamma_\phi = \Gamma_\psi = -\frac{u}{1-4us} \quad (4.38)$$

Этот результат является прямым следствием "расщепления" системы (4.34) при переходе к пределу  $n \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 0$ ; он вполне очевиден и из того, что при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  лагранжиан (4.5) описывает  $O(n+m)$  - симметричную теорию. Поэтому не оправдывается и "наивное" ожидание того, что решение системы связанных уравнений (4.34) может привести к поведению, отличному от нефизического результата типа (4.28). В теории опять возникает область "сильной связи", где теория возмущений принципиально неприменима. На языке рекурсивных формул результаты типа (4.35)-(4.38) были впервые получены в работе /151/, как отсутствие фиксированных точек лагранжиана (4.5) в области изменения параметров, соответствующей задаче об электроде в случайном поле.

#### 4.3. Аналитические свойства по константе связи и инстантоны.

Рассмотрение предыдущего раздела, по сути дела, было попыткой "наивного" вычисления функционального интеграла типа (4.2), понимавшегося как сокращенная запись диаграммных правил теории возмущений. Полученные результаты демонстрируют неадекватность такого подхода в области малых и, особенно, отрицательных энергий, где теория возмущений приводит к появлению "ложного" полюса в эффективном взаимодействии (4.29), (4.30) и к другим нефизическим результатам /149/. В тоже время хорошо известно, что в области отрицательных энергий рассмотрение задачи об электроны в гауссовом случайном поле рассеивающих центров приводит к представлениям о существовании "хвоста" плотности состояний /8,12/, связанного с локализацией электронов в глубоких флуктуациях случайного поля. При этом характерным является появление неаналитических по константе связи вкладов /156-158/, которые не могут быть получены из простой теории возмущений.

Корректное рассмотрение функциональных интегралов типа (4.2) возможно лишь с использованием процедуры аналитического продолжения по константе связи. Соответствующая методика, основанная на вычислении интегралов методом перевала была предложена ( в связи с другой задачей ) в работе Лангера /159/. В полевом подходе к теории локализации этот метод был впервые использован в работах Карди /160/ и автора /161/. Ниже излагаются основные результаты работы /161/ (см. также /119/).

Прежде чем рассматривать функциональный интеграл, полезно обратиться с вопросами аналитического продолжения на примере обычного интеграла /162-164/:

$$Z(g) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi^2 - \frac{g}{8} \phi^4 \right\} \quad (4.39)$$

определяющего "нульмерный" аналог интересующего нас функциональ-

ного интеграла (теории поля). Пусть  $g = \lambda e^{i\theta}$ , где  $\lambda \in \text{Re}$ ,  $\lambda > 0$ . Для  $\theta = 0$  интеграл (4.39) сходится и может быть выражен с помощью модифицированной функции Бесселя:

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp\left(\frac{1}{4\lambda}\right) K_{1/4}\left(\frac{1}{4\lambda}\right) \quad (4.40)$$

что при  $\lambda \ll 1$  дает  $Z(\lambda \ll 1) \approx \sqrt{2\pi}$ . Мы хотим совершить аналитическое продолжение (4.39) от  $\theta = 0$  к  $\theta = \pm\pi$ , т.е. от  $g = \lambda > 0$  к  $g = -\lambda < 0$ . Для этого сделаем в (4.39) замену переменной  $\tilde{\phi} = \lambda^{1/2} \phi$  и получим:

$$Z(\lambda e^{i\theta}) = \lambda^{-1/2} \int d\tilde{\phi} \exp\left\{-\frac{1}{\lambda} S[\tilde{\phi}]\right\} \quad (4.41)$$

где

$$S[\tilde{\phi}] = \frac{1}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{1}{8} e^{i\theta} \tilde{\phi}^4 \quad (4.42)$$

При  $\theta = 0$  интегрирование в (4.41) идет по действительной оси  $\tilde{\phi}$ . При изменении  $\theta$  контур интегрирования следует повернуть (заменой  $\tilde{\phi} \rightarrow e^{-i\theta/4} \tilde{\phi}$ ) на угол  $-\theta/4$ , так чтобы интеграл оставался сходящимся. Контур интегрирования, соответствующие  $\theta = \pm\pi$ , показаны на Рис. 4.2(а). Благодаря наличию под экспонентой в (4.41) множителя  $\lambda^{-1}$  ( $\lambda \ll 1$ ) интеграл можно посчитать методом перевала. Перевальные точки определяются условием:

$$\frac{\partial S[\tilde{\phi}]}{\partial \tilde{\phi}} = \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \tilde{\phi}^3 = 0 \quad (4.43)$$

что дает  $\tilde{\phi}_0 = 0$ ;  $\tilde{\phi}_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ . Главный вклад в  $Z(e^{i\pi}\lambda)$  дает перевальная точка  $\tilde{\phi} = 0$ , контур интегрирования может быть деформирован так, как это показано на Рис. 4.2(б), чтобы он проходил через эту перевальную точку вдоль действительной оси, причем

$\text{Re} S[\tilde{\phi}] > \text{Re} S[0]$  всюду на этом контуре. Тогда:

$$Z(e^{i\pi}\lambda) \approx \lambda^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2\lambda} x^2\right) + O(\lambda) = \sqrt{2\pi} + O(\lambda) \quad (4.44)$$

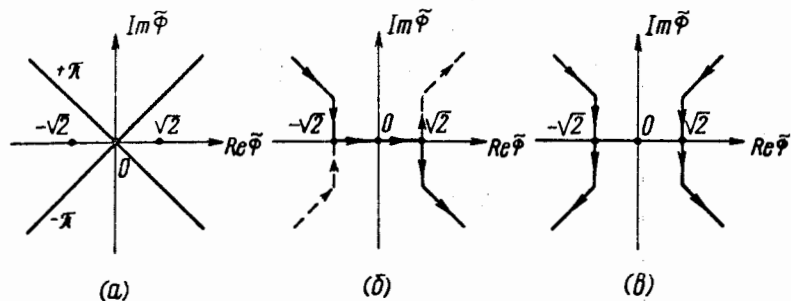


Рис.4.2. Контура интегрирования в комплексной плоскости

$\tilde{\phi}$  в (4.4I):

- (а) Исходные контура, соответствующие  $\theta = \pm\pi$ .
- (б) Контур для вычисления главного вклада  $\text{Re} Z(-\lambda)$ .
- (в) Контур для вычисления скачка  $\Delta Z(-\lambda) = \text{Im} Z(-\lambda)$ .

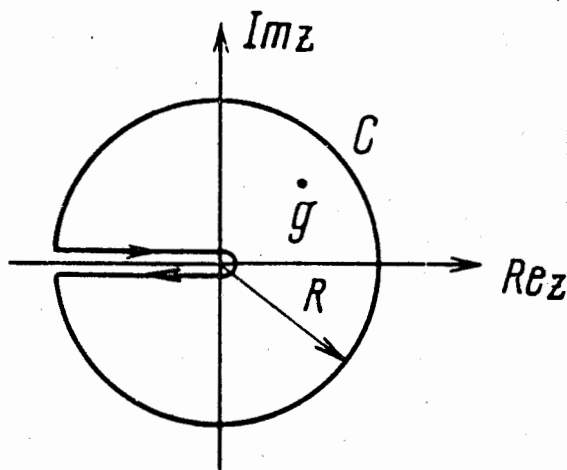


Рис.4.3. Контур интегрирования, используемый при выводе дисперсионного соотношения по константе связи.

Аналогично рассматривается и  $Z(e^{-i\pi}\lambda)$ , в итоге имеем:

$$\operatorname{Re} Z(-\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ Z(e^{i\pi}\lambda) + Z(e^{-i\pi}\lambda) \right\} \approx \sqrt{2\pi} \quad (4.45)$$

что, естественно, совпадает с асимптотикой (4.40) при  $\lambda \ll 1$ .  
Ситуация изменяется, если рассмотреть скачок на отрицательной части действительной оси "константы связи":

$$\Delta Z(-\lambda) \equiv \frac{1}{2i} \left\{ Z(e^{i\pi}\lambda) - Z(e^{-i\pi}\lambda) \right\} = \operatorname{Im} Z(-\lambda) \quad (4.46)$$

Контур интегрирования для  $Z(e^{i\pi}\lambda)$  минус контур интегрирования для  $Z(e^{-i\pi}\lambda)$  преобразуется в контура, показанные на Рис.4.2(в).

Эти контура проходят через "нетривиальные" перевальные точки  $\tilde{\phi}_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ , "тривиальная" же точка  $\tilde{\phi}_0 = 0$  выпадает. Во всех остальных точках этих контуров снова имеем  $\operatorname{Re} S[\tilde{\phi}] > \operatorname{Re} S[\pm\sqrt{2}]$ . Таким образом, главный вклад в  $\Delta Z(-\lambda)$  дают "нетривиальные" перевальные точки:

$$\begin{aligned} \Delta Z(-\lambda) &\approx -\frac{1}{i} \lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \int_{-i\infty}^{i\infty} dx \exp\left(\frac{1}{\lambda} x^2\right) + O(\lambda) = \\ &= -\lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{1}{\lambda} z^2\right) + O(\lambda) = -\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \{1 + O(\lambda)\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Таким образом функция  $Z(q)$ , определенная интегралом (4.39) является аналитической функцией в комплексной плоскости  $q$  с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси. Скачок на разрезе неаналитичен по константе связи и определяется вкладом нетривиальных перевальных точек.

Рассмотрим теперь некоторую функцию комплексной переменной  $G(q)$  аналитическую в комплексной плоскости  $q$ , с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси. Тогда, согласно теореме Коши, имеем:

$$G(q) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{G(z)}{z - q} \quad (4.48)$$

где контур  $C$  показан на Рис.4.3. При  $R \rightarrow \infty$ , предполагая достаточно быстрое убывание подинтегральной функции на бесконечности в комплексной плоскости (что, кстати, не выполняется в примере (4.39)!), получаем дисперсионное соотношение по константе связи:

$$G(q) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dz \frac{\Delta G(z)}{z - q} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dz \frac{\text{Im } G(z)}{z - q} \quad (4.49)$$

где

$$\Delta G(q) = \frac{1}{2i} \{ G(q+i\varepsilon) - G(q-i\varepsilon) \} = \text{Im } G(q) \quad (4.50)$$

при  $q \in \text{Re}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ;  $\Delta G(q) \neq 0$  при  $q < 0$ ,  $\Delta G(q) = 0$  при  $q > 0$ . Это дисперсионное соотношение позволяет восстановить функцию  $G(q)$  во всей комплексной плоскости  $q$  по известному ее скачку на разрезе вдоль отрицательной части вещественной оси.

Проведенное рассмотрение можно обобщить на случай вычисления функциональных интегралов типа (4.2). Общая схема вычислений выглядит следующим образом:

(1) Ищем "стационарные точки" классического действия  $S[\phi]$ , определенного в (4.3), как решения классических уравнений теории поля  $\delta S[\phi_{cl}]/\delta \phi_{cl} = 0$  с конечным действием:  $S[\phi_{cl}] < \infty$ .

(2) Разлагаем действие по степеням  $\phi(\vec{r}) - \phi_{cl}(\vec{r})$  и вычисляем соответствующие функциональные интегралы (хотя-бы в гауссовом приближении).

Очевидным образом, такая процедура реализуется вблизи тривиального классического решения  $\phi_{cl} = 0$  и приводит к обычной теории возмущений. Мы увидим, что в полной аналогии с рассмотренным выше примером (4.39), теория поля (4.1) с константой связи  $g = -\rho V^2 < 0$  обладает нетривиальными решениями  $\phi_{cl}(\vec{r}) \neq 0$  с конечным действием (инстантонами /170/), определяющими, аналогично (4.47),



скачок функции Грина на разрезе вдоль отрицательной части вещественной оси в комплексной плоскости константы связи. Функция Грина интересующей нас теории обладает существенной особенностью при

$g = 0$  и аналитична в комплексной плоскости  $g$  с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси. При этом она удовлетворяет дисперсионному соотношению (4.49).

Наличие существенной особенности функции Грина в нуле константы взаимодействия в квантовой теории поля впервые отмечалось Дайсоном /165/ (на примере квантовой электродинамики). Описанная математическая процедура, предложенная Лангером /159/, была применена для изучения асимптотических свойств ряда теории возмущений в квантовой теории поля Липатовым /166/. Дисперсионное соотношение по константе связи впервые было применено в задаче об ангармоническом осцилляторе /167/, а в теории поля - в работах /168, 169/. Дополнительные подробности можно найти в /163, 164, 170/.

Перейдем к рассмотрению нелинейных решений с конечным действием (инстантонов) в теории поля (4.1) /161/. Соответствующие классические полевые уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{2m} \nabla^2 \phi_j = -E \phi_j - \frac{1}{2} \rho V^2 \phi_j \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \quad (4.51)$$

Будем искать инстантонное решение в виде:

$$\phi_j^{cl}(\vec{r}) = \phi_{cl}(\vec{r}) \vec{u}_j \quad (4.52)$$

где  $\vec{u}$  - единичный вектор в пространстве "изотопического спина" рассматриваемой  $O(n)$  - симметричной теории:  $\vec{u}^2 = 1$ . Ограничиваясь классом сферически-симметричных решений, как соответствующих минимуму действия /164, 171-174/, имеем из (4.51):

$$\frac{1}{2m} \left\{ \frac{d^2 \phi_{cl}}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d\phi_{cl}}{dr} \right\} = -E \phi_{cl} - \frac{1}{2} \rho V^2 \phi_{cl}^3 \quad (4.53)$$

Тривиальное решение  $\phi_{cl} = 0$  очевидно. Нас интересуют нетривиаль-

ные решения (4.53) с конечным действием (инстантоны /170/), т.е. такие решения, что интеграл действия (4.3) от них сходится. Используя результаты работ /173,174/ можно показать, что для рассматриваемого уравнения искомые решения существуют только для  $d < 4$ . (При  $E = 0$  существует конформно-инвариантное решение и для  $d = 4$  /166/). Легче всего, однако, провести простой качественный анализ /161/, следуя методу, предложенному в давней работе /175/. Вводя безразмерные переменные:

$$\phi_{cl}(r) = \sqrt{\frac{2|E|}{\rho V^2}} \chi(t) ; \quad r = \frac{t}{\sqrt{2m|E|}} \quad (4.54)$$

перепишем (4.53) в виде:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{d-1}{t} \frac{d\chi}{dt} = \pm \chi - \chi^3 \quad (4.55)$$

где верхний знак соответствует  $E < 0$ , а нижний  $E > 0$ . Уравнение (4.55) представляет собой уравнение движения частицы единичной массы в потенциале (Рис.4.4(а)):

$$U(\chi) = \pm \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{4} \quad (4.56)$$

и находящейся под действием силы трения, зависящей от времени  $\sim \frac{1}{t}$ . Очевидно, что для нас представляют интерес решения, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\chi(t=0) = \text{Const} ; \quad \left. \frac{d\chi}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (4.57)$$

Асимптотику решений (4.55) при  $t \gg 1$  нетрудно найти, линеаризуя (4.55) вблизи экстремумов  $U(\chi)$ . Инстантон с минимальным действием возникает лишь при  $E < 0$  и представляет собой решение (Рис.4.4(б)), соответствующее движению, при котором "частица", скатываясь по склону  $U(\chi)$  при  $t \rightarrow \infty$  останавливается в точке  $\chi = 0$  (подробнее см. в /161/):

$$\chi(t) \sim t^{\frac{1-d}{2}} \exp(-t) \quad (4.58)$$

При  $E > 0$  решения с конечным действием (4.3) отсутствуют. Для решения (4.57), (4.58), с помощью (4.54), легко находим:

$$\begin{aligned} S[\phi_{cl}] &= \int d^d \vec{r} \mathcal{L}(\vec{r} | \phi_{cl}(\vec{r})) = A_d \frac{m^{-\frac{d}{2}}}{\rho V^2} |E|^{2-\frac{d}{2}} = \\ &= A_d \left( \frac{|E|}{E_{sc}} \right)^{2-\frac{d}{2}}; \quad E_{sc} = m^{\frac{d}{4-d}} (\rho V^2)^{\frac{2}{4-d}} \end{aligned} \quad (4.59)$$

где константа  $A_d$ , зависящая лишь от размерности пространства, определяется безразмерными интегралами от  $\chi(t)$ . Для ее нахождения требуется численное интегрирование (4.55) с начальными условиями (4.57). Такая задача, однако, имеет ограниченное значение, поскольку на малых расстояниях (малые  $t$ ), где мы только и не знаем точный вид решения, теряет смысл модель (4.1), соответствующая гауссову случайному полю с точечной корреляцией. В реальной системе (например в решетке с примесями) на малых расстояниях "работает" другой эффективный лагранжиан. В связи с этим возникает физическая проблема "кора" инстантона (см. например /176/ и ниже). Асимптотика (4.58) независимо была найдена также в работе /177/.

Существование инстантонных решений в теории поля (4.1) является отражением общей закономерности возникновения таких решений в теориях поля с неустойчивым вакуумом /171, 172/. Действие (4.3) в теории (4.1) неограничено снизу при произвольных вариациях  $\phi(\vec{r})$ . Однако можно строго показать, что инстантон реализует абсолютный минимум  $S[\phi_{cl}]$  на классе функций, удовлетворяющих классическим уравнениям  $\delta S[\phi_{cl}] / \delta \phi_{cl} = 0$  /164/.

Появление инстантонных решений приводит, при  $E < 0$ , к новым вкладам в одноэлектронную функцию Грина, в частности, к отличию от нуля ее мнимой части и при  $E < 0$ , что соответствует образованию "хвоста" плотности состояний. Имея ввиду рассмотреть вклад окрестности инстантонного решения, представим  $\phi_j(\vec{r})$  в виде:

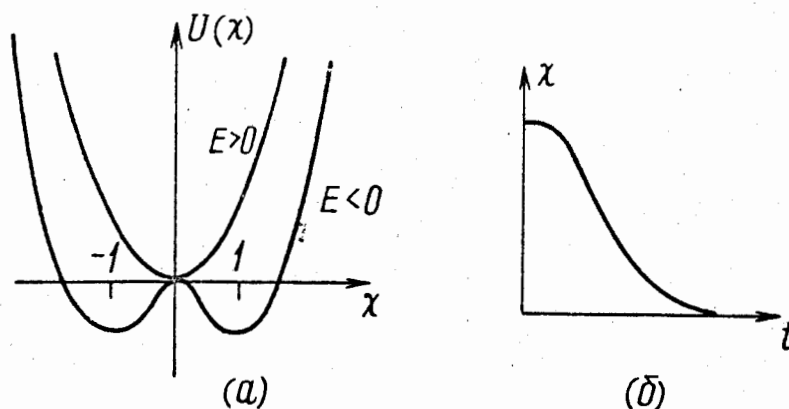


Рис.4.4. (а) Потенциальная энергия, соответствующая уравнению движения (4.55). "Частица" движется по склону с трением, убывающим со временем  $\sim \frac{1}{t}$ .  
 (б) Качественный вид инстантонного решения с минимальным действием.

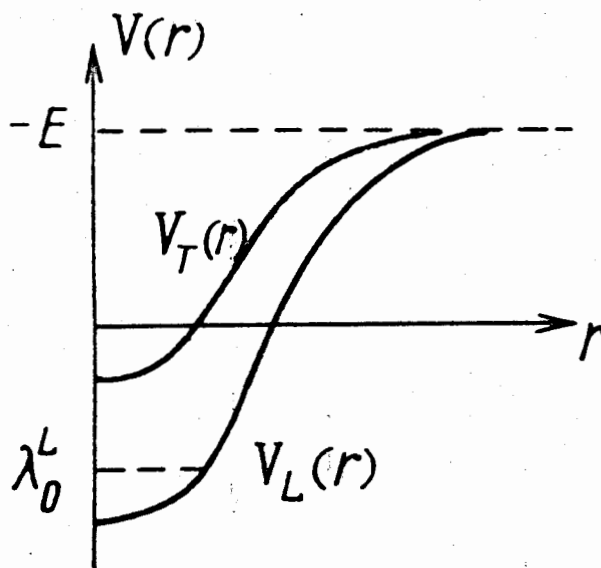


Рис.4.5. Качественный вид потенциальной энергии в "уравнениях Шредингера" (4.66) и (4.67).  $\lambda_0^L$  - низшее собственное значение оператора  $M_L$ .

$$\phi_j(\vec{r}) \approx \phi_{cl}(\vec{r}) u_j + \varphi_j(\vec{r}) \quad (4.60)$$

Тогда, интересуясь главным по константе связи (3.84) вкладом и ограничиваясь квадратичными по  $\varphi_j(\vec{r})$  членами разложения в действии, получим одноинстантонный вклад в одноэлектронную функцию Грина в следующем схематическом виде /160/:

$$G(\vec{r}-\vec{r}' | -\rho V^2) \underset{n \rightarrow 0}{=} Z_0^{-1} \exp\{-S[\phi_{cl}]\} \frac{1}{n} \left\{ \delta\vec{\phi}(\vec{r}) \right\} \vec{\phi}_{cl}(\vec{r}) \vec{\phi}_{cl}(\vec{r}') \times \quad (4.61)$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \int d^d r \varphi_i M_{ik} \varphi_k\right\} \left\{ 1 + O\left[\left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right]\right\}$$

где множитель:

$$\exp\{-S[\phi_{cl}]\} = \exp\left\{-\mathcal{A}_d \frac{\pi^{-d/2}}{\rho V^2} |E|^{2-\frac{d}{2}}\right\} = \exp\left\{-\mathcal{A}_d \left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right\} \quad (4.62)$$

неаналитичен по константе связи и, естественно, не может быть получен с помощью обычной теории возмущений, нормировочный интеграл (4.4) достаточно рассмотреть в нулевом приближении по взаимодействию  $-Z_0$ , а

$$M_{ik} = M_L u_i u_k + M_T (\delta_{ik} - u_i u_k) \quad (4.63)$$

$$M_L = -\frac{1}{2m} \nabla^2 - E - \frac{3}{2} \rho V^2 \phi_{cl}^2(r) \quad (4.64)$$

$$M_T = -\frac{1}{2m} \nabla^2 - E - \frac{1}{2} \rho V^2 \phi_{cl}^2(r) \quad (4.65)$$

Тогда, вводя ортонормированные наборы собственных функций операторов  $M_L$  и  $M_T$ :

$$M_L \psi_n^L = \lambda_n^L \psi_n^L \quad (4.66)$$

$$M_T \psi_m^T = \lambda_m^T \psi_m^T \quad (4.67)$$

можно разложить поле  $\vec{\phi}(\vec{r})$  по этим собственным функциям:

$$\vec{\phi}(\vec{r}) = \phi_L(\vec{r})\vec{u} + \vec{\varphi}_T(\vec{r}) \quad (4.68)$$

где:

$$\phi_L(\vec{r}) = \phi_{cl}(\vec{r}) + \sum_n c_n^L \psi_n^L(\vec{r}) \quad (4.69)$$

$$\vec{\varphi}_T(\vec{r}) = \sum_m \vec{c}_m^T \psi_m^T(\vec{r}) \quad (4.70)$$

и полагаем, что  $\vec{\varphi}_T$  ортогонально  $\vec{u}$  в пространстве изоспина. Тогда в (4.6I):

$$\int \{ \delta \vec{\phi}(\vec{r}) \} \dots = \prod_n \int d c_n^L \prod_m \int d \vec{c}_m^T \dots \quad (4.71)$$

однако при вычислении возникающего гауссова интеграла нужно проявить некоторую осторожность. Проведем простой качественный анализ уравнений (4.66), (4.67). Легко видеть, что они имеют вид уравнений Шредингера с потенциалами:

$$V_L(r) = -E - \frac{3}{2} \rho V^2 \phi_{cl}^2(r) = -E - 3|E| \chi^2(r) \quad (4.72)$$

$$V_T(r) = -E - \frac{1}{2} \rho V^2 \phi_{cl}^2(r) = -E - |E| \chi^2(r) \quad (4.73)$$

Качественный вид этих потенциалов показан на Рис.4.5, с учетом поведения инстантонного решения  $\chi(r)$ , показанного на Рис.4.4(б). Видим, что потенциалы притягивающие ( $-E > 0$  - несущественная константа), причем они, а соответственно и собственные значения  $\lambda_n^L$  и  $\lambda_m^T$  не зависят от константы взаимодействия  $\rho V^2$ , но просто пропорциональны  $|E|$ . Структуру спектра нетрудно понять из соображений симметрии.

А. Трансляционные нулевые моды. Если  $\phi_{cl}(\vec{r})$  есть решение классического полевого уравнения (4.5I), (4.53), то в силу трансляционной симметрии задачи  $\phi_{cl}(\vec{r} + \vec{R}_0)$  также является решением (произвольность положения "центра" инстантона в системе).

Рассмотрим бесконечно малую трансляцию  $\delta \vec{R}_0$ , тогда:

$$\phi_{cl}(\vec{r} + \delta \vec{R}_0) \approx \phi_{cl}(\vec{r}) + \delta R_{\mu 0} \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_{\mu}} \quad (4.74)$$

В то же время (4.74) можно рассмотреть как возмущение вблизи инстантонного решения  $\phi_{cl}(\vec{r})$  и представить в виде разложения (4.69):

$$\delta \phi_L(\vec{r}) \approx \delta R_{\mu 0} \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_{\mu}} = \delta c_1^{L\mu} \psi_1^{L\mu}(\vec{r}) \quad (4.75)$$

поскольку прямой подстановкой  $\phi_{cl}(\vec{r} + \vec{R}_0)$  в уравнение (4.5I) и последующим дифференцированием его по  $\vec{R}_0$  легко убедиться, что:

$$\frac{1}{2m} \nabla^2 \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial R_{\mu 0}} + E \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial R_{\mu 0}} + \frac{3}{2} \rho V^2 \phi_{cl}^2 \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial R_{\mu 0}} = 0 \quad (4.76)$$

так, что  $\partial \phi_{cl} / \partial x_{\mu}$  является собственной функцией оператора  $M_L$  с нулевым собственным значением ( $\lambda_1^{L\mu} = 0$ ), очевидно  $\psi_1^{L\mu} \sim \partial \phi_{cl} / \partial x_{\mu}$ .  
Требую выполнения стандартного условия нормировки  $\int d^d \vec{r} |\psi_1^{L\mu}(\vec{r})|^2 = 1$ , немедленно получаем:

$$\psi_1^{L\mu}(\vec{r}) = \left\{ \int d^d \vec{r} \left| \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_{\mu}} \right|^2 \right\}^{-1/2} \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_{\mu}} \quad (4.77)$$

Очевидно, что трансляционная нулевая мода  $\psi_1^{L\mu}(\vec{r})$   $d$ -кратно вырождена ( $\mu = 1, \dots, d$ ;  $d$  - размерность пространства). Из того обстоятельства, что имеется  $d$  нулевых собственных значений  $\lambda_1^{L\mu} = 0$ , становится ясным, что уравнение Шредингера (4.66) имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение  $\lambda_0^L < 0$  - основное состояние квантовомеханической системы не может быть вырождено. Поскольку трансляционные моды  $d$ -кратно вырождены, они соответствуют уровню "р-типа" (т.е. они преобразуются по представлению группы вращений  $O(d)$  с  $l=1$ ), то ясно, что в потенциале притяжения  $V_L(r)$  существует единственное состояние

$\psi_0^L(\vec{r})$  с  $\lambda_0^L < 0$ , соответствующее  $\ell = 0$  ( $s$  - состояние). Более строгое доказательство единственности дано в /164/.

Из (4.75) и (4.77) также становится ясным, что интегрирование по  $dc_1^{L\mu}$  эквивалентно интегрированию по "коллективной переменной"  $dR_{\mu 0}$ , т.е. вместо интегрирования по  $dc_1^{L\mu}$  в функциональной мере (4.71) можно просто проинтегрировать по "центру инстантона"  $R_{\mu 0}$ , подразумевая, что подинтегральное выражение в (4.61) отнесено к произвольному центру инстантона. Переход к интегрированию по  $R_{\mu 0}$  осуществляется по очевидному из (4.75) и (4.77) правилу /172/:

$$dc_1^{L\mu} \rightarrow dR_{\mu 0} \left\{ \int d^d \vec{r} \left( \frac{\partial \phi_{c\ell}}{\partial x_\mu} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (4.78)$$

для каждой из  $d$  трансляционных мод.

Б. Ротационные нулевые моды. Совершенно аналогично предыдущему, нетрудно видеть, что существование классического решения уравнения (4.51) вида  $\phi_{c\ell}(\vec{r})\vec{u}$  подразумевает, что и  $\phi_{c\ell}(\vec{r})\vec{u}'$  также является решением, где  $\vec{u}'$  получается из  $\vec{u}$  произвольным вращением в  $n$ -мерном изотопическом пространстве. Очевидно, что  $\phi_{c\ell}(\vec{r})$  является собственной функцией оператора  $M_T$  (4.67) с нулевым собственным значением  $\lambda_0^T = 0$  :  $M_T \phi_{c\ell} = 0$  совпадает с (4.53). Этот уровень  $(n-1)$  -кратно вырожден (в  $n$ -мерном пространстве произвольный поворот единичного вектора определяется  $(n-1)$  - углом), а при  $n \rightarrow 0$  становится невырожденным и наименьшим для оператора  $M_T$ . Нормированная собственная функция ротационной нулевой моды имеет вид:

$$\psi_0^T(\vec{r}) = \left\{ \int d^d \vec{r} \phi_{c\ell}^2(\vec{r}) \right\}^{-1/2} \phi_{c\ell}(\vec{r}) \quad (4.79)$$

При бесконечно малом повороте  $\vec{u} \rightarrow \vec{u} + \delta\vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \delta\vec{u} = 0$  имеем:



$$\begin{aligned} \delta \bar{\phi}_T(\vec{r}) &\approx \phi_{cl}(\vec{r}) \delta \vec{u} = \delta \vec{c}_0^T \psi_0^T(\vec{r}) = \\ &= \delta \vec{u} \left\{ \int d^d \vec{r} \phi_{cl}^2(\vec{r}) \right\}^{1/2} \psi_0^T(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

где во втором равенстве учли (4.70), а в третьем (4.79). Отсюда видно, что в функциональной мере (4.71) можно перейти от интегрирования по  $d\vec{c}_0^T$  к интегрированию по "коллективной координате"  $d\vec{u}$  (направление в "изотопическом" пространстве), относя под-интегральное выражение в (4.61) к данному произвольному направлению, задаваемому вектором  $\vec{u}$ . Переход к интегрированию по направлению  $\vec{u}$  осуществляется по правилу:

$$d\vec{c}_0^T \rightarrow d\vec{u} \left\{ \int d^d \vec{r} \phi_{cl}^2(\vec{r}) \right\}^{\frac{n-1}{2}}_{\vec{u}^2=1} \quad (4.81)$$

где  $d\vec{u}_{\vec{u}^2=1}$  обозначает интегрирование по  $n-1$  углу, определяющему направление вектора  $\vec{u}$  в "изотопическом" пространстве.

В результате, мы приходим к выводу, что мера в функциональном интеграле (4.61) может быть записана в виде:

$$\int \{ \delta \bar{\phi}(\vec{r}) \} \dots = \int d^d \vec{R}_0 \left\{ \int d^d \vec{r} \left( \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_\mu} \right)^2 \right\}^{\frac{d}{2}} \prod_{n \neq 1} \int d c_n^L \dots \quad (4.82)$$

$$\cdot \int d\vec{u} \left\{ \int d^d \vec{r} \phi_{cl}^2(\vec{r}) \right\}^{\frac{n-1}{2}} \prod_{m \neq 0} \int d\vec{c}_m^T \dots$$

Возникновение якобианов перехода к коллективным координатам весьма существенно. Проведенный эвристический вывод перехода от (4.71) к (4.82) основан на рассмотрении аналогичной задачи в /172/.

Вернемся теперь к вопросу об отрицательном собственном значении  $\lambda_0^L < 0$  оператора  $M_L$ . Связанный с ним интеграл по  $d c_0^L$  в (4.71) имеет, формально, следующий вид:

$$\int d c_0^L \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_0^L c_0^L{}^2 \right\} = \int d c_0^L \exp \left\{ |\lambda_0^L| c_0^L{}^2 \right\} \quad (4.83)$$

Этот интеграл опять нужно понимать в смысле аналитического про-

должения с положительных  $\lambda_0^L$  к отрицательным. Аналогично рассмотрению, проведенному выше, перейдем к интегрированию вдоль мнимой оси /I59/ и получим:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} d\epsilon_0^L e^{|\lambda_0^L| \epsilon_0^{L2}} = \pm i \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-|\lambda_0^L| x^2} = \pm i \left( \frac{\pi}{|\lambda_0^L|} \right)^{1/2} \quad (4.84)$$

Видим, что аналогично рассмотренному выше примеру, функциональный интеграл (4.6I), соответствующий вкладу "нетривиальных" перевальных решений, определяет скачок функции Грина на разрезе в комплексной плоскости константы связи, проведенном вдоль отрицательной части вещественной оси, т.е. фактически  $Im G(\bar{r}-\bar{r}'|-\rho V^2)$ . Таким образом (4.6I) сводится к:

$$\begin{aligned} Im G(\bar{r}-\bar{r}'|-\rho V^2) &= Z_0^{-1} \exp\{-S[\phi_{cl}]\} \left\{ 1 + O\left[\left(\frac{|E|}{E_x}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \int d^d \bar{r} \left( \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_\mu} \right)^2 \right\}^{\frac{d}{2}} \left\{ \int d^d \bar{r} \phi_{cl}^2(\bar{r}) \right\}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ |\text{Det}' M_L| \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ \text{Det}' M_T \right\}^{-\frac{1}{2}(n-1)} \times (4.85) \\ &\times \int d^d \bar{R}_0 \frac{1}{\pi} \int_{\bar{u}^2=1} d\bar{u} \bar{\phi}_{cl}(\bar{r}-\bar{R}_0) \bar{\phi}_{cl}(\bar{r}'-\bar{R}_0) \end{aligned}$$

где штрих над знаком детерминантов обозначает исключение нулевых собственных значений, соответствующих трансляционным и ротационным модам из определяющих их произведений  $\prod_n \lambda_n^L$  и  $\prod_m \lambda_m^T$ . Полезно заметить, что /I78/:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\bar{u}^2=1} d\bar{u} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} = 1 \quad (4.86)$$

Используя (4.54) легко получить размерные оценки якобианов в (4.82):

$$J_L[\phi_{cl}] \equiv \int d^d \bar{r} \left( \frac{\partial \phi_{cl}}{\partial x_\mu} \right)^2 \sim m S[\phi_{cl}] \sim m^{1-\frac{d}{2}} \frac{|E|^{\frac{4-d}{2}}}{\rho V^2} \quad (4.87)$$

$$J_T[\phi_{cl}] \equiv \int d^d \bar{r} \phi_{cl}^2(\bar{r}) \sim |E| S[\phi_{cl}] \sim m^{-\frac{d}{2}} \frac{|E|^{\frac{2-d}{2}}}{\rho V^2} \quad (4.88)$$

Тогда из (4.85) сразу же находим:

$$\begin{aligned} \text{Im } G(\vec{r}-\vec{r}'|-\rho V^2) \underset{n \rightarrow 0}{\sim} Z_0^{-1} \{|\text{Det}'M_L|\}^{-1/2} \{\text{Det}'M_T\}^{-\frac{1}{2}(n-1)} m^{\frac{d}{2}(1-\frac{d}{2})-\frac{d}{4}(n+1)} \\ \times \frac{|E|^{\frac{d}{4}(4-d)+\frac{1}{4}(2-d)(n+1)}}{(\rho V^2)^{\frac{d+n+1}{2}}} \exp\left\{-\int_d \frac{m^{-\frac{d}{2}}}{\rho V^2} |E|^{2-\frac{d}{2}}\right\} \times \\ \times \int d^d \vec{t} \chi(\vec{t}-\vec{t}_0) \chi(\vec{t}'-\vec{t}_0) \left\{1 + O\left[\left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right]\right\} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Это выражение можно упростить, используя размерный анализ, основанный на пропорциональности собственных значений  $\lambda_n^L$ ,  $\lambda_m^T$  величине  $|E|$ . Тогда легко видеть, что  $Z_0^{-1} \{|\text{Det}'M_L|\}^{-1/2} \{\text{Det}'M_T\}^{-\frac{1}{2}(n-1)} \sim |E|^{\frac{d}{2} + \frac{1}{2}(n-1)}$ ,  $Z_0 = 1$  при  $n=0$ . Соответственно, (4.89) дает:

$$\begin{aligned} \text{Im } G(\vec{r}-\vec{r}'|-\rho V^2) \sim \frac{m^{\frac{d}{4}(1-d)} |E|^{\frac{d}{4}(5-d)}}{(\rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}} \exp\left\{-\int_d \left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right\} \times \\ \times \int d^d \vec{t}_0 \chi(\vec{t}-\vec{t}_0) \chi(\vec{t}'-\vec{t}_0) \left\{1 + O\left[\left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right]\right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Такой результат был получен в работе Карди /160/. Здесь, однако, остается задача вычисления произведения безразмерных собственных значений уравнений (4.66), (4.67) и проведения процедуры перенормировки (для  $d \geq 2$  в этих произведениях возникают расходимости /177/). Поэтому мы воспользуемся методом, предложенным в работе автора /161/, и основанным на использовании дисперсионного соотношения по константе связи и соответствии с задачей фазовых переходов. Учитывая, что  $\text{Det}'M_L$  и  $\text{Det}'M_T$  (также, как и  $\lambda_n^L$  и  $\lambda_m^T$ ) не зависят от величины константы связи  $\rho V^2$  и пренебрегая поправками порядка  $\left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}$ , можем переписать (4.89) в импульсном представлении как /161, 169/ ( $n=0$ ):

$$\text{Im } G(E\vec{p}|-\rho V^2) \simeq C(E\vec{p}) \frac{1}{(\rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}} \exp\left\{-\frac{A(E)}{\rho V^2}\right\} \quad (4.91)$$

где  $C(E\vec{p})$  не зависит от константы связи, причем ввели:

$$A(E) = A_d \pi^{-\frac{d}{2}} |E|^{2-\frac{d}{2}} \quad (4.92)$$

Критерий применимости выписанных формул имеет вид  $S[\phi_{cl}] \gg 1$ , когда хорошо "работает" перевальный метод расчета функционального интеграла. Другими словами, требуется выполнение условия:

$$\frac{A(E)}{\rho V^2} = A_d \left( \frac{|E|}{E_{sc}} \right)^{2-\frac{d}{2}} \gg 1; \quad |E| \gg E_{sc} \quad (d < 4) \quad (4.93)$$

Таким образом, критерий применимости "теории возмущений" вблизи инстантонного решения, фактически, тот же, что и для обычной теории возмущений в области  $E > 0$ . Область энергий шириной  $\sim 2E_{sc}$  вокруг  $E = 0$  есть аналог "гинзбургской" критической области в теории критических явлений.

Зная  $\text{Im} G(E\vec{p} | -\rho V^2)$ , т.е. скачок на разрезе в комплексной плоскости константы связи, определим функцию Грина дисперсионным интегралом (4.49):

$$G(E\vec{p} | g) = \frac{1}{\pi} C(E\vec{p}) \int_{-\infty}^0 dz \frac{\exp\left\{\frac{A(E)}{z}\right\}}{(z-g)(-z)^{\frac{d+1}{2}}} \quad (4.94)$$

где  $g$  - произвольная константа связи в комплексной плоскости. Для электрона в случайном поле  $g = -\rho V^2 < 0$ . Интеграл (4.94) может быть вычислен:

$$G(E\vec{p} | g) = -\frac{1}{\pi} C(E\vec{p}) g^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left\{\frac{A(E)}{g}\right\} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-d}{2}, \frac{A(E)}{g}\right) \quad (4.95)$$

где  $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t}$  - неполная  $\Gamma$ -функция.

Из (4.91) сразу же ясно, что мы получили правильный вид экспоненциального фактора в плотности состояний /12, 156-158/. Видно, что этот фактор полностью определяется инстантонными решениями в теории поля (4.1). Необходимость различного рассмотрения областей  $E > 0$  и  $E < 0$  возникает автоматически, поскольку инстантоны существуют только при  $E < 0$ . Другим преимуществом рассматри-

ваемого формализма является возможность непосредственного вычисления предэкспоненты  $C(E\vec{p})$ . Для этого заметим /161/, что для  $q > 0$  функции Грина (4.94), (4.95) описывает коррелятор устойчивой теории поля (теории фазовых переходов второго рода). Вдали от критической области вид этого коррелятора хорошо известен /25-30/ - это обычный коррелятор Орнштейна-Цернике. В нашем случае, при  $|E| \gg E_{sc}$ , мы должны получить:<sup>1</sup>

$$G(E\vec{p}|q>0) \approx - \frac{1}{|E| + \frac{p^2}{2m}} \quad (4.96)$$

Напомним, что под  $E$  мы всюду понимаем перенормированную энергию, т.е. расстояние от сдвинутого края зоны (или "температуру", отсчитанную от сдвинутой флуктуациями температуры перехода в теории критических явлений), рассчитанного в однопетлевом приближении. Используя асимптотику неполной  $\Gamma$  - функции:

$$\Gamma(\alpha, x) \underset{x \gg 1}{\approx} x^{\alpha-1} e^{-x} \{1 + O(x^{-1})\} \quad \text{из (4.95) находим:}$$

$$G(E\vec{p}|q>0) \approx -\frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \{A(E)\}^{-\frac{d+1}{2}} C(E\vec{p}) ; |E| \gg E_{sc} \quad (4.97)$$

Сравнивая (4.96) и (4.97) получаем:

$$C(E\vec{p}) \approx \frac{\pi A_d^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} m^{-\frac{d}{4}(d+1)} \frac{|E|^{(d+1)\left(1-\frac{d}{4}\right)}}{|E| + p^2/2m} \quad (4.98)$$

В результате для мнимой части функции Грина электрона, при  $|E| \gg E_{sc}$ , находим:

$$\text{Im } G^{R,A}(E\vec{p}|-pV^2) \approx \mp \frac{\pi A_d^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{|E|^{(d+1)\left(1-\frac{d}{4}\right)}}{|E| + p^2/2m} \frac{1}{(m^{\frac{d}{2}} \rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}} \times \quad (4.99)$$

$$\times \exp\left\{-\frac{A(E)}{\rho V^2}\right\} \left\{1 + O\left[\left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right]\right\}$$

<sup>1</sup>При  $d \rightarrow 2$  это справедливо при выполнении более сильного неравенства типа (4.18).

Тогда можно рассчитать плотность электронных состояний в области "хвоста", включая предэкспоненту. Имеем ( $E < 0$ ,  $|E| \gg E_{sc}$ ):

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \text{Im} G^R(E \vec{p} | -\rho V^2) \approx$$

$$\approx S_d \frac{\mathcal{A}_d^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \frac{|E|^{(d+1)(1-\frac{d}{4})}}{(m^{\frac{d}{2}} \rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}} \exp\left\{-\frac{A(E)}{\rho V^2}\right\} \int_0^{p_0} dp p^{d-1} \frac{1}{|E| + p^2/2m} \quad (4.100)$$

где  $S_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} / \Gamma(d/2)$ . Для  $d = 1$  можно перейти к пределу  $p_0 = \frac{1}{a} \rightarrow \infty$  и из (4.100) получим:

$$N(E) = S_1 \frac{\pi \mathcal{A}_1}{\sqrt{2}} \frac{|E|}{\rho V^2} \exp\left\{-\mathcal{A}_1 \frac{|E|^{3/2}}{m^{1/2} \rho V^2}\right\} \quad (4.101)$$

Константа  $\mathcal{A}_1 = \frac{4}{3} \sqrt{2}$  /156/ (при  $d = 1$  уравнение (4.53) решается точно /159/) и (4.101) совпадает с точным результатом Гальперина /179/ с точностью до множителя  $3/\pi$ . Это демонстрирует точность метода, основанного на пренебрежении поправками к перевальному результату (4.91) при расчетах с помощью дисперсионного соотношения по константе связи. Для  $d \geq 2$  расходимость интеграла в (4.100) обрезается на импульсах  $\sim a^{-1}$ , связанных с обратным радиусом коррелятора случайного поля. Наше рассмотрение годится для энергий  $|E| \ll \tilde{E}_0 = p_0^2/2m$ . Для  $2 < d < 4$  "хвост" плотности состояний имеет вид:

$$N(E) \approx S_d (\mathcal{A}_d)^{\frac{d+1}{2}} \frac{2m}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \frac{(2m \tilde{E}_0)^{\frac{d-2}{2}}}{d-2} \left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{(d+1)(1-\frac{d}{4})} \exp\left\{-\mathcal{A}_d \left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}}\right\} \quad (4.102)$$

$E_{sc} \ll |E| \ll \tilde{E}_0$

Для  $d = 2$ , аналогично:

$$N(E) \approx \text{Const} \frac{|E|^{3/2}}{m^{1/2} (\rho V^2)^{3/2}} \ln \frac{\tilde{E}_0}{|E|} \exp\left\{-\mathcal{A}_2 \frac{|E|}{m \rho V^2}\right\} \quad (4.103)$$

Заметим, однако, что область применимости (4.103) "уходит" на бесконечность в соответствии с неравенством типа (3.18), опреде-

ляющим область применимости приближения Орнштейна-Цернике при  $d \rightarrow 2$ .

При  $|E| \gg \tilde{E}_0$  (что эквивалентно предположению о большой величине радиуса корреляций случайного потенциала) "хвост" плотности состояний определяется квазиклассическим приближением /8, I21, I22/ или "решеточным" инстантоном работы /I76/, что при любой размерности пространства дает гауссову асимптотику:

$$N(E) \sim \exp \left\{ -\frac{a^d}{\rho V^2} E^2 \right\} \quad (4.104)$$

Таким образом, для  $d=3$  в области "хвоста" плотности состояний из (4.102) и /I21, I22/ имеем:

$$N(E) \approx \begin{cases} \frac{A_3^2}{2\pi^2} \frac{|E| \tilde{E}_0^{1/2}}{m^{3/2} (\rho V^2)^2} \exp \left\{ -A_3 \frac{|E|^{1/2}}{m^{3/2} \rho V^2} \right\} ; E_{sc} \leq |E| \leq \tilde{E}_0 \\ (E < 0) \left\{ \frac{m^{3/2}}{4\pi^2 a^3} \frac{\rho V^2}{E^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{a^3}{\rho V^2} E^2 \right\} ; |E| \gg \tilde{E}_0 \right. \end{cases} \quad (4.105)$$

Выражение для плотности состояний может быть найдено и из результата Карди (4.90). Имеем /I60/:

$$N(E) = \text{Im} G(\vec{r}-\vec{r}|\rho V^2) \sim m^{\frac{d}{4}(1-d)} \frac{|E|^{\frac{d}{4}(5-d)}}{(\rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}} \times \exp \left\{ -A_d \left( \frac{|E|}{E_{sc}} \right)^{2-\frac{d}{2}} \right\} \int_0^\infty dt t^{d-1} \chi^2(t) \quad (4.106)$$

По размерности это выражение совпадает с (4.102), (4.103), однако зависимость от энергии  $|E|$  получилась иная. Чтобы разобраться в причинах этого различия, совершим в (4.90) преобразование Фурье к импульсному пространству. Тогда получим:

$$\text{Im} G(E\vec{p}|\rho V^2) \sim m^{-\frac{d}{4}(d+1)} \frac{|E|^{(d+1)(1-\frac{d}{4})-1}}{(\rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}} \mathcal{F} \left( \frac{\vec{p}}{\sqrt{2m|E|}} \right) \exp \left\{ -A_d \left( \frac{|E|}{E_{sc}} \right)^{2-\frac{d}{2}} \right\} \quad (4.107)$$

где

$$\mathcal{F}(\vec{z}) = \int d^d(\vec{t}-\vec{t}') e^{-i\vec{z}(\vec{t}-\vec{t}')} \int d^d\vec{t}_0 \chi(\vec{t}-\vec{t}_0) \chi(\vec{t}'-\vec{t}_0) \quad (4.108)$$

Сравнение (4.107) с (4.99) показывает, что в нашем приближении

конкретизирован вид функции  $\mathcal{F}(\vec{z}) = (1+z^2)^{-1}$  (из соображений соответствия с результатом Орнштейна-Цернике). Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что использование асимптотики (4.58) инстантонного решения в (4.108) дает именно такое поведение  $\mathcal{F}(\vec{z})$ . Поэтому результаты работ /160,161/ для мнимой части функции Грина совершенно эквивалентны в области их применимости. Наш метод, однако, сразу же дает перенормированное (конечное) выражение для  $\text{Im } G(E\vec{p})$ , тогда как в (4.90), (4.107) содержится, вообще говоря, еще и безразмерное произведение собственных значений уравнений (4.66), (4.67), дающее бесконечную константу. При вычислении плотности состояний с использованием (4.107) возникает интеграл:

$$\int d^d \vec{p} \mathcal{F}\left(\frac{\vec{p}}{\sqrt{2m|E|}}\right) \sim (2m|E|)^{\frac{d}{2}} \int_0^{p_0/\sqrt{2m|E|}} dz z^{d-1} \frac{1}{1+z^2} \sim m^{\frac{d}{2}} |E|^{\frac{d}{2}} f\left(\frac{\tilde{E}_0}{|E|}\right) \quad (4.109)$$

Если-бы можно было считать  $f(x)$  в (4.109) безразмерной константой, то для плотности состояний мы получили-бы результат Карди (4.106). Однако в "приближении Орнштейна-Цернике" в (4.109) возникает безразмерная функция отношения  $\tilde{E}_0/|E|$  и наш ответ для плотности состояний. Это отражает хорошо известную неприменимость приближения Орнштейна-Цернике на малых расстояниях и для вычисления среднего квадрата флуктуации /180/. В нашем случае "физическое обрезание" расходимости на малых расстояниях происходит на длинах  $\sim a$  - радиуса корреляции случайного поля, что и приводит к ограничению на область энергий  $|E| \ll \tilde{E}_0$ , отмеченному выше. В работе /160/ эта проблема формально не возникает в силу конечности инстантонного вклада в действие, что приводит к конечности интеграла  $\int_0^\infty dt t^{d-1} \chi^2(t)$ . Расходимость в этом случае возникает, как отмечалось выше, в бесконечном произведении собственных значений (4.66), (4.67). Однако, сама модель с точечной корреляцией гауссова случайного поля ("белый шум"), сводящаяся к теории поля (4.1), не реалистична на малых расстояниях, где всегда



"работает" физический механизм обрезания, связанный с конечностью радиуса корреляции случайного поля в реальной системе (для решетки - это расстояние порядка межатомного). Соответственно возникает проблема "кора" инстантона /176/, а эффективный лагранжиан и классические уравнения на малых расстояниях изменяются так, чтобы воспроизвести при  $|E| \gg \tilde{E}_0$  квазиклассическую (гауссову) асимптотику "хвоста" плотности состояний (4.104) /8,121,122/. В этом смысле наши результаты для плотности состояний представляются более соответствующими физической постановке задачи, тогда как в /160/ рассмотрена другая, более формальная, модель.

## 4.4. Инстантоны и локализация.

Из проведенного рассмотрения видно, что явление локализации тесно связано с появлением в соответствующей области энергий нелинейных решений с конечным действием (инстантонов) классических уравнений эффективной теории поля, сопоставляемой задаче об электроне в случайном поле. Рассмотрим теперь вычисление двухчастичной функции Грина и покажем, следуя работе автора /100/, что инстантонные решения приводят к появлению в ней сингулярного вклада типа (3.26), обсуждавшегося выше в связи с общим критерием локализации. Тем самым будет установлена непосредственная связь инстантонов с локализацией, а также, косвенным образом, подтверждены общие соотношения, полученные при обсуждении этого критерия.

Как уже указывалось, для вычисления усредненной двухчастичной функции Грина в гауссовом случайном поле с корреляцией типа "белого шума" (точечное взаимодействие), нужно рассмотреть эффективную теорию поля, определяемую  $O(n) \times O(m)$  - симметричным ( $n \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 0$ ) лагранжианом (4.5) двух взаимодействующих полей. Из (4.5) следуют классические уравнения:

$$\frac{1}{2m} \nabla^2 \phi_j = -(E + \omega) \phi_j - \frac{1}{2} \rho V^2 \phi_j \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) - \frac{1}{2} \rho V^2 \phi_j \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i^2 \right) \quad (4.110)$$

$$\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi_i = -E \varphi_i - \frac{1}{2} \rho V^2 \varphi_i \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i^2 \right) - \frac{1}{2} \rho V^2 \varphi_i \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)$$

В общем случае анализ этой системы связанных нелинейных уравнений сложен и, насколько известно автору, никем еще не проводился. Однако, при  $E < 0$ ,  $E + \omega > 0$  можно опять провести простой качественный анализ и убедиться, что (4.110) имеет сферически-симметричное инстантонное решение вида:

$$\varphi_i^{cl}(\vec{r}) = \varphi_{cl}(r) e_i ; \quad \phi_j^{cl}(\vec{r}) = 0 \quad (4.111)$$

где  $\varphi_{cl}(r)$  снова дается формулами типа (4.54):

$$\varphi_{cl}(r) = \sqrt{\frac{2|E|}{\rho V^2}} \chi(t) ; \quad r = \frac{t}{\sqrt{2m|E|}} \quad (4.112)$$

причем  $\chi(t)$  определяется (4.57), (4.58). В (4.111)  $\vec{e}$  - единичный ( $m$  - компонентный) "изотопический" вектор поля  $\varphi$ . Хотя система уравнений (4.110) может, по-видимому, иметь и другие решения с конечным действием, для нас достаточно наличия у нее решения (4.111), которое появляется первым по шкале энергий. Двух-частичная функция Грина задается функциональным интегралом:

$$\langle G^R(\vec{r}\vec{r}'; E+\omega+i\delta) G^A(\vec{r}'\vec{r}; E-i\delta) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0, m \rightarrow 0} Z^{-1} \frac{1}{\pi} \int \{ \delta\phi(\vec{r}) \} \frac{1}{\pi} \int \{ \delta\varphi(\vec{r}) \} \sum_{j=1}^n \cdot \sum_{i=1}^m \phi_j(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) \exp \{ -S[\phi, \varphi] \} \quad (4.113)$$

где  $Z$  - соответствующий нормировочный интеграл, а  $S[\phi, \varphi]$  - действие, соответствующее лагранжиану (4.5). Аналогично проведенному выше анализу одноэлектронной функции Грина, рассмотрим в (4.113) вклад, связанный с гауссовыми флуктуациями вокруг классического решения (4.111). Тогда, также как в (4.85), получаем:

$$\langle G^R(\vec{r}\vec{r}'; E+\omega+i\delta) G^A(\vec{r}'\vec{r}; E-i\delta) \rangle \simeq Z_0^{-1} \exp \{ -S[\varphi_{cl}] \} \times \int_L^d \frac{d}{2} [\varphi_{cl}] \int_T \frac{m-1}{2} [\varphi_{cl}] \int d^d \vec{R}_0 \frac{1}{m} \int_{\vec{e}^2=1} d\vec{e} \vec{\varphi}_{cl}(\vec{r}'-\vec{R}_0) \vec{\varphi}_{cl}(\vec{r}-\vec{R}_0) \times \quad (4.114)$$

$$\times \frac{1}{\pi} \int \{ \delta\phi(\vec{r}) \} \int \{ \delta\varphi(\vec{r}) \}' \sum_{j=1}^n \phi_j(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}') \exp \{ -S_0[\phi, \varphi] \}$$

где  $S[\varphi_{cl}]$  совпадает с (4.59),  $J_T[\varphi_{cl}]$  и  $J_L[\varphi_{cl}]$  введены в (4.87), (4.88), нормировочный интеграл взят при  $\rho V^2 = 0$ , а  $S[\phi, \varphi]$  обозначает действие, соответствующее гауссовым флуктуациям вблизи инстантонного решения (4.111) ( $\varphi(\vec{r})$  теперь обозначает отклонение от  $\varphi_{cl}(\vec{r})$ ):

$$S_0[\phi, \varphi] = \int d^d \vec{r} \{ \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_0(\varphi) \} \quad (4.115)$$

где

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \sum_j \phi_j (M_T - \omega - i\delta) \phi_j \quad (4.116)$$

$$\mathcal{L}_0(\varphi) = \sum_{ij} \varphi_i (M_T + i\delta) (\delta_{ij} - e_i e_j) \varphi_j + \sum_{ij} \varphi_i (M_L + i\delta) e_i e_j \varphi_j \quad (4.117)$$

причем  $M_L$  и  $M_T$  - операторы, введенные выше в (4.64), (4.65). Штрих над символом функционального интегрирования в (4.114) означает исключение нулевых собственных значений операторов  $M_L$  и  $M_T$  ("нулевых" мод), учитываемых интегрированием по "коллективным" переменным  $\vec{R}_0$  и  $\vec{e}$ .

Вводя собственные функции (4.66) и (4.67), вычисляем гауссов функциональный интеграл по полю  $\phi(\vec{r})$  в (4.114) и получаем:

$$\int \{ \delta \phi(\vec{r}) \} \phi_j(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}') \exp \{ -S_0[\phi, \varphi] \} \sim \quad (4.118)$$

$$\sim \sum_k \frac{\psi_k^T(\vec{r}-\vec{R}_0) \psi_k^T(\vec{r}'-\vec{R}_0)}{(\lambda_k^T - \omega - i\delta)^{1+\frac{n}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow 0} \frac{\psi_0^T(\vec{r}-\vec{R}_0) \psi_0^T(\vec{r}'-\vec{R}_0)}{\omega + i\delta} + \sum_{k \neq 0} \dots$$

где нормированная собственная функция низшего уровня оператора

$M_T$  ( $\lambda_0^T = 0$  - "ротационная" нулевая мода) имеет вид (4.79).

Соответственно, из (4.113) возникает сингулярный (при  $\omega \rightarrow 0$ )

вклад в двухчастичную функцию Грина ( $m \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow 0$ ):

$$\langle G^R(\vec{r}\vec{r}'; E + \omega + i\delta) G^A(\vec{r}\vec{r}'; E - i\delta) \rangle \sim \frac{i}{\omega + i\delta} \exp \{ -S[\varphi_{cl}] \} \times \quad (4.119)$$

$$\times J_L^{\frac{d}{2}}[\varphi_{cl}] J_T^{\frac{1}{2}}[\varphi_{cl}] \{ |\text{Det}' M_L| \}^{-\frac{1}{2}} \{ \text{Det}' M_T \}^{\frac{1}{2}} \int d^d \vec{R}_0 \varphi_{cl}^2(\vec{r}-\vec{R}_0) \varphi_{cl}^2(\vec{r}'-\vec{R}_0)$$

Здесь  $\text{Det}' M_L$  и  $\text{Det}' M_T$  не содержат вклад нулевых собственных значений. Множитель  $i$  возникает из-за единственного отрицательного собственного значения оператора  $M_L$ . Выражение, эквивалентное (4.119), впервые было приведено (при  $\omega = 0$ ) в работе Карди /160/ (см. также /181/), мы следовали выводу, данному в работе /100/.

Интересно отметить, что сингулярный вклад оказывается связанным с существованием "ротационной" нулевой моды, т.е. фактически с симметрией системы. Поэтому есть все основания полагать, что этот вклад не исчезнет и при учете высших порядков.

Полученный результат (4.119) находится в полном соответствии с видом двухчастичной функции Грина в области энергий, соответствующих локализованным состояниям, предложенным выше в (3.26), (3.27). В частности, переходя в (4.119) к Фурье-представлению с помощью:

$$\tilde{\chi}_{\vec{q}} = \int d^d \vec{r} e^{-i\vec{q}\vec{r}} \varphi_{cl}^2(\vec{r}) \quad (4.120)$$

получаем для "амплитуды локализации" (3.20):

$$A_E(\vec{q}) \sim \tilde{\chi}_{\vec{q}} \tilde{\chi}_{-\vec{q}} \quad (4.121)$$

в соответствии с (3.29). Вводя Фурье-образ инстантона:

$$\varphi_{\vec{q}}^{cl} = \int d^d \vec{r} e^{-i\vec{q}\vec{r}} \varphi_{cl}(\vec{r}) \quad (4.122)$$

видим, что

$$\tilde{\chi}_{\vec{q}} = \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \varphi_{\vec{p}}^{cl} \varphi_{\vec{q}-\vec{p}}^{cl} \quad (4.123)$$

и, сравнивая с (3.26)-(3.28), получаем:

$$\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E) \sim \varphi_{\vec{p}}^{cl}(E) \varphi_{\vec{q}-\vec{p}}^{cl}(E) \quad (4.124)$$

Таким образом, проведенное рассмотрение фактически является оправданием предположенного выше в (3.26) вида двухчастичной функции Грина. Учитывая теперь (3.21), (3.22) и явный вид инстантонного вклада в плотность состояний (см. (4.85), (4.106)):

$$N(E) \sim \exp\{-S[\varphi_{cl}]\} J_L^{\frac{d}{2}}[\varphi_{cl}] J_T^{-\frac{1}{2}}[\varphi_{cl}] \{|\text{Det}'M_L|\}^{-1/2} \cdot \{|\text{Det}'M_T|\}^{1/2} \int d^d \vec{R}_0 \varphi_{cl}^2(\vec{r}-\vec{R}_0) \quad (4.125)$$

из (4.II9) сразу же получаем справедливое с точностью до безразмерной константы выражение для  $A_E(\vec{r}-\vec{r}')$  :

$$A_E(\vec{r}-\vec{r}') \sim \int d^d \vec{R}_0 \varphi_{cl}^2(\vec{r}-\vec{R}_0) \varphi_{cl}^2(\vec{r}'-\vec{R}_0) \left\{ \int d^d \vec{r} \varphi_{cl}^2(\vec{r}) \right\}^{-1} \quad (4.I26)$$

Для "вероятности возврата"  $A_E$  (3.22) из (4.I26) находим:

$$A_E \sim \int d^d \vec{r} \varphi_{cl}^4(\vec{r}) \left\{ \int d^d \vec{r} \varphi_{cl}^2(\vec{r}) \right\}^{-1} \sim (m|E|)^{d/2} \quad (4.I27)$$

Используя теперь асимптотику (4.58) нетрудно видеть, что:

$$A_E(\vec{r}-\vec{r}') \sim \exp \left\{ -|\vec{r}-\vec{r}'|/R_{loc}(E) \right\} \quad (4.I28)$$

где

$$R_{loc}(E) \sim \left\{ 2m|E| \right\}^{-1/2} \sim |mE|^{-\nu}; \quad \nu = 1/2 \quad (4.I29)$$

Таким образом, при  $|E| \gg E_{sc}$  (в глубине "хвоста") имеем, естественно, "классический" результат для радиуса локализации, который определяется просто "радиусом" инстантона. Из (4.I27), (4.I29) видим, что  $A_E \sim R_{loc}^{-d}(E)$ .

Таким образом, инстантонный подход, в отличие от проведенного выше рассмотрения, основанного на однородном уравнении Бете-Солпитера, описывает целую область энергий, соответствующих локализованным состояниям, и, в отличие от самосогласованной теории локализации, правильно описывает асимптотику глубокого "хвоста" плотности состояний. Полученные результаты находятся также в полном соответствии с общим критерием локализации, рассмотренным в Главе 3.

## 4.5. Эффективное действие и неустойчивости.

Возникает вопрос о соотношении двух подходов к нахождению сингулярной части двухчастичной функции Грина - рассмотренного выше в Главе 3 подхода, основанного на анализе однородного уравнения Бете-Солпитера и инстантонного подхода. Мы покажем, что оба способа описания естественным образом возникают, как проявления разных, вообще говоря, неустойчивостей системы в рамках формализма эффективного действия для составных полей /100, 119/.

Эффективное действие рассматриваемой системы полей  $\phi$  и  $\varphi$  представляет собой функционал  $\Gamma$  от "классических" (средних) значений полей  $\phi_{cl}$  и  $\varphi_{cl}$  и соответствующих функций Грина, удовлетворяющий следующему вариационному принципу /182/:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{cl}(\vec{r})} = 0 ; \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_{cl}(\vec{r})} = 0 ; \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta G(\vec{r}, \vec{r}')} = 0 \quad (4.130)$$

Этот функционал может быть получен с помощью двойного преобразования Лежандра производящего функционала "классических" полей и функций Грина рассматриваемой теории поля /182/. Формализм эффективного действия специально приспособлен для изучения нарушения симметрии по полям  $\phi$  и  $\varphi$  и по соответствующим функциям Грина  $G$ .

Для сокращения записи удобно использовать очевидные матричные обозначения:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} ; \quad \Phi^+ = (\phi \varphi) \quad (4.131)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G_{\phi\phi} & G_{\phi\varphi} \\ G_{\varphi\phi} & G_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} ; \quad G_{\phi\varphi} = G_{\varphi\phi} \quad (4.132)$$

Тогда, вводя матрицу ( $\delta$  - символы относятся к изотопическому пространству):

$$\hat{G}_0^{-1}(\vec{r}\vec{r}') = \begin{bmatrix} \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 - (E + \omega + i\delta) \right\} \delta_{ij} & \\ & 0 \\ 0 & \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 - (E - i\delta) \right\} \delta_{ij} \end{bmatrix} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.133)$$

можно переписать лагранжиан (4.5) в компактном виде:

$$\mathcal{L}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Sp} \int d^d \vec{r} \Phi^\dagger(\vec{r}) \hat{G}_0^{-1}(\vec{r}\vec{r}') \Phi(\vec{r}') - \frac{1}{8} \rho V^2 (\text{Sp} \Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (4.134)$$

Вводя "внешние источники":

$$J = (J_\phi, J_\varphi) ; \hat{K} = \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} & K_{\phi\varphi} \\ K_{\varphi\phi} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

определим производящий функционал "классических" (средних) полей и функций Грина в следующем виде:

$$Z\{J, K\} \equiv \exp\{-W(J, K)\} = \int \{\delta\Phi\} \exp\{-S[\Phi] - \text{Sp} \int d^d \vec{r} J(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) - \frac{1}{2} \text{Sp} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' \Phi^\dagger(\vec{r}) \hat{K}(\vec{r}\vec{r}') \Phi(\vec{r}')\} \quad (4.135)$$

где действие:

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \text{Sp} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' \Phi^\dagger(\vec{r}) \hat{G}_0^{-1}(\vec{r}\vec{r}') \Phi(\vec{r}') + S_{\text{int}}[\Phi] \quad (4.136)$$

Тогда имеем:

$$\frac{\delta W\{J, K\}}{\delta J_\phi(\vec{r})} = \langle \phi(\vec{r}) \rangle \equiv \phi_{cl}(\vec{r})$$

$$\frac{\delta W\{J, K\}}{\delta J_\varphi(\vec{r})} = \langle \varphi(\vec{r}) \rangle \equiv \varphi_{cl}(\vec{r}) \quad (4.137)$$

где угловые скобки обозначают функциональное усреднение. По сути дела, (4.137) дает определение средних ("классических") полей.



Аналогично получаем:

$$\frac{\delta W \{J, K\}}{\delta K_{\phi\phi}(\bar{r}\bar{r}')} = \frac{1}{2} \left\{ \phi_{cl}(\bar{r}) \phi_{cl}(\bar{r}') + G_{\phi\phi}(\bar{r}\bar{r}') \right\}$$

$$\frac{\delta W \{J, K\}}{\delta K_{\varphi\varphi}(\bar{r}\bar{r}')} = \frac{1}{2} \left\{ \varphi_{cl}(\bar{r}) \varphi_{cl}(\bar{r}') + G_{\varphi\varphi}(\bar{r}\bar{r}') \right\} \quad (4.138)$$

$$\frac{\delta W \{J, K\}}{\delta K_{\phi\varphi}(\bar{r}\bar{r}')} = \frac{1}{2} \left\{ \phi_{cl}(\bar{r}) \varphi_{cl}(\bar{r}') + G_{\phi\varphi}(\bar{r}\bar{r}') \right\} = \frac{\delta W \{J, K\}}{\delta K_{\varphi\phi}(\bar{r}'\bar{r})}$$

Искомый функционал эффективного действия определяется двойным преобразованием Лежандра /182/:

$$\Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G}) = W \{J, K\} - Sp \int d^d \bar{r} J(\bar{r}) \Phi_{cl}(\bar{r}) - \quad (4.139)$$

$$- \frac{1}{2} Sp \int d^d \bar{r} \int d^d \bar{r}' \Phi_{cl}^+(\bar{r}) \hat{K}(\bar{r}\bar{r}') \Phi_{cl}(\bar{r}') - \frac{1}{2} Sp \int d^d \bar{r} \int d^d \bar{r}' \hat{K}(\bar{r}\bar{r}') \hat{G}(\bar{r}'\bar{r})$$

где подразумевается, что источники  $J$  и  $K$  выражены через  $\Phi_{cl}$  и  $\hat{G}$  с помощью уравнений (4.137) и (4.138). Тогда нетрудно видеть, что

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G})}{\delta \phi_{cl}(\bar{r})} = -J_{\phi}(\bar{r}) - \int d^d \bar{r}' K_{\phi\phi}(\bar{r}\bar{r}') \phi_{cl}(\bar{r}')$$

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G})}{\delta \varphi_{cl}(\bar{r})} = -J_{\varphi}(\bar{r}) - \int d^d \bar{r}' K_{\varphi\varphi}(\bar{r}\bar{r}') \varphi_{cl}(\bar{r}')$$

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G})}{\delta G_{\phi\phi}(\bar{r}\bar{r}')} = -\frac{1}{2} K_{\phi\phi}(\bar{r}\bar{r}') ; \quad \frac{\delta \Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G})}{\delta G_{\varphi\varphi}(\bar{r}\bar{r}')} = -\frac{1}{2} K_{\varphi\varphi}(\bar{r}\bar{r}') \quad (4.140)$$

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G})}{\delta G_{\phi\varphi}(\bar{r}\bar{r}')} = -\frac{1}{2} K_{\phi\varphi}(\bar{r}\bar{r}')$$

Если положить внешние источники  $J$  и  $K$  равными нулю, то видно, что определенный таким образом функционал  $\Gamma$  удовлетворяет вариационному принципу (4.130). Этот функционал представляет собой /182/ производящий функционал неприводимых в двухчастичном

канале функций Грина. Согласно работе /182/, с очевидными обобщениями на случай системы двух полей, имеем:

$$\Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G}) = S[\Phi_{cl}] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{G}^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \tilde{G}^{-1} \hat{G} - 1 \} + \tilde{\Phi}(\Phi_{cl}, \hat{G}) \quad (4.141)$$

где  $\text{Tr}$  и  $\ln$  понимаются в функциональном смысле /182/, т.е. в частности  $\text{Tr}$  включает все необходимые интегрирования, а  $\text{Tr} \ln \hat{G} = \ln \text{Det} \hat{G}$ . В (4.141)  $\tilde{G}^{-1}$  обозначает обратную матрицу функции Грина в классическом поле:

$$\tilde{G}^{-1}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.142)$$

где:

$$A_{ij} = \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 - (E + \omega + i\delta) - \frac{1}{2} \rho V^2 (\phi_{cl}^2 + \varphi_{cl}^2) \right\} \delta_{ij} - \rho V^2 \phi_{cl,i} \phi_{cl,j}$$

$$B_{ij} = -\rho V^2 \phi_{cl,j} \varphi_{cl,i}; \quad C_{ij} = -\rho V^2 \varphi_{cl,i} \phi_{cl,j}$$

$$D_{ij} = \left\{ -\frac{1}{2m} \nabla^2 - (E - i\delta) - \frac{1}{2} \rho V^2 (\phi_{cl}^2 + \varphi_{cl}^2) \right\} \delta_{ij} - \rho V^2 \varphi_{cl,i} \varphi_{cl,j} \quad (4.143)$$

$$\phi_{cl}^2 = \sum_{j=1}^n \phi_{cl,j}^2; \quad \varphi_{cl}^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_{cl,i}^2$$

Функционал  $\tilde{\Phi}(\Phi_{cl}, \hat{G})$  вычисляется следующим образом /182/. В классическом действии  $S[\Phi]$  поле  $\Phi$  нужно "сдвинуть" на величину  $\Phi_{cl}$ . Новое действие  $S[\Phi_{cl} + \Phi]$  определяет тогда новые вершины взаимодействия, зависящие от  $\Phi_{cl}$ . Функционал  $\tilde{\Phi}(\Phi_{cl}, \hat{G})$  определяется при этом всеми неприводимыми в двухчастичном канале вакуумными графиками теории с действием  $S[\Phi_{cl} + \Phi]$  с пропагаторами, равными матричным функциям Грина  $\hat{G}$ . Другими словами, нужно оставить лишь те вакуумные графики, которые при разрыве любой из линий, обозначающих функцию Грина, дают неприводимые графики для собственно-энергетических частей. В силу зависимости

вершин от  $\Phi_{cl}(\vec{r})$  трансляционная инвариантность в такой теории, вообще говоря отсутствует. Таким образом, функционал  $\mathcal{F}(\Phi_{cl}, \hat{G})$  удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \hat{G}} = \frac{1}{2} \hat{\Sigma} \quad (4.144)$$

а уравнение

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{G}} = \frac{1}{2} \hat{G}^{-1} - \frac{1}{2} \tilde{G}^{-1} + \frac{1}{2} \hat{\Sigma} = 0 \quad (4.145)$$

есть не что иное, как матричное уравнение Дайсона для соответствующих функций Грина. Матрица  $\hat{\Sigma}$  состоит из неприводимых собственнo-энергетических частей с "одетыми" внутренними линиями.

Рассмотрим сначала "нормальную" фазу, в которой  $\phi_{cl} = \varphi_{cl} = 0$  и отличны от нуля только функции Грина  $G_{\phi\phi}$  и  $G_{\varphi\varphi}$ . В этом случае (4.141) существенно упрощается до:

$$\Gamma(\hat{G}) = \mathcal{F}(\hat{G}) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{G}^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \hat{G}_0^{-1} \hat{G} - 1 \} \quad (4.146)$$

Матрица (4.142) при этом сводится к простому виду (4.133). Все выражения трансляционно-инвариантны в силу  $\phi_{cl} = \varphi_{cl} = 0$ .

Устойчивая система должна удовлетворять условию  $\delta^2 \Gamma > 0$  при любых вариациях  $\Phi_{cl}$  и  $\hat{G}$ . Рассмотрим устойчивость относительно произвольных вариаций функций Грина в "нормальной" фазе. Нетрудно получить:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_{\phi\phi} \delta G_{\phi\phi}} = -\frac{1}{2} G_{\phi\phi}^{-2} + \frac{1}{2} \frac{\delta \Sigma_{\phi\phi}}{\delta G_{\phi\phi}} = -\frac{1}{2} G_{\phi\phi}^{-2} + \frac{1}{2} U_{\phi\phi\phi\phi} \quad (4.147)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_{\phi\varphi} \delta G_{\phi\varphi}} = \frac{1}{2} \frac{\delta G_{\phi\varphi}^{-1}}{\delta G_{\phi\varphi}} + \frac{1}{2} \frac{\delta \Sigma_{\phi\varphi}}{\delta G_{\phi\varphi}} = -\frac{1}{2} G_{\phi\phi}^{-1} G_{\varphi\varphi}^{-1} + \frac{1}{2} U_{\phi\varphi\phi\varphi} \quad (4.148)$$

и т.д. Здесь  $U$  - неприводимые в соответствующих двухчастичных каналах вершинные части. Первое слагаемое в последнем равенстве в (4.148) получается непосредственным вычислением соответствующей

производной, с последующим переходом к "нормальной" фазе ( $G_{\phi\phi} = G_{\psi\psi} = 0$ ). На Рис.4.6(а) графически показаны вариации собственно-энергетических частей при варьировании функций Грина, использованные при выводе (4.147) и (4.148). Ясно, что для нас интересен вопрос об устойчивости системы относительно вариаций  $\delta G_{\phi\psi}$ . В устойчивой системе:

$$\text{Tr} \delta G_{\phi\psi} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta G_{\phi\psi} \delta G_{\psi\phi}} \delta G_{\phi\psi} > 0 \quad (4.149)$$

Используя  $\delta G_{\phi\psi} = G_{\phi\phi} \Psi_{\phi\psi} G_{\psi\psi}$  (см. Рис.4.6(б)) в (4.149), с помощью (4.148) получаем, что порог устойчивости "нормальной" фазы относительно соответствующей вариации определяется условием:

$$\text{Tr} G_{\psi\psi} \Psi_{\phi\psi} G_{\phi\phi} U_{\phi\psi\psi\phi} G_{\phi\phi} \Psi_{\phi\psi} G_{\psi\psi} - \text{Tr} G_{\psi\psi} \Psi_{\phi\psi} \Psi_{\phi\psi} G_{\phi\phi} = 0 \quad (4.150)$$

графически представленным на Рис.4.7(а). Достаточно очевидно, что устойчивость нарушается при появлении нетривиального решения однородного уравнения Бете-Солпитера при  $\omega = 0$  (Рис.4.7(б)).

В самом деле, уже на конкретном примере, разобранным выше в разделе 3.1, мы видели, что при  $\omega = 0$  оператор  $U$ , входящий в (4.150) эрмитов, его собственные значения действительны. Условие устойчивости эквивалентно требованию положительной определенности квадратичной формы:

$$\text{Tr} \Psi_{\phi\psi} X_{\phi\psi} \Psi_{\phi\psi} > 0 \quad (4.151)$$

где

$$X_{\phi\psi} = G_{\psi\psi} G_{\phi\phi} U_{\phi\psi\psi\phi} G_{\phi\phi} G_{\psi\psi} - G_{\psi\psi} G_{\phi\phi} \quad (4.152)$$

причем очевидно, что при  $\omega = 0$   $G_{\phi\phi} = G_{\psi\psi}^*$ . Вводя систему собственных функций оператора  $X_{\phi\psi}$ :

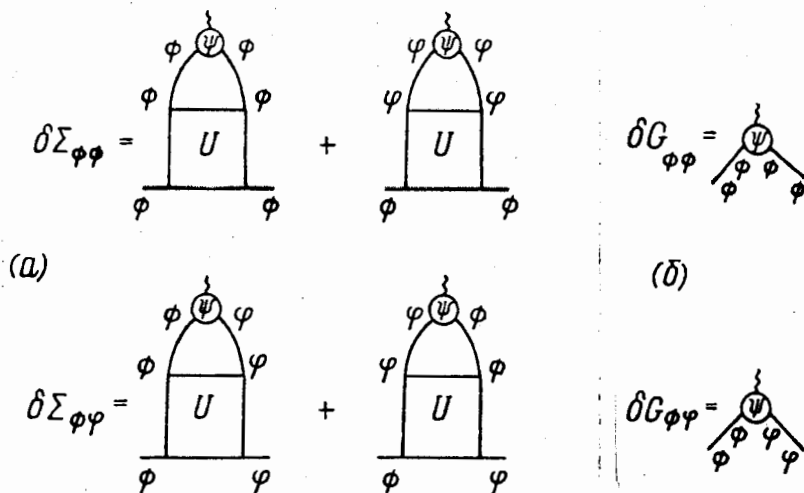


Рис.4.6. (а) Вариации собственно-энергетических частей при произвольных вариациях функций Грина.

(б) Графическое представление произвольных вариаций функций Грина (варьирование внешнего источника  $\delta K_{\phi\phi} \equiv \psi_{\phi\phi}$  ).

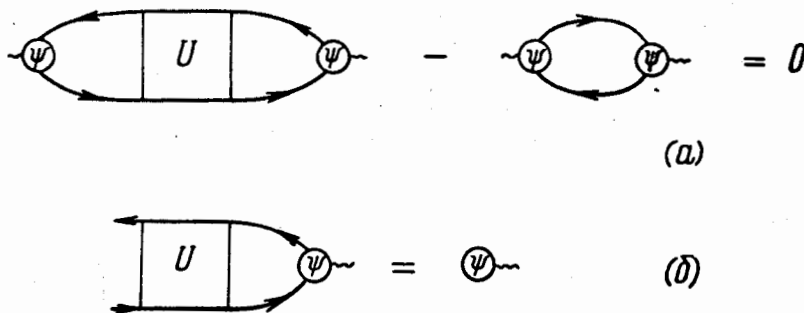


Рис.4.7. Графическое представление уравнения (4.150) - (а) и следующего из него однородного уравнения Бете-Солпитера - (б).

$$X_{\varphi\varphi} \psi_{\varphi\varphi}^{\nu} = \lambda_{\nu} \psi_{\varphi\varphi}^{\nu} ; \lambda_{\nu} \in \text{Re} \quad (4.152)$$

видим, что существование нетривиального решения однородного уравнения Бете-Солпитера эквивалентно существованию собственного значения  $\lambda_0 = 0$ . Тогда выбор  $\psi_{\varphi\varphi} \sim \psi_{\varphi\varphi}^0$  нарушает условие (4.151). Аналогичное рассмотрение для обычных фазовых переходов в ферми-системах было проведено в работе /183/. Таким образом, этот анализ показывает, что появление нетривиального решения уравнения Бете-Солпитера (3.33) действительно, как это и предполагалось в разделе 3.1, дает порог устойчивости "нормальной" фазы, причем речь идет об устойчивости относительно произвольных вариаций  $\delta G_{\varphi\varphi}$ . При этом, разложение функционала  $\Gamma(\hat{G})$  (4.146) по степеням  $\delta G_{\varphi\varphi} \sim \psi_{\varphi\varphi}$  дает, в принципе, способ рассмотрения соответствующей "конденсированной" фазы, причем величина  $\psi_{\varphi\varphi}$  при этом играет роль параметра порядка.

Дело, однако, обстоит не столь просто ввиду возможности появления инстантонных решений. Действительно, первые два уравнения в (4.130) являются обобщением классических полевых уравнений (4.110). Для нас важен случай, когда они приобретают нетривиальные решения типа (4.111). В этом случае матрица (4.142) сводится к:

$$\tilde{G}^{-1}(\vec{r}\vec{r}') = \begin{bmatrix} (M_T - \omega - i\delta) \delta_{ij} & \\ & 0 \quad (M_L + i\delta) e_i e_j + (M_T + i\delta) (\delta_{ij} - e_i e_j) \end{bmatrix} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.153)$$

где операторы  $M_L$  и  $M_T$  были введены выше в (4.64), (4.65).

Простейшее приближение для эффективного действия  $\Gamma(\Phi_{cl}, \hat{G})$  сводится при этом к пренебрежению в (4.141) вкладом  $\tilde{\Phi}(\Phi_{cl}, \hat{G})$ . В этом случае из (4.144) следует  $\hat{\Sigma} = 0$ , т.е.  $\hat{G} = \tilde{G}$ .

Тогда (4.141) дает:

$$\Gamma(\varphi_{cl}) = S[\varphi_{cl}] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \tilde{G}_{\phi\phi}^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \tilde{G}_{\varphi\varphi}^{-1} \quad (4.154)$$

а уравнение  $\delta\Gamma/\delta\varphi_{cl} = 0$  сводится к обобщенному уравнению для инстантона:

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \varphi_{cl} - E \varphi_{cl} - \frac{1}{2} \rho V^2 \varphi_{cl}^3 + \frac{\delta\Gamma_1(\varphi_{cl})}{\delta\varphi_{cl}} = 0 \quad (4.155)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi_{cl}) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \tilde{G}_{\phi\phi}^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \tilde{G}_{\varphi\varphi}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \text{Det} \tilde{G}_{\phi\phi}^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \text{Det} \tilde{G}_{\varphi\varphi}^{-1} \end{aligned} \quad (4.156)$$

В последнем равенстве  $\text{Det}$  берется по изотопическим индексам, а  $\text{Tr}$  выполняется по аргументам функций Грина. Из (4.153) имеем:

$$\text{Det} \tilde{G}^{-1} = [\text{Det}(M_T - \omega - i\delta)]^n \text{Det} M_L [\text{Det} M_T]^{m-1} \quad (4.157)$$

Отсюда получаем:

$$\Gamma_1(\varphi_{cl}) = -n \sum_k (\lambda_k^T - \omega - i\delta) - \sum_k (\lambda_k^L + i\delta) - (m-1) \sum_k (\lambda_k^T + i\delta) = \quad (4.158)$$

$$= -\sum_{n \rightarrow 0, m \rightarrow 0} \lambda_k^L + \sum_k \lambda_k^T \in \text{Re}$$

то есть ( $\ln \text{Det} M_{L,T} = \text{Tr} \ln M_{L,T}$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi_{cl}) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ 1 - \left[ -\frac{\nabla^2}{2m} - E \right]^{-1} \frac{3}{2} \rho V^2 \varphi_{cl}^2 \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ 1 - \left[ -\frac{\nabla^2}{2m} - E \right]^{-1} \frac{1}{2} \rho V^2 \varphi_{cl}^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.159)$$

Из разложения (4.159) в ряд по степеням  $\rho V^2 \varphi_{cl}^2$  видно /164/, что  $\Gamma_1(\varphi_{cl})$  представляет собой результат суммирования однопетлевых поправок к классическому действию. Рассматривая здесь член первого порядка по  $\rho V^2 \varphi_{cl}^2$ , получаем:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{(1)}(\varphi_{cl}) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left[ -\frac{\nabla^2}{2m} - E \right]^{-1} \rho V^2 \varphi_{cl}^2 \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \rho V^2 \int d^d \vec{r} \varphi_{cl}^2(\vec{r}) \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{E - p^2/2m} \equiv \\
&\equiv -\frac{1}{2} \delta E \int d^d \vec{r} \varphi_{cl}^2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{4.160}$$

где  $\delta E = E - E_0 = -R_e \Sigma(E)$  представляет собой перенормировку "массы" в однопетлевом приближении, обсуждавшуюся выше в разделе 4.1. Таким образом, последний член в (4.155) можно не учитывать, если с самого начала считать (как мы это всюду и делали), что  $E$  представляет собой энергию, перенормированную в однопетлевом приближении. Член второго порядка в разложении  $\Gamma_1(\varphi_{cl})$  приводит к однопетлевой поправке к константе связи, а члены высших порядков несущественны в смысле их влияния на инстантонные решения.

Таким образом, в рассматриваемом приближении фактически воспроизводятся результаты инстантонного подхода. Появление нетривиального решения  $\varphi_{cl}(\vec{r})$  означает своего рода "локальное" нарушение симметрии по полю  $\varphi$ , отличное от "глобального" (однородного по пространству) нарушения симметрии в обычных фазовых переходах. Соответствующее нарушение трансляционной и ротационной симметрии "маскируется" интегрированием по коллективным координатам, которое с необходимостью выполняется при расчетах физических корреляторов. Условие применимости рассматриваемого приближения сводится к обсуждавшемуся выше неравенству (4.18), при выполнении которого переменная  $E$  сохраняет простой смысл энергии, отсчитанной от сдвинутого (в однопетлевом приближении) края зоны, а перенормировка константы связи несущественна. Видно, что критическая энергия, при которой возникают инстантонные решения ( $E = 0$ ) попадает в ту же область энергий, где появляются нетривиальные решения однородного уравнения Бете-Солпитера (3.33) (и где отказывают использованные приближения).



## 5. МЕЖЭЛЕКТРОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ .

### 5.1. Приближение Хартри-Фока. Локализационные вклады.

Обычно явление локализации рассматривается без учета межэлектронного взаимодействия, хотя его важность для описания переходов металл-диэлектрик в неупорядоченных системах известна уже давно /3/. Это подтвердилось в последние годы на примере теории "грязных" металлов /14, 184-186/, а также в известной задаче о "кулоновской щели", возникающей на уровне Ферми в системе электронов, находящихся в сильно локализованных состояниях /8, 187-190/. В последнее время появился целый ряд работ /191-197/, в которых предпринимаются попытки рассмотреть влияние межэлектронного взаимодействия при подходе к переходу металл-диэлектрик в неупорядоченных системах. Во всех этих работах рассматривается лишь металлическая область в окрестности перехода Андерсона, диэлектрическая сторона перехода не рассматривается. Роль межэлектронного взаимодействия для локализованных электронов, помимо уже упоминавшихся работ /8, 187-190/, рассматривалась лишь в ранних попытках построения теории "ферми-стекло" /198-200/. Все эти работы демонстрируют важную, если не определяющую, роль корреляций при описании перехода металл-диэлектрик в неупорядоченных системах. В то же время результаты этих работ в значительной мере противоречат друг другу и вопрос еще далек от окончательного решения. Остается неясным даже ответ на столь фундаментальный вопрос, как возможность реализации самого явления локализации в системах с взаимодействием. Положение усугубляется обсуждавшимися выше трудностями, возникающими при теоретическом описании перехода Андерсона даже в одноэлектронном приближении.

В такой ситуации имеет смысл проанализировать случай слабого

взаимодействия при сильном беспорядке, чтобы попытаться выяснить, на какие физические свойства корреляции влияют особенно сильно. Поэтому ниже, следуя в основном работам /201,202/, выполненным автором совместно с М.И. Кацнельсоном, мы рассмотрим первые поправки теории возмущений по взаимодействию к плотности состояний и некоторым другим характеристикам системы в окрестности перехода Андерсона, причем основное внимание будет уделяться области локализованных состояний (см. также обзор /119/). В этом смысле здесь предпринимается попытка распространения и обобщения результатов Аронова и Альтшулера /14,184-186/ из металлической области в диэлектрическую. Одноэлектронную задачу Андерсона мы будем предполагать решенной, считая, что концепция локализации сохраняется и для систем с взаимодействием. Именно это предположение, являющееся центральным для нашего рассмотрения, позволяет надеяться на обоснованность учета лишь первых поправок по взаимодействию, хотя, как мы увидим ниже, в непосредственной окрестности порога подвижности требуется, по-видимому, детальное рассмотрение высших поправок по взаимодействию.

Итак, предполагая одноэлектронную задачу решенной, введем опять полную ортонормированную систему точных волновых функций  $\varphi_\nu(\vec{r})$  и соответствующие точные собственные значения  $\epsilon_\nu$  энергии электрона в случайном поле неупорядоченной системы. Эти функции и энергии могут отвечать как локализованным, так и делокализованным состояниям. Рассмотрим одноэлектронную причинную функцию Грина в представлении этих точных собственных функций и, в частности, ее диагональный матричный элемент:

$$G_{\nu\nu}(\epsilon) = \left\langle \nu \left| \frac{1}{\epsilon - H + i\delta \text{Sign} \epsilon} \right| \nu \right\rangle \quad (5.1)$$

где  $H$  - полный гамильтониан, учитывающий и межэлектронное взаи-

модействие,  $\varepsilon$  - энергия, отсчитываемая от уровня Ферми. Влияние взаимодействия учитывается введением соответствующей собственно-энергетической части /203,204/ (см. также /198-200/):

$$G_{\nu\nu}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\nu} - \Sigma_{\nu}(\varepsilon)} \quad (5.2)$$

$$\Sigma_{\nu}(\varepsilon) = \Delta_{\nu}(\varepsilon) - i\Gamma_{\nu}(\varepsilon) \text{Sign} \varepsilon$$

Возможность введения такой собственно-энергетической части в представлении произвольных квантовых чисел  $\nu$  подробно обсуждается в /203, Гл.II.4/. Следуя стандартной процедуре /203, 204/, вводим перенормированную энергию  $\tilde{\varepsilon}_{\nu}$  как решение уравнения:

$$\tilde{\varepsilon}_{\nu} - \varepsilon_{\nu} - \Delta_{\nu}(\tilde{\varepsilon}_{\nu}) = 0 \quad (5.3)$$

и при  $\varepsilon \sim \tilde{\varepsilon}_{\nu}$  представим (5.2) в виде:

$$G_{\nu\nu}(\varepsilon) \approx \frac{Z_{\nu}}{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{\nu} + i\gamma_{\nu} \text{Sign} \varepsilon} \quad (5.4)$$

где

$$Z_{\nu} = \left[ 1 - \frac{\partial \Delta_{\nu}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\nu}}^{-1}; \quad \gamma_{\nu} = Z_{\nu} \Gamma_{\nu}(\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{\nu}) \quad (5.5)$$

Введем теперь, следуя работе /204/, "собственно-энергетическую часть"  $\tilde{\Sigma}_{\varepsilon}(\varepsilon)$  усредненную по некоторой изоэнергетической поверхности  $E = \varepsilon_{\nu}$  и по конфигурациям случайного поля неупорядоченной системы:

$$\tilde{\Sigma}_{\varepsilon}(\varepsilon) = \tilde{\Delta}_{\varepsilon}(\varepsilon) - i\tilde{\Gamma}_{\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\nu} \delta(E - \varepsilon_{\nu}) \Sigma_{\nu}(\varepsilon) \right\rangle \quad (5.6)$$

где  $N_0(E)$  - одноэлектронная (усредненная) плотность состоя-

ний без учета взаимодействия.

Нас интересует одноэлектронная плотность состояний с учетом взаимодействия, которую определим обычным образом:

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \left\langle \sum_{\nu} \text{Im} G_{\nu\nu}^R(E) \right\rangle \quad (5.7)$$

Предполагая малость поправок от взаимодействия в смысле выполнения неравенств  $\gamma_{\nu} \ll \epsilon_{\nu} \sim \tilde{\epsilon}_{\nu}$ , после простых вычислений с использованием (5.4)-(5.6) в (5.7), в первом приближении получаем:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E)} = \frac{N(E) - N_0(E)}{N_0(E)} \approx -\frac{\partial \tilde{\Delta}_E(\tilde{\epsilon}_{\nu})}{\partial E} + \frac{\partial \tilde{\Delta}_E(\tilde{\epsilon}_{\nu})}{\partial \tilde{\epsilon}_{\nu}} \quad (5.8)$$

Величину

$$\frac{\delta \tilde{N}(E)}{N_0(E)} = -\frac{\partial \tilde{\Delta}_E(\tilde{\epsilon}_{\nu})}{\partial E} \quad (5.9)$$

по причинам, которые выяснятся в дальнейшем, будем называть поправкой к "термодинамической плотности состояний". Эта поправка была впервые рассмотрена в работе /204/ (см. также /147/). Отметим, в связи с этим, возможность различных определений плотности состояний в системах с взаимодействием (Ср. /187, 188/).

Рассмотрим модельную задачу, в которой межэлектронное взаимодействие описывается статическим потенциалом отталкивания с конечным радиусом действия:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \varphi_{\mu}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu}^*(\vec{r}) v(\vec{r}-\vec{r}') \varphi_{\mu}(\vec{r}') \varphi_{\nu}(\vec{r}) a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu} a_{\nu} \quad (5.10)$$

Тогда, рассматривая хартри-фоковские графики (Рис. 5.1), находим:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu}^H &= \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \sum_{\nu} f_{\nu} \varphi_{\mu}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu}^*(\vec{r}) \varphi_{\nu}(\vec{r}) \varphi_{\mu}(\vec{r}') \\ \sum_{\mu}^F &= - \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \sum_{\nu} f_{\nu} \varphi_{\mu}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu}^*(\vec{r}) \varphi_{\mu}(\vec{r}) \varphi_{\nu}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (5.11)$$

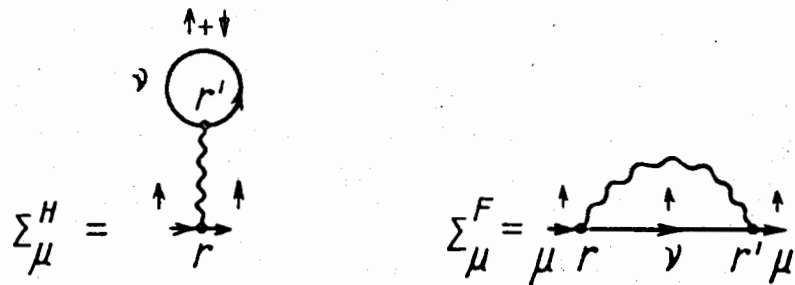


Рис. 5.1. Хартри-фоковские графики для собственно-энергетической части.



Рис. 5.2. Хартри-фоковские поправки к термодинамическому потенциалу.

где  $f_\nu = f(\epsilon_\nu)$  - фермиевская функция распределения. Соответственно, из определения (5.6) имеем:

$$\tilde{\sum}_E^H = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(E+\omega) \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \gg^H \quad (5.12)$$

$$\tilde{\sum}_E^F = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(E+\omega) \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \gg^F$$

где введены спектральные плотности:

$$\ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \gg^H = \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\mu\nu} \delta(E-\epsilon_\mu) \delta(E+\omega-\epsilon_\nu) \varphi_\mu^*(\vec{r}) \varphi_\mu(\vec{r}) \varphi_\nu^*(\vec{r}') \varphi_\nu(\vec{r}') \right\rangle \quad (5.13)$$

$$\ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \gg^F = \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\mu\nu} \delta(E-\epsilon_\mu) \delta(E+\omega-\epsilon_\nu) \varphi_\mu^*(\vec{r}) \varphi_\nu(\vec{r}) \varphi_\mu^*(\vec{r}') \varphi_\nu(\vec{r}') \right\rangle \quad (5.14)$$

Спектральная плотность (5.14), впервые введенная Березинским и Горьковым /101/, уже рассматривалась выше в разделе 3.1, в связи с общим критерием локализации. Повторяя соответствующие рассуждения относительно вклада  $\epsilon_\mu = \epsilon_\nu$ , также и для спектральной плотности (5.13), нетрудно убедиться, что в области локализованных состояний ( $E < E_c$ ) она также приобретает  $\delta(\omega)$  - вклад:

$$\ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \gg^H = A_E(\vec{r}-\vec{r}') \delta(\omega) + \rho_E^H(\omega, \vec{r}-\vec{r}') \quad (5.15)$$

$$\ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \gg^F = A_E(\vec{r}-\vec{r}') \delta(\omega) + \rho_E^F(\omega, \vec{r}-\vec{r}')$$

где, как и в (3.9):

$$A_E(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\mu} \delta(E-\epsilon_\mu) |\varphi_\mu(\vec{r}')|^2 |\varphi_\mu(\vec{r})|^2 \right\rangle > 0 \quad (5.16)$$

- обобщенное **inverse participation ratio**.

Используя (5.15) в (5.12), получаем следующие вклады в  $\tilde{\sum}_E$  связанные с возникновением в системе локализованных состояний:

$$\begin{aligned} \tilde{\sum}_{E_{loc}}^{H,F} &= \tilde{\Delta}_{E_{loc}}^{H,F} = \pm f(E) \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') A_E(\vec{r}-\vec{r}') = \\ &= \pm f(E) \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(-\vec{q}) A_E(\vec{q}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Для точечного взаимодействия  $\mathcal{V}(\vec{r}-\vec{r}') = \nu_0 \delta(\vec{r}-\vec{r}')$  имеем:

$$\sum_{E_{loc}}^{\sim H, F} = \pm f(E) \nu_0 \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} A_E(\vec{q}) = \pm f(E) \nu_0 A_E \quad (5.18)$$

где возникла величина  $A_E$  (3.22), пропорциональная полной вероятности возврата электрона в начальную точку за бесконечное время. Заметим, что для точечного взаимодействия, в силу очевидного из (5.13), (5.14) свойства:

$$\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E'}(\vec{r}) \rangle^H = \langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E'}(\vec{r}) \rangle^F \quad (5.19)$$

равны (и противоположны по знаку) также и "регулярные" вклады в  $\sum_E^{\sim H}$  и  $\sum_E^{\sim F}$ , связанные с  $\rho_E^{H, F}(\omega, \vec{r}-\vec{r}')$  в (5.15).

Для бесспиновых электронов хартриевский и фоковский вклады (5.18) компенсируют друг друга. С учетом спина хартриевский вклад приобретает дополнительный множитель 2, связанный с суммированием по спину в электронной петле. В результате возникает отличный от нуля "локализационный" вклад:

$$\sum_{E_{loc}}^{\sim H+F} = \tilde{\Delta}_{E_{loc}}^{H+F} = f(E) \nu_0 A_E \quad (5.20)$$

Для определенности выписываем формулы для точечного взаимодействия. Учтем теперь, что в (5.20) основная энергетическая зависимость определяется фермиевской функцией, резко меняющейся вблизи энергии Ферми  $E_F$ . Величину  $A_E$  при  $E \approx E_F$  можно считать константой (плавной функцией  $E$ ). Это предположение может, вообще говоря, оказаться неверным вблизи порога подвижности, когда  $A_E$  обращается в нуль. Соответствующий критический индекс строго говоря неизвестен, но из оценок типа (4.127) можно заключить, что  $\frac{\partial A_E}{\partial E} \rightarrow 0$  и при  $E \rightarrow E_c$ . Тогда из (5.9) и (5.20) получаем:

$$\frac{\delta \tilde{N}_{loc}(E)}{N_0(E)} = - \frac{\partial \tilde{\Delta}_{E_{loc}}^{H+F}}{\partial E} \approx \nu_0 A_{E_F} \left( - \frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) \quad (5.21)$$

В "полной" плотности состояний, определяемой (5.7), (5.8), сингулярный (локализационный) вклад (5.21) компенсируется вторым слагаемым в (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Delta}_{Eloc}^{H+F}}{\partial \tilde{\epsilon}_\nu} &= \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_\nu \frac{\partial \Delta_\nu(\tilde{\epsilon}_\nu)}{\partial \tilde{\epsilon}_\nu} \delta(E - \epsilon_\nu) \right\rangle \approx \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_\nu \frac{\partial \Delta_\nu(\epsilon_\nu)}{\partial \epsilon_\nu} \delta(E - \epsilon_\nu) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_\nu \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\partial f_\nu}{\partial \epsilon_\nu} \delta(E - \epsilon_\nu) |\varphi_\nu(\vec{r})|^2 |\varphi_\nu(\vec{r}')|^2 \right\rangle = \\ &= \frac{\partial f(E)}{\partial E} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r} - \vec{r}') A_E(\vec{r} - \vec{r}') = v_0 A_{E_F} \frac{\partial f(E)}{\partial E} \end{aligned} \quad (5.22)$$

В "термодинамической" плотности состояний (5.9) локализационный вклад сохраняется, что, как мы увидим, приводит к особенностям в поведении ряда термодинамических величин.

Чтобы лучше понять физический смысл локализационного вклада в  $\sum_E^{H+F}$  заметим, что фактически здесь речь идет об учете взаимодействия электронов, находящихся в одном и том же квантовом состоянии  $\nu$ . Видно, что в сумме графиков Рис.5.1 происходит полная компенсация вкладов от взаимодействия электронов с одинаковыми проекциями спина (показаны на Рис.5.1 стрелками), а  $\sum_E^{H+F}$  определяется взаимодействием двух электронов с противоположными спинами, находящимися в состоянии  $\nu$ , т.е. "эффективным" взаимодействием "хаббардовского" типа:

$$H_{eff} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r} - \vec{r}') |\varphi_\nu(\vec{r})|^2 |\varphi_\nu(\vec{r}')|^2 n_{\nu\sigma} n_{\nu-\sigma} \quad (5.23)$$

где  $n_{\nu\sigma}$  - оператор числа электронов в состоянии  $\nu$  со спином  $\sigma$ . Используя простейшую оценку величины  $A_E$  имеем ( $E_F < E_C$ ):

$$\tilde{\Delta}_{Eloc}^{H+F} \sim \begin{cases} v_0 R_{loc}^{-d}(E) ; E < E_F \\ 0 ; E > E_F \end{cases} \quad (5.24)$$



Сравнивая полученные результаты с известными качественными рассуждениями Мотта /2,3,205/, видим, что они соответствуют возникновению ниже уровня Ферми "полоски" однократно занятых электронных состояний шириной порядка  $\tilde{\Delta}_{E_{loc}}^{H+F}$ . Сходные соображения высказывались также в работах /206,207/. Определяя усредненное изменение функции распределения электронов с энергией  $E$  за счет взаимодействия как:

$$\begin{aligned} \delta f(E) &= \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\nu} \delta f_{\nu} \delta(E - \epsilon_{\nu}) \right\rangle = \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \delta G_{\nu}(\epsilon) \delta(E - \epsilon_{\nu}) \right\rangle \approx \\ &\approx \frac{1}{N_0(E)} \left\langle \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi i} \frac{\sum_{\nu}(\epsilon)}{(\epsilon - \epsilon_{\nu} + i\delta \text{Sign}\epsilon)^2} \delta(E - \epsilon_{\nu}) \right\rangle \end{aligned} \quad (5.25)$$

нетрудно убедиться, что взаимодействие, приводящее к (5.20), дает:

$$\delta f(E) = - \left( - \frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) \tilde{\Delta}_{E}^{H+F} < 0 \quad (5.26)$$

что соответствует уменьшению функции распределения электронов в слое с шириной порядка  $\tilde{\Delta}_{E}^{H+F}$  под уровнем Ферми, что и означает "выталкивание" части электронов из этого слоя. Естественно, что в отсутствие внешнего магнитного поля, эта картина симметрична по спину.

Достаточно очевидно, что одиночные спины на уровнях в "полоске" Мотта должны приводить к дополнительному вкладу в парамагнитную восприимчивость. Учитывая, что число неспаренных спинов по порядку величины равно:

$$\mathcal{N} \approx \int_{E_F - \tilde{\Delta}_{E_{loc}}^{H+F}}^{E_F} dE N_0(E) \approx N_0(E_F) \tilde{\Delta}_{E_{loc}}^{H+F} = \nu_0 N_0(E_F) A_{E_F} \quad (5.27)$$

получаем закон Кюри ( $\mu_B$  - магнетон Бора):

$$\delta \chi^{loc} \sim \frac{1}{T} \mathcal{N} \mu_B^2 = \frac{\nu_0}{T} N_0(E_F) A_{E_F} \mu_B^2 \quad (5.28)$$

Нетрудно вывести этот результат и из непосредственного рассмот-

$$A_E \sim R_{loc}^{-3}$$

рения хартри-фоковских поправок к термодинамическому потенциалу, определяемых графиками, показанными на Рис.5.2 /II9,202/. Прямыми вычислениями получаем ( $h = \mu_B H$ , где  $H$  - внешнее магнитное поле,  $\sigma = \pm 1$ ):

$$\langle \delta \Omega_H \rangle = \frac{1}{2} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r} - \vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \sum_{\sigma \sigma'} f(E - \sigma h) f(E' - \sigma' h) \langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E'}(\vec{r}') \rangle^H \quad (5.29)$$

$$\langle \delta \Omega_F \rangle = -\frac{1}{2} \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r} - \vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \sum_{\sigma} f(E - \sigma h) [1 - f(E' - \sigma h)] \langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E'}(\vec{r}') \rangle^F \quad (5.30)$$

Слагаемое с единицей в квадратных скобках в (5.30) сводится к несущественной константе, перенормирующей химический потенциал:

$$\int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r} - \vec{r}') \left\langle \sum_{\mu \nu} f_{\mu} \varphi_{\mu}^*(\vec{r}') \varphi_{\mu}(\vec{r}) \varphi_{\nu}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu}(\vec{r}) \right\rangle = \quad (5.31)$$

$$= v(0) \int d^d \vec{r} \left\langle \sum_{\mu} f_{\mu} |\varphi_{\mu}(\vec{r})|^2 \right\rangle = v(0) \sum_{\mu} f_{\mu} = N v(0)$$

где  $N$  - полное число электронов. Тогда, с учетом (5.12) имеем:

$$\langle \delta \Omega_{H,F} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) N_0(E) \sum_E \tilde{\Delta}_E^{H,F} \quad (5.32)$$

Проводя в (5.32) интегрирование по частям, получим:

$$\delta \Omega = \langle \delta \Omega_H \rangle + \langle \delta \Omega_F \rangle = T N_0(E_F) \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{\partial \tilde{\Delta}_E^{H,F}}{\partial E} \ln [1 + e^{-\frac{E}{T}}] \quad (5.33)$$

Сравнение (5.33) с известным выражением для термодинамического потенциала свободных электронов:

$$\Omega = -T \int_{-\infty}^{\infty} dE N(E) \ln [1 + e^{-\frac{E}{T}}] \quad (5.34)$$

объясняет использование термина "термодинамическая плотность состояний", введенного выше в связи с определением (5.9).

Вычисляя магнитную восприимчивость  $\chi = - \left\langle \frac{\partial^2 \Omega}{\partial H^2} \right\rangle_{H=0}$ , прямым дифференцированием (5.29), (5.30) находим:

$$\delta \chi_H = -4\mu_B^2 \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{\partial^2 f(E)}{\partial E^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE' f(E') \ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E'}(\vec{r}') \gg^H \quad (5.35)$$

$$\delta \chi_F = 2\mu_B^2 \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \left\{ \frac{\partial^2 f(E)}{\partial E^2} f(E') + \frac{\partial f(E)}{\partial E} \frac{\partial f(E')}{\partial E'} \right\} \ll \rho_E(\vec{r}) \rho_{E'}(\vec{r}') \gg^F \quad (5.36)$$

Интегрируя первое слагаемое в (5.36) по частям, можно убедиться, что при  $T \rightarrow 0$   $\delta \chi_F \rightarrow 0$ . В итоге, локализационный вклад в магнитную восприимчивость имеет вид /II9/:

$$\delta \chi_{loc} = -4\mu_B^2 \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} dE N_0(E) A_E(\vec{r}-\vec{r}') \frac{\partial^2 f(E)}{\partial E^2} f(E) \approx \quad (5.37)$$

$$\approx 4 N_0(E_F) A_{E_F} v_0 \mu_B^2 \int dE \left( \frac{\partial f(E)}{\partial E} \right)^2 = \frac{2\mu_B^2}{3} \frac{v_0}{T} N_0(E_F) A_{E_F}$$

что согласуется с оценкой (5.28). Тем самым полностью подтверждаются качественные соображения о возникновении под уровнем Ферми полосы однократно занятых состояний. В одномерной модели результат типа (5.37) был получен в работе /207/. Ясно, что при  $T \rightarrow 0$  станет, вообще говоря, существенным взаимодействие этих одиночных спинов друг с другом /205/.

Сингулярная (локализационная) часть термодинамического потенциала имеет вид:

$$\delta \Omega_{loc} = \langle \delta \Omega_H \rangle_{loc} + \langle \delta \Omega_F \rangle_{loc} = \int d^d \vec{r} \int d^d \vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dE v(\vec{r}-\vec{r}') A_E(\vec{r}-\vec{r}') N_0(E) f^2(E) = \quad (5.38)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(-\vec{q}) A_E(\vec{q}) N_0(E) f^2(E)$$

Нетрудно найти соответствующий вклад в энтропию:

$$S_{loc} = - \frac{\partial \delta \Omega_{loc}}{\partial T} = - \int_{-\infty}^{\infty} dE N_0(E) \frac{\partial}{\partial T} f^2(E) \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(-\vec{q}) A_E(\vec{q}) \xrightarrow{T \rightarrow 0} v_0 N_0(E_F) A_{E_F} \quad (5.39)$$

который очевидным образом связан с существованием неспаренных

$$\delta \chi_{loc} = T = \frac{2}{3} \mu_B^2 S_{loc}$$

(свободных) спинов в "полоске" Мотта. Соответственно, для теплоемкости получаем:

$$C_{loc} = T \frac{\partial S_{loc}}{\partial T} = -\frac{\pi^2}{3} T v_0 \frac{\partial}{\partial E_F} \{ N_0(E_F) A_{E_F} \} \quad (5.40)$$

Видно, что энтропия стремится при  $T \rightarrow 0$  к положительной константе<sup>I</sup>, а локализационный вклад в теплоемкость связан с малой ( $\sim \partial A_{E_F} / \partial E_F$ ) поправкой к термодинамической плотности состояний, которой выше пренебрегалось. Локализационная поправка к корреляционному вкладу в сжимаемость аналогичным образом имеет вид ( $\mu$  - химический потенциал):

$$\begin{aligned} \delta \chi_{loc} &= -\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \delta \Omega_{loc} = -v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE A_E N_0(E) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} f^2(E) = \\ &= v_0 \frac{\partial}{\partial E_F} \{ A_{E_F} N_0(E_F) \} \end{aligned} \quad (5.41)$$

и также мала. Таким образом мы убеждаемся, что сингулярный вклад в "термодинамическую" плотность состояний (5.21) не приводит ни к каким противоречиям с третьим началом термодинамики, а его возникновение является "сигналом", свидетельствующим о появлении полоски однократно занятых состояний под уровнем Ферми.

До сих пор наше рассмотрение носило совершенно общий характер. Для дальнейшего продвижения необходимо принять некоторую конкретную одноэлектронную модель перехода Андерсона. Тогда можно рассмотреть и "регулярные" вклады в плотность состояний, связанные с несингулярными слагаемыми в (5.15). При этом мы ограничимся рассмотрением только фоковского вклада в (5.11), поскольку, как отмечалось в работах /14, 185, 204/, хартриевский вклад мал, если потенциал взаимодействия спадает на длине, превышающей обратный

---

<sup>I</sup>Ясно, что этот вклад обращается в нуль при учете взаимодействия "свободных" спинов, приводящего к дальнему магнитному порядку (при  $T \rightarrow 0$ ).

импульс Ферми. Ниже мы убедимся, что соответствующие оценки сохраняются и для "регулярного" вклада в (5.11) в области локализации. Для случая же точечного взаимодействия, как это ясно из (5.19), хартриевский вклад в два раза (с учетом спина) больше фоковского, так что полученные ниже результаты следует просто взять с другим знаком (ср. также работу /208/). В качестве одноэлектронной модели мы примем самосогласованную теорию локализации, поскольку в ее рамках не составляет труда найти явные выражения для всех интересующих нас величин.

Пользуясь найденным в (3.75) видом спектральной плотности Березинского-Горькова в самосогласованной теории, из (5.12) получаем для "регулярного" вклада в  $\tilde{\Sigma}_E^F$  при  $T = 0$ :

$$\tilde{\Sigma}_{E_{\text{reg}}}^F = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dE' \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) \frac{\mathcal{D}_{EF} q^2}{(E' - E)^2 + [\omega_0^2(E_F) \tau_{EF} + \mathcal{D}_{EF} q^2]^2} \quad (5.42)$$

Соответственно, для поправки к плотности состояний имеем:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E)} \approx -\frac{d \tilde{\Sigma}_{E_{\text{reg}}}^F}{dE} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{D}_{EF} q^2}{E^2 + [\mathcal{D}_{EF} q^2 + \omega_0^2(E_F) \tau_{EF}]^2} \quad (5.43)$$

Принимая теперь для простоты модель точечного взаимодействия и вспоминая, что до сих пор в этой главе все энергии отсчитывались от уровня Ферми  $E_F$ , получаем ( $2 < d < 4$ ;  $S_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-\frac{d}{2}} / \Gamma(\frac{d}{2})$ ):

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F)} \approx \frac{v_0}{\pi} \frac{S_d}{d-2} \mathcal{D}_{EF}^{-\frac{d}{2}} \begin{cases} |E - E_F|^{\frac{d-2}{2}} - \tilde{E}^{\frac{d-2}{2}} ; & |E - E_F| \gg \omega_0^2(E_F) \tau_{EF} \\ \omega_0^{d-2}(E_F) \tau_{EF}^{\frac{d-2}{2}} - \tilde{E}^{\frac{d-2}{2}} ; & |E - E_F| \ll \omega_0^2(E_F) \tau_{EF} \end{cases} \quad (5.44)$$

где характерная энергия  $\tilde{E}$  связана с выбором параметра обрезания на верхнем пределе в интеграле по  $q$  в (5.43). Это обрезание необходимо в связи с неприменимостью "диффузионного" приближения

для подынтегрального выражения при больших импульсах. В соответствии с рассмотрением аналогичного обрезания в основном уравнении самосогласованной теории (3.79), (3.80), выберем импульс обрезания равным импульсу Ферми, так что:

$$\tilde{E} = \mathcal{D}_{E_F} p_F^2 \quad (5.45)$$

Альтернативным является выбор параметра обрезания равным обратной длине свободного пробега  $l^{-1}$ , но как уже не раз отмечалось выше, вблизи порога подвижности  $l^{-1} \sim p_F$ , так что оба выбора в этой области фактически эквивалентны. Нетрудно понять, что оценка (5.44) справедлива при выполнении условия:

$$|E - E_F|; \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} \ll \tilde{E} \quad (5.46)$$

Для специального случая  $d=2$  вместо (5.44) получаем:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F)} = \frac{v_0}{4\pi^2 \mathcal{D}_{E_F}} \begin{cases} \ln \frac{|E - E_F|}{\tilde{E}} ; & |E - E_F| \gg \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} \\ \ln \frac{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}}{\tilde{E}} ; & |E - E_F| \ll \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} \end{cases} \quad (5.47)$$

При  $\omega_0^2(E_F) = 0$ , т.е. в металлической области ( $E_F > E_C$ ), (5.44), (5.47) сводятся к известным результатам Аронова и Альтшулера /14, 147, 184, 185/, с учетом замены классического коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_0^{E_F}$  на перенормированный  $\mathcal{D}_{E_F}$  из (3.77). При  $|E - E_F| \gg \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$  такое же поведение сохраняется и в диэлектрической области, однако при  $|E - E_F| \ll \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$  излом в плотности состояний на уровне Ферми, имеющийся в металле, сглаживается, сменяясь плавным минимумом.

В Главе 3 уже отмечалось, что обобщенный коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_{E_F}(\vec{q}, \omega)$  является функцией не только  $\omega$ , но и  $\vec{q}$ . В то же время самосогласованная теория, фактически, использует предел  $\mathcal{D}_{E_F}(\vec{q} \rightarrow 0, \omega)$  в качестве универсальной зависимости. Учет возможной

$\vec{q}$  - зависимости коэффициента диффузии может несколько изменить полученные результаты. В частности, можно воспользоваться скейлинговой аргументацией Ли /147/, согласно которой в металлической области, при  $E_F \gg E_C$ , когда  $\lambda_{loc}(E_F) \gg \ell$ ;  $p_F^{-1}$ , имеем:

$$D_{E_F}(\vec{q}, \omega \rightarrow 0) q^2 \approx \begin{cases} D_{E_F} q^2; & q \lambda_{loc}(E_F) \ll 1 \\ \alpha q^d; & q \lambda_{loc}(E_F) \gg 1 \end{cases} \quad (5.48)$$

где  $\alpha \sim N_0^{-1}(E_F) \sim D_0^{E_F} \ell$  (при  $E_F \sim E_C$ ,  $\ell^{-1} \sim p_F$ ). Вообще говоря, неясно как обобщить зависимость типа (5.48) для диэлектрической области ( $E_F < E_C$ ). Однако, кажется разумным, сохранив результаты самосогласованной теории для  $q \ll R_{loc}^{-1}(E_F)$ , записать для  $q \gg R_{loc}^{-1}(E_F)$ :

$$D_{E_F}(\vec{q}) q^2 \sim \omega_0^2(\vec{q}) \tau_{E_F}(\vec{q}) \sim \alpha q^d \quad (5.49)$$

т.к. тогда "пропадает" разница между диэлектриком и металлом на малых (по сравнению с  $R_{loc}(E_F)$ ) расстояниях, что кажется естественным в скейлинговой области. Если воспользоваться зависимостями типа (5.48), (5.49) при расчете интеграла по  $q$  в (5.43), то аналогично /147/, нужно отдельно рассмотреть вклад областей малых и больших (по сравнению с  $\lambda_{loc}^{-1}(E_F)$ ) импульсов  $q$ . Тогда, вместо (5.45) возникает характерная энергия  $\tilde{E} \sim D_{E_F} \lambda_{loc}^{-2}(E_F) \sim D_{E_F} R_{loc}^{-2}(E_F) \sim \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$  (последнее справедливо в диэлектрической области). Соответственно, при  $|E - E_F| \ll \tilde{E} \sim D_{E_F} \lambda_{loc}^{-2}(E_F)$  в металлической области сохраняется обычный результат Аронова и Альтшулера /147/, а в диэлектрической области при  $|E - E_F| \ll \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$  для поправки к плотности состояний от области малых импульсов ( $q \ll R_{loc}^{-1}(E_F)$ ) в (5.43) получим:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F)} \sim \text{Const } v_0 \frac{S_d}{d-2} D_{E_F}^{-\frac{d}{2}} \omega_0^{d-2}(E_F) \tau_{E_F}^{\frac{d-2}{2}} \quad (5.50)$$

В тоже время, от области  $R_{loc}^{-1}(E_F) < q < p_F$ ;  $\ell^{-1}$  возникает логарифмический вклад:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F)} \approx \frac{v_0}{\alpha} \frac{S_d}{2d} \ln \left\{ \left( \frac{E-E_F}{\alpha p_F^d} \right)^2 + (p_F R_{loc}(E_F))^{-2d} \right\} \approx \quad (5.51)$$

$$\approx \frac{v_0}{\alpha} \frac{S_d}{d} \ln \left| \frac{E-E_F}{\alpha p_F^d} \right| ; |E-E_F| \gg \tilde{E} \sim \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$$

того же вида, что и найденный в /147/ для металлической области. Такое поведение представляется маловероятным, поскольку зависимости типа (5.48), (5.49) противоречат основным уравнениям самосогласованной теории (3.79), (3.80). В тоже время видно, что основной вывод о сглаживании излома в плотности состояний на уровне Ферми в диэлектрической области сохраняется (см. (5.50)) независимо от принимаемой схемы обрезания в (5.43).

Приведем теперь конкретные зависимости, возникающие в рамках самосогласованной теории локализации. Опуская несущественные константы, из (3.100), (3.102) и (3.103), для  $2 < d < 4$  получаем:

$$\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} \sim \frac{\lambda}{4-d} \frac{E_F}{[p_F R_{loc}(E_F)]^d} \underset{E_F \leq E_c}{\sim} \frac{\lambda E_F}{4-d} \left| \frac{E_F - E_c}{E_c} \right|^{d\nu} \quad (5.52)$$

$$\mathcal{D}_{E_F} \sim \frac{1}{4-d} \frac{1}{m} [p_F R_{loc}(E_F)]^{2-d} \underset{E_F \leq E_c}{\sim} \frac{1}{m} \left| \frac{E_F - E_c}{E_c} \right|^{(d-2)\nu} \quad (5.53)$$

$$\tilde{E} \sim \frac{d E_F}{4-d} \left( \frac{d \omega_0^2(E_F)}{4 E_F^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \underset{E_F \leq E_c}{\sim} E_F [p_F R_{loc}(E_F)]^{2-d} E_F \left| \frac{E_F - E_c}{E_c} \right|^{(d-2)\nu} \quad (5.54)$$

где  $\nu$  - критический индекс радиуса локализации (3.104),  $\lambda = \frac{\gamma(E_F)}{\pi E_F}$  - безразмерная "константа связи" (3.84). Отсюда видно, что удовлетворить условию (5.46) не составляет труда. Для поправки к плотности состояний на уровне Ферми, точнее при  $|E-E_F| \ll \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$ , из (5.44) и (5.52)-(5.54) находим:

$$\frac{\delta N(E_F)}{N_0(E_F)} \sim v_0 \frac{4-d}{d-2} m^{\frac{d}{2}} E_F^{\frac{d}{2}-1} \left\{ 1 - [p_F R_{loc}(E_F)]^{d-2} \right\} \sim \quad (5.55)$$

$$\underset{E_F \rightarrow E_c}{\sim} -v_0 N_0(E_F) \left| \frac{E_F - E_c}{E_c} \right|^{-(d-2)\nu}$$

где  $N_0(E_F)$  в последнем равенстве обозначает плотность состояний свободных электронов на уровне Ферми. Расходимость поправки к



плотности состояний при  $E_F \rightarrow E_C$  (аналогичная расходимость имеется и в металлической области) указывает на неприменимость нашего рассмотрения в непосредственной окрестности порога подвижности. Проведенные оценки справедливы пока  $\delta N(E) \ll N_0(E)$ .

На самом пороге подвижности ( $E = E_C$ ) выражение (3.75) для спектральной плотности Березинского-Горькова несправедливо и нужно учесть частотную зависимость обобщенного коэффициента диффузии (см. (3.117)). Для  $d=3$  в этом случае следует воспользоваться результатом (3.120). Аналогично (5.42) и (5.43), получаем:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F=E_C)} = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} v_0 \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\alpha^{2/3} E^{1/3} q^2}{E^2 + \alpha^{2/3} E^{4/3} q^2 + \alpha^{4/3} E^{2/3} q^4} \quad (5.56)$$

где  $\alpha = \mathcal{D}_0^{E_F} \ell$ . Отсюда, вместо (5.44), находим:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F=E_C)} \simeq -\frac{\sqrt{3}}{4\pi^3} v_0 \left\{ \frac{\rho_F}{\alpha^{2/3} |E - E_F|^{1/3}} - \frac{\pi}{2\alpha} \right\} \quad (5.57)$$

где учтено, что  $E$  в (5.56) обозначает энергию, отсчитанную от уровня Ферми. При  $|E - E_F| \rightarrow 0$ , учитывая  $\ell^{-1} \simeq \rho_F$ , из (5.57) получаем:

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E_F=E_C)} \simeq -0.45 N_0(E_F=E_C) v_0 \left( \frac{E_F}{|E - E_F|} \right)^{1/3} \quad (5.58)$$

что описывает характер расходимости поправки к плотности состояний при подходе к уровню Ферми, совпадающему с порогом подвижности. Учитывая, что область применимости (3.75) ограничена частотами  $\omega \ll \omega_c \sim N_0^{-1}(E_F) \tau_{loc}^{-3}(E_F)$ , видим, что (5.57) "работает" и для  $E_F \neq E_C$ , но при  $|E - E_F| \geq \omega_c$ . В диэлектрической области имеем  $\omega_c \sim \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} \sim N_0^{-1}(E_F) R_{loc}^{-3}(E_F)$ . Рассмотренный выше результат (5.44) справедлив лишь при  $|E_F - E_C| \ll \omega_c$ . Поэтому, первое выражение в (5.44) фактически не имеет области применимости в диэлектрической области, где при  $|E - E_F| \sim \omega_c \sim \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}$  сразу происходит переход от второго выражения в (5.44) к зависимости типа (5.57).

В металле, где  $\omega_0^2(E_F) = 0$ , первое выражение в (5.44) "работает" до  $|E - E_F| \sim \omega_c$ , после чего также происходит переход к зависимости типа (5.57). Заметим, однако, что уточнения, связанные с учетом частотной зависимости обобщенного коэффициента диффузии носят, в основном, количественный характер. Качественные выводы, основанные на простейшем приближении (5.44) остаются верными.

Найденные выше поправки к плотности состояний можно получить из следующих эвристических соображений /201/. Рассмотрим взаимодействие электрона, находящегося в состоянии  $\nu$  с энергией  $E$  с электронами в состояниях с энергией Ферми  $E_F$ . Тогда относительная поправка к его волновой функции в первом приближении теории возмущений:

$$\frac{\delta \varphi_\nu}{\varphi_\nu} \sim \int_0^\infty dt H_{int}(t) \quad (5.59)$$

где  $t=0$  - момент включения взаимодействия, а  $H_{int}(t)$  подразумевается взятым в представлении взаимодействия. За время  $t$  электрон "диффундирует" в пределах объема  $(\mathcal{D}_{E_F} t)^{d/2}$ . Тогда величину матричного элемента взаимодействия при короткодействующем отталкивании можно оценить как  $\sim v_0 (\mathcal{D}_{E_F} t)^{-d/2}$ . Соответственно:

$$\frac{\delta \varphi_\nu}{\varphi_\nu} \sim v_0 \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt (\mathcal{D}_{E_F} t)^{-\frac{d}{2}} \sim \frac{v_0}{\mathcal{D}_{E_F}^{d/2}} \left\{ t_{min}^{1-\frac{d}{2}} - t_{max}^{1-\frac{d}{2}} \right\} \quad (5.60)$$

Здесь  $t_{min}$  естественно определить из условия применимости "диффузионного" приближения  $(\mathcal{D}_{E_F} t_{min})^{d/2} \sim \rho_F^{-1}; \ell$ , т.е.  $t_{min} \sim (\mathcal{D}_{E_F} \rho_F^2)^{-1} \tilde{\tau}^{-1}$ .

Время  $t_{max}$  определяется двумя факторами. Во-первых, матричный элемент взаимодействия обращается в нуль на временах  $t > |E - E_F|^{-1}$  из-за временных осцилляций волновых функций. Во-вторых, в области локализованных состояний взаимодействующие электроны не могут

"разойтись" на расстояние, превышающее  $R_{loc}(E_F)$  и "диффузионное" приближение справедливо до тех пор, пока  $t \lesssim \frac{R_{loc}^2(E_F)}{\mathcal{D}_{E_F}} \sim [\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}]^{-1}$ .

Поэтому  $t_{max} \sim \text{Min} \{ |E - E_F|^{-1}; [\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}]^{-1} \}$ . Тогда, полагая

$$\frac{\delta N(E)}{N_0(E)} \sim \frac{\delta \varphi_\nu}{\varphi_\nu} \quad \text{немедленно получаем (5.44).}$$

## 5.2. Межелектронное взаимодействие в самосогласованной теории локализации.

В этом разделе, следуя работе /202/, мы рассмотрим роль первых поправок теории возмущений по взаимодействию в рамках стандартного диаграммного формализма самосогласованной теории локализации. Ясно, что применимость диаграммного подхода не ограничена, в отличие от анализа предыдущего раздела, первым порядком теории возмущений по взаимодействию.

Аналогично работе /184/, рассмотрим простейшую поправку к одноэлектронной функции Грина, изображаемую графиком на Рис.5.3(а), где "треугольная" скалярная вершина определяется уравнением, показанным графически на Рис. 5.3 (б):

$$\gamma(\vec{q}\omega) = 1 + \int \frac{d^d \vec{p}'}{(2\pi)^d} \Gamma_{\vec{p}\vec{p}'}(\vec{q}\omega) G(\epsilon + \omega \vec{p}_+) G(\epsilon \vec{p}_-) \quad (5.61)$$

Во избежание путаницы отметим, что здесь и ниже  $\epsilon = E - E_F$  - энергия, отсчитанная от уровня Ферми. Тогда для поправки к одноэлектронной плотности состояний имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta N(\epsilon)}{N_0(E_F)} &= - \frac{1}{\pi N_0(E_F)} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \text{Im} \delta G^R(\epsilon \vec{p}) = \\ &= - \frac{1}{\pi N_0(E_F)} \text{Im} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} i [G^R(\epsilon \vec{p})]^2 \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \gamma_{RA}^2(\vec{q}\omega) G^A(\epsilon + \omega \vec{p} + \vec{q}) = \\ &= - \frac{1}{2\gamma^2(E_F)} \text{Im} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \gamma_{RA}^2(\vec{q}\omega) \nu(\vec{q}) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Одноэлектронные функции Грина в (5.62) подразумевались взятыми в простейшем приближении (3.34). Нетрудно видеть, что для "треугольной" вершины с внешними концами мы имеем (Ср. Рис. 3.1):

$$\mathcal{T}_{\vec{p}}^{RA}(\vec{q}\omega) \equiv G^R(\epsilon + \omega \vec{p}_+) G^A(\epsilon \vec{p}_-) \gamma^{RA}(\vec{q}\omega) = -2\pi i \int \frac{d^d \vec{p}'}{(2\pi)^d} \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega) \quad (5.63)$$

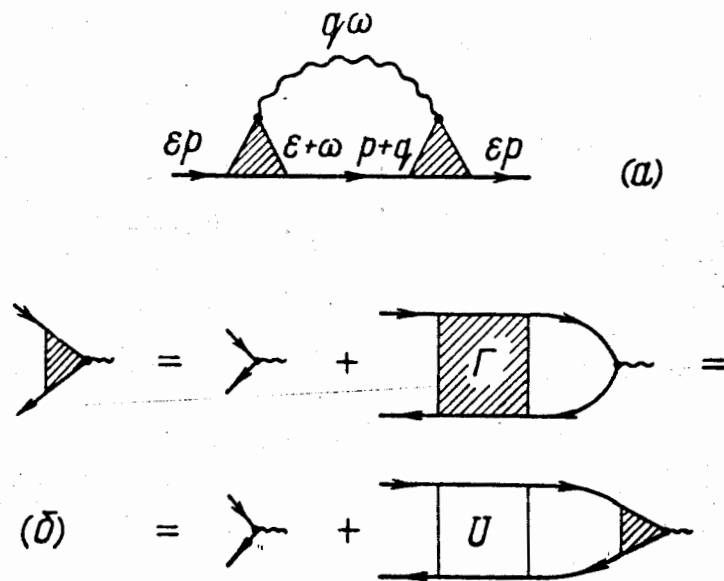


Рис. 5.3. (а) - Простейшая поправка к одноэлектронной функции Грина.

(б) - Уравнение для "треугольной" (скалярной) вершины.

Тогда, используя (3.50), (3.55)-(3.58) получаем выражение для интересующей нас вершины через релаксационное ядро  $M_{E_F}(\vec{q}\omega)$  (3.59) самосогласованной теории локализации (см. также Приложение I):

$$\gamma^{RA}(\vec{q}\omega) = \left\{ \omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\gamma(E_F) \right\} \frac{\omega + M_{E_F}(\vec{q}\omega) + \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q}}{\omega^2 + \omega M_{E_F}(\vec{q}\omega) - \frac{2E_F}{dm} q^2} \approx$$

$$\approx \frac{2\gamma(E_F)}{-i\omega + D_{E_F}(\vec{q}\omega) q^2} \quad (5.64)$$

где последнее выражение справедливо при малых  $\omega \ll \gamma(E_F)$ ,  $q \ll \ell^{-1}$ . Таким образом вершина  $\gamma^{RA}(\vec{q}\omega)$  в самосогласованной теории фактически имеет тот же вид, что и в "грязном" металле [14, 184], но с заменой классического коэффициента диффузии на обобщенный, который был определен в (3.72). Отсюда видно, что в области локализации ( $E_F < E_C$ ) из (3.74)-(3.76) следует, что при  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\gamma^{RA}(\vec{q}\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\approx} \frac{2i\gamma(E_F)}{\omega + i\delta} A_{E_F}(\vec{q}) \quad (5.65)$$

Этот результат может быть непосредственно связан с критерием локализации, рассмотренным в разделе 3.1. В самом деле, использование общего представления (3.26) в (3.57) показывает, что в самосогласованной теории:

$$\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E_F) \approx \frac{\text{Im} G^R(E_F \vec{p})}{\pi N_0(E_F)} \chi_{\vec{q}}(E_F) \quad (5.66)$$

где  $\chi_{\vec{q}}(E_F)$  определяется (3.63). Тогда из (3.26) и (5.63) получаем:

$$J_{\vec{p}}^{RA}(\vec{q}\omega) = 2\pi i \frac{\Psi_{\vec{p}}^{\vec{q}}(E_F) \chi_{-\vec{q}}(E_F)}{\omega + i\delta} + \dots \quad (5.67)$$

что с использованием (5.66) и (3.50) дает при  $\omega \rightarrow 0$  (5.65) с учетом общего соотношения (3.29).

Использование (5.64) в (5.62) дает:

$$\frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \int_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \frac{1}{[-i\omega + \mathcal{D}_{E_F}(\vec{q}, \omega) q^2]^2} \quad (5.68)$$

Тогда, с помощью (3.72), (3.74) ( $q \rightarrow 0$ ), представим (5.68) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} = & -\frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} d\omega \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) \mathcal{D}_{E_F} q^2 \left\{ \frac{\omega}{[\omega^2 + (\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2)]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}}{\omega} \frac{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2}{[\omega^2 + (\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2)]^2} \right\} \quad (5.69) \end{aligned}$$

Очевидно, что при этом мы сразу пренебрегаем поправками, связанными с частотной зависимостью обобщенного коэффициента диффузии, обсуждавшимися в конце раздела 5.1. Вычисляя в (5.69) интеграл по  $\omega$ , получаем

$$\frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} = \left( \frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} \right)_{\text{I}} + \left( \frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} \right)_{\text{II}}$$

где

$$\left( \frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} \right)_{\text{I}} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) \frac{\mathcal{D}_{E_F} q^2}{\varepsilon^2 + [\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2]^2} \quad (5.70)$$

совпадает с полученным выше выражением (5.43), а

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta N(\varepsilon)}{N_0(E_F)} \right)_{\text{II}} = & \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) \mathcal{D}_{E_F} q^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 + [\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2]^2} \frac{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}}{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}}{[\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2]^3} \ln \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + [\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2]^2} \right\} \approx \\ \approx & -\frac{2}{\pi} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) \frac{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}}{[\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2]^3} \mathcal{D}_{E_F} q^2 \ln \frac{|\varepsilon|}{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} + \mathcal{D}_{E_F} q^2} \quad (5.71) \end{aligned}$$

При  $\omega_0^2(E_F) = 0$  т.е. в металлической области вклад (5.71) равен нулю. Его появление указывает, вообще говоря, на не вполне

однозначное соответствие использовавшегося здесь диаграммного формализма и формализма точных собственных функций, в котором были получены результаты предыдущего раздела. В принципе, появление такого вклада можно связать с вторым слагаемым в (3.18), которым пренебрегалось при получении (3.74).

Оценка интеграла в (5.71) в модели точечного взаимодействия дает:

$$\left( \frac{\delta N(\epsilon)}{N_0(E_F)} \right)_{\text{II}} \approx -\frac{v_0}{\pi} \frac{S_d}{4-d} \Phi_{E_F}^{-\frac{d}{2}} [\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}]^{\frac{d-2}{2}} \ln \frac{|\epsilon|}{\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F}} \quad (5.72)$$

Отсюда видно, что (5.72) доминирует лишь в экспоненциально малой окрестности уровня Ферми (или порога подвижности), тогда как вклад (5.43), (5.44) дает основную поправку в более широкой области энергий и, в этом смысле, является главным. Тем не менее, существование логарифмической сингулярности (5.72) определенно указывает на необходимость учета высших поправок по взаимодействию, если мы хотим получить корректное описание непосредственной окрестности уровня Ферми (порога подвижности) в области локализации. Использование (5.52), (5.53) дает ( $2 < d < 4$ ):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta N(\epsilon)}{N_0(E_F)} \right)_{\text{II}} &\sim v_0 m^{\frac{d}{2}} E_F^{\frac{d}{2}-1} \ln \left\{ \frac{|\epsilon|}{\lambda E_F} [P_F R_{\text{loc}}(E_F)]^d \right\} \sim \\ &\sim v_0 N_0(E_F) \ln \left\{ \frac{|\epsilon|}{\lambda E_F} \left| \frac{E_F - E_c}{E_c} \right|^{-dv} \right\} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Таким образом, использование диаграммного формализма приводит к довольно существенным уточнениям результатов, полученных в формализме точных собственных функций. В рамках этого подхода можно рассмотреть также и роль других диаграмм. Действительно, в первом порядке теории возмущений по взаимодействию имеется еще целый ряд диаграмм, кроме показанной на Рис.5.3(а). Примеры таких диаграмм приведены на Рис.5.4. Рассмотрим прежде всего "хартриевский" график Рис.5.4(а). В рамках самосогласованной теории локализации

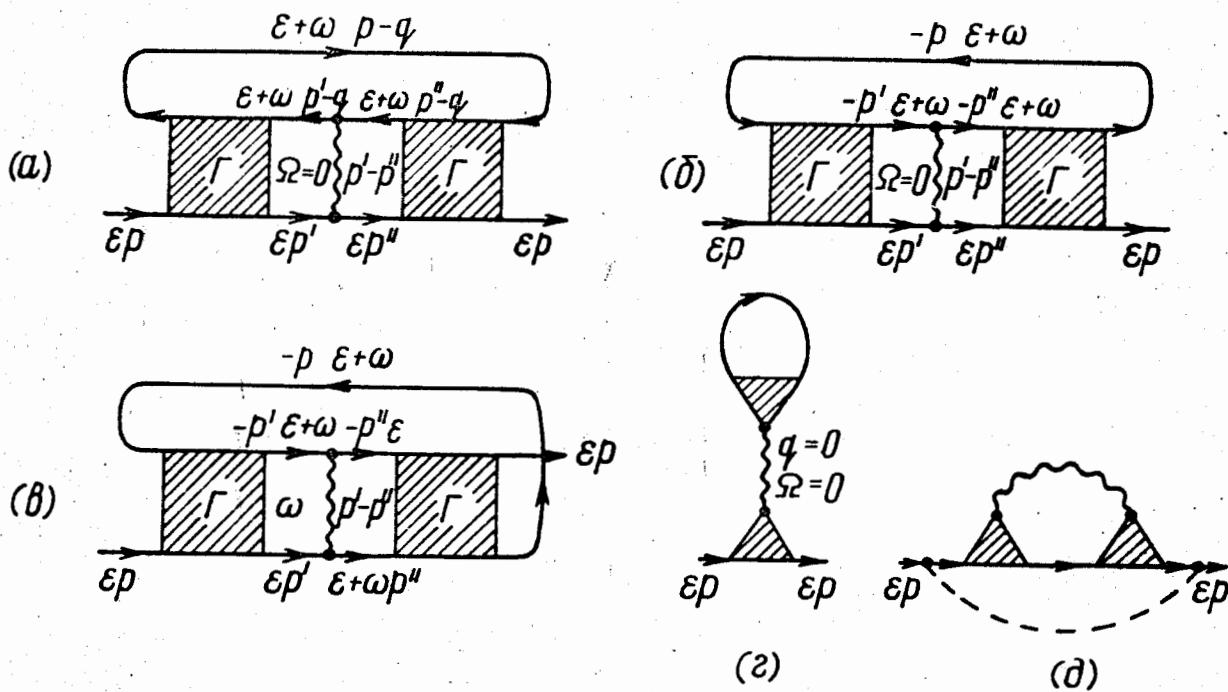


Рис.5.4. Примеры различных диаграмм первого порядка по взаимодействию, вклад которых следует сравнить с вкладом диаграммы Рис.3.3(а).

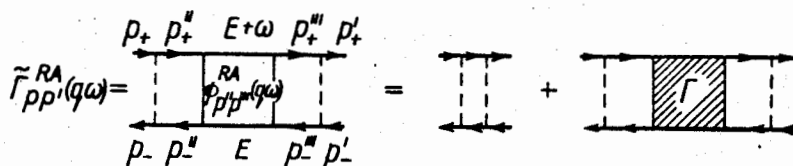


Рис.5.5. Графическое определение вспомогательного блока  $\tilde{\Gamma}_{pp'}^{RA}(q\omega)$ .



мы можем оценить его вклад совершенно аналогично тому, как это было сделано в работах /I4, I33, I85/. Дело в том, что полная вершинная часть  $\Gamma_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega)$  (см. Рис. 3.1) в самосогласованной теории, при малых  $\vec{q}$  и  $\omega$ , представляется в следующем простом виде:

$$\Gamma_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega) \approx \frac{2\gamma(E_F)\rho V^2}{-i\omega + \mathcal{D}_{E_F}(\vec{q}\omega)q^2} \quad (5.74)$$

обобщающем "диффузионное" выражение (3.93), получающееся суммированием "лестничных" диаграмм Рис. 3.3(б). Результат (5.74) почти очевиден, в частности легко убедиться, что его использование в уравнении (5.61) дает (5.64). Можно дать и формальный вывод (5.74). Для этого рассмотрим вспомогательный блок  $\tilde{\Gamma}_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega)$ , определенный графически на Рис. 5.5 (ср. Рис. 3.1(а))/I39/. Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega) &= (\rho V^2)^2 (-2\pi i) \int \frac{d^d \vec{p}''}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d \vec{p}'''}{(2\pi)^d} \Phi_{\vec{p}''\vec{p}'''}^{RA}(\vec{q}\omega) = \\ &= -2\pi i (\rho V^2)^2 \Phi^{RA}(\vec{q}\omega) \approx \frac{2\gamma(E_F)\rho V^2}{-i\omega + \mathcal{D}_{E_F}(\vec{q}\omega)q^2} \end{aligned} \quad (5.75)$$

где в последнем равенстве воспользовались (3.70). Предположим, что при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\vec{q} \rightarrow 0$   $\Gamma_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega) \approx \tilde{\Gamma}_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(\vec{q}\omega)$ . Тогда использование (5.74) во втором графике в правой части Рис. 5.5 воспроизводит (5.75), тогда как первый график несингулярен при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\vec{q} \rightarrow 0$ , что и доказывает самосогласованность нашего предположения. Теперь можно непосредственно сравнить вклады в электронную собственно-энергетическую часть от графиков Рис. 5.4(а) и Рис. 5.3(а):

$$\begin{aligned} \sum_H^R(\epsilon \vec{p}) &= \int \frac{d^d \vec{p}'}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d \vec{p}''}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} v(\vec{p}' - \vec{p}'') \frac{4(\rho V^2)^2 \gamma^2(E_F)}{[-i\omega + \mathcal{D}_{E_F}(\omega)q^2]^2} \times \\ &\times G^R(\epsilon \vec{p}') G^R(\epsilon \vec{p}'') G^A(\vec{p}'' - \vec{q}'' \epsilon + \omega) G^A(\vec{p}' - \vec{q} \epsilon + \omega) G^A(\vec{p} - \vec{q} \epsilon + \omega) \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\sum_F^R(\epsilon\vec{p}) = \int \frac{d^d\vec{q}}{(2\pi)^d} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} v(\vec{q}) \frac{4(\rho V^2)^2 \gamma^2(E_F)}{[-i\omega + \mathcal{D}_{E_F}(\omega)q^2]^2} G^A(\epsilon + \omega, \vec{p} - \vec{q}) \quad (5.77)$$

Важно заметить, что в "хартриевском" графике, в отличие от "фоковского", не мал импульс, передаваемый по линии взаимодействия, а передаваемая частота при этом равна нулю. Тогда несложно оценить отношение:

$$F = \frac{\sum_H^R(\epsilon\vec{p})}{\sum_F^R(\epsilon\vec{p})} \approx \left\{ \int \frac{d^d\vec{q}}{(2\pi)^d} v(0) \right\}^{-1} \int \frac{d^d\vec{q}}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d\vec{p}'}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d\vec{p}''}{(2\pi)^d} (\rho V^2)^2 \times G^R(\epsilon\vec{p}') G^A(\epsilon\vec{p}') v(\vec{p}' - \vec{p}'') G^R(\epsilon\vec{p}'') G^A(\epsilon\vec{p}'') \approx \quad (5.78)$$

$$\approx \left\{ \int d\Omega v(0) \right\}^{-1} \int d\Omega \frac{1}{N_0^2(E_F)} \int \frac{d^d\vec{p}'}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d\vec{p}''}{(2\pi)^d} \delta(E_F - \frac{\vec{p}'^2}{2m}) v(\vec{p}' - \vec{p}'') \delta(E_F - \frac{\vec{p}''^2}{2m})$$

что дает окончательно тот же результат, что и в металле /I4, I33, I85/:

$$F = \frac{\int d\Omega v(2\rho_F \sin \frac{\theta}{2})}{\int d\Omega v(0)} \quad (5.79)$$

где интегрирование ведется по телесному углу ( $\theta$  - угол между двумя импульсами на сфере Ферми). Нетрудно видеть, что  $F < 1$ , если потенциал взаимодействия спадает на длине, превышающей обратный импульс Ферми. Например, если взять модельный потенциал в виде экранированного кулоновского взаимодействия<sup>I</sup>, для  $d=3$  получим /I4/:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{1 + \frac{4\rho_F^2}{\kappa_D^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\kappa_D^2}{4\rho_F^2} \ln \left\{ 1 + \frac{4\rho_F^2}{\kappa_D^2} \right\} \quad (5.80)$$

где  $\kappa_D^2 = 4\pi e^2 N_0(E_F)$  - обратный квадрат длины экранирования.

<sup>I</sup>Ниже мы увидим, что статическое (нулевая передаваемая частота) взаимодействие в кулоновском "ферми-стекле" имеет такой вид.

Отсюда видно, что  $F \ll 1$  при  $x_D^2 \ll \rho_F^2$ , но  $F \rightarrow 1$  при  $\rho_F^2 \ll x_D^2$ . Учитывая, что  $\gamma(E_F) \sim \rho V^2 N_0(E_F)$ , легко получить оценку  $F \sim \frac{x_D^2}{\rho_F^2} \sim \frac{e^2}{\pi \rho V^2} \frac{\gamma(E_F)}{E_F} \sim \frac{e^2}{\pi \rho V^2} \lambda$ . Соответственно, вблизи порога подвижности ( $E_F \sim E_C$ ,  $\lambda \sim 1$ ) имеем  $F \sim e^2 / \pi \rho V^2$ . Для точечного взаимодействия  $F = 1$  и, с учетом спина, хартриевский вклад Рис.5.4(а) в два раза больше фоковского. В этом случае, как отмечалось выше, все рассмотренные нами поправки к плотности состояний меняют знак.

Вклад графика Рис.5.4(б), содержащего взаимодействие в "куперовском" канале, в отсутствие взаимодействий, нарушающих инвариантность относительно обращения времени (магнитное поле, магнитные примеси и т.п.) равен вкладу графика Рис.5.4(а) /133/ и, таким образом, тоже имеет малость порядка  $F$ . Аналогичная малость имеется и в фоковском графике Рис.5.4(в) с взаимодействием в "куперовском" канале. Отличие его от графика Рис.5.3(а) опять связано с немалостью импульса, передаваемого по линии взаимодействия. График Рис.5.4(г) компенсируется ввиду полной электронной нейтральности системы, а для вклада графика Рис.5.4(д) легко получить:

$$\text{Im} \sum^R(\epsilon \vec{p}) = -\pi \rho V^2 \delta N(\epsilon) = -\delta \gamma(\epsilon) \quad (5.81)$$

где  $\delta N(\epsilon)$  - поправка к плотности состояний за счет графика Рис.5.3(а), так что здесь возникает дополнительная малость по  $\rho V^2$ . Существенно, впрочем, что (5.81), приводя к перенормировке частоты рассеяния  $\gamma(\epsilon)$ , не может изменить плотность состояний в окрестности уровня Ферми.

Вопрос о роли высших поправок по взаимодействию остается, по существу открытым. При попытках его решения следует, помимо большого числа новых диаграмм, учесть также и роль взаимодействия в определении релаксационного ядра самосогласованной теории  $M_{E_F}(\vec{q}, \omega)$ . Ясно, что такими эффектами можно было пренебречь лишь в первом порядке по взаимодействию.

### 5.3. Поляризационный оператор, экранирование и кулоновское взаимодействие.

Рассмотрим с общих позиций, а также в рамках самосогласованной теории локализации, вопрос о том, каким образом локализация сказывается на поведении поляризационного оператора, т.е. фактически, вопрос о характере экранирования электрического поля в "ферми-стекле"/II9,201,202/.

Пользуясь вновь представлением точных собственных функций одноэлектронной задачи, для фурье-образа поляризационного оператора невзаимодействующих электронов имеем:

$$\Pi(\vec{q}\omega) = \left\langle \sum_{\substack{\mu, \nu \\ \vec{p}, \vec{p}'}} \frac{f_{\mu} - f_{\nu}}{\epsilon_{\nu} - \epsilon_{\mu} + \omega + i\delta \text{Sign}\omega} \varphi_{\nu}(\vec{p}_{+}) \varphi_{\nu}^{*}(\vec{p}'_{+}) \varphi_{\mu}(\vec{p}_{-}) \varphi_{\mu}^{*}(\vec{p}_{-}) \right\rangle = \quad (5.82)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{f(E) - f(E+\Omega)}{\Omega + \omega + i\delta \text{Sign}\omega} N_0(E) \langle \rho_E \rho_{E+\Omega} \rangle_{\vec{q}}^F$$

в формализме нулевой температуры, и

$$\Pi(\vec{q}\omega_m) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{f(E) - f(E+\Omega)}{\Omega + i\omega_m} N_0(E) \langle \rho_E \rho_{E+\Omega} \rangle_{\vec{q}}^F \quad (5.83)$$

в мацубаровской технике ( $\omega_m = 2\pi mT$ ). Подставляя сюда сингулярную часть (5.15), получаем, что при  $T = 0$ :

$$\Pi_{loc}(\vec{q}\omega) = 0 \quad (5.84)$$

и ненулевой вклад возникает только от регулярной части (5.15):

$$\Pi(\vec{q}\omega) = \Pi_{reg}(\vec{q}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{f(E) - f(E+\Omega)}{\Omega + \omega + i\delta \text{Sign}\omega} N_0(E) \rho_E^F(\vec{q}\Omega) \quad (5.85)$$

Иная ситуация возникает в мацубаровской технике ( $T \neq 0$ ):

$$\Pi_{loc}(\vec{q}\omega_m \neq 0) = 0$$

(5.86)

$$\Pi_{loc}(\vec{q}\omega_m = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( -\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) N_0(E) A_E(\vec{q}) = N_0(E_F) A_{E_F}(\vec{q})$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{q}\omega_m) &= \frac{1}{T} \delta_{\omega_m 0} \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) [1 - f(E)] N_0(E) A_E(\vec{q}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{f(E) - f(E+\Omega)}{\Omega + i\omega_m} N_0(E) \rho_E^F(\vec{q}\Omega) \end{aligned} \quad (5.87)$$

Учитывая явный вид "регулярной" части спектральной плотности Березинского-Горькова, возникающий в самосогласованной теории локализации (см. (3.75)), прямыми вычислениями из (5.85) получаем:

$$\Pi(\vec{q}\omega) = \Pi_{reg}(\vec{q}\omega) = N_0(E_F) \frac{\mathcal{D}_{E_F} q^2}{\mathcal{D}_{E_F} q^2 + \omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} - i(\omega + i\delta \text{Sign}\omega)} \quad (5.88)$$

В металлической области  $\omega_0^2(E_F) = 0$  и (5.88) сводится к известному выражению для поляризационного оператора "грязного" металла /И4, 184, 209/. В области локализации, с учетом  $\omega_0^2(E_F) \tau_{E_F} = \mathcal{D}_{E_F} R_{loc}^{-2}(E_F)$  имеем:

$$\Pi_{reg}(\vec{q}0) = N_0(E_F) \frac{q^2}{q^2 + R_{loc}^{-2}(E_F)} \quad (5.89)$$

Для мацубаровского поляризационного оператора аналогичные вычисления дают:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{q}\omega_m) &= N_0(E_F) \left\{ A_{E_F}(\vec{q}) \delta_{\omega_m 0} + \frac{\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m) q^2}{\omega_m + \mathcal{D}_{E_F}(\omega_m) q^2} \theta(\omega_m) + \right. \\ &+ \left. \frac{\mathcal{D}_{E_F}(-\omega_m) q^2}{-\omega_m + \mathcal{D}_{E_F}(-\omega_m) q^2} \theta(-\omega_m) \right\}; \quad \theta(\omega_m) = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases} \quad (5.90) \end{aligned}$$

где  $A_{E_F}(\vec{q})$  определяется выражением (3.76), а обобщенный коэффициент диффузии в мацубаровской технике имеет вид:

$$D_{E_F}(\omega_m) = \frac{2E_F}{dm} \frac{i}{M_{E_F}(\omega_m)}; M_{E_F}(\omega_m) = \frac{i}{\tau_{E_F}} - \frac{\omega_0^2(E_F)}{i\omega_m} \quad (5.91)$$

Результат (5.90) получается также и непосредственными вычислениями из графика, показанного на Рис.5.6(а), если учесть, что "треугольная" вершина самосогласованной теории в мацубаровской технике определяется выражением:

$$\gamma(\vec{q}\omega_m\varepsilon_n) = \theta(\varepsilon_n)\theta(\varepsilon_n+\omega_m) + \theta(-\varepsilon_n)\theta(-\varepsilon_n-\omega_m) + \quad (5.92)$$

$$+ 2\gamma(E_F) \left\{ \frac{\theta(\varepsilon_n)\theta(-\varepsilon_n-\omega_m)}{-\omega_m + D_{E_F}(-\omega_m)q^2} + \frac{\theta(-\varepsilon_n)\theta(\varepsilon_n+\omega_m)}{\omega_m + D_{E_F}(\omega_m)q^2} \right\}; \varepsilon_n = (2n+1)\pi T$$

что представляет собой известный результат теории "грязных" металлов /184/ с заменой классического коэффициента диффузии на обобщенный (5.91).

Видим, что в поляризационном операторе (5.87), (5.90) возникает "локализационный" вклад:

$$\begin{aligned} \Pi_{loc}(\vec{q}\omega_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( -\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right) N_0(E) A_E(\vec{q}) \delta_{\omega_m 0} = \\ &= \frac{1}{T} \delta_{\omega_m 0} \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) [1-f(E)] N_0(E) A_E(\vec{q}) \underset{T \rightarrow 0}{\approx} N_0(E_F) A_{E_F}(\vec{q}) \delta_{\omega_m 0} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Рассмотрим простейший ("фоковский") вклад в термодинамический потенциал, показанный графиком Рис.5.6(б). Тогда "локализационно-му" вкладу (5.93) соответствует:

$$\begin{aligned} \langle \delta\Omega_F \rangle_{loc} &= \frac{1}{2} T \sum_m \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) \Pi_{loc}(\vec{q}\omega_m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) [1 - \\ &- f(E)] N_0(E) \int \frac{d^d \vec{q}}{(2\pi)^d} v(\vec{q}) A_E(\vec{q}) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dE [1-f(E)] N_0(E) \sum_{E_{loc}} \tilde{\Sigma}_E^F \quad (5.94) \end{aligned}$$

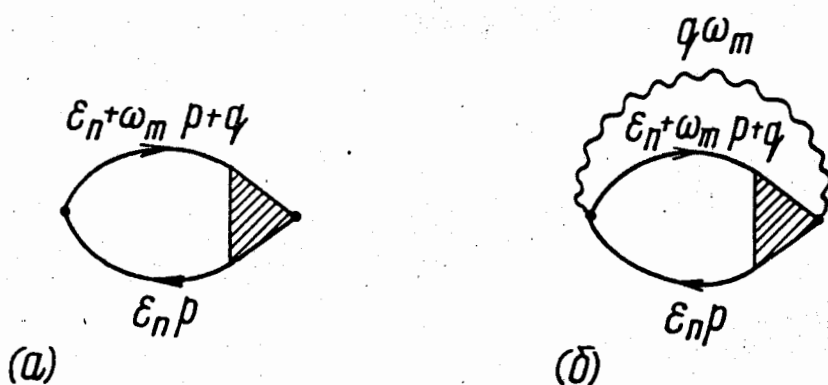


Рис.5.6. (а) График для поляризационного оператора невзаимодействующих электронов.

(б) "Фоковский" вклад в термодинамический потенциал.

где в последнем равенстве воспользовались (5.18). Получили точный аналог локализационного вклада в (5.30). Слагаемое с единицей, как отмечалось в связи с (5.31), "уходит" в перенормировку химпотенциала (с учетом "регулярного" вклада), а множитель  $\frac{1}{2}$  компенсируется суммированием по спине. Тогда (5.94) сводится к "локализационной" части (5.32). Таким образом, мы получаем диаграммный "рецепт" вычисления локализационного вклада в "собственно-энергетическую часть"  $\sum_E$ , которая, как ясно из ее определения (5.6) не имеет строгого диаграммного смысла.

Полученное отличие в поведении поляризационного оператора при  $T = 0$  и в мацубаровской технике, проявляющееся только на нулевой частоте (экранирование статического поля), является следствием известного различия статических адиабатического ("кубовского") и изотермического откликов в системах с неэргодическим поведением /I04/, проявлением которого является, как отмечалось выше в разделе 3.1, появление  $\delta(\omega)$  - вклада в спектральной плотности Березинского-Горькова. Как следует из общего рассмотрения, проведенного в работе /I05/, "мацубаровский" отклик чувствителен к проявлению неэргодичности, тогда как отклик, определяемый коммутаторными функциями Грина ("кубовский" отклик), его не чувствует. Соответствующая мацубаровская функция Грина при  $\omega_m = 0$  определяет изотермический отклик, тогда как предел  $\omega \rightarrow 0$  соответствующей коммутаторной функции Грина (получающийся аналитическим продолжением  $i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta$  мацубаровской функции) определяет адиабатический отклик. Физическое отличие обсуждаемых откликов состоит в том, что адиабатический ("кубовский") отклик вводится для системы, которая изолируется от "термостата" после включения внешнего возмущения, тогда как изотермический отклик соответствует системе, находящейся в "термостате" и во время действия этого возмущения (которое учитывается в соответствующем ансамбле Гиббса) /I04, I05/.



Поляризационный оператор, как известно, связан с электронной сжимаемостью и диэлектрической проницаемостью. Для статической изотермической сжимаемости имеем:

$$\chi^T(\vec{q}0) = \Pi(\vec{q}\omega_m=0) \quad (5.95)$$

тогда как адиабатическая сжимаемость определяется с помощью:

$$\chi^A(\vec{q}0) = \Pi_{\text{reg}}(\vec{q}\omega \rightarrow 0) \quad (5.96)$$

Тогда из (5.85), (5.87) получаем:

$$\chi^T(\vec{q}0) - \chi^A(\vec{q}0) = N_0(E_F) A_{E_F}(\vec{q}) = \frac{N_0(E_F)}{1 + R_{\text{loc}}^2(E_F) q^2} \quad (5.97)$$

где последнее равенство верно в рамках самосогласованной теории локализации. То обстоятельство, что величина  $A_{E_F}(\vec{q})$  определяет разность статических изотермической и адиабатической сжимаемостей, впервые было отмечено в работе /II6/.

Из (5.86) и (5.89) для статического изотермического поляризационного оператора имеем:

$$\begin{aligned} \Pi^T(\vec{q}0) &= \Pi(\vec{q}\omega_m=0) = \Pi_{\text{loc}}(\vec{q}0) + \Pi_{\text{reg}}(\vec{q}0) = \\ &= N_0(E_F) \left\{ \frac{1}{1 + R_{\text{loc}}^2(E_F) q^2} + \frac{q^2}{q^2 + R_{\text{loc}}^{-2}(E_F)} \right\} = N_0(E_F) \end{aligned} \quad (5.98)$$

Соответственно, для адиабатической ("кубовской") диэлектрической проницаемости имеем:

$$\varepsilon^A(\vec{q}\omega \rightarrow 0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \Pi_{\text{reg}}(\vec{q}\omega) = \begin{cases} 1 + \frac{\chi_D^2}{q^2}; & q \gg R_{\text{loc}}^{-1}(E_F) \\ 1 + \chi_D^2 R_{\text{loc}}^2(E_F); & q \lesssim R_{\text{loc}}^{-1}(E_F) \end{cases} \quad (5.99)$$

где  $\chi_D^2 = 4\pi e^2 N_0(E_F)$ . Последнее выражение в (5.99) совпадает с (3.109). В тоже время, статическая изотермическая диэлектрическая

проницаемость равна:

$$\varepsilon^T(\vec{q}0) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \Pi^T(\vec{q}0) = 1 + \frac{\kappa_D^2}{q^2} \quad (5.100)$$

что совпадает с обычным результатом Томаса-Ферми для металла. Именно эта проницаемость соответствует реальному эксперименту по экранированию статического внешнего поля. На качественном уровне этот важный факт был впервые отмечен в работах /210, 211/, здесь мы показали формальный механизм такого поведения<sup>I</sup>, связанный с неэргодичностью в андерсоновском диэлектрике. Физический смысл металлического экранирования статического поля в андерсоновском диэлектрике ("ферми-стекле") связан с тем, что при любой сколь угодно малой температуре, за счет прыжковой проводимости по локализованным состояниям, электроны "подстраиваются" так, чтобы обеспечить полное экранирование. Характерные времена такой подстройки определяются /210, 211/ обратной частотой  $\omega^* \sim D_{hop} q^2 \sim \sigma_{hop} q^2 / \kappa_D^2$ , где  $D_{hop}$ ,  $\sigma_{hop}$  - коэффициент диффузии и проводимость за счет прыжкового механизма. Именно в смысле условия  $\omega \ll \omega^*$  и нужно понимать статичность поля (и отклика) в изложенном выше анализе, не учитывающем явно прыжковую проводимость. В реальном эксперименте, при оценке  $\omega^*$  следует считать

$q \sim L^{-1}$ , где  $L$  - характерный размер неоднородностей внешне-го поля (задаваемый размерами образца, расстоянием между обклад-

---

<sup>I</sup>Используя формализм точных собственных функций можно непосредственно продемонстрировать взаимную компенсацию первых поправок к  $\Pi(\vec{q}0)$  за счет процессов, приводящих к особенностям плотности состояний типа (5.44). Такие особенности в  $\Pi(\vec{q}0)$  отсутствуют. Это полностью соответствует отмеченному в /147, 193/ важному обстоятельству: радиус экранирования определяется не плотностью состояний, а величиной  $\frac{dn}{d\mu} = \Pi(\vec{q} \rightarrow 00)$ . В /191/ это не учитывалось. В наших расчетах это проявляется в том, что экранирование определяется  $N_0(E_F)$  - плотностью состояний свободных электронов.

ками конденсатора и т.п.). Расходимость диэлектрической проницаемости, наблюдавшаяся при подходе к переходу диэлектрик-металл в упоминавшихся экспериментах на  $Si$ , легированном  $P$  /49,55/, вероятно связана с расходимостью радиуса локализации  $R_{loc}(E_F \rightarrow E_C) \rightarrow \infty$  в формулах типа (3.109) и (5.99). Эти эксперименты проводились на частотах внешнего поля от сотен Мгц до ИК - области оптического спектра, т.е. в них измерялся отклик типа (5.99). Было бы весьма интересно попытаться провести эксперименты по измерению диэлектрической проницаемости этой системы в статическом поле. Обсуждаемое условие статичности поля не было, по-видимому, выполнено и в недавнем эксперименте /52/, где измерения проводились на частотах  $\omega \gtrsim 10^2$  Гц в области температур  $10 \text{ мК} < T < 100 \text{ мК}$ . Отсюда видно, что наблюдение металлического характера экранирования статического поля в "ферми-стекле" может оказаться трудной задачей.

Теперь мы можем перейти от рассмотрения короткодействующего потенциала отталкивания к случаю кулоновского взаимодействия. Для конкретности, все вычисления проведем, следуя /202/, для трехмерного случая и в температурной технике. Аналогично /184/ рассмотрим вклад только от графика Рис.5.3(а), где волнистой линии сопоставим динамически экранированное кулоновское взаимодействие:

$$V(\vec{q}\omega_m) = \frac{4\pi e^2}{q^2 \epsilon(\vec{q}\omega_m)} \quad (5.101)$$

где диэлектрическая проницаемость:

$$\epsilon(\vec{q}\omega_m) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \Pi(\vec{q}\omega_m) \quad (5.102)$$

причем поляризационный оператор берется в приближении (5.90) (или Рис.5.6(а)). Наличие "локализационного вклада" сейчас несущественно, т.к. его учет при вычислении графика Рис.5.3(а) сводится к

выражению, исчезающему при  $T \rightarrow 0$ . Поэтому в дальнейшем можно ограничиться учетом лишь "регулярного" вклада. Из Рис. 5.3(а) получаем:

$$\delta G(\epsilon_n \bar{p}) = T \sum_m \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{q} \omega_m) \gamma^2(\vec{q} \omega_m \epsilon_n) G^2(\epsilon_n \bar{p}) G(\epsilon_n + \omega_m \bar{p} + \vec{q}) \quad (5.103)$$

где экранированное взаимодействие, при малых  $\vec{q}$  и  $\omega_m$ , имеет вид:

$$V(\vec{q} \omega_m \rightarrow 0) \approx \frac{-\omega_m + \mathcal{D}_{EF}(-\omega_m) q^2}{N_0(E_F) \mathcal{D}_{EF}(-\omega_m) q^2} \theta(\omega_m) + \frac{\omega_m + \mathcal{D}_{EF}(\omega_m) q^2}{N_0(E_F) \mathcal{D}_{EF}(\omega_m) q^2} \theta(\omega_m) \quad (5.104)$$

Тогда, вводя по определению:

$$\delta N(\epsilon_n) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \delta G(\epsilon_n \bar{p}) \quad (5.105)$$

получим:

$$\delta N(\epsilon_n) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} T \sum_m V(\vec{q} \omega_m) \gamma^2(\vec{q} \omega_m \epsilon_n) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} G^2(\epsilon_n \bar{p}) G(\epsilon_n + \omega_m \bar{p} + \vec{q}) \approx \quad (5.106)$$

$$\approx -i N_0(E_F) T \sum_m \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{q} \omega_m) \left\{ \frac{\theta(\epsilon_n) \theta(-\epsilon_n - \omega_m)}{[-\omega_m + \mathcal{D}_{EF}(-\omega_m) q^2]^2} - \frac{\theta(-\epsilon_n) \theta(\epsilon_n + \omega_m)}{[\omega_m + \mathcal{D}_{EF}(\omega_m) q^2]^2} \right\}$$

Используя (5.104), при  $\epsilon_n > 0$ , имеем:

$$\delta N(\epsilon_n > 0) \approx -\frac{iT}{2\pi^2} \sum_{\omega_m=-\infty}^{-\epsilon_n} \mathcal{D}_{EF}^{-1}(\omega_m) \int_0^{\infty} dq \frac{1}{\mathcal{D}_{EF}(-\omega_m) q^2 - \omega_m} = \quad (5.107)$$

$$= -\frac{iT}{2\pi^2 \mathcal{D}_{EF}^{3/2}} \sum_{\omega_m=-\infty}^{-\epsilon_n} \omega_m^{-2} [\omega_m - \omega_0^2(E_F) \tau_{EF}]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \omega_m + \omega_0^2(E_F) \tau_{EF}}$$

Возникшую здесь конечную сумму по бозевским частотам можно вычислить по формуле:

$$\Gamma \sum_{m=-\infty}^{-n} \Phi(i\omega_m) = \int_{-i\epsilon_n+\infty}^{-i\epsilon_n-\infty} \frac{dz}{2\pi i} f_B(z) \Phi(z) = \quad (5.108)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi i} f_B(z - i\epsilon_n) \Phi(z - i\epsilon_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi i} f(z) \Phi(z - i\epsilon_n)$$

где  $f_B(z) = \left\{ \exp\left(\frac{z}{T}\right) - 1 \right\}^{-1}$  - бозевская, а  $f(z) = \left\{ \exp\left(\frac{z}{T}\right) + 1 \right\}^{-1}$  - фермиевская функция. В нашем случае:

$$\Phi(z) = [iz + \omega_0^2(E_F)\tau_{EF}] \frac{1}{2z^2} \int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + iz + \omega_0^2(E_F)\tau_{EF}} \quad (5.109)$$

Проводя в (5.108), (5.109) аналитическое продолжение  $i\epsilon_n \rightarrow \epsilon + i\delta$  и вычисляя мнимую часть, с учетом  $\text{Im} \Phi(z) = -\text{Im} \Phi(-z)$ , находим поправку к плотности состояний, соответствующую (5.107):

$$\delta N(\epsilon) = \frac{1}{4\pi^3 D_{EF}^{3/2}} \int_0^{\tilde{E}} dz [f(z+\epsilon) + f(z-\epsilon) - 1] \text{Im} \Phi(z) \quad (5.110)$$

Выражение (5.108), строго говоря, справедливо для  $\Phi(z)$  достаточно быстро убывающей при  $|z| \rightarrow \infty$ . Наша функция  $\Phi(z)$  (5.109), вообще говоря, не удовлетворяет этому условию, поэтому для учета возникающей здесь "константы" в (5.110) введено обрезание на верхнем пределе  $\tilde{E}$ , где  $\tilde{E}$  имеет тот же смысл, что и выше в (5.45). Тогда, используя асимптотику:

$$\text{Im} \Phi(z) \approx \begin{cases} \frac{\pi}{4\sqrt{2z}} ; z \gg \omega_0^2(E_F)\tau_{EF} \\ \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{z} [\omega_0^2(E_F)\tau_{EF}]^{1/2} ; z \ll \omega_0^2(E_F)\tau_{EF} \end{cases} \quad (5.111)$$

получаем:

$$\delta N(\varepsilon) \approx \begin{cases} \frac{1}{2^{5/2} \pi^2 D_{EF}^{3/2}} \left\{ T^{1/2} \varphi\left(\frac{|\varepsilon|}{2T}\right) - \tilde{E}^{1/2} \right\}; & |\varepsilon|, T \gg \omega_0^2(E_F) \tau_{EF} \\ \frac{1}{2^{5/2} \pi^2 D_{EF}^{3/2}} \left\{ (\omega_0^2(E_F) \tau_{EF})^{1/2} - \tilde{E}^{1/2} \right\} + & \\ + \frac{3 (\omega_0^2(E_F) \tau_{EF})^{1/2}}{2^{5/2} \pi^2 D_{EF}^{3/2}} \ln \frac{\text{Max}\{|\varepsilon|, T\}}{\omega_0^2(E_F) \tau_{EF}}; & |\varepsilon|, T \ll \omega_0^2(E_F) \tau_{EF} \end{cases} \quad (5.112)$$

где /184/:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} dy \sqrt{y} \left\{ \frac{1}{\text{ch}^2(x-y)} + \frac{1}{\text{ch}^2(x+y)} \right\} \approx \begin{cases} 1.07; & x \ll 1 \\ \sqrt{2x}; & x \gg 1 \end{cases}$$

Полученные выражения дают непосредственное обобщение соответствующих результатов работы Аронова и Альтшулера /184/ на случай диэлектрической стороны перехода Андерсона. Легко видеть, что с точностью до константы, найденная здесь поправка к плотности состояний за счет динамически экранированного кулоновского взаимодействия совпадает с результатами (5.44), (5.72), полученными в модели с короткодействием.

## 6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ И СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ.

### 6.1. Уравнения Гинзбурга-Ландау.

В предыдущей Главе рассматривался случай, когда взаимодействие электронов носит отталкивательный характер. Иная ситуация возникает, если вблизи уровня Ферми реализуется эффективное притяжение. В этом случае, при низких температурах, металл переходит в сверхпроводящее состояние /212/. В тоже время мы знаем, что достаточно сильный беспорядок приводит к локализации всех электронных состояний в окрестности уровня Ферми (переход Андерсона). При этом плотность электронных состояний на уровне Ферми остается константой, однако из-за пространственной локализации волновых функций постоянный электрический ток (при  $T = 0$ ) невозможен, система становится диэлектриком. В таком случае возникает проблема взаимного влияния этих двух типов переходов, ведущих к принципиально различным основным состояниям (изолятор или сверхпроводник). Эта задача важна также и с точки зрения эксперимента ввиду сильной зависимости сверхпроводящих свойств целого ряда соединений от степени их структурного разупорядочения, которая может изменяться в широких пределах, например в результате их облучения быстрыми нейтронами.

Влияние локализации на сверхпроводимость рассматривалось в последнее время в целом ряде теоретических работ /213-222/. При этом, главное внимание уделялось рассмотрению локализационных поправок в двумерных сверхпроводниках /214-219/. В тоже время, возможность сверхпроводимости вблизи реального перехода Андерсона в трехмерной системе почти не анализировалась. В этой главе, следуя работам /223, 224/, выполненным автором совместно с Л.Н.Булаевским, мы рассмотрим именно эту проблему. С экспериментальной точки зрения мы имеем ввиду довольно экзотическую ситуацию. Действительно, в большинстве металлов переход Андерсона не реализуется даже в

полностью аморфизованном состоянии. Это связано с довольно высокими значениями энергии Ферми  $E_F$  в большинстве металлов, а также с малостью ионного псевдопотенциала. Даже при полном разупорядочении амплитуда возникающего в системе случайного поля недостаточна для удовлетворения условия локализации электронов с типичной  $E_F$ . Возможными кандидатами для изучения рассматриваемых ниже эффектов могут быть лишь металлы с низкими значениями  $E_F$  (полуметаллы, узкозонные проводники, сильнолегированные полупроводники), а также квазиодномерные и квазидвумерные проводники.

Сначала мы рассмотрим проблему в рамках модели БКШ /212/, в которой предполагается существование заданного притяжения электронов в окрестности уровня Ферми. Для этой модели может быть доказано утверждение, известное как теорема Андерсона /225,226, Гл.V/, о несущественном влиянии структурного беспорядка на температуру сверхпроводящего перехода  $T_C$ . Аргументация, используемая при этом доказательстве фактически не зависит от того являются ли электронные состояния делокализованными или нет /214,217,220/ (см. также Приложение 3). При этом возникает, однако, вопрос о физическом смысле  $T_C$  в области локализации, в частности неясно, сохраняется ли ниже этой температуры мейсснеровский отклик системы на внешнее магнитное поле, т.е. может ли в такой системе поддерживаться незатухающий ток. Ниже мы решим эту проблему путем вывода уравнений Гинзбурга-Ландау для электронной системы, находящейся в окрестности перехода Андерсона. Мы покажем, что сверхпроводящий отклик сохраняется при  $T < T_C$  и в области локализованных состояний, по крайней мере, пока достаточно велик радиус локализации. Таким образом будет продемонстрирована возможность фазового перехода из андерсоновского диэлектрика в сверхпроводящее состояние. На основе полученных уравнений Гинзбурга-Ландау мы также изучим особенности поведения верхнего критического поля  $H_{c2}$



сверхпроводника, находящегося в окрестности перехода Андерсона.

Рассмотрим электроны в неупорядоченной системе, предполагая существование эффективной константы электрон-электронного притяжения  $g$ , в энергетическом слое шириной  $\sim 2\omega_D$  вокруг уровня Ферми ( $\omega_D$  - дебаевская частота фононов). Изучение проблемы сверхпроводимости в такой системе требует не только обсуждения величины  $T_c$ , но также и рассмотрения отклика системы на внешний вектор-потенциал  $\vec{A}$ . В общем случае, анализ функций отклика в сверхпроводящей системе с учетом возможности локализации электронных состояний, представляет собой весьма трудную задачу. Однако, вблизи  $T_c$  эта проблема существенно упрощается и мы, фактически, должны лишь показать, что плотность свободной энергии рассматриваемой системы может быть представлена в стандартном виде разложения Гинзбурга-Ландау /226, Гл. VI, VII, 227/:

$$F = F_n + A|\Delta|^2 + \frac{1}{2}B|\Delta|^4 + C \left| \left( \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \Delta \right|^2 \quad (6.1)$$

где  $F_n$  - плотность свободной энергии нормального состояния, а  $\Delta$  - сверхпроводящий параметр порядка. Проблема таким образом сводится к микроскопическому выводу выражений для коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  в (6.1), учитывающему возможность локализации электронов, и обобщающему в этом направлении известные результаты Горькова /227/, полученные для обычных "грязных" сверхпроводников.

В рамках модели БКШ коэффициенты  $A$  и  $B$  не изменяются по сравнению с их значениями, найденными в обычной теории "грязных" сверхпроводников, даже если система находится вблизи перехода Андерсона. Это является проявлением теоремы Андерсона и ниже мы еще обсудим условия, когда она может быть применена (см. также Приложение 3). Менее тривиальным является поведение коэффициента  $C$ , который фактически и определяет сверхпроводящий отклик. В обычной теории "грязных" сверхпроводников /227/ он пропорциона-

лен коэффициенту диффузии электронов, т.е. проводимости системы при  $T = 0$ . По мере приближения уровня Ферми к порогу подвижности эта проводимость стремится к нулю. Мы покажем однако, что коэффициент  $C$  остается конечным в окрестности перехода Андерсона, даже в области локализованных состояний.

Для определения коэффициентов разложения Гинзбурга-Ландау достаточно знания двухчастичной функции Грина системы в нормальном состоянии /227/. Введем следующие двухчастичные мацубаровские функции Грина электрона в импульсном представлении /106, 118, 139/:

$$\Psi_{E_F}(\vec{q}, \omega_m, \varepsilon_n) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \langle G(\vec{p}_+, \vec{p}'_+ - \varepsilon_n + \omega_m) G(-\vec{p}'_-, \vec{p}_- - \varepsilon_n) \rangle \quad (6.2)$$

$$\Phi_{E_F}(\vec{q}, \omega_m, \varepsilon_n) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \langle G(\vec{p}_+, \vec{p}'_+ - \varepsilon_n + \omega_m) G(\vec{p}'_-, \vec{p}_- - \varepsilon_n) \rangle$$

где угловые скобки снова обозначают усреднение по случайным конфигурациям,  $\vec{p}_\pm = \vec{p} \pm \frac{1}{2}\vec{q}$ ,  $\varepsilon_n = (2n+1)\pi T$ ,  $\omega_m = 2\pi mT$ . Графически эти функции показаны на Рис.6.1 (для  $\omega_m = 2\varepsilon_n$ ).

Тогда для коэффициентов  $A$  и  $C$  мы имеем /218, 227/:

$$A = \frac{1}{g} + 2\pi i T \sum_{\varepsilon_n} \Psi_{E_F}(\vec{q} = 0, \omega_m = 2\varepsilon_n) \quad (6.3)$$

$$C = i\pi T \sum_{\varepsilon_n} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi_{E_F}(\vec{q}, \omega_m = 2\varepsilon_n) \Big|_{\vec{q}=0} \quad (6.4)$$

Видим, что сверхпроводящие свойства определяются функцией Грина

$\Psi_{E_F}$ , описывающей распространение электронной пары. В тоже время, как мы видели выше (Глава 3), функция Грина  $\Phi_{E_F}$  определяет кинетические свойства нормального металла и переход Андерсона.

В случае инвариантности системы относительно операции обращения времени, т.е. в отсутствие внешнего магнитного поля и магнитных примесей, мы имеем /139/:

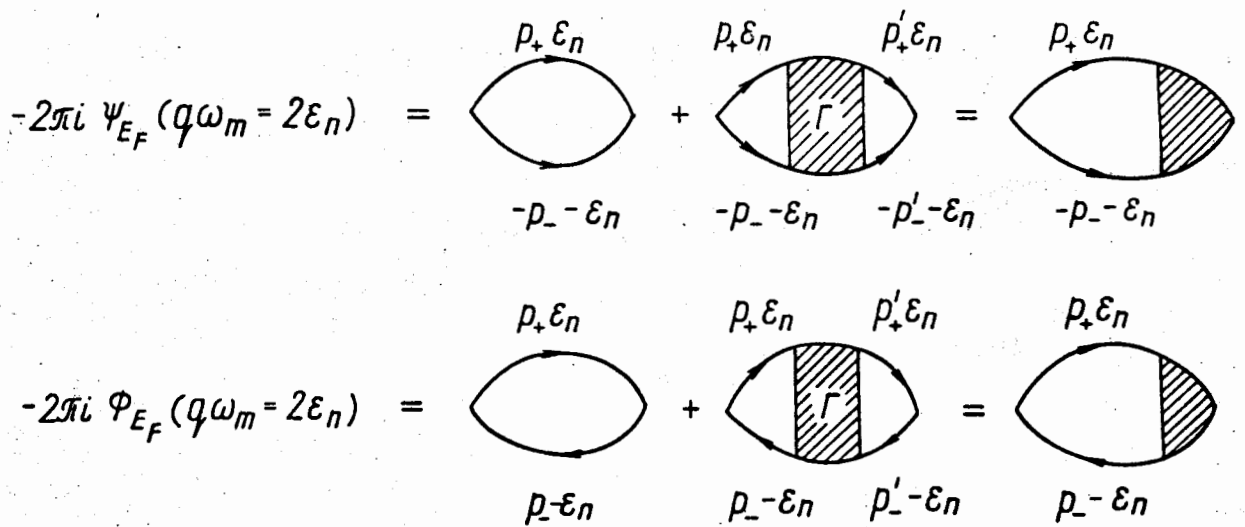


Рис.6.1. Графическое представление двухчастичных функций Грина  $\Psi_{E_F}(q\omega_m)$  и  $\Phi_{E_F}(q\omega_m)$  (при  $\omega_m = 2\varepsilon_n$ ). Суммирование по  $\varepsilon_n$  в электронных петлях отсутствует.

$$\psi_{E_F}(\vec{q}\omega_m) = \phi_{E_F}(\vec{q}\omega_m) \quad (6.5)$$

и для определения коэффициентов Гинзбурга-Ландау достаточно знания функции  $\phi_{E_F}(\vec{q}\omega_m)$ , подробно обсуждавшейся выше в Главе 3.

В качестве одноэлектронной модели перехода Андерсона мы опять принимаем самосогласованную теорию локализации (Глава 3), в рамках которой можно провести до конца вычисления всех интересующих нас физических величин. Нужно только привести основные уравнения самосогласованной теории в мацубаровской технике ( $T \neq 0$ ). Для малых  $\vec{q}$  и  $\omega_m$ , вместо (3.70) имеем:

$$\phi_{E_F}(\vec{q}\omega_m) = - \frac{N(E_F)}{i|\omega_m| + iD_{E_F}(|\omega_m|)q^2} \quad (6.6)$$

где обобщенный коэффициент диффузии  $D_{E_F}(\omega_m)$  определяется уравнением самосогласования, аналогичным (3.80):

$$\frac{D_0^{E_F}}{D_{E_F}(\omega_m)} = 1 - \frac{i}{\pi N^2(E_F)} \sum_{|\vec{q}| < k_0} \phi_{E_F}(\vec{q}\omega_m) \quad (6.7)$$

В трехмерном случае (6.7) сводится к (ср.(3.III)/II8, I26/):

$$\frac{D_{E_F}(\omega_m)}{D_0^{E_F}} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_c} + \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{\lambda_c} \left[ \frac{D_0^{E_F}}{D_{E_F}(\omega_m)} \frac{\omega_m}{2\gamma(E_F)} \right]^{1/2} \quad (6.8)$$

где все обозначения взяты из Главы 3. С достаточной для наших целей точностью решение уравнения (6.8) имеет вид (ср.(3.II7)):

$$D_{E_F}(\omega_m) \approx \text{Max} \left\{ D_{E_F} \frac{\omega_m}{\omega_m + 3D_{E_F}\omega_0^2(E_F)/v_F^2}; D_0^{E_F} \left( \frac{\omega_m}{2\gamma(E_F)} \right)^{1/3} \right\} \quad (6.9)$$

где  $D_{E_F}$  - перенормированный коэффициент диффузии, определяемый (3.II8), а  $\omega_0^2(E_F)$  - квадрат фундаментальной частоты (3.66), (3.I00), определяющей переход в диэлектрическое состояние.

Детали вычислений коэффициентов Гинзбурга-Ландау  $A$ ,  $B$  и  $C$  приведены в Приложении 4. Здесь мы сразу выписываем результаты. Коэффициенты  $A$  и  $B$ , определяющие температуру перехода и параметр порядка вблизи  $T_c$  даются обычными выражениями теории "грязных" сверхпроводников [227]:

$$A = N(E_F) \ln \frac{T}{T_c} \approx N(E_F) \frac{T - T_c}{T_c} \quad (6.10)$$

где  $T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D \exp[-1/\gamma N(E_F)]$  - стандартное выражение для  $T_c$  в теории БКШ ( $\gamma = 1.78$ ,  $\frac{2\gamma}{\pi} = 1.13$ ),

$$B = \frac{\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} N(E_F) \quad (6.11)$$

где  $\zeta(x)$  -  $\zeta$  - функция Римана ( $\zeta(3) = 1.202$ ). Выражения (6.10), (6.11) зависят от беспорядка только через соответствующую зависимость плотности состояний на уровне Ферми  $N(E_F)$  и справедливы даже в области локализации ( $E < E_c$ ), что является следствием теоремы Андерсона (см. Приложение 3).

Существенные изменения возникают, однако, в коэффициенте  $C$  перед градиентным членом в разложении Гинзбурга-Ландау. Используя (6.4)-(6.6) и (6.9), находим, что в различных предельных случаях этот коэффициент представляется в следующем виде:

$$C \approx \begin{cases} \frac{\pi}{8T_c} N(E_F) \mathcal{D}_{E_F} ; \zeta_{loc}(E_F) < (\zeta_0 \ell^2)^{1/3} ; E_F > E_c \\ N(E_F) \left( \frac{\mathcal{D}_0^{E_F} \ell}{T_c} \right)^{2/3} \approx N(E_F) (\zeta_0 \ell^2)^{2/3} ; \zeta_{loc}(E_F) > (\zeta_0 \ell^2)^{1/3} \\ N(E_F) R_{loc}^2(E_F) \ln \frac{1.78 \mathcal{D}_{E_F}}{\pi T_c R_{loc}^2(E_F)} ; \zeta_{loc}(E_F) = R_{loc}(E_F) < (\zeta_0 \ell^2)^{1/3} ; E_F < E_c \end{cases} \quad (6.12)$$

где  $\zeta_0 = 0.18 \frac{v_F}{T_c}$  - длина когерентности теории сверхпроводимости,  $\ell$  - друдевская длина свободного пробега.

В металлической области, по мере приближения энергии Ферми к порогу подвижности  $E_c$ , локализационная длина  $\zeta_{loc}(E_F)$  растет

и коэффициент  $C$  уменьшается пропорционально перенормированному коэффициенту диффузии  $D_{E_F}$  (ср. (3.105), (3.118)), т.е. пропорционально металлической проводимости системы  $\sigma$  (ср. (3.15), (3.106)). Однако, в окрестности перехода Андерсона, в то время как  $\sigma \rightarrow 0$ , коэффициент  $C$  уменьшается более медленно и остается конечным даже при  $E_F < E_C$ , т.е. в андерсоновском диэлектрике. При дальнейшем уменьшении  $E_F$  вглубь области локализации (или с ростом  $E_C$  по мере роста беспорядка), коэффициент  $C$  определяется радиусом локализации  $R_{loc}(E_F)$ , который уменьшается при движении  $E_F$  от порога подвижности.

Наше рассмотрение диэлектрической области ( $E_F < E_C$ ) справедливо для достаточно больших значений радиуса локализации  $R_{loc}(E_F)$  удовлетворяющих условию /213,265/ (см. также Приложение 3):

$$\frac{1}{N(E_F)R_{loc}^3(E_F)} \ll T_c \quad (6.13)$$

Это условие означает наличие достаточно большого числа дискретных уровней, находящихся внутри сферы радиуса  $R_{loc}(E_F)$  и попадающих в энергетический интервал  $\sim T_c$ , что является необходимым для куперовского спаривания локализованных электронов. Легко видеть, что (6.13) сводится к:

$$R_{loc}(E_F) \gg [N(E_F)T_c]^{-1/3} \sim (\gamma_0/\rho_F^2)^{1/3} \sim (\gamma_0 \ell^2)^{1/3} \quad (6.14)$$

Таким образом, последняя асимптотика в (6.12) фактически не имеет области применимости и условие (6.13), (6.14) определяет возможность сверхпроводимости локализованных электронов в модели БКШ. Заметим, что аналогичное условие определяет возможность куперовского спаривания нуклонов, находящихся на дискретных уровнях в атомном ядре /203, Гл. II.4/, а также возможность образования сверхпроводящего параметра порядка в маленьких металлических гранулах /213,265/.

Конечность коэффициента  $C$  в разложении Гинзбурга-Ландау для системы, находящейся в окрестности порога подвижности, означает существование сверхпроводящего (мейсснеровского) отклика на внешнее магнитное поле. Таким образом, при  $T < T_c$  в системе может произойти фазовый переход андерсоновский диэлектрик - сверхпроводник. Физический смысл этого результата можно понять из следующих качественных соображений. В андерсоновском диэлектрике электроны с энергиями вблизи уровня Ферми локализованы в областях с пространственными размерами  $\sim R_{loc}(E_F)$ . Между "соседними" областями такого типа существует некоторая эффективная амплитуда одночастичного туннелирования  $V$ , определяющая вероятность перехода электрона из области в область:

$$P_T \approx 2\pi |V|^2 N(E_F) R_{loc}^3(E_F) \quad (6.15)$$

Однако, по условию андерсоновской локализации:

$$V \ll \frac{1}{N(E_F) R_{loc}^3(E_F)} \quad (6.16)$$

и когерентное туннелирование в системе таких областей невозможно. При этом  $P_T \ll 2\pi N^{-1}(E_F) R_{loc}^{-3}(E_F)$ . В тоже время, при выполнении условия (6.13), (6.14) внутри каждой области с размерами  $\sim R_{loc}(E_F)$  происходит куперовское спаривание и возникает сверхпроводящая щель  $\Delta$ , однородная по всей системе. Тогда, рассуждая по аналогии с рассмотрением системы металлических гранул /213/, можно считать, что между "соседними" областями возникает эффективное "джозефсоновское" взаимодействие, определяющее возможность туннелирования куперовских пар и величина которого может быть оценена как /228/:

$$E_J \approx \pi^2 [N(E_F) R_{loc}^3(E_F)]^2 |V|^2 \Delta \quad (6.17)$$

Легко видеть, что при

$$\Delta > \frac{2}{\pi} \frac{1}{N(E_F) R_{loc}^3(E_F)} \quad (6.18)$$

имеем  $E_J > P_T$ , так что при выполнении условия (6.13), несмотря на (6.16), можно обеспечить выполнение неравенства  $E_J \gg \gg N^{-1}(E_F) R_{loc}^{-3}(E_F)$  и между "соседними" областями возможно когерентное туннелирование куперовских пар, несмотря на то, что когерентное туннелирование отдельных электронов запрещено.

Удобно переписать (6.10)-(6.12) в виде соотношения между наблюдаемыми физическими величинами. Используя (6.1), (6.10)-(6.12) и выражая перенормированный коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_{E_F}$  через металлическую проводимость  $\sigma$  с помощью (3.15), (3.92), для сверхпроводящей корреляционной длины  $\zeta(T)$  и лондоновской глубины проникновения  $\lambda_L$  /226/ находим:

$$\zeta^2(T) \approx \frac{T_c}{T_c - T} \begin{cases} \zeta_0 \ell \frac{\sigma}{\sigma + \sigma_c} ; \sigma > \sigma^* & (E_F > E_c) \\ (\zeta_0 \ell^2)^{2/3} ; \sigma < \sigma^* & (E_F \geq E_c) \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\lambda_L^{-2}(T) = 32\pi e^2 c^{-2} N(E_F) \Delta^2(T) \zeta^2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$$

где  $\sigma_c = \frac{e^2 p_F}{\pi^3 \hbar^2}$  из (3.91), а  $\sigma^* \approx \sigma_c (p_F \zeta_0)^{-1/3}$  (6.20)

Таким образом, в области очень малых проводимостей  $\sigma < \sigma^*$  масштаб  $\zeta(T)$  определяется не  $\sqrt{\zeta_0 \ell}$ , как в обычной теории "грязных" сверхпроводников, а величиной  $(\zeta_0 \ell^2)^{1/3}$ , принимающей на себя роль длины когерентности (размера куперовской пары) в окрестности перехода Андерсона. Из (6.19) видно, что  $\zeta^2(T)$  и  $\lambda_L^{-2}(T)$ , при подходе к порогу подвижности, сначала уменьшаются пропорционально  $\sigma$ , как в обычной теории "грязных" сверхпроводников /227/. Однако уже в металлической области, при  $\sigma \lesssim \sigma^*$  (или при  $\zeta_{loc}(E_F) \gtrsim (\zeta_0 \ell^2)^{1/3}$ ), эти величины начинают уменьшаться медленнее, чем проводимость. Характерная проводимость  $\sigma^*$ ,



определенная в (6.20), задает фундаментальный масштаб проводимости, начиная с которой локализационные эффекты оказывают существенное влияние на параметры теории Гинзбурга-Ландау. Поскольку величина  $\sigma_c$  порядка минимальной металлической проводимости по Мотту /2,3/, ясно, что  $\sigma^*$  меньше этой характерной проводимости. В частности, при типичных  $\xi_0 \sim 10^2 \ell$  и  $\ell^{-1} \sim p_F$  имеем  $\sigma^* \lesssim 10^2 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ . В тоже время ясно, что ввиду грубости теории, лучше рассматривать величину  $\sigma^*$  как подгоночный параметр, определяемый из эксперимента, по величине проводимости, при которой возникают отклонения от предсказаний обычной теории "грязных" сверхпроводников. В диэлектрической фазе значения  $\xi^2(T)$  и  $\lambda^{-2}(T)$  остаются конечными, хотя и продолжают уменьшаться с ростом беспорядка (уменьшением  $\ell$ ). Критический ток сверхпроводящей пластины, пропорциональный  $\lambda_L^{-2}/\xi^2(T)$  /226/, остается конечным и после того, как металлическая проводимость  $\sigma$  обратилась в нуль.

Подчеркнем, что наши результаты указывают на возможность де-локализации куперовских пар в андерсоновском диэлектрике. В тоже время характер волновых функций (и кинетические свойства) одночастичных возбуждений при  $T < T_c$ , строго говоря, неизвестны.

Прямая информация о величине  $\xi^2(T)$  может быть получена из измерений верхнего критического поля  $H_{c2}$  /226/:

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)} \quad ; \quad \phi_0 = \frac{\pi c \hbar}{e} \quad (6.21)$$

Используя (6.19), получаем соотношение между  $\sigma$ ,  $\left(\frac{dH_{c2}}{dT}\right)_{T_c}$  и величиной  $N(E_F)$ , которая в принципе может быть определена независимо из измерений электронного вклада в теплоемкость:

$$\frac{\sigma}{N(E_F)} \left(\frac{dH_{c2}}{dT}\right)_{T_c} \approx \begin{cases} \frac{8e^2}{\pi^2 \hbar} \phi_0 \quad ; \quad \sigma > \sigma^* \quad (E_F > E_c) & (6.22a) \\ \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\sigma}{[N(E_F) T_c]^{1/3}} \quad ; \quad \sigma < \sigma^* & (6.22b) \end{cases}$$

В правой части выражения (6.22а) содержатся лишь фундаментальные константы, и это соотношение часто используется при интерпретации измерений на облученных сверхпроводниках /229,230/. Используя его, можно определить величину  $N(E_F)$  при различных степенях разупорядочения, из измерений  $\left(\frac{dH_{c2}}{dT}\right)_{T_c}$  и проводимости  $\sigma$ . Мы видим, однако, что вблизи перехода металл-диэлектрик, когда  $\sigma \leq \sigma^*$ , это соотношение уже не выполняется и описанный метод интерпретации измерений  $\left(\frac{dH_{c2}}{dT}\right)_{T_c}$  неизбежно будет "симулировать" падение  $N(E_F)$  с ростом остаточного сопротивления (беспорядка), в соответствии с соотношением (6.22б). В реальных системах именно такое поведение наблюдалось в работах /229,230/. В связи с этим, мы хотели-бы подчеркнуть важность независимых экспериментов по определению  $N(E_F)$ . Согласно предварительным данным, полученным авторами работы /229/ из измерений теплоемкости, значения  $N(E_F)$  в их системе (см.ниже) практически не изменяются с ростом беспорядка.

Здесь уместно заметить, что наш вывод коэффициента  $C$  существенно использовал инвариантность относительно операции обращения времени, выражаемую соотношением (6.5), что справедливо в отсутствие внешнего магнитного поля (и магнитных примесей). Таким образом, приведенные выше результаты формально корректны в пределе инфинитезимального внешнего поля, что достаточно для демонстрации сверхпроводящего (мейсснеровского) отклика и для определения величины  $\left(\frac{dH_{c2}}{dT}\right)_{T_c}$ , поскольку  $H_{c2} \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow T_c$ . В конечном внешнем поле нужно учесть влияние его на локализацию. Эта проблема, как уже отмечалось, еще довольно далека от окончательного решения. Тем не менее, пренебрегая таким влиянием, все же можно рассчитать полную зависимость орбитального верхнего критического поля от температуры, с целью выявления характерных особенностей, связанных с эффектами локализации. Эта зависимость определяется уравнением /231, Гл.6,232,233/:

$$\ln \frac{T}{T_c} = \pi T \sum_{\varepsilon_n} \left\{ \frac{1}{|\varepsilon_n| + \mathcal{D}_{E_F}(2|\varepsilon_n|)\pi H/\phi_0} - \frac{1}{|\varepsilon_n|} \right\} \quad (6.23)$$

где  $\mathcal{D}_{E_F}(2\varepsilon_n)$  определяется из уравнения (6.8). Вводя параметр  $a \approx 1.23 \frac{\sigma}{\sigma^*} \left[ 1 + \frac{\sigma}{\sigma^*} (\rho_F z_0)^{-1/3} \right]^{-1}$  и рассчитывая  $b_n$ ,  $x$  и  $S$  с помощью уравнений:

$$(2n+1) = b_n (b_n - a)^2; \quad b_n > a$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(2n+1)^2} \quad (6.24)$$

$$\left[ 1 + \frac{x}{2(1+x)} \right] \ln x + \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{x}}{1+x} + \ln 3.56 a^3 = 0$$

получаем характерные параметры:

$$r(a) = - \frac{H_{c2}(0)}{T_c \left( \frac{dH_{c2}}{dT} \right)_{T_c}} = 2a^2 x S \quad (6.25)$$

$$k(a) = - \frac{\pi^2 \sigma}{8N(E_F) e^2 \phi_0} \left( \frac{dH_{c2}}{dT} \right)_{T_c} = \frac{\pi^2 a}{8S}$$

Соответствующие зависимости показаны на Рис.6.2. По мере приближения  $E_F$  к порогу подвижности  $r(a)$  растет от стандартного значения 0.69 обычной теории "грязных" сверхпроводников, до значения 1.24 в окрестности перехода Андерсона, т.е. при  $\sigma \ll \sigma^*$ . Этот рост  $r(a)$  приводит к переходу от положительной кривизны кривой  $h_{c2}(T) = -H_{c2}(T)/T_c \left( \frac{dH_{c2}}{dT} \right)_{T_c}$  от температуры  $T$ , наблюдаемой при  $\sigma \gg \sigma^*$ , к отрицательной кривизне этой кривой при  $\sigma \leq \sigma^*$ . На Рис.6.3 показана зависимость  $h_{c2}(T)$  в окрестности перехода Андерсона (точнее при  $E = E_c$ ).

Обсудим теперь условия, при которых можно пренебречь зависимостью обобщенного коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m)$  от магнитного поля. Хорошо известно, что магнитное поле уменьшает локализационные поправки, связанные с диаграммами Лангера-Нила (Рис.3.2(в)) /139/ и нарушает равенство (6.5) /139/. Относительное изменение

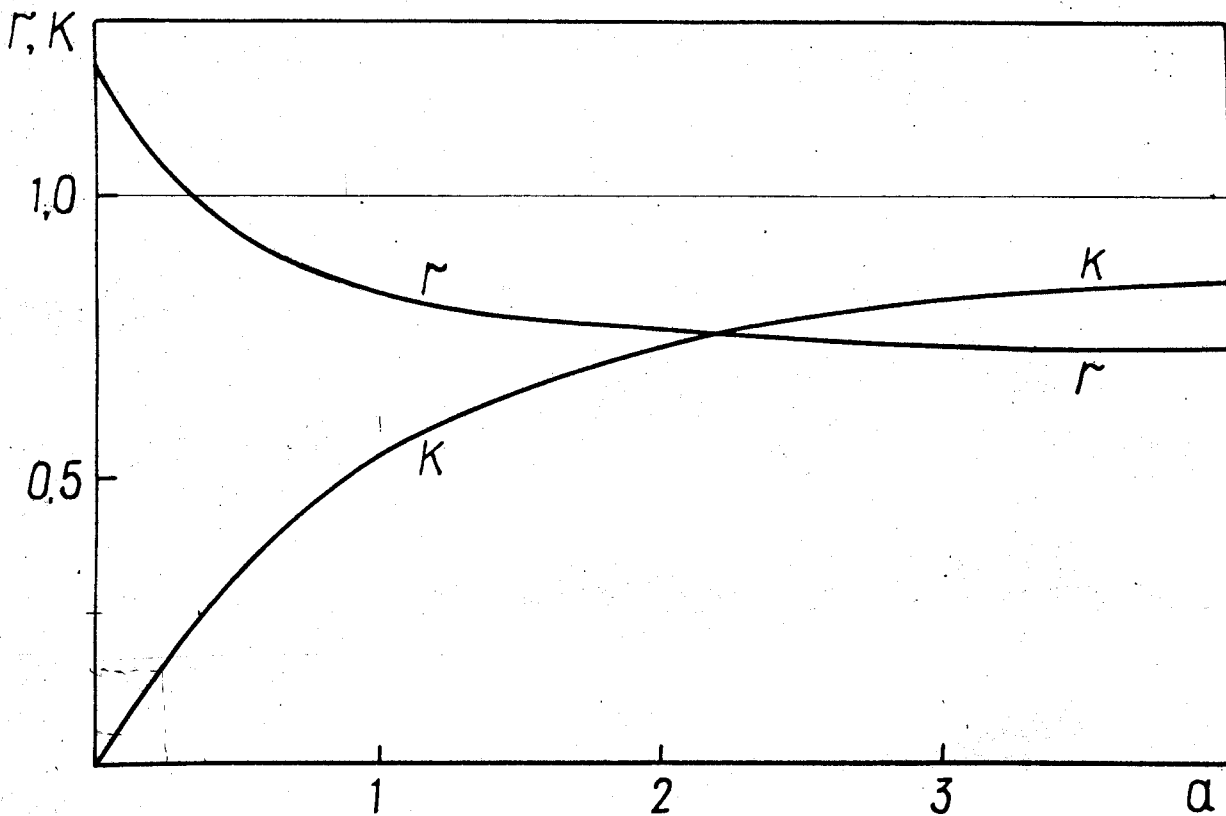


Рис. 6.2. Рассчитанная зависимость параметров  $\Gamma = -\frac{H_{c2}(0)}{T_c (dH_{c2}/dT)_{T_c}}$ ,  $k = -\frac{\pi^2 \sigma}{8N(E_F) e^2 \phi_0} \left( \frac{dH_{c2}}{dT} \right)_{T_c}$  от эффективного параметра беспорядка  $a = 1.23 \frac{\sigma}{\sigma^*} \left[ 1 + \frac{\sigma}{\sigma^*} (\rho_F \xi_0)^{-1/3} \right]^{-1}$ .

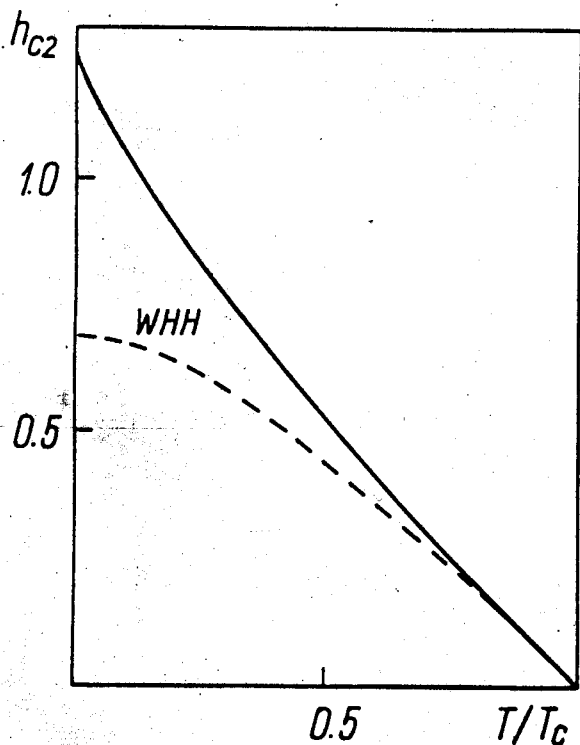


Рис. 6.3. Рассчитанная зависимость

$$h_{c2}(T) = -\frac{H_{c2}(T)}{T_c (dH_{c2}/dT)_{T_c}}$$

от температуры  $T$  в окрестности перехода Андерсона, при  $\sigma \ll \sigma^*$  (сплошная кривая,  $E = E_c$ ). Стандартная зависимость (WNN / 231, 232 /) в обычных "грязных" сверхпроводниках (пунктир).

$\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m)$  определяется параметром  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m)H/\omega_m\phi_0$  и вблизи  $T_c$ , когда  $\omega_m \sim T_c$ , изменение  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m)$  мало по параметру  $H\mathcal{D}_{E_F}(T_c)/\phi_0T_c$ . Таким образом, вблизи  $T_c$  мы можем пренебречь влиянием  $H_{c2}$  на диффузию ( $H_{c2} \rightarrow 0$ , при  $T \rightarrow T_c$ ) и наши расчеты корректно определяют  $k(a)$ . В тоже время возможные поправки от магнитного поля к найденной выше зависимости  $\Gamma(a)$  могут оказаться существенными. При  $T \rightarrow 0$  критическое поле  $H_{c2}$  растет, подавляя локализационные поправки так, что  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m)$  возрастает, что ведет к уменьшению  $H_{c2}$ . Согласно работе /222/ этот рост  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m)$  приводит к частичному сокращению кулоновского вклада в эффективную константу спаривательного взаимодействия  $g$  (см. ниже). Этот эффект был рассмотрен авторами работы /222/ в металлической области, при  $\mathcal{B} \gg \mathcal{B}^*$ . Однако, в этой работе не была учтена  $\omega$ -зависимость обобщенного коэффициента диффузии, которая, как мы видели, становится весьма существенной при  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}^*$ . Наши расчеты показывают, что соответствующие изменения в поведении  $H_{c2}$  не малы, так что учета изменения  $g$  /222/ недостаточно для корректного определения  $H_{c2}(0)$ . Таким образом, окончательная величина поправок к найденному нами поведению  $\Gamma(a)$  не вполне ясна и экспериментальное наблюдение отклонений от предсказанного вида  $\Gamma(a)$  может дать оценку влияния магнитного поля на обобщенный коэффициент диффузии, т.е. и на локализацию.

В заключение отметим, что зависимости  $h_{c2}(T)$  качественно аналогичные показанной на Рис.6.3, наблюдались в экспериментах на целом ряде металлических стекол (см. обзор /234/). Это подчеркивает необходимость изучения возможных отклонений параметра  $\Gamma$  от стандартного значения 0.69, также как и независимых экспериментов по определению  $N(E_F)$  в таких системах.

## 6.2. Кулоновское отталкивание в "грязных" сверхпроводниках.

В модели БКШ, обсуждавшейся в предыдущем разделе, спаривательное взаимодействие  $g$  в окрестности уровня Ферми предполагалось заданным. Однако, в реальных системах это взаимодействие определяется балансом межэлектронного притяжения, обусловленного электрон-фононным взаимодействием, и кулоновского отталкивания /226/. Ясно, что в сильно неупорядоченной системе, в окрестности перехода Андерсона, оба эти взаимодействия могут, в принципе, сильно измениться по сравнению с "чистым" случаем.

Хорошо известно, что кулоновский вклад в эффективное взаимодействие электронов в окрестности уровня Ферми существенно ослаблен по сравнению с фононным вкладом, что связано с запаздывающим характером электрон-фононного взаимодействия, связанного с обменом виртуальными фононами. Характерное время электрон-фононного взаимодействия порядка  $\omega_D^{-1}$ , тогда как для кулоновского взаимодействия в "чистой" системе оно порядка  $E_F^{-1}$  - времени, в течение которого электроны, образующие пару, свободно пролетают мимо друг друга. Из-за экранирования оба взаимодействия практически являются точечными. С ростом беспорядка электрон все медленнее покидает данный объем пространства, что приводит к росту эффективного кулоновского отталкивания в куперовской паре и соответствующему понижению  $T_c$ . Такой механизм подавления  $T_c$  с ростом беспорядка был предложен в работе Андерсона, Мутталиба и Рамакришнана /221/. Ниже, следуя работе /224/, мы рассмотрим этот механизм в рамках самосогласованной теории локализации. В металлической области наши оценки подавления  $T_c$  находятся в качественном согласии с результатами /221/, хотя количественно они отличаются. В тоже время, наш анализ показывает, что при удовлетворении достаточно жестких условий, сверхпроводимость может сохраниться и в области локализации.

Мы воспользуемся методом, предложенным выше в Главе 5. В сильно неупорядоченной системе нужно рассмотреть матричный элемент экранированного кулоновского взаимодействия  $v(\vec{r}-\vec{r}')$  по точным собственным функциям  $\varphi_\nu(\vec{r})$ , отвечающим точным собственным энергиям  $\epsilon_\nu$  электрона в случайном поле этой системы:

$$\langle \mu\nu | v(\vec{r}-\vec{r}') | \nu\mu \rangle = \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \varphi_\mu^*(\vec{r}') \varphi_\nu^*(\vec{r}) \varphi_\mu(\vec{r}) \varphi_\nu(\vec{r}') \quad (6.26)$$

Усредняя этот матричный элемент по двум изоэнергетическим поверхностям  $E = E_F$  и  $E' = E_F + \omega$  и по беспорядку, получим кулоновское ядро интегрального уравнения, определяющего сверхпроводящую щель, в следующем виде, являющемся естественным обобщением выражений, используемых обычно в теории сверхпроводимости /235, Гл. I/:

$$\begin{aligned} K_c(\omega) &= \frac{1}{N(E_F)} \left\langle \sum_{\mu\nu} \langle \mu\nu | v(\vec{r}-\vec{r}') | \nu\mu \rangle \delta(E_F - \epsilon_\nu) \delta(E_F + \omega - \epsilon_\mu) \right\rangle = \\ &= \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' v(\vec{r}-\vec{r}') \ll \rho_{E_F}(\vec{r}) \rho_{E_F+\omega}(\vec{r}') \gg^F \end{aligned} \quad (6.27)$$

где опять введена спектральная плотность Березинского-Горькова (3.3), (5.14), несущая полную информацию о природе электронных состояний. Сравнивая (6.27) с (5.12), легко видеть, что:

$$K_c(E-E') = - \frac{\delta \sum_E^F}{\delta f(E')} \quad (6.28)$$

После перехода в (6.27) к интегрированию по импульсному пространству имеем:

$$K_c(\omega) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} v(\vec{q}) \ll \rho_{E_F} \rho_{E_F+\omega} \gg_{\vec{q}} \quad (6.29)$$

Ниже мы предполагаем взаимодействие точечным:  $v(\vec{q}) = v_0$ . Выше (Глава 3), мы видели, что при  $\omega \ll \gamma(E_F)$  и  $q \ll l^{-1}$  в спектральной плотности Березинского-Горькова возникает диффузионный вклад (Ср. (3.18)):

$$\langle\langle \rho_{E_F} \rho_{E_F+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}}^{diff} = \frac{1}{\pi N(E_F)} \text{Im} \phi_{E_F}^{RA}(\vec{q}, \omega) \quad (6.30)$$

где (Ср. (3.70), (3.75), (3.120)):

$$\phi_{E_F}^{RA}(\vec{q}, \omega) = - \frac{N(E_F)}{\omega + i \mathcal{D}_{E_F}(\omega) q^2} \quad (6.31)$$

а обобщенный коэффициент диффузии в металлической области имеет вид (Ср. (3.117)):

$$\mathcal{D}_{E_F}(\omega) \approx \begin{cases} \mathcal{D}_{E_F} ; |\omega| \ll \omega_c \approx 2\gamma(E_F) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^3 \\ \mathcal{D}_0^{E_F} \left(-\frac{i\omega}{2\gamma(E_F)}\right)^{1/3} ; |\omega| \gg \omega_c \end{cases} \quad (6.32)$$

Очевидно, что (6.31) и (6.32) могут быть получены и из (6.6)-(6.9) путем стандартного аналитического продолжения  $i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta$ .

В отсутствие беспорядка ( $\gamma(E_F) = 0$ ) диффузионный вклад исчезает, а ядро  $K_c(\omega)$  должно сводиться к обычному кулоновскому потенциалу  $\mu = N(E_F) v_0$  /235/. Поэтому мы воспользуемся приближенным представлением:

$$K_c(\omega) \approx \mu + K_c^{diff}(\omega) \quad (6.33)$$

$$K_c^{diff}(\omega) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} v_0 \langle\langle \rho_{E_F} \rho_{E_F+\omega} \rangle\rangle_{\vec{q}}^{diff}$$

которое правильно интерполирует между предельными случаями сильного беспорядка и "чистой" системы.

$$K_c^{diff}(\omega) \approx \frac{v_0}{2\pi^3} \left\{ \frac{1}{|\mathcal{D}_{E_F}(\omega)| \ell} - \frac{|\omega|^{1/2}}{|\mathcal{D}_{E_F}(\omega)|^{3/2}} \right\} \approx \quad (6.34)$$



$$\approx \frac{v_0}{2\pi^3} \begin{cases} \frac{1}{D_{EF} \ell} - \frac{|\omega|^{1/2}}{D_{EF}^{3/2}} ; |\omega| \ll \omega_c \\ \frac{1}{D_0^{EF} \ell} \left( \frac{\omega}{2\gamma(E_F)} \right)^{-1/3} ; |\omega| \gg \omega_c \end{cases} \quad (6.34)$$

Вычисление интеграла в (6.33) вполне аналогично проделанному выше в связи с переходом от (5.43) к (5.44) и от (5.56) к (5.57), однако верхний предел интегрирования по  $q$  в (6.34) был взят равным обратной длине свободного пробега  $\ell^{-1}$  (а не импульсу Ферми), чтобы иметь возможность более корректного описания предела слабого беспорядка,  $p_F \ell \gg 1$ . В результате получаем следующее приближенное выражение для кулоновского ядра в металлической области, справедливое также и в окрестности порога подвижности:

$$K_c(\omega) = \mu \theta(E_F - |\omega|) + \frac{\mu}{p_F \ell} \begin{cases} \frac{\sigma_c}{\sigma} ; |\omega| < \omega_c \\ \frac{1}{p_F \ell} \left( \frac{\omega}{2\gamma(E_F)} \right)^{-1/3} ; \end{cases} \quad (6.35a)$$

$$\omega_c < |\omega| < \gamma(E_F) \sim E_F. \quad (6.35b)$$

Из (6.35) видно, что в окрестности перехода Андерсона возникает существенная диффузионная перенормировка, приводящая к заметному росту кулоновского отталкивания с ростом беспорядка (падением металлической проводимости  $\sigma$  в области  $\sigma \leq \sigma_c$  (см. (3.91)).

Ситуация с электрон-фононным вкладом в эффективное спаривательное взаимодействие существенно иная. Диффузионная перенормировка электрон-фононной вершины не возникает /236,237/, поскольку соответствующие поправки взаимно компенсируются при учете колебаний "примесных" атомов, создающих беспорядок. Разумеется, величина вклада в спаривательное взаимодействие, обусловленного электрон-фононным взаимодействием в неупорядоченной системе, отличается от такового в "чистом" случае. Однако величина этого изменения относительно невелика /236/. Поэтому, вслед за авторами работы /221/, можно предположить, что это взаимодействие описывается

некоторой безразмерной константой  $\lambda_{ph}$ , которая отлична от нуля в интервале энергий, шириной  $\sim 2\omega_D$  вокруг уровня Ферми, причем  $\lambda_{ph}$  слабо зависит от степени беспорядка.

Температура сверхпроводящего перехода  $T_c$  определяется линеаризованным уравнением для щели, которое в приближении слабой связи /235, Гл. I/ имеет вид:

$$\Delta(\omega) = \lambda_{ph} \theta(\omega_D - \omega) \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega'}{\omega'} \Delta(\omega') \text{th} \frac{\omega'}{2T_c} - \theta(E_F - \omega) \int_0^{E_F} \frac{d\omega'}{\omega'} K_c(\omega - \omega') \Delta(\omega') \text{th} \frac{\omega'}{2T_c} \quad (6.36)$$

Рассмотрим сначала металлическую область и  $\omega_c \gg \omega_D$ , что в соответствии с оценкой  $\omega_c$ , приведенной в (6.32), грубо соответствует  $\beta \gg \beta_c$  при типичных значениях  $E_F/\omega_D \sim 10^2$ , так что система находится не слишком близко к переходу Андерсона. Мы рассчитаем изменение  $T_c$ , связанное с диффузионным вкладом в кулоновском ядре (6.35), используя теорию возмущений по  $K_c^{diff}(\omega)$ . В результате, из первой итерации (6.36) получаем:

$$\frac{\delta T_c}{T_{co}} \approx \frac{\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \Delta_0(\omega) \text{th} \frac{\omega}{2T_{co}} K_c^{diff}(\omega - \omega') \Delta_0(\omega') \text{th} \frac{\omega'}{2T_{co}}}{\frac{1}{2T_{co}} \int_0^{\infty} d\omega [\Delta_0(\omega)]^2 \left[ \text{ch} \frac{\omega}{2T_{co}} \right]^{-2}} \quad (6.37)$$

где  $\Delta_0(\omega)$  - обычное "двухступенчатое" решение (6.36) /226, 235/, справедливое для стандартного кулоновского ядра  $K_c(\omega) = \mu \theta(E_F - |\omega|)$ ,

$$T_{co} = 1.13 \omega_D \exp \left( - \frac{1}{\lambda_{ph} - \mu_0^*} \right) \quad (6.38)$$

- критическая температура в "чистом" случае, когда кулоновский псевдопотенциал дается обычным соотношением:

$$\mu_0^* = \frac{\mu}{1 + \mu \ln \frac{E_F}{\omega_D}} \quad (6.39)$$

Используя (6.35a) из (6.37) имеем:

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} \approx - \frac{\mu}{(\lambda_{ph} - \mu_0^*)^2} \frac{1}{p_F l} \frac{\sigma_c}{\sigma} \quad (6.40)$$

Такое изменение критической температуры эквивалентно изменению  $\mu_0^*$  на величину:

$$\delta \mu^* \approx \mu \frac{\sigma_c^2}{\sigma (\sigma + \sigma_c)} \quad (6.41)$$

где мы воспользовались (3.92) и  $p_F l \approx \frac{\sigma_0}{\sigma_c} = \frac{\sigma + \sigma_c}{\sigma_c}$  (для включения фактора  $p_F l$  в (6.40)). Согласно (6.41) кулоновский псевдопотенциал  $\mu^*$  растет при падении  $\sigma$ , причем эта зависимость от  $\sigma$  здесь сильнее, чем в аналогичном выражении работы /221/. Последнее обстоятельство связано с использованием нами результатов самосогласованной теории локализации. Результаты работы /221/ могут быть получены при использовании  $\bar{q}$  - зависящего, в соответствии со скэйлинговой гипотезой Ли /147/, обобщенного коэффициента диффузии (см. (3.195), (5.48)):  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega \rightarrow 0, \bar{q}) \approx (\mathcal{D}_0^{E_F} l) \bar{q}$  при  $q \gg \omega_c(E_F) \gg 1$ , тогда как самосогласованная теория дает другой предел  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega \bar{q} \rightarrow 0) \approx (\mathcal{D}_0^{E_F} l)^{2/3} (-i\omega)^{1/3}$  на пороге подвижности. Наше выражение для  $\delta \mu^*$  приводит к заметному изменению кулоновского псевдопотенциала  $\mu^*$  в области проводимостей  $\sigma \lesssim 10^3 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ . Такая зависимость  $\mu^*$  от  $\sigma$  может без труда объяснить типичное понижение  $T_c$  в облученных сверхпроводниках /229, 230/, по мере того, как их сопротивление в нормальном состоянии растет в области значений порядка предела Иоффе-Регеля /4/. В тоже время, выражение для  $\mu^*$ , найденное в работе /221/ может объяснить экспериментальные данные лишь в предположении, что характерный масштаб проводимости, определяющий рост  $\mu^*$ , на порядок больше предела Иоффе-Регеля, для чего нет серьезного теоретического основания.

Рассмотрим теперь ситуацию на самом пороге подвижности, когда  $\sigma = 0$ ,  $\omega_c = 0$ , и  $K_c(\omega)$  определяется вторым выражением в (6.35) для всех частот ниже  $\gamma(E_F) \sim E_F$ . В этом случае, как показано

в Приложении 5, влияние кулоновского отталкивания на  $T_c$  может быть снова описано эффективным псевдопотенциалом  $\mu^*$ , однако в этом случае:

$$\mu^* \approx \alpha \mu \left( \frac{\omega_D}{2\gamma(E_F)} \right)^{-1/3}; \quad \alpha = \text{Const} \approx 1 \quad (6.42)$$

Величина  $T_c$  для системы, находящейся на пороге подвижности, остается конечной только при удовлетворении достаточно жестких условий: параметры  $E_F \sim \gamma(E_F)$  и  $\mu$  должны быть достаточно малы, тогда как  $\lambda_{ph}$  должна быть близка к единице. В качестве грубой оценки можно потребовать  $\lambda_{ph} \approx 1$ ,  $\mu \lesssim 0.2$  и  $E_F \lesssim 10^3 T_{c0}$ . По-видимому, такая ситуация может реализоваться в некоторых сверхпроводниках со структурой фаз Шевреля /238/ (см. ниже).

Используя (6.41) и (6.42) можно написать простую интерполяционную формулу для зависимости  $\mu^*$  от проводимости  $\sigma$ :

$$\mu^*(\sigma) = \mu_0^* + \frac{\alpha \mu \left( \frac{\omega_D}{2\gamma(E_F)} \right)^{-1/3} - \mu_0^*}{1 + \left( \frac{\omega_D}{2\gamma(E_F)} \right)^{-1/3} \frac{\sigma(\sigma + \sigma_c)}{\sigma_c^2}} \quad (6.43)$$

Для того, чтобы получить выражение через наблюдаемые параметры учтем еще, что  $\frac{\omega_D}{\gamma(E_F)} \approx \frac{\omega_D}{E_F} \left( 1 + \frac{\sigma}{\sigma_c} \right)$ . Это выражение описывает плавный переход от области слабого влияния локализации на  $T_c$  (см. (6.41)) к непосредственной окрестности перехода Андерсона (см. (6.42)), происходящий при  $\omega_c \approx \omega_D$ .

На Рис. 6.4 мы сравниваем теоретическое поведение  $T_c$ , основанное на использовании выражения для  $\mu^*$  из (6.43), с экспериментальными данными по  $T_c$ , полученными в работе /229/ на соединении  $\text{SnMo}_5\text{S}_6$ . Зависимость  $T_c$  от  $\sigma$  была рассчитана с помощью стандартной формулы Мак Миллана /221, 235/ с учетом из (6.43). Следуя /229/, мы приняли предэкспоненциальный фактор в формуле Мак Миллана равным 125 К,  $\mu_0^* = 0.1$  и  $\lambda_{ph} = 1.06$ .

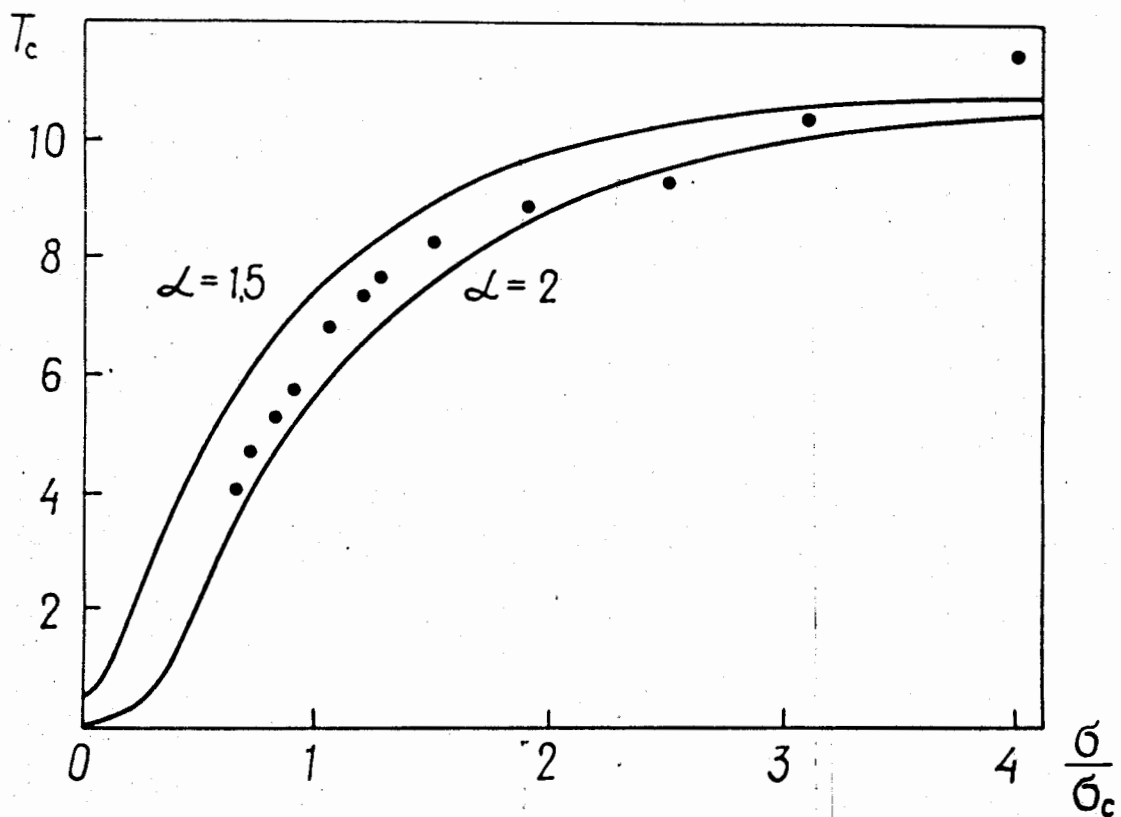


Рис.6.4. Температура сверхпроводящего перехода в зависимости от проводимости. Сравнение теоретических кривых, основанных на  $\mu^*(\sigma)$  из (6.43) с экспериментальными данными работы /229/ по  $\text{Sn Mo}_5 \text{S}_6$ .

Тогда, для  $\frac{E_F}{\omega_D} \approx 5$  получаем  $\mu \approx 0.13$ . Теоретические кривые на Рис.6.4 приведены для  $\sigma_c = 1500 \text{ ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  и  $\alpha = 1.5$  и  $2.0$ . Принимая во внимание грубость теории, согласие с экспериментом представляется вполне удовлетворительным.

Перейдем теперь к рассмотрению области  $E_F < E_c$ , т.е. андерсоновского диэлектрика. Согласно (6.27) и (3.7), (5.15) в этом случае в кулоновском ядре возникает  $\delta(\omega)$  - вклад, связанный с обсуждавшимся в разделе 5.1 "хаббардовским" отталкиванием электронов в одном квантовом состоянии, которое становится отличным от нуля в области локализации:

$$K_c^{loc}(\omega) = v_0 A_{E_F} \delta(\omega); \quad A_{E_F} = A_{E_F}(\vec{r}-\vec{r}') \Big|_{\vec{r}=\vec{r}'} \sim R_{loc}^{-3}(E_F) \quad (6.44)$$

Этот механизм действует в дополнение к рассмотренным выше вкладам в  $\mu^*$ , связанным с "регулярной" частью спектральной плотности Березинского-Горькова. Если рассмотреть (6.44) в качестве полного кулоновского ядра, уравнение (6.36) может быть решено точно (см. Приложение 5). Тогда уравнение для  $T_c$  может быть приближенно представлено в виде:

$$\ln \frac{T^*}{T_c} \approx \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{\mu A_{E_F}}{4 T_c N(E_F)} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) \quad (6.45)$$

где  $T^*$  принята равной критической температуре на пороге подвижности, т.е. определяется (6.38) с заменой  $\mu_0^*$  на  $\mu^*$  из (6.42). При этом, фактически, мы несколько переоцениваем роль кулоновского взаимодействия в области локализации. Видим, что дополнительное ("хаббардовское") отталкивание действует на  $T_c$  как магнитные примеси /226,235/ с эффективной частотой "спин-флип" рассеяния:

$$\frac{1}{\tau_{sf}} = \pi \frac{\mu A_{E_F}}{N(E_F)} \sim \frac{\mu}{N(E_F) R_{loc}^3(E_F)} \quad (6.46)$$

Сверхпроводимость сохраняется до тех пор, пока  $\tau_{sf}^{-1} < 0.57 T^*$ ,

т.е. при

$$R_{loc}(E_F) > \left\{ \frac{\mu}{N(E_F)T_c^*} \right\}^{1/3} \sim (\zeta_0 p_F^{-2})^{1/3} \sim (\zeta_0 l^2)^{1/3} \quad (6.47)$$

где последние оценки грубо справедливы при типичных значениях параметров и соответствуют условию (6.14) (причем величина  $T_c$ , определяющая  $\zeta_0$ , подразумевается здесь равной  $T^*$ , т.е. порядка истинной температуры перехода в окрестности порога подвижности, ясно, что  $T^* \ll T_{c0}$ ). Таким образом, кулоновское отталкивание электронов в одном квантовом (локализованном!) состоянии приводит к быстрому подавлению сверхпроводимости в области локализации. Любопытно связать это явление с возникновением моттовской полосы однократно занятых состояний под уровнем Ферми (см. раздел 5.1), т.е. с появлением "свободных" спинов. Размер возможной области "сосуществования" локализации и сверхпроводимости грубо определяется неравенствами (6.14), (6.47).

Эффекты кулоновской щели /187-190/ здесь несущественны. В самом деле, согласно Эфросу и Шкловскому, ширина кулоновской щели определяется оценкой /187/:

$$\Delta_c \approx \frac{e^2}{[\epsilon(0\omega \rightarrow 0)]^{3/2}} [N(E_F)]^{1/2} \quad (6.48)$$

где  $\epsilon(0\omega \rightarrow 0)$  - диэлектрическая проницаемость андерсоновского диэлектрика. Вблизи порога подвижности, согласно (3.109), (5.99), имеем:

$$\epsilon(0\omega \rightarrow 0) \approx 4\pi e^2 N(E_F) R_{loc}^2(E_F) \quad (6.49)$$

Соответственно, получаем оценку:

$$\Delta_c \sim [N(E_F) R_{loc}^3(E_F)]^{-1} \quad (6.50)$$

и при выполнении (6.14), (6.47) мы имеем  $\Delta_c \ll T_c$ . Поэтому в области возможного "сосуществования" локализации и сверхпроводимости

мости кулоновской щелью можно просто пренебречь.

В заключение, обсудим еще раз экспериментальные возможности наблюдения эффектов, обсуждавшихся в этой главе. Удобным объектом для этого являются, по-видимому, некоторые "высокотемпературные" сверхпроводники, разупорядоченные путем облучения быстрыми нейтронами. Среди большого числа экспериментов такого рода, наибольший интерес представляют некоторые результаты, полученные на облученных сульфидах молибдена (сверхпроводники со структурой фаз Шевреля). Для этих соединений характерны высокие значения исходной (до разупорядочения) температуры перехода  $T_{CO} \sim 15 \text{ К}$ . В тоже время, их электронный спектр характеризуется весьма узкими зонами. Согласно имеющимся зонным расчетам /238/, уровень Ферми этих соединений, как правило, лежит очень близко к верхнему краю зоны проводимости, так что характерные значения  $E_F$  (для дырок) порядка всего лишь  $10^3 \text{ К}$ . Такая ситуация представляется идеальной с точки зрения обсуждавшихся выше критериев наблюдения сверхпроводимости в системе, находящейся в окрестности перехода Андерсона. В связи с этим отметим результаты, полученные на облученных  $SrMo_5S_6$  /229/ и  $Pb_{1-x}U_xMo_6S_8$  /230/. Сильное разупорядочение этих систем ведет к понижению  $T_C$  до значений порядка  $1 \text{ К}$ , при соответствующем росте остаточного сопротивления до значений порядка нескольких единиц на  $10^{-3} \text{ ом см}$ , что согласуется с моттовскими оценками минимальной металлической проводимости. При этом температурный коэффициент сопротивления становится отрицательным, причем его абсолютная величина довольно значительна. Наблюдаемые здесь значения остаточного сопротивления существенно превышают его значения в большинстве "грязных" сплавов, где отрицательный температурный коэффициент сопротивления появляется, как правило, в области Иоффе-Регеля, при сопротивлениях, превышающих  $10^{-4} \text{ ом см}$  (см. например обзор /239/). С точки зрения эмпирических критериев локализации эти результаты ка-



жуются весьма привлекательными. Выше уже отмечалось, что данные по поведению  $\left(\frac{dH_{c2}}{dT}\right)_{T_c}$  в этих соединениях также находятся в качественном согласии с теоретическими предсказаниями. Поведение  $T_c$  также находится в соответствии с ними (см. Рис. 6.4), несмотря на очевидную грубость теории. Значения  $\sigma_c \sim 10^3 \text{ ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ , хотя и превышают почти на порядок типичные оценки минимальной металлической проводимости, все же существенно ближе к ним, чем значения, найденные из аналогичной подгонки в работе /221/. Как уже отмечалось в Главе I, "буквенный" масштаб проводимости  $\sigma_c$  как раз порядка  $10^3 \text{ ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ , а малость в моттовской оценке "набирается" из численных множителей (ср. (3.91)), которые не вполне точно определяются существующей теорией. Напомним в связи с этим, что и в экспериментах на  $\text{Si}$ , легированном  $P$ , наблюдался резкий переход металл-диэлектрик, начиная со значений  $\sigma_c$ , примерно на порядок превышающих оценку  $\sigma_{\text{min}}$  в этой системе (ср. (1.28))/47,48,51/. Это согласуется с нашими значениями  $\sigma_c$ , найденными из подгонки данных по  $T_c$ . Все это позволяет нам с определенной долей уверенности утверждать, что обсуждаемые соединения, будучи облучены достаточно большим флюенсом быстрых нейтронов, действительно находятся в окрестности перехода Андерсона, оставаясь при этом сверхпроводниками. Разумеется, на основе существующих данных нельзя утверждать, что какое-либо из этих соединений находится в состоянии андерсоновского диэлектрика.

В заключение отметим, что сильная анизотропия движения электронов и узость энергетических зон в недавно открытых органических сверхпроводниках /240/ может привести к возможности андерсоновской локализации в них при слабом беспорядке, когда  $\gamma(E_F) \ll E_F$ , так что все критерии "сосуществования" локализации и сверхпроводимости будут существенно облегчены.

## 7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ В ФИЗИКЕ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ.

### 7.1. Локализация спиновых волн в ферромагнетике с хаотической анизотропией типа "легкая ось"

Основные идеи и методы теории локализации электронов в неупорядоченных системах оказываются полезными и при обсуждении целого ряда других явлений в физике неупорядоченных систем, в частности неупорядоченных магнетиков. В этом разделе, основываясь на работе /241/, выполненной автором совместно с М.В.Медведевым, мы рассмотрим спин-волновые возбуждения в ферромагнетике с хаотической анизотропией типа "легкая ось". Будет показано, что такая неупорядоченность приводит к аномальному затуханию магнонов у края спин-волновой полосы, что связано с локализацией спиновых волн. При этом оказывается, что задача о локализации магнонов изоморфна, в рассматриваемой модели, задаче о локализации электронов в модели Андерсона с диагональным беспорядком.

Гамильтониан модели одноосного гайзенберговского ферромагнетика имеет вид ( $i, j$  - нумеруют узлы решетки,  $\vec{S}_i$  - оператор спина на узле  $i$ ):

$$H = -\frac{1}{2} J \sum_{i \neq j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \sum_i K_i (S_i^z)^2 \quad (7.1)$$

где обменный интеграл  $J > 0$ , а суммирование в члене обменного взаимодействия идет лишь по ближайшим соседям. Будем предполагать, что параметр одноионной анизотропии  $K_i$  принимает случайные значения на разных узлах, сохраняя однако условие  $K_i \geq 0$ , что гарантирует параллельное (ферромагнитное) выстраивание спинов в основном состоянии  $|\psi_0\rangle$ , энергия которого равна:

$$E_0 = -\frac{1}{2} J N Z S^2 - S^2 \sum_i K_i \quad (7.2)$$

где  $N$  - полное число атомов в решетке,  $Z$  - число ближайших

соседей,  $S$  - величина спина на узле.

Запишем уравнение Шредингера для первого возбужденного состояния  $|\psi_1\rangle$  с одним спиновым отклонением (суммарная  $Z$  - проекция спинового момента кристалла  $S_{SUM}^Z = NS - 1$ ):

$$H|\psi_1\rangle = E_1|\psi_1\rangle \quad (7.3)$$

Волновая функция  $|\psi_1\rangle$  разлагается по ортонормированному набору, описывающему одночастичные спиновые отклонения, локализованные на узлах:

$$|\psi_1\rangle = \sum_i c_i |i\rangle; \quad |i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_i^- |\psi_0\rangle \quad (7.4)$$

$$S^\pm = S^x \pm i S^y$$

В результате возникает однородное уравнение для коэффициентов  $c_i$ :

$$[E - JSZ - (2S-1)K_i]c_i + JS \sum_j c_j = 0 \quad (7.5)$$

или неоднородное уравнение для функций Грина:

$$[E - JSZ - (2S-1)K_i]G_{ij}(E) + JS \sum_k G_{kj}(E) = \delta_{ij} \quad (7.6)$$

где суммирование идет по ближайшим соседям  $i$ -го узла, а энергия  $E = E_I - E_0$  отсчитывается от энергии основного состояния. Под

$G_{ij}(E)$  в (7.6) подразумевается Фурье-образ запаздывающей функции Грина:

$$G_{ij}(t) = -i\theta(t) \frac{1}{2S} \langle \psi_0 | S_i^+(t) S_j^-(0) | \psi_0 \rangle \quad (7.7)$$

Для расчета спектра спиновых волн можно воспользоваться методом, предложенным в работе Эдвардса и Джонса /242/ (аналог обычной техники Эдвардса для электрона в системе примесей) и получить в борновском приближении следующий закон дисперсии /241/:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{q}) = (2S-1)\langle K \rangle \left[ 1 - \left( \frac{2S-1}{S} \right) \frac{\Phi[K]}{J\langle K \rangle} \zeta \right] + \\ + \left[ 1 - \left( \frac{2S-1}{S} \right)^2 \frac{\Phi[K]}{J^2} \eta \right] JSa^2 q^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

и затухание спиновых волн:

$$\gamma(\vec{q}) = (2S-1)^2 \frac{\Phi[K]}{\pi JS} a q \quad (7.9)$$

Выражения (7.8), (7.9) справедливы в длинноволновом пределе  $qa \ll 1$ , ( $a$  - постоянная решетки),  $\langle K \rangle$  обозначает среднее значение параметра одноионной анизотропии, а  $\Phi[K]$  - его дисперсию:

$$\begin{aligned} \langle K_i K_j \rangle &= [\langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2] \delta_{ij} + \langle K \rangle^2 \equiv \\ &\equiv \Phi[K] \delta_{ij} + \langle K \rangle^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

откуда видно, что при выводе использовано также предположение о статистической независимости флуктуаций параметра анизотропии на разных узлах. В (7.8) и (7.9)  $\zeta$  и  $\eta$  - некоторые численные константы, зависящие от типа решетки, для ПК решетки  $\zeta \approx 0.51$ ,  $\eta \approx 0.05 / 24I$ .

Из (7.8) видно, что учет флуктуаций параметра анизотропии уменьшает щель в спин-волновом спектре и коэффициент спин-волновой жесткости. Соответствующие поправки малы при  $\Phi[K]/\langle K \rangle J \ll 1$  и  $\Phi[K]/J^2 \ll 1$ . Однако, наиболее интересное следствие формул (7.8), (7.9) состоит в следующем. Ход дисперсионной кривой при  $q \rightarrow 0$  становится плохо определенным в силу того, что  $\varepsilon(\vec{q}) - \varepsilon(0) \sim q^2$ , тогда как  $\gamma(\vec{q}) \sim q$ . Спектр спиновых волн хорошо определен лишь при условии:

$$\frac{\gamma(\vec{q})}{\varepsilon(\vec{q}) - \varepsilon(0)} \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{2S-1}{S} \right) \frac{\Phi[K]}{J^2} \frac{1}{a q} \ll 1 \quad (7.11)$$

т.е. только при  $\Phi[K]/J^2 \ll a q \ll 1$ . По-видимому, впервые это важное обстоятельство было отмечено в работе /243/ на примере "асперомагнетиков" со случайным распределением направлений осей легкого намагничивания.

Заметим, что в рассматриваемой модели не существует бесщелевая голдстоуновская мода. Ее существование обычно связывается с непрерывным вырождением основного состояния, которое отсутствует в системах с анизотропией типа "легкая ось". Ситуация меняется в системах с анизотропией типа "легкая плоскость" ( $K_i < 0$ ), где сохраняется инвариантность основного состояния относительно поворотов в плоскости легкого намагничивания.

Обсуждаемое появление области плохой определенности спин-волнового спектра совершенно аналогично существованию такой же области вблизи дна электронной зоны, в задаче об электроне в системе примесей (см. Гл. 3, 4), где она обозначалась  $E_{sc}$  (см. (3.49), (4.18)). В данном случае из (7.8)–(7.11) следует существование аналогичной области "сильной связи":

$$E_{sc} \sim S D^2 [K] J^{-3} \quad (7.12)$$

что в точности соответствует (3.49) (при  $d = 3$ ), с учетом замены  $m \rightarrow 2 [J S a^2]^{-1}$ ,  $\rho V^2 \rightarrow (2S-1)^2 D [K] a^3$ .

Появление области неприменимости теории возмущений вблизи дна спин-волновой полосы свидетельствует (аналогично задаче об электроне) о возможности локализации спиновых возбуждений. В этом нетрудно убедиться и непосредственно. В самом деле, если ввести:

$$E_i = (2S-1) K_i + JSZ \quad ; \quad V = JS, \quad (7.13)$$

то уравнение (7.6) совпадает с (2.6), определяющим одноэлектронную функцию Грина в модели Андерсона с диагональным беспорядком. Это позволяет применить в рассматриваемой задаче методы, обсуждавшиеся в Главе 2. Если не претендовать на большую численную точность в определении положения порога локализации и ограничиться качественным анализом, то можно воспользоваться приближением Займана /66/ (2.32)–(2.35), которое в данном случае дает условие локализации магнонов в следующем виде:

$$Z \exp \left\langle \ln \left| \frac{JS}{E - JSZ - (2S-1)K_i} \right| \right\rangle \leq 1 \quad (7.14)$$

Рассмотрим случай равномерного распределения случайных значений параметра анизотропии в интервале:

$$\langle K \rangle - \frac{W}{2} < K_i < \langle K \rangle + \frac{W}{2}; \quad W \leq 2\langle K \rangle \quad (7.15)$$

Выполнив усреднение в (7.14) находим, что одночастичные спиновые возбуждения будут локализованы при условии:

$$Z e^{\frac{1}{|x^2 - y^2|^{1/2}} \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^{\frac{x}{2y}}} \leq 1 \quad (e=2.718...) \quad (7.16)$$

где  $x = [E - JSZ - (2S-1)\langle K \rangle] / JS$  - безразмерная энергия, а  $y = (2S-1)W / 2JS$  - безразмерный разброс случайных значений параметра анизотропии. Знак равенства в (7.16) дает уравнение для порога локализации магнонов. При этом, в силу инвариантности (7.16) относительно замены  $x \rightarrow -x$  следует симметрия положений порогов локализации относительно точки  $x=0$ , т.е. относительно  $E = (2S-1)\langle K \rangle + JSZ$  - середины спин-волновой полосы в приближении среднего поля. Тогда, полагая  $x=0$ , находим условие, определяющее величину разброса значений анизотропии, необходимой для локализации возбуждений во всей зоне:

$$\frac{2(2S-1)}{2JS} \langle K \rangle > \frac{2S-1}{2JS} W > Ze \quad (7.17)$$

Для нас, однако, более интересен случай относительно малой по сравнению с  $\langle K \rangle J$  и  $J^2$  дисперсии  $\mathcal{D}[K] = W^2/12$ . В пределе  $y \rightarrow 0$  из (7.16) следует  $x = \pm Z$ . Поэтому, в случае  $y/x \approx y/Z \ll 1$  получаем уравнение:

$$|x| \approx Z \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right] \quad (7.18)$$

с решением:

$$x \approx \pm Z \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{y}{Z} \right)^2 \right] \quad (7.19)$$

Таким образом, "нижний" порог локализации  $E_c$  будет равен:

$$\begin{aligned} \frac{E_c}{2JS} &= \frac{(2S-1)\langle K \rangle}{2JS} \left[ 1 - \frac{1}{Z} \left( \frac{2S-1}{2S} \right) \frac{\mathcal{D}[K]}{\langle K \rangle J} \right] = \\ &= \frac{\varepsilon(0)}{2JS} + \left( \frac{2S-1}{2S} \right)^2 \left( \zeta - \frac{1}{Z} \right) \frac{\mathcal{D}[K]}{J^2} \end{aligned} \quad (7.20)$$

где для удобства выделена энергия щели  $\varepsilon(0)$  в спектре (7.8),

$$\zeta - \frac{1}{Z} \approx 0.34 \quad \text{для ПК решетки.}$$

Заметим, что аналогичный результат, хотя и с другим численным коэффициентом дает критерий локализации работы /74/:

$$\frac{E_c}{2JS} = \frac{\varepsilon(0)}{2JS} + \left( \frac{2S-1}{2S} \right)^2 \left( \zeta - \frac{2}{K_c} \right) \frac{\mathcal{D}[K]}{J^2} \quad (7.21)$$

где через  $K_c$  обозначена константа связности решетки (2.34) (дабы не путать ее с параметром анизотропии). Для ПК решетки имеем

$$\zeta - \frac{2}{K_c} \approx 0.08.$$

Из (7.20), (7.21) видно, что при малости дисперсии параметра анизотропии по отношению к обменному взаимодействию  $\mathcal{D}[K]/J^2 \ll 1$ , область сильного затухания спиновых волн простирается примерно до энергий  $\sim \mathcal{D}^2[K]/J^3 \sim E_{sc}$  вверх от дна спин-волновой зоны "среднего" кристалла (ср. (7.8) при  $\mathcal{D}[K]=0$ ,  $q=0$ ), тогда как нижний порог локализации расположен ниже щели спин-волнового спектра "среднего" кристалла на величину  $\sim \mathcal{D}[K]/J$  (но, разумеется, выше щели  $\varepsilon(0)$ , полученной для разупорядоченного кристалла по теории возмущений (ср. Рис. П2. I в Приложении 2)) и лежит, таким образом в области энергий  $\leq E_{sc}$  из (7.12). При этом оценка положения порога локализации по Займану /66/ дает несколько более высокое его положение, чем оценка по методу работы /74/.

Таким образом, существование флуктуаций параметра анизотропии типа "легкая ось" приводит к росту затухания у дна спин-волновой

полосы и локализации магнонов внутри области аномального затухания. К сожалению, резкий рост затухания делает невозможным изучение этой области резонансными методами (например, методом спин-волнового резонанса), но можно предположить, что возникновение локализации спиновых возбуждений скажется на явлениях переноса (например повлияет на величину магнонного вклада в теплопроводность).

Ситуация с появлением области аномального затухания у дна спин-волновой полосы является типичной для неупорядоченных магнетиков с анизотропией типа "легкая ось", в частности, как отмечено выше, она реализуется в "асперомагнетике" с хаотически ориентированными осями легкого намагничивания /243/, а также в ферромагнетиках с регулярными значениями параметра анизотропии типа "легкая ось", но хаотическими обменными связями разных знаков/244/. Поэтому, взаимосвязь аномального затухания магнонов и их локализации, продемонстрированная в рассмотренной модельной задаче, позволяет считать, что во всех таких случаях можно ожидать локализации спиновых волн у краев зоны одночастичных спиновых возбуждений. В случае неупорядоченных магнетиков только с изотропными обменными взаимодействиями или с анизотропией типа "легкая плоскость" можно рассчитывать на локализацию магнонов лишь у верхнего края спин-волновой зоны.



## 7.2. Высокотемпературные разложения в модели Изинга со случайными связями.

В последние годы проявляется большой интерес к исследованию свойств неупорядоченных магнитных систем, в которых возникает состояние спинового стекла (см. обзоры /245,246/). Теория спиновых стекол еще далека от ясности и завершенности, существует много альтернативных схем описания этого состояния. При этом, в ряде работ предпринимались попытки понять это состояние с использованием представлений современной теории локализации /247-249/. В этом и следующих разделах нас, однако, будет интересовать другой аспект этой проблемы - использование методов, разработанных для решения задач теории локализации, в теории неупорядоченных магнетиков.

Популярным объектом изучения в теории является модель Изинга со случайными связями /80,81,250-256/. Имеется ввиду ситуация, когда в изинговской решетке случайным образом, с концентрацией  $C$  распределены антиферромагнитные связи, а ферромагнитные распределены с концентрацией  $1-C$ . В этой модели была впервые сформулирована важная концепция фрустраций /80,81,252,255/. Одной из основных и не решенных еще полностью проблем в этой модели является структура ее фазовой диаграммы и, в частности, величина критической концентрации антиферромагнитных связей, при которой в системе исчезает ферромагнетизм. Эти проблемы рассматривались различными методами, от численного моделирования /250-252/ и методов ренормгруппы /251,254/ до относительно простых вариантов приближения молекулярного поля для неупорядоченных систем /253, 256/. В этом разделе, следуя работе М.В.Медведева и автора /257/, мы рассмотрим эти проблемы с помощью метода, основанного на изучении сходимости высокотемпературного ряда для модели Изинга в так называемом приближении путей без пересечений, использовавшем-

ся ранее для регулярного случая в работах Домба (см. например /258/). Наш метод тесно связан с рассмотрением сходимости аналогичного ряда, возникавшего выше (раздел 2.2) при рассмотрении локализации в модели случайных фаз /78/.

Рассмотрим решетку Изинга, описываемую гамильтонианом вида:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (7.22)$$

где обменное взаимодействие считается отличным от нуля только между ближайшими соседями и принимает случайные значения, а  $\sigma_i = \pm 1$  изинговский спин. Функция распределения обменных взаимодействий считается факторизующейся по связям:

$$\mathcal{P} \{ J_{ij} \} = \prod_{\langle ij \rangle} P(J_{ij}) \quad (7.23)$$

где

$$P(J_{ij}) = c \delta(J_{ij} - J_B) + (1-c) \delta(J_{ij} - J_A) \quad (7.24)$$

Здесь  $J_A > 0$  - "ферромагнитный" обменный интеграл,  $J_B < 0$  - "антиферромагнитный" обменный интеграл,  $0 \leq c \leq 1$  - концентрация антиферромагнитных связей.

Статистическая сумма системы может быть, как обычно, представлена в следующем виде ( $\sum_{\{\sigma\}} \dots = 2^{-N} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \dots$  - сумма по всем спиновым конфигурациям,  $N$  - число узлов) /259, Гл.6/:

$$Z \{ \beta \} = \sum_{\{\sigma\}} \left[ \exp \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} \sigma_i \sigma_j \right] = \quad (7.25)$$

$$= \sum_{\{\sigma\}} \left[ \prod_{\langle ij \rangle} (\text{ch } K_{ij}) (1 + w_{ij} \sigma_i \sigma_j) \right]$$

где  $w_{ij} = \text{th } K_{ij}$ ,  $K_{ij} = \beta J_{ij}$ ,  $\beta = \frac{1}{T}$ . Высокотемпературное разложение - это разложение (7.25) по степеням  $w_{ij}$ . Коэффициент при

$N$ -й степени  $w_{ij}$  определяется всевозможными произведениями  $N$  пар  $\sigma_i \sigma_j$ . Поскольку выполняются условия  $\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i = 0$ ,  $\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i^2 = \sum_{\{\sigma\}} 1 = 1$ , этот коэффициент может быть представлен замкнутым путем (многоугольником) на решетке (См. Рис. 7.1 (а)). Каждой связи на графике соответствует фактор  $\text{th } K_{ij}$ , и каждая связь появляется только один раз. В каждой вершине графика "встречается" четное число связей. Разложение  $Z\{\beta\}$  определяется всевозможными многоугольниками (включая несвязные), которые можно изобразить на решетке, руководствуясь этими правилами. В низших порядках по  $N$  большинство соответствующих графиков представляют собой пути без пересечений на решетке (Ср. Рис. 7.1 (а) - (1,3,4)).

Логарифм статистической суммы (7.25):

$$\ln Z\{\beta\} = \sum_{\langle ij \rangle} \ln \text{ch } K_{ij} + \ln \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + w_{ij} \sigma_i \sigma_j) \quad (7.26)$$

также может быть представлен в виде разложения по степеням  $w_{ij}$  /258/. Это разложение определяется только связными графиками, которые представляют собой замкнутые пути на решетке, начинающиеся и заканчивающиеся в заданном узле решетки. Однако, в этом случае графики не столь просты, как в случае статистической суммы. В частности, каждая связь может появиться несколько раз, хотя опять только четное число связей может "встретиться" в каждой вершине. Эти графики могут быть классифицированы по так называемому цикломатическому числу  $C = l - p + 1$  /258/, где  $l$  - число линий графика (кратные связи считаются как одна),  $p$  - число вершин. Класс графиков, соответствующих  $C=1$ , состоит из графиков, топологически эквивалентных замкнутым путям без пересечений (которые, однако, могут проходиться многократно). Примеры таких графиков приведены на Рис. 7.1 (б) (1-3). На Рис. 7.1 (б) (4) мы приводим пример графика с  $C=2$  (график, принадлежащий  $\theta$ -топологии /258/). Наше основное приближение состоит в пренебрежении

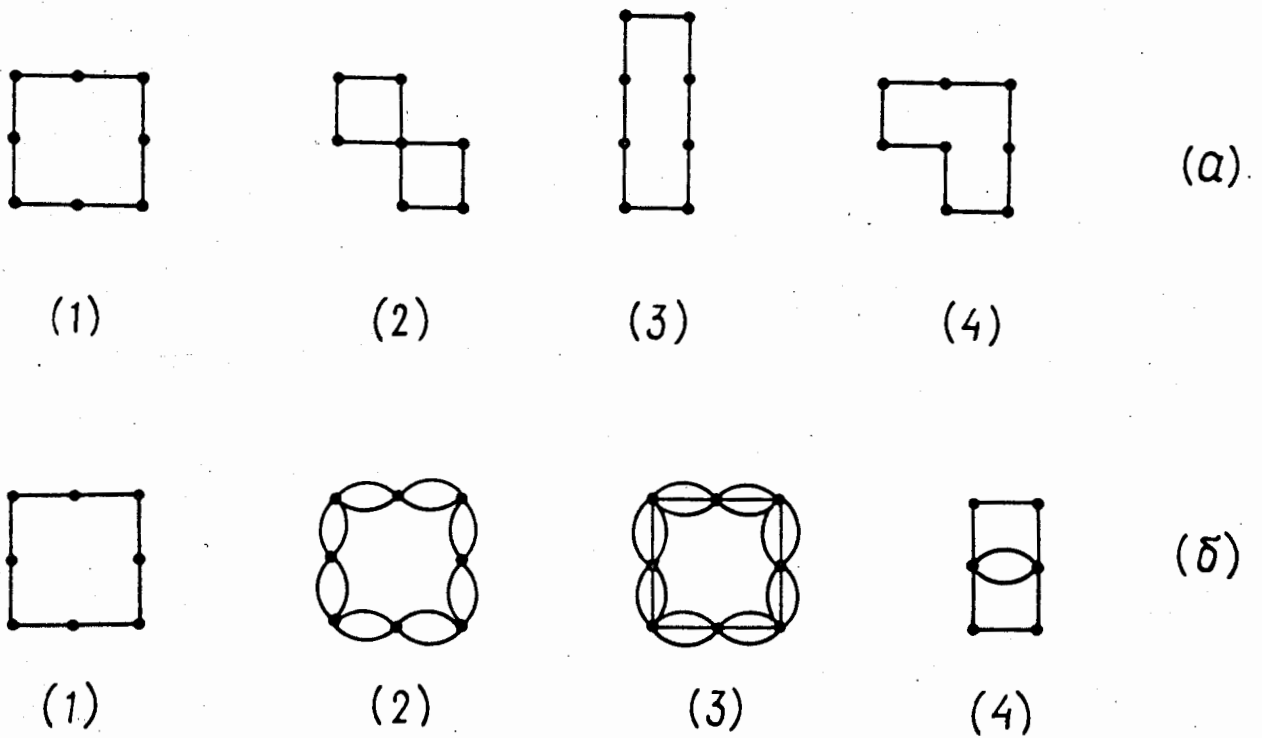


Рис. 7.1 (а) - Примеры графов в разложении  $Z\{\beta\}$  для  $N=8$ .  
 (б) - Примеры графов в разложении  $\ln Z\{\beta\}$ .

всеми графиками с  $C > 1$ , таким образом учитываются только графики, топологически эквивалентные замкнутым путям без пересечений (приближение путей без пересечений).

Тогда получаем:

$$\ln \tilde{Z}\{\beta\} = \ln Z\{\beta\} - \sum_{\langle ij \rangle} \ln \text{ch } K_{ij} =$$

$$= \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_N^i} \frac{1}{N} w_{ij} w_{jk} \dots w_{li} - \quad (7.27)$$

$-\frac{1}{2} \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_{N/2}^i} \frac{2}{N} w_{ij}^2 w_{jk}^2 \dots w_{li}^2 + \frac{1}{3} \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_{N/3}^i} \frac{3}{N} w_{ij}^3 w_{jk}^3 \dots w_{li}^3 + \dots$

Здесь произведения  $w_{ij}, w_{ij}^2, \dots$  и т.д., берутся вдоль всевозможных путей без пересечений  $\Gamma_N^i$  из  $N$  шагов,  $\Gamma_{N/2}^i$  из  $N/2$  шагов (но с двумя связями  $w_{ij}$  на каждом шагу) и т.п., начинающихся и заканчивающихся на  $i$ -м узле. Структура разложения (7.27) ясна из (7.26) и разложения  $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$ . Дополнительные комбинаторные множители  $\frac{1}{N}$  для вкладов от  $\Gamma_N^i$ ,  $\frac{2}{N}$  для вкладов от  $\Gamma_{N/2}^i$  и т.д., связаны с тем обстоятельством, что "начальная" вершина  $i$  может быть произвольным образом выбрана среди  $N$  вершин  $\Gamma_N^i$ , среди  $N/2$  вершин  $\Gamma_{N/2}^i$  и т.д.

Условие устойчивости парамагнитной фазы определяется условием сходимости высокотемпературного ряда (7.27). В регулярном случае  $w_{ij} = w_{jk} = \dots = w = \tanh \beta J$  и проблема сводится к рассмотрению критерия сходимости ряда /258/:

$$\ln \tilde{Z}\{\beta\} \approx \sum_N a_N w^N \quad (7.28)$$

где

$$a(N) = p(N) - \frac{1}{2} p(N/2) + \frac{1}{3} p(N/3) + \dots \quad (7.29)$$

$$p(N) = \frac{1}{N} U_N \quad (7.30)$$

где  $U_N$  - уже рассматривавшееся выше /см. (2.33)/ полное число замкнутых путей без пересечений из  $N$  шагов на решетке, связанных с данным узлом. Известно /67/, что при  $N \gg 1$  имеет место асимптотика  $U_N \approx N^{-h} K^N$ , где  $K$  - константа связности решетки (2.34) (Таблица 2.1),  $h > 0$ . Тогда очевидно, что при  $N \gg 1$  только первый член в (7.29) остается существенным (поскольку  $K > K^{1/2} > K^{1/3} \dots$ ) и ряд (7.28) расходится при выполнении условия  $K\omega = Kth\beta J \geq 1$ . Знак равенства здесь определяет критическую температуру /258/. Точность ее определения в приближении путей без пересечений достигает в регулярном случае  $\approx 3\%$  в трехмерных решетках и  $\approx 10\%$  в двумерных решетках.

В неупорядоченной системе высокотемпературное разложение (7.27) представляет собой стохастический ряд, сходимость которого должна рассматриваться в статистическом смысле. Обычно принимается, что этот ряд может быть усреднен по (7.23), (7.24), после чего считается, что он дает наблюдаемую свободную энергию системы. Мы, однако, сначала рассмотрим сходимость ряда (7.27) в смысле сходимости по вероятности, как это делается в теории локализации (Глава 2). Метод анализа сходимости при этом будет заимствован из работы автора /78/, посвященной локализации в модели случайных фаз (см. выше раздел 2.2).

Рассмотрим, прежде всего, качественно случай когда в (7.24)  $J_A = -J_B$  и  $c = 1/2$ . Тогда лишь члены с нечетными степенями  $w_{ij}$  на связях в (7.27) являются каотическими (по знаку). Рассмотрим первый ряд в (7.27). В  $N$ -м порядке по  $w_{ij}$  имеется  $\sim K^N$  слагаемых, соответственно числу путей без пересечений причем знак каждого из этих слагаемых абсолютно случаен ( $c = 1/2$ ), поскольку положительные и отрицательные связи равновероятны. Тогда, из очевидной аналогии с броуновским движением на прямой, ясно, что модуль рассматриваемого члена ряда при  $N \gg 1$  порядка  $K^{N/2} \omega^N$ , где  $\omega = th\beta J_A = th\beta |J_B|$ . Условие (порог)

расходимости ряда определяется тогда условием  $K^{1/2} w = 1$ , причем это условие совпадает с критерием расходимости второго (не случайного!) ряда в (7.27): в нем имеется  $\sim K^{N/2}$  слагаемых (в  $N$ -м порядке по  $w_{ij}$ ), каждое из которых дает фактор  $w^N$ . Существенны лишь два первых ряда в (7.27). Подчеркнем, что среднее от первого ряда в (7.27) в точности равно нулю в рассматриваемом случае  $c = 1/2$  и  $J_A = |J_B|$ . Поэтому условие сходимости усредненного высокотемпературного ряда определяется при этом вторым слагаемым в (7.27). Мы увидим, что в этом проявляются общие свойства высокотемпературного разложения для модели Изинга со случайными связями.

Рассмотрим теперь общий случай распределений (7.23), (7.24). Для модуля члена  $N$ -го порядка в первом ряду (7.27) имеем:

$$\begin{aligned} |\ln \tilde{Z}^{(N)}\{\beta\}| &= \left| \sum_{\Gamma_N} w_A^{N-\pi_{\Gamma_N}} (-w_B)^{\pi_{\Gamma_N}} \right| = \\ &= w_A^N \left| \sum_{\Gamma_N} (-a)^{\pi_{\Gamma_N}} \right| \equiv w_A^N |X_N| \end{aligned} \quad (7.31)$$

где  $\pi_{\Gamma_N}$  - число отрицательных связей, встречающихся вдоль пути  $\Gamma_N$   
 $a = \frac{w_B}{w_A}$ ,  $w_A = \tanh \beta J_A$ ,  $w_B = \tanh \beta |J_B|$ . Вероятность реализации данного значения  $\pi_{\Gamma_N}$  задается, очевидно, биномиальным распределением:

$$P_N(\pi_{\Gamma_N}) = \frac{N!}{\pi_{\Gamma_N}!(N-\pi_{\Gamma_N})!} c^{\pi_{\Gamma_N}} (1-c)^{N-\pi_{\Gamma_N}} \quad (7.32)$$

Тогда легко найти, что:

$$\langle (-a)^{\pi_{\Gamma_N}} \rangle = (1-c-ca)^N \quad (7.33)$$

$$\langle (-a)^{2\pi_{\Gamma_N}} \rangle = (1-c+ca^2)^N$$

и дисперсия отдельного слагаемого в (7.31) равна:

$$\langle (-a)^{2\pi_{\Gamma_N}} \rangle - \langle (-a)^{\pi_{\Gamma_N}} \rangle^2 = (1-c+ca^2)^N - (1-c-ca)^{2N} \quad (7.34)$$

Оценим наиболее вероятное значение  $|X_N|$  как  $\langle X_N^2 \rangle^{1/2}$  (ср. раздел 2.2).

Дисперсия суммы независимых случайных переменных равняется сумме дисперсий отдельных членов суммы. Тогда, предполагая независимость (при  $N \gg 1$ )  $\sim K^N$  членов в  $X_N$ , получаем:

$$\langle X_N^2 \rangle - \langle X_N \rangle^2 \approx K^N [(1-c+ca^2)^N - (1-c-ca)^{2N}] \quad (7.35)$$

Используя теперь:

$$\langle X_N \rangle \approx K^N \langle (-a)^{r_N} \rangle = K^N (1-c-ca)^N \quad (7.36)$$

находим

$$\langle X_N^2 \rangle \approx K^N [(1-c+ca^2)^N - (1-c-ca)^{2N}] + K^{2N} (1-c-ca)^{2N} \quad (7.37)$$

Как и в разделе 2.2, предположение о независимости вкладов от различных путей  $\Gamma_N$  является решающим для нашего анализа. Очевидно, что некоторая часть из  $\sim K^N$  путей имеет общие участки. Мы, однако, предполагаем, что это обстоятельство приводит (при  $N \rightarrow \infty$ ) к пренебрежимо малым корреляциям.

Условие сходимости первого ряда в (7.27) определяется теперь неравенством:

$$w_A \lim_{N \rightarrow \infty} \langle X_N^2 \rangle^{\frac{1}{2N}} < 1 \quad (7.38)$$

а критическая температура, соответствующая нарушению (7.38), задается уравнением:

$$w_A \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ K^{2N} \left(1-c-c \frac{w_B}{w_A}\right)^{2N} + K^N \left[ \left(1-c+c \frac{w_B^2}{w_A^2}\right)^N - \left(1-c-c \frac{w_B}{w_A}\right)^{2N} \right] \right\}^{\frac{1}{2N}} = 1 \quad (7.39)$$

В частности, для  $a = w_B/w_A = 1$ , т.е.  $|J_B| = J_A = J$ , находим:

$$w \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ K^{2N} (1-2c)^{2N} + K^N [1 - (1-2c)^{2N}] \right\}^{\frac{1}{2N}} = 1 \quad (7.40)$$

Из (7.40) получаем:



$$K^{1/2} w = 1 \quad (7.41)$$

при  $c_1^* < c < c_2^*$ , и

$$K w |1 - 2c| = 1 \quad (7.42)$$

при  $c < c_1^*$  или  $c > c_2^*$ , где критические концентрации  $c_{1,2}^*$  определяются уравнением  $K(1 - 2c)^2 = 1$  и равны:

$$c_{1,2}^* = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{K}} \quad (7.43)$$

что совпадает с (2.82). Отметим, что (7.41) просто означает, что в концентрационном интервале  $c_1^* < c < c_2^*$  все  $\sim K^N$  членов в  $X_N$  хаотичны по знаку (равновероятно!).

Для численных оценок мы используем, однако, не константу связности решетки  $K$ , как это следовало бы делать в приближении путей без пересечений, а "изинговскую" константу  $\mu$ , которая определяет точную критическую температуру регулярной решетки Изинга условием  $\mu w = 1$  /258/. Константа  $\mu$  известна с высокой точностью для разных решеток из численных расчетов точки перехода в модели Изинга /258/. Это обеспечивает "сшивку" приближения путей без пересечений с регулярным случаем при  $c = 0,1$ . (ср. аналогичную процедуру введения поправочного фактора  $\alpha$  в (2.35)) Мы надеемся, что такая процедура эквивалентна качественному учету графиков с цикломатическим числом  $C > 1$ . Фактически, эта процедура приводит к весьма малым изменениям результатов, слегка уменьшая критическую температуру (концентрацию). Определенные таким образом для различных решеток концентрации  $c_{1,2}^*$  приведены в Таблице 7.1. Полезно сравнить их с  $c_{1,2}^*$ , найденными с помощью константы  $K$ , приведенными в Таблице 2.2 (раздел 2.2). Мы полагаем, что найденные таким образом концентрации  $c_{1,2}^*$  соответствуют потере дальнего ферромагнитного и антиферромагнитного

Таблица 7.1. Критические концентрации  $c_{I,2}^*$  для  
разных решеток в случае  $J_A = |J_B|$ .

Решетка	Квадратная	Шестиугольная	ПК	ОЦК
$\mu$	2.4142	1.7321	4.5840	6.4032
$c_I^*$	0.1782	0.1201	0.2665	0.3024
$c_2^*$	0.8218	0.8799	0.7335	0.6976

Таблица 7.2. Критические концентрации  $c_{I,2}^*$  для  
разных решеток в случае  $J_B > |J_A|$ .

Решетка	Квадратная	Шестиугольная	ПК	ОЦК	
$\frac{w_B}{w_A} = 1.5$	$c_I^*$	0.1234	0.0810	0.1920	0.2214
	$c_2^*$	0.7595	0.8344	0.6517	0.6098
$\frac{w_B}{w_A} = 2.0$	$c_I^*$	0.0912	0.0587	0.1465	0.1713
	$c_2^*$	0.7135	0.8004	0.5928	0.5476
$\frac{w_B}{w_A} = 2.5$	$c_I^*$	0.0705	0.0446	0.1163	0.1375
	$c_2^*$	0.6785	0.7743	0.5485	0.5008
$\frac{w_B}{w_A} = 3.0$	$c_I^*$	0.0562	0.0350	0.0950	0.1135
	$c_2^*$	0.6508	0.7536	0.5138	0.4646

порядков в системе. Соответствующая фазовая диаграмма приведена на Рис.7.2. Ее очевидная тождественность с Рис.2.2(б) наводит на мысль о том, что рассматривавшееся в разделе 2.2 "стохастизация фаз" в явлении локализации, может быть чем-то большим, чем просто математическим явлением, а соответствующие критические концентрации  $c_{1,2}^*$  (2.82) определяют точки, в которых происходит изменение электронных корреляторов.

В общем случае  $w_A \neq w_B$  из (7.39) получаем:

$$K^{1/2} \left\{ (1-c) w_A^2 + c w_B^2 \right\}^{1/2} = 1 \quad (7.44)$$

при  $c_{1}^* < c < c_{2}^*$ , и

$$K \left| (1-c) w_A - c w_B \right| = 1 \quad (7.45)$$

при  $c < c_{1}^*$  и  $c > c_{2}^*$ , где критические концентрации  $c_{1,2}^*$  определяются корнями уравнения:

$$1 - c + c \frac{w_B^2}{w_A^2} = K \left( 1 - c - c \frac{w_B}{w_A} \right)^2 \quad (7.46)$$

В Таблице 7.2 мы приводим критические концентрации  $c_{1,2}^*$  для различных решеток и отношений  $w_B/w_A$  (при  $w_B > w_A$ ). На Рис. 7.3 показан качественный вид фазовой диаграммы при  $w_B > w_A$ .

Рассмотренные результаты получены из критерия сходимости по вероятности для первого ряда в (7.27), члены которого случайны по знаку. Сейчас мы покажем, что те же самые результаты следуют и из анализа сходимости усредненного ряда для  $\langle \ln \tilde{Z} \{ \beta \} \rangle$ :

$$\langle \ln \tilde{Z} \{ \beta \} \rangle = \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_N^i} \frac{1}{N} \langle w_{ij} w_{jk} \dots w_{li} \rangle_{\Gamma_N^i} - \quad (7.47)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_{N/2}^i} \frac{2}{N} \langle w_{ij}^2 w_{jk}^2 \dots w_{li}^2 \rangle_{\Gamma_{N/2}^i} + \dots$$

Усреднение выполняется непосредственно с использованием (7.32).

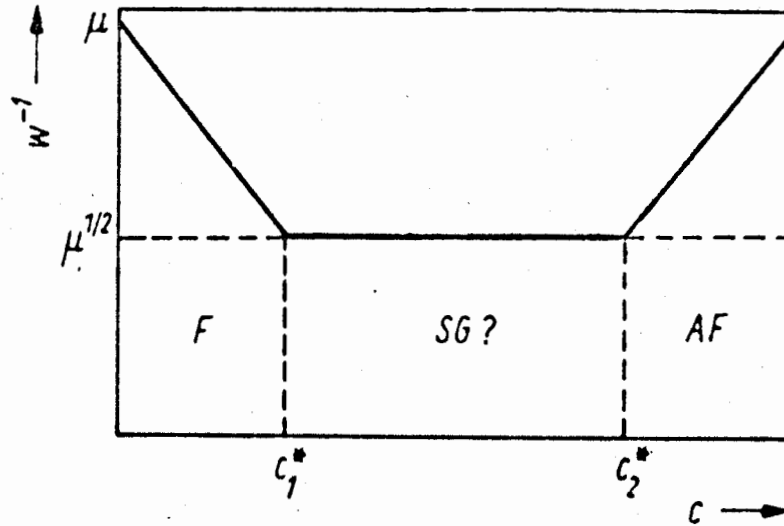


Рис.7.2. Фазовая диаграмма модели Изинга со случайными связями для случая  $J_A = |J_B|$ .

F - ферромагнитная область

AF - антиферромагнитная область

SG - область спинового стекла (?)

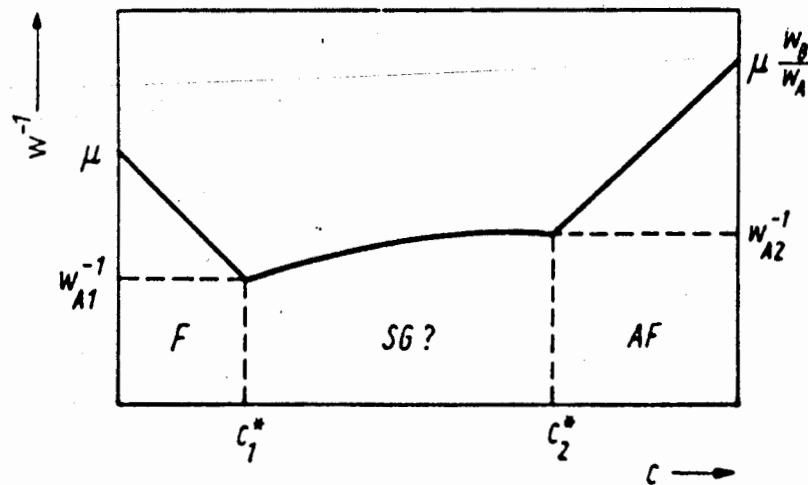


Рис.7.3. Фазовая диаграмма для случая  $J_A < |J_B|$ .

$$\frac{1}{W_{A1,2}} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{4\mu a + (1-a^2)} \pm (1-a) \right]; \quad a = \frac{W_B}{W_A}.$$

Другие обозначения те же, что на Рис.7.2.

Аналогично (7.33) получаем:

$$\langle w_{ij} w_{jk} \dots w_{li} \rangle_{\Gamma_N^i} = w_A^N \left( 1 - c - c \frac{w_B}{w_A} \right)^{N/2} \quad (7.48)$$

$$\langle w_{ij}^2 w_{jk}^2 \dots w_{li}^2 \rangle_{\Gamma_{N/2}^i} = w_A^N \left( 1 - c + c \frac{w_B^2}{w_A^2} \right)^{N/2}$$

Тогда порог расходимости первого ряда в (7.47) есть:

$$K \left| (1-c) w_A - c w_B \right| = 1 \quad (7.49)$$

а для второго ряда в (7.47) он задается условием:

$$K^{1/2} \left\{ (1-c) w_A^2 + c w_B^2 \right\}^{1/2} = 1 \quad (7.50)$$

Эти условия совпадают с (7.45) и (7.44) соответственно. Сходимость полного ряда для  $\langle \ell_n \tilde{Z} \{ \beta \} \rangle$  определяется условием (7.49) при  $c < c_1^*$  и  $c > c_2^*$ , и условием (7.50) при  $c_1^* < c < c_2^*$ , где  $c_{1,2}^*$  определяются из условия совпадения (7.49) и (7.50), что дает (7.46). Легко видеть, что остальные вклады в (7.47) (с тройными и прочими кратными связями) несущественны, поскольку соответствующие ряды сходятся, если условия (7.49) и (7.50) удовлетворены. Таким образом, условие сходимости усредненного высокотемпературного ряда приводит к тем же результатам, что и критерий сходимости по вероятности. При этом, в ходе усреднения мы не использовали предположения о статистической независимости различных путей  $\Gamma_N^i$  (при  $N \gg 1$ ), а полученные результаты подтверждают возможность его использования при анализе сходимости по вероятности. Эквивалентность обоих подходов, фактически, основана на следующей теореме [260, Гл.V, §3]: стохастический ряд (с независимыми слагаемыми) сходится с вероятностью равной единице, если сходятся усредненный ряд и ряд, члены которого равны дисперсиям слагаемых исходного ряда.

Найденные выше критические концентрации  $c_{1,2}^*$  находятся в хорошем согласии со значениями, полученными другими авторами [250-254, 261]. Заметим, однако, что в большинстве этих работ рассмат-

ривался лишь случай  $J_A = |J_B|$ , причем для простейших решеток (квадратной и ПК). Особенно впечатляющим является согласие наших результатов с расчетами критических концентраций методом Монте-Карло /252,261/. Здесь нужно особо отметить работу /261/, где соответствующие расчеты были проведены для нескольких соотношений между обменными интегралами  $J_A$  и  $|J_B|$ . В Таблице 7.3 мы проводим сравнение критической концентрации  $c_I^*$ , рассчитанной по формуле (7.46) (с учетом замены  $K$  на  $\mu$ ) для ПК - решетки, с результатами расчетов методом Монте-Карло /250,261/. Видим, что в пределах точности расчетов по Монте-Карло результаты идентичны. Это тем более удивительно, что наши расчеты относятся к линии неустойчивости парамагнитной фазы ( $T \neq 0$ ), тогда как расчеты по Монте-Карло относятся к основному состоянию ( $T = 0$ ). Кроме того, при сравнении мы пренебрегли отличием  $th \frac{J}{T}$  от  $\frac{J}{T}$  (что справедливо лишь при  $T \gg J$ ), отождествляя отношения  $\frac{|J_B|}{J_A}$  и  $\frac{w_B}{w_A}$ . Отметим, что наши результаты совпадают с результатами приближения молекулярного поля /253/, с учетом замены в последних числа ближайших соседей  $Z$  на константу связности решетки  $K$  ("изинговскую" константу  $\mu$ ), а отношения  $J/T$  на  $th \frac{J}{T}$ , что типично и для регулярной модели Изинга /258/. Однако, наши результаты получены без предположений о структуре конденсированных фаз, типичных для приближения молекулярного поля, таких как введение параметра порядка Эдвардса-Андерсона /262/.

Рассмотрим теперь физический смысл полученных результатов (ср. аналогичное обсуждение в разделе 2.2). Проведенный выше анализ сходимости по вероятности позволяет дать очень простую их интерпретацию в терминах распределения фрустраций. Хорошо известно /80,81,252,255/, что рассматриваемая модель обладает локальной калибровочной инвариантностью, и что статистическая механика системы должна формулироваться в терминах калибровочно-инвариантных величин. В нашем подходе это обеспечивается замкнутым харак-

Таблица 7.3. Критическая концентрация  $c_I^*$  исчезновения ферромагнитного дальнего порядка в модели Изинга со случайными связями, рассчитанная для ПК - решетки по формуле (7.46) и методом Монте-Карло -  $c_I^*$  (МК).

$\frac{ J_B }{J_A}$	$c_I^*$ (7.46)	$c_I^*$ (МК)
1.0	0.2665	0.2 ÷ 0.24 /250/ 0.26 ± 0.01 /261/
0.5	0.4072	0.42 ± 0.015/261/
0.2	0.5719	0.57 ± 0.02 /261/

тером путей  $\Gamma_N^i$  на решетке. Рассмотрим для простоты случай  $J_A = |J_B|$  на квадратной решетке. Тогда произведение факторов  $w_{ij}$  вдоль пути  $\Gamma_N^i$  равно:

$$w_{ij} w_{jk} \dots w_{li} = w^N \text{Sign } J_{ij} J_{jk} \dots J_{li} = w^N \prod_p \Phi_p \quad (7.51)$$

где /80,81/:

$$\Phi_p = \text{Sign } J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} \quad (7.52)$$

представляет собой произведение факторов  $J_{ij}$  вокруг элементарной грани данной решетки ( $\Phi_p = \pm 1$ ). Произведение  $\Phi_p$  в (7.51) берется по всем граням внутри контура  $\Gamma_N^i$ . Поэтому его знак положителен или отрицателен, в зависимости от того четное или нечетное число фрустрированных ( $\Phi_p = -1$ ) граней находится внутри  $\Gamma_N^i$ . Как было показано выше, при достаточно большой концентрации отрицательных (положительных) связей, превышающей  $c_1^*$  ( $c_2^*$ ), величина  $\prod_p \Phi_p$  в (7.51) равновероятно принимает значения  $\pm 1$ . Это означает, что в концентрационном интервале  $c_1^* < c < c_2^*$  внутри контура  $\Gamma_N^i$  (пути без пересечений из  $N$  ( $N \geq 1$ ) шагов, начинающегося и кончающегося в произвольном узле  $i$ ) равновероятно оказывается четное или нечетное число фрустрированных граней. Естественно предположить, что в этой ситуации в системе отсутствует дальний магнитный порядок, в соответствии с данной выше интерпретацией  $c_{1,2}^*$ . В прежних попытках подобного рассмотрения /80,81,250,252,255/ анализировались различные аспекты распределения фрустраций с изменением концентрации  $c$ , однако данная выше интерпретация неустойчивости дальнего магнитного порядка, основанная на стохастичности четности числа фрустрированных граней внутри произвольного замкнутого пути без пересечений на решетке, никем еще не предлагалась.



### 7.3. Высокотемпературные разложения в модели Изинга со случайными узлами.

В этом разделе, следуя работе М.В.Медведева и автора /263/, мы рассмотрим так называемую модель Изинга со случайными узлами, в которой спины  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  "разбросаны" по узлам решетки с концентрациями  $c_A = 1 - c$  и  $c_B = c$  и связаны между собой тремя типами обменных связей  $J_{AA}$ ,  $J_{BB}$  и  $J_{AB} = J_{BA}$ . При соответствующем выборе относительных знаков этих взаимодействий, данная модель также обладает нетривиальным магнитным беспорядком.

Рассмотрим квадратную грань (элементарный замкнутый контур на квадратной или ПК - решетке) и рассчитаем фрустрационную функцию  $\Phi_p$  (7.52), т.е. произведение обменных взаимодействий вокруг сторон грани, для различных распределений атомов А и В в ее углах. Нетривиальный беспорядок /80,81/ возникает, когда для некоторых конфигураций мы получаем  $\Phi_p < 0$ . Из Рис.7.4 можно видеть, что  $\Phi_p < 0$  имеет место только для конфигураций типа Рис.7.4(г) с двумя атомами (спинами) В в положении ближайших соседей, если мы выбираем  $J_{AA} > 0$ , а  $J_{BB} < 0$ . Таким образом, нетривиальный беспорядок в модели Изинга со случайными узлами возникает только при  $J_{AA} > 0$ ,  $J_{AB} \geq 0$ ,  $J_{BB} < 0$  или  $J_{AA} < 0$ ,  $J_{AB} \geq 0$ ,  $J_{BB} > 0$ . Мы рассматриваем решетки только с четным числом сторон элементарной грани, т.е. не рассматриваем треугольную и ГЦК решетки, в которых все грани могут оказаться фрустрированными даже при упорядоченном расположении конкурирующих обменных связей. Модель Изинга со случайными узлами впервые рассматривалась (в приближении молекулярного поля) в работе /264/. Ниже мы рассмотрим вопрос об устойчивости парамагнитного состояния в такой системе, используя анализ высокотемпературных разложений, методом, развитым в предыдущем разделе /263/, и продемонстрируем существенные качественные отличия от модели случайных

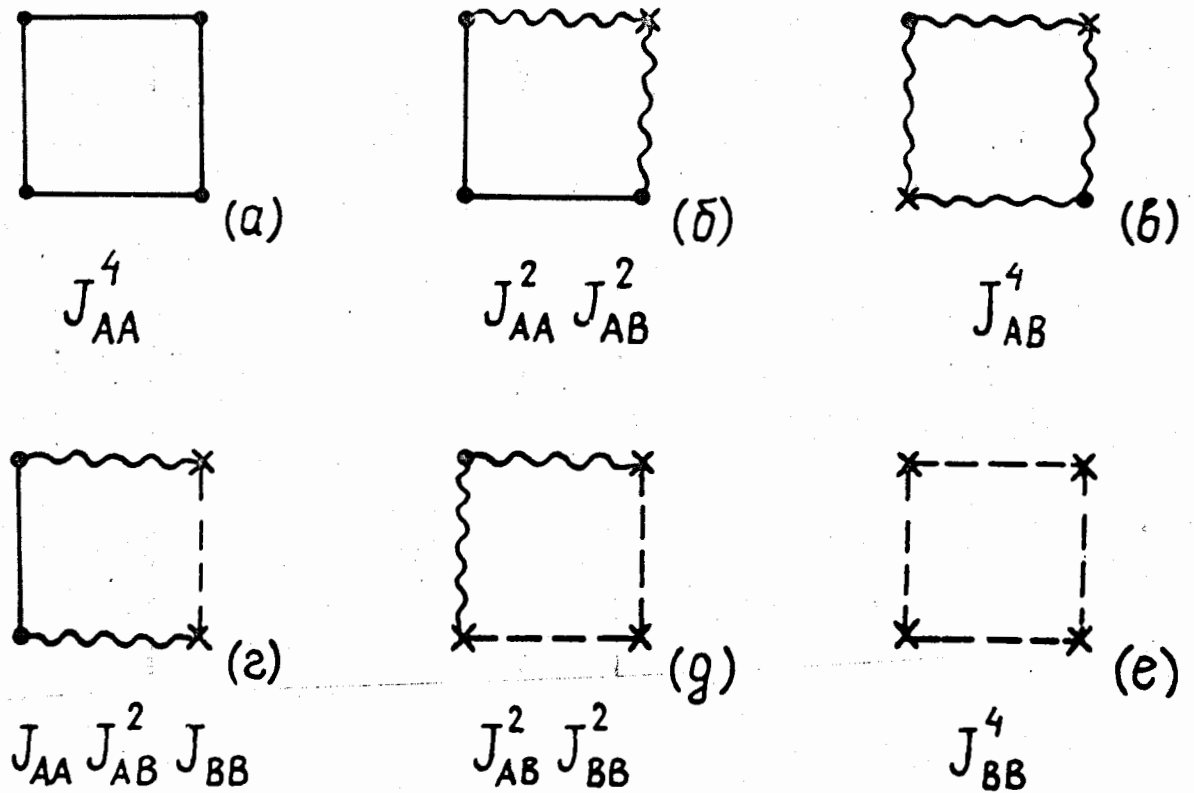


Рис.7.4. Различные распределения атомов А (точки) и В (кресты) по углам грани и соответствующие фрустрационные функции. Сплошные линии обозначают  $J_{AA}$ , волнистые линии -  $J_{AB}$ , пунктирные линии -  $J_{BB}$ .

связей.

Гамильтониан модели имеет вид:

$$H = - \sum_{\alpha\gamma} J_{\alpha\gamma} \sum_{ij} p_{\alpha i} p_{\gamma j} \sigma_{\alpha i} \sigma_{\gamma j} \quad (7.53)$$

где  $\alpha, \gamma = A, B$  обозначают тип атомов,  $\sigma_{\alpha i} = \pm 1$  - "изинговские" спины. Рассмотрим, для определенности, случай  $J_{AA} > 0$ ,  $J_{AB} = J_{BA} \geq 0$ ,  $J_{BB} < 0$ . Проекционные операторы  $p_{\alpha i}$  определяются условием:

$$p_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \text{если узел } i \text{ занят атомом } \alpha \\ 0, & \text{если нет} \end{cases} \quad (7.54)$$

а их основные свойства задаются равенствами:

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha i} = 1; \quad p_{\alpha i}^m = p_{\alpha i} \quad (m=1, 2, \dots); \quad p_{\alpha i} p_{\beta i} = 0 \quad (7.55)$$

$$\langle p_{\alpha i} \rangle = c_{\alpha}; \quad \langle p_{\alpha i} p_{\gamma j} \rangle = c_{\alpha} c_{\gamma}$$

где  $c_{\alpha}$  - концентрация атомов типа  $\alpha$ .

Статистическая сумма, соответствующая гамильтониану (7.53) приводится к стандартному виду /259/:

$$Z\{\beta\} = \prod_{ij} \text{ch } K_{ij} \sum_{\{\sigma\}} \left\{ \prod_{ij} \left( 1 + \sum_{\alpha\gamma} \sigma_{\alpha i} \sigma_{\gamma j} w_{ij}^{\alpha\gamma} \right) \right\} \quad (7.56)$$

где

$$\begin{aligned} \text{ch } K_{ij} &= \text{ch} \left( \sum_{\alpha\gamma} p_{\alpha i} p_{\gamma j} K^{\alpha\gamma} \right) = \sum_{\alpha\gamma} p_{\alpha i} p_{\gamma j} \text{ch } K^{\alpha\gamma} \\ w^{\alpha\gamma} &\equiv \text{th} (p_{\alpha i} p_{\gamma j} K^{\alpha\gamma}) = p_{\alpha i} p_{\gamma j} \text{th } K^{\alpha\gamma} = p_{\alpha i} p_{\gamma j} w^{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$K^{\alpha\gamma} = \beta J_{\alpha\gamma}$$

Аналогично проведенному выше рассмотрению, можно убедиться, что при вычислении нормированной суммы  $\sum_{\{\sigma\}}$  в (7.56), благодаря  $\sum_{\{\sigma\}} \sigma_{\alpha i} = 0$ ,  $\sum_{\{\sigma\}} \sigma_{\alpha i}^2 = 1$ , различные вклады в  $Z\{\beta\}$  могут быть представлены замкнутыми путями на решетке, как связными,

так и несвязными. Рассмотрим, например,  $\sum_{\{\sigma\}}$  от произведения факторов типа  $\sum_{\alpha\gamma} \sigma_{\alpha i} \sigma_{\gamma j} w_{ij}^{\alpha\gamma}$  вокруг грани, определяемой узлами  $ijkl$ . Используя (7.55), получим:

$$\sum_{\{\sigma\}} (\sigma_{\alpha i} \sigma_{\gamma i} \rho_{\alpha i} \rho_{\gamma i}) = \sum_{\{\sigma\}} (\sigma_{\alpha i}^2 \rho_{\alpha i}) \delta_{\alpha\gamma} = \rho_{\alpha i}^2 \delta_{\alpha\gamma} \quad (7.58)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} & \sum_{\{\sigma\}} \left( \sum_{\alpha\gamma} \sigma_{\alpha i} \sigma_{\gamma j} w_{ij}^{\alpha\gamma} \dots \sum_{\delta\beta} \sigma_{\delta l} \sigma_{\beta i} w_{li}^{\delta\beta} \right) = \\ & = \sum_{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3} w_{ij}^{\alpha\alpha_1} w_{jk}^{\alpha_1\alpha_2} w_{kl}^{\alpha_2\alpha_3} w_{li}^{\alpha_3\alpha} = \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{w}_{ij} \hat{w}_{jk} \hat{w}_{kl} \hat{w}_{li}) \end{aligned} \quad (7.59)$$

Таким образом, каждая связь  $ij$  на решетке представляется матрицей  $\hat{w}_{ij}$ , а в каждом узле "встречается" четное число связей. Вклад в  $Z\{\beta\}$  от данного графика равняется  $\text{Sp}_{\{\alpha\}}$  от произведения матриц  $w_{ij}$  вокруг замкнутого пути. Нетрудно убедиться, что в низших порядках по  $\hat{w}$  большинство таких графиков представляет собой пути без пересечений на решетке.

Логарифм статистической суммы:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{Z}\{\beta\} &= \ln Z\{\beta\} - \sum_{ij} \ln \text{ch} K_{ij} = \\ &= \ln \sum_{\{\sigma\}} \prod_{ij} \left( 1 + \sum_{\alpha\gamma} \sigma_{\alpha i} \sigma_{\gamma j} w_{ij}^{\alpha\gamma} \right) \end{aligned} \quad (7.60)$$

и его разложение по степеням  $w_{ij}$  также может быть представлено графически, аналогично обсуждению предыдущего раздела. Правила остаются теми же, только данной связи  $ij$ , "проходимой"  $\pi$  раз, сопоставляется фактор  $w_{ij}^{(\pi)} = \rho_{\alpha i} \rho_{\gamma i} (w^{\alpha\gamma})^\pi$ . Комбинируя члены с одним и тем же числом "прохождения" связей и пренебрегая всеми графиками с цикломатическим числом  $C > 1$  (т.е. в приближении путей без пересечений), получаем представление  $\ln \tilde{Z}\{\beta\}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{Z}\{\beta\} &= \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_N^i} \frac{1}{N} \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{w}_{ij} \hat{w}_{jk} \dots \hat{w}_{li}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_N^i} \frac{1}{N} \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{w}_{ij}^{(2)} \hat{w}_{jk}^{(2)} \dots \hat{w}_{li}^{(2)}) + \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$+ \frac{1}{3} \sum_N \sum_i \sum_{\Gamma_N^i} \frac{1}{N} \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{w}_{ij}^{(3)} \hat{w}_{jk}^{(3)} \dots \hat{w}_{li}^{(3)}) - \dots \quad (7.61)$$

Выполним в (7.61) концентрационное усреднение. Для данного пути без пересечений из  $N$  шагов получаем:

$$\begin{aligned} \langle \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{w}_{ij} \hat{w}_{jk} \dots \hat{w}_{li}) \rangle &= \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_{N-1}} \langle p_{\alpha_i} w^{\alpha_1} p_{\alpha_1} p_{\alpha_1} w^{\alpha_1 \alpha_2} \dots w^{\alpha_{N-1} \alpha} p_{\alpha_i} \rangle = \\ &= \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_{N-1}} c_\alpha w^{\alpha_1} c_{\alpha_1} w^{\alpha_1 \alpha_2} \dots c_{\alpha_{N-1}} w^{\alpha_{N-1} \alpha} = \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{d}_{(1)}^N) = \sum \lambda_{(1)m}^N \end{aligned} \quad (7.62)$$

где  $\hat{d}_{(1)}^{\alpha\gamma} = c_\alpha w^{\alpha\gamma}$  и мы использовали свойство  $p_{\alpha i}^2 = p_{\alpha i}^m$ . В последнем выражении в (7.62) суммирование идет по собственным значениям  $\lambda_{(1)m}$  матрицы  $\hat{d}_{(1)}$ . Аналогичным образом, если каждый шаг на пути  $\Gamma_N^i$  "проходится"  $n$  раз, получаем:

$$\langle \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{w}_{ij}^{(n)} \dots \hat{w}_{li}^{(n)}) \rangle = \text{Sp}_{\{\alpha\}} (\hat{d}_{(n)}^N) = \sum_m \lambda_{(n)m}^N \quad (7.63)$$

где  $\hat{d}_{(n)}^{\alpha\gamma} = c_\alpha (\hat{w}^{\alpha\gamma})^n$ , а  $\lambda_{(n)m}$  - собственное значение матрицы  $\hat{d}_{(n)}$ . Вводя опять  $U_N \sim K^N$  - число замкнутых путей без пересечений из  $N$  шагов на решетке, связанных с данным узлом, получим:

$$\langle \ln \tilde{Z} \{\beta\} \rangle = \sum_N \frac{1}{N} U_N \sum_m \left\{ \lambda_{(1)m}^N - \frac{1}{2} \lambda_{(2)m}^N + \frac{1}{3} \lambda_{(3)m}^N - \dots \right\} \quad (7.64)$$

Ряд в (7.64) расходится, если хотя-бы одно из собственных значений  $\lambda_{(n)m}$  удовлетворяет условию  $K \lambda_{(n)m} = \pm 1$ . Тогда ясно, что условие расходимости этого ряда определяется уравнением:

$$\text{Det} |\hat{I} \pm K \hat{d}_{(n)}| = 0 \quad (7.65)$$

Для  $n = 1$ ,  $c_A = 1$ ,  $c_B = 0$  или  $c_A = 0$ ,  $c_B = 1$  (7.65) дает условия расходимости для регулярной модели Изинга:

$$1 - K w^{AA} = 0 \quad ; \quad 1 - K |w^{BB}| = 0 \quad (7.66)$$

Окончательно, наш анализ сходимости усредненного высокотемпературного ряда для  $\langle \ln \tilde{Z}(\beta) \rangle$  сводится к сравнению решений двух уравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 - K c_A w^{AA} & -K c_A w^{AB} \\ -K c_B w^{BA} & 1 - K c_B w^{BB} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.67)$$

$$\begin{vmatrix} 1 - K c_A (w^{AA})^2 & -K c_A (w^{AB})^2 \\ -K c_B (w^{BA})^2 & 1 - K c_B (w^{BB})^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.68)$$

Детерминанты, содержащие  $(w^{\alpha\gamma})^3$ ,  $(w^{\alpha\gamma})^4$  и т.д., можно не рассматривать, поскольку для  $0 < |w^{\alpha\gamma}| < 1$  всегда имеем  $|w^{\alpha\gamma}|^3 < |w^{\alpha\gamma}|$ ,  $(w^{\alpha\gamma})^4 < (w^{\alpha\gamma})^2$  и т.п., так что соответствующие ряды в (7.64) расходятся при более низких температурах, чем определяемые из (7.67), (7.68).

Пусть  $w^{AA} = |w^{AB}| = |w^{BB}| = w$  (т.е.  $J_{AA} = |J_{AB}| = J_{BB}$ ). Тогда из (7.67) получаем условия расходимости вида:

$$1 - K(c_A - c_B)w_F - 2K^2 c_A c_B w_F^2 = 0 \quad (7.69)$$

$$1 + K(c_A - c_B)w_{AF} - 2K^2 c_A c_B w_{AF}^2 = 0 \quad (7.70)$$

а из (7.68) имеем критерий, независимый от концентрации:

$$1 - K w_f^2 = 0 \quad (7.71)$$

Решения (7.69) и (7.70) совпадают при концентрации  $c_A^* = c_B^* = 0.5$ , когда:

$$(w^*)^{-1} = (w_F^*)^{-1} = (w_{AF}^*)^{-1} = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad (7.72)$$

С учетом реальных значений  $K$  (или "изинговской" константы  $\mu$ ) для разных решеток ясно, что для квадратной, ПК и ОЦК решеток  $(w^*)^{-1} > (w_f)^{-1}$ , тогда как для шестиугольной решетки  $(w_f)^{-1} > (w^*)^{-1}$ . Это означает, что для квадратной, ПК и ОЦК решеток линия неустойчивости парамагнитной фазы определяется (7.69) при  $0 < c < 0.5$

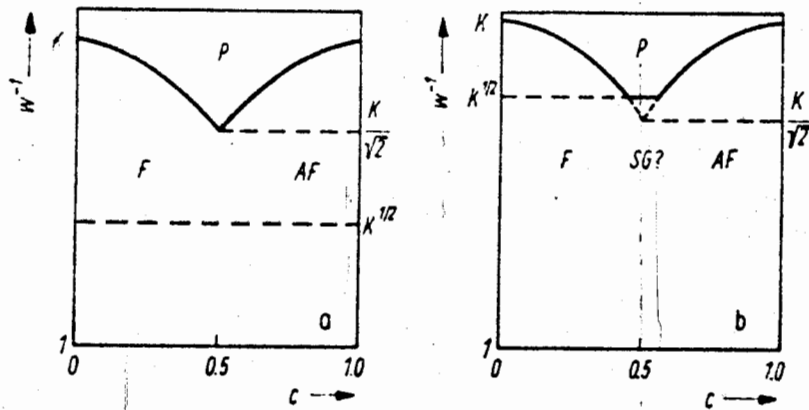


Рис.7.5. Качественное поведение линий неустойчивости парамагнитной фазы ( P ) в зависимости от концентрации  $c$  атомов типа В : (а) Квадратная, ПК и ОЦК решетки (б) Шестиугольная решетка

Случай  $J_{AA} = |J_{AB}| = |J_{BB}|$  .

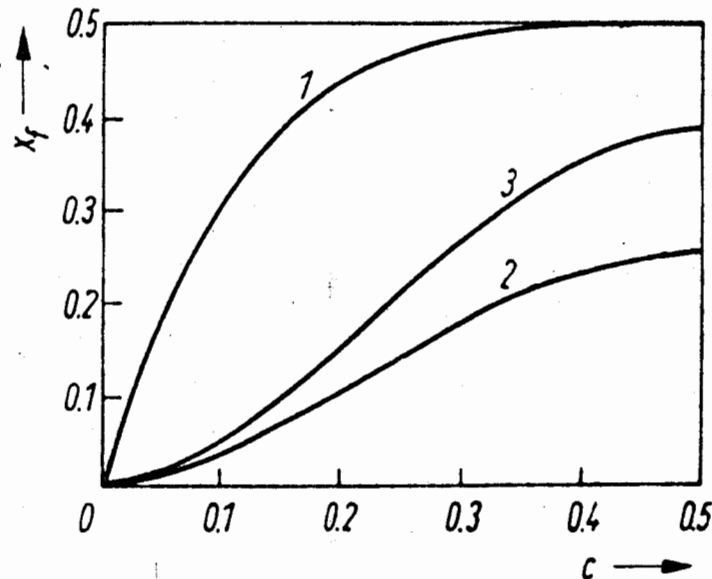


Рис.7.6. Доля фрустрированных граней  $\chi_f$  в модели случайных связей (1), как функция концентрации антиферромагнитных связей  $c$ , и для модели случайных узлов для квадратной, ПК и ОЦК решеток (2) и для шестиугольной решетки (3), как функция концентрации В - атомов. Значения  $\chi_f$  при  $c > 0.5$  симметричны относительно  $c = 0.5$  .

и (7.70) при  $0.5 < c < 1$ . Критические концентрации  $c_{1,2}^*$  возникают лишь в шестиугольной решетке, причем  $c_1^* = 0.445$ ,  $c_2^* = 0.555$ , если использовать оценку с помощью константы  $\mu$ . Соответствующие фазовые диаграммы показаны на Рис.7.5.

Подробный анализ /263/ показывает, что при  $w^{AA} = |w^{BB}|$ ,  $|w^{AB}| \neq w^{AA}$  никакое изменение отношения  $\frac{w^{AA}}{|w^{AB}|}$  не может качественно изменить полученные результаты. В случае же  $w^{AA} = |w^{AB}| \neq |w^{BB}|$  промежуточная область  $c_1^* < c < c_2^*$  остается при любом значении отношения  $\frac{w^{AA}}{|w^{AB}|}$  для шестиугольной решетки и возникает в квадратной решетке при  $\frac{w^{AA}}{|w^{BB}|} > 4.69$ , в ПК решетке при  $\frac{w^{AA}}{|w^{BB}|} > 26.77$ , и в ОЦК - при  $\frac{w^{AA}}{|w^{BB}|} > 63.94$ , где оценки получены с помощью "изинговских" констант  $\mu$ . Аналогичные результаты получаются и при  $w^{AA} \neq |w^{AB}| = |w^{BB}|$ , что очевидно.

Видим, что главным отличием от модели случайных связей является относительная узость "промежуточной" области (спиновое стекло?) на фазовой диаграмме в шестиугольной решетке, также, как и появление ее в квадратной, ПК и ОЦК решетках лишь при довольно нереальных отношениях обменных параметров. Такое различие можно понять в связи с разным концентрационным поведением доли фрустрированных граней  $\chi_f$ . Для модели случайных связей  $\chi_f^B = 4c(1-c)[(1-c)^2 + c^2]$  /252/. В модели случайных узлов, как мы видели выше, фрустрированные квадратные грани появляются только в том случае, когда два атома типа В оказываются ближайшими соседями, так что  $\chi_{1f}^S = 4c^2(1-c)^2$ . Для шестиугольной решетки фрустрированные конфигурации появляются только для некоторых частных способов распределения двух, трех и четырех атомов вокруг элементарного шестиугольника, и мы получаем:  $\chi_{2f}^S = 6c^2(1-c)^4 + 12c^3(1-c)^3 + 6c^4(1-c)^2 = 6c^2(1-c)^2$ . Тогда для модели случайных узлов  $\text{Max } \chi_{1f}^S = 0.25$  и  $\text{Max } \chi_{2f}^S = 0.375$ , при  $c = 0.5$ . Из Рис.7.6 видно, что доля фрустрированных граней в модели случайных узлов существенно меньше, чем в модели случайных связей.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

1. В рамках подхода Андерсона рассмотрена специфическая модель недиагонального беспорядка - локально калибровочно-инвариантная модель случайных фаз. Показано, что фазовый беспорядок в интегралах переноса способствует локализации, эффективно уменьшая константу связности решетки. Полная локализация всей зоны за счет беспорядка такого типа, однако, невозможна, при полной стохастизации фаз в центре зоны остается область делокализованных состояний.

2. С использованием метода Андерсона впервые предложено скэйлинговое описание электронных состояний вблизи порога подвижности, основанное на теории путей без пересечений Де Женна и Де Клуазо.

3. Доказана эквивалентность общих критериев локализации Эконому-Козна и Березинского-Горькова. Общий критерий локализации сформулирован в виде требования на существование в усредненной двухчастичной функции Грина сингулярного по частоте полюсного вклада с факторизующимся (в импульсном представлении) вычетом.

4. Показано, что поиск такого решения может быть проведен с помощью решения однородного уравнения Бете-Солпитера, которое, однако, может дать лишь точку неустойчивости металлической фазы (порог подвижности) и не описывает саму область локализованных состояний. Найдена верхняя граница для положения порога подвижности в задаче об электроне в системе случайных рассеивающих центров.

5. Проведено обобщение самосогласованной теории локализации Фоллхарда-Вольфле на случай пространств с размерностью  $d > 2$  и рассчитано поведение основных физических величин вблизи порога

подвижности, как для задачи об электроне в системе случайных рассеивателей, так и для модели Андерсона. В рамках самосогласованной теории проанализировано поведение эффекта Холла и времени релаксации  $T_1$  ядерного магнитного резонанса для системы, находящейся вблизи порога подвижности.

6. Предложены эффективные лагранжианы  $g\phi^4$  ( $g < 0$ ) для получения одночастичной и двухчастичной функций Грина, анализ которых в рамках простой теории возмущений и в "паркетном" приближении приводит к выводу о существовании в окрестности порога подвижности "области сильной связи" (расходящейся при  $d \rightarrow 2$ ), являющейся точным аналогом "гинзбургской" критической области в теории фазовых переходов. В этой области энергий становятся неприменимыми как теория возмущений, так и методы "улучшенной" теории возмущений, основанные на идеологии ренормгруппы.

7. Исследованы аналитические свойства теории в комплексной плоскости константы связи. Продемонстрирована роль нелинейных решений с конечным действием (инстантонов) классических полевых уравнений в задаче об электроне в случайном поле.

8. Найдено поведение одноэлектронной функции Грина и плотности электронных состояний в области "хвоста", обусловленного локализованными состояниями в модели гауссова случайного поля с корреляцией типа "белого шума". Предложен метод нахождения предэкспоненциального множителя в плотности состояний, основанный на использовании дисперсионного соотношения по константе связи и соответствии с обычной теорией критических явлений.

9. В рамках инстантонного подхода в явном виде получен сингулярный по частоте (полюсный) вклад в усредненную двухчастичную функцию Грина с факторизующимся (в импульсном представлении) вычетом, соответствующий предложенному общему критерию локализации.

10. Рассмотрены Хартри-Фоковские поправки от взаимодействия между электронами к плотности состояний и термодинамическим ве-

личинам вблизи порога подвижности. Найдены "локализационные" поправки, непосредственно связанные с вероятностью возврата электрона и показано, что они соответствуют образованию "полоски" однократно занятых состояний под уровнем Ферми в диэлектрической фазе.

II. В рамках самосогласованной теории локализации получено обобщение известных результатов для поправки к плотности состояний, обусловленной интерференцией рассеяния на беспорядке и кулоновского взаимодействия в металле, на случай андерсоновского диэлектрика. Излом плотности состояний на уровне Ферми, имеющийся в металлической фазе сглаживается, однако во всей области локализованных состояний возникает логарифмическая расходимость поправки к плотности состояний на уровне Ферми. Эти результаты справедливы как для короткодействующего, так и для динамически экранированного кулоновского взаимодействия между электронами.

I2. Рассмотрен "локализационный" вклад в поляризационный оператор, соответствующий неэргодическому поведению системы, приводящему к различию статических изотермического и адиабатического отклика (сжимаемости, диэлектрической проницаемости). Показано, что статическая изотермическая диэлектрическая проницаемость имеет "металлическое" поведение и соответствует конечному радиусу экранирования и в диэлектрической фазе. "Ферми-стекло" полностью экранирует статическое электрическое поле.

I3. Показано, что система, находящаяся в состоянии андерсоновской локализации в нормальном состоянии, может стать сверхпроводящей, если вблизи уровня Ферми задано притяжение электронов. Получены коэффициенты разложения Гинзбурга-Ландау для сверхпроводящего перехода в системе, находящейся в окрестности перехода Андерсона. Сверхпроводящий (мейсснеровский) отклик сохраняется и в локализованной фазе, если радиус локализации превышает характерный

размер куперовских пар. Исследовано поведение верхнего критического магнитного поля  $H_{c2}$  в металлической и диэлектрической области в зависимости от степени беспорядка и получены существенные отклонения от стандартной теории "грязных" сверхпроводников.

14. Исследовано эффективное кулоновское отталкивание электронов куперовских пар. Кулоновский псевдопотенциал  $\mu^*$  растет с ростом беспорядка (остаточного сопротивления), что ведет к снижению температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$ . Тем не менее, для систем с достаточно низкими значениями энергии Ферми и достаточно высокой исходной  $T_c$  можно рассчитывать на достижение области локализации при сохранении заметных значений  $T_c$ . В локализованной фазе кулоновские эффекты приводят к быстрому подавлению сверхпроводимости с ростом беспорядка, однако существует узкая область "сосуществования" локализации и сверхпроводимости, в которой возможен фазовый переход андерсоновский диэлектрик - сверхпроводник.

15. Рассмотрена задача о локализации спиновых волн в ферромагнетике с хаотической анизотропией типа "легкая ось", которая оканчивается изоморфной задаче о локализации электронов в модели Андерсона.

16. В приближении путей без пересечений изучены высокотемпературные разложения для моделей Изинга со случайными связями и узлами. На основе использования методов исследования сходимости стохастических рядов, применявшихся при рассмотрении модели случайных фаз в теории локализации, предложен метод, позволяющий легко определить границы устойчивости парамагнитного состояния и сформулировать простой качественный критерий исчезновения дальнего магнитного порядка в неупорядоченном магнетике с конкурирующими обменными взаимодействиями.

В заключение автор хотел-бы выразить свою благодарность Л.Н.Булаевскому, М.И.Кацнельсону, Е.А.Котову, М.В.Медведеву и А.В.Мясникову, в сотрудничестве с которыми был выполнен ряд работ, использовавшихся при написании диссертации. Он также признателен Л.В.Келдышу за постоянный интерес и полезные дискуссии по различным аспектам электронной теории неупорядоченных систем, а Ю.А.Изюмову за поддержку этих работ.

## Приложение I.

Приведем вывод явных выражений для "треугольных" вершин в самосогласованной теории /136/. Используя двухчастичную функцию Грина (3.24), определим ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$\Phi_{\vec{p}}^n(E\omega\vec{q}) = \sum_{\vec{p}'} (\hat{p}' \cdot \hat{q})^n \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) \quad (\text{П.1})$$

где  $\hat{p}'$ ,  $\hat{q}$  - единичные вектора в направлении  $\vec{p}'$  и  $\vec{q}$ . Разлагая (П.1) по полиномам Лежандра  $P_\ell(\cos \theta_{\vec{q}\vec{p}'})$  и ограничиваясь вкладом  $\ell = 0, 1$ , в низшем приближении по  $\omega$  и  $\vec{q}$  имеем:

$$\Phi_{\vec{p}}^n(E\omega\vec{q}) = [-2\pi i N(E)]^{-1} \Delta G_{\vec{p}} \left\{ \Phi_E^{n0}(\omega\vec{q}) + d(\hat{p} \cdot \hat{q}) \Phi_E^{n1}(\omega\vec{q}) \right\} \quad (\text{П.2})$$

где

$$\Phi_E^{n0}(\omega\vec{q}) = \sum_{\vec{p}} \Phi_{\vec{p}}^n(E\omega\vec{q}) \quad (\text{П.3})$$

$$\Phi_E^{n1}(\omega\vec{q}) = \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q}) \Phi_{\vec{p}}^n(E\omega\vec{q})$$

Нетрудно восстановить связь с обозначениями, использовавшимися в Главе 3. Как частный случай, из (П.3) получаем  $\Phi_E^{00}(\omega\vec{q}) = \Phi_E^{RA}(\omega\vec{q})$  (ср.(3.19), (3.24)). Аналогично имеем  $\Phi_E^{01}(\omega\vec{q}) = \Phi_{1E}^{RA}(\omega\vec{q})$  (ср.(3.56)).

Токовая (векторная) "треугольная" вершина  $J_\mu(\vec{p}\omega\vec{q})$  определяется соотношением:

$$G^R(\vec{p}_+, E+\omega) J_\mu^{RA}(\vec{p}\omega\vec{q}) G^A(\vec{p}_-, E) = -\frac{2\pi i e}{m} \sum_{\vec{p}'} p'_\mu \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) \quad (\text{П.4})$$

Аналогичным образом, скалярная "треугольная" вершина  $\gamma^{RA}(\vec{p}\omega\vec{q})$  определяется из:

$$G^R(\vec{p}_+, E+\omega) \gamma^{RA}(\vec{p}\omega\vec{q}) G^A(\vec{p}_-, E) = -2\pi i \sum_{\vec{p}'} \Phi_{\vec{p}\vec{p}'}^{RA}(E\omega\vec{q}) \quad (\text{П.5})$$

Используя (П.4) и соотношение (см.(3.50),(3.34)):

$$G^R(\vec{p}_+, E+\omega) G^A(\vec{p}_-, E) = - \frac{\Delta G_{\vec{p}}}{\omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\gamma} \quad (\text{П.6})$$

получаем:

$$[\bar{J}^{RA}(\vec{p}\omega\vec{q}) \cdot \vec{q}] = \frac{e}{m} \rho \frac{1}{N(E)} [\omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\gamma] \cdot \{ \Phi_E^{10}(\omega\vec{q}) + d(\hat{p} \cdot \hat{q}) \Phi_E^{11}(\omega\vec{q}) \} \quad (\text{П.7})$$

Для скалярной вершины имеем:

$$\gamma^{RA}(\vec{p}\omega\vec{q}) = - \frac{1}{N(E)} [\omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\gamma] \cdot \{ \Phi_E^{00}(\omega\vec{q}) + d(\hat{p} \cdot \hat{q}) \Phi_E^{01}(\omega\vec{q}) \} \quad (\text{П.8})$$

Из уравнения Бете-Солпитера (3.53), с использованием (П.2) и тождества Уорда (3.54), получаем систему уравнений (аналогичную (3.55),(3.58)):

$$\omega \Phi_E^{n0}(\omega\vec{q}) - v_F q \Phi_E^{n1}(\omega\vec{q}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^n \Delta G_{\vec{p}} \quad (\text{П.9})$$

$$\{\omega + M_E(\vec{q}\omega)\} \Phi_E^{n1}(\omega\vec{q}) - \frac{1}{d} v_F q \Phi_E^{n0}(\omega\vec{q}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^{n+1} \Delta G_{\vec{p}}$$

где  $M_E(\vec{q}\omega)$  - релаксационное ядро, определенное в (3.59). Решение системы (П.9) имеет вид:

$$\Phi_E^{n1}(\omega\vec{q}) = \frac{1}{2\pi i \text{Det}} \left\{ \frac{1}{d} v_F q \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q}) \Delta G_{\vec{p}} + \omega \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^{n+1} \Delta G_{\vec{p}} \right\} \quad (\text{П.10})$$

$$\Phi_E^{n0}(\omega\vec{q}) = \frac{1}{2\pi i \text{Det}} \left\{ v_F q \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^{n+1} \Delta G_{\vec{p}} + [\omega + M_E(\vec{q}\omega)] \sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^n \Delta G_{\vec{p}} \right\}$$

где

$$\text{Det} = \omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_F^2 q^2 \quad (\text{П.11})$$

При  $\vec{q} \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$  имеем  $\sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^n \Delta G_{\vec{p}} = 0$  (нечетные  $n$ ),

$$\sum_{\vec{p}} (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 \Delta G_{\vec{p}} = -2\pi i N(E) \frac{1}{d} \quad (\text{П.12})$$

Соответственно получаем:

$$\Phi_E^{00}(\omega \vec{q}) = -N(E) \frac{\omega + M_E(\vec{q}\omega)}{\text{Det}}$$

$$\Phi_E^{01}(\omega \vec{q}) = \Phi_E^{10}(\omega \vec{q}) = -N(E) \frac{v_F q}{\text{Det}} \quad (\text{П.13})$$

$$\Phi_E^{11}(\omega \vec{q}) = -N(E) \frac{\omega}{d \text{Det}}$$

Используя (П.13) в (П.8) получаем выражение для скалярной вершины в виде:

$$\gamma^{RA}(\vec{p}\omega\vec{q}) = \left[ \omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\gamma \right] \frac{\omega + M_E(\vec{q}\omega) + \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q}}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_F^2 q^2} \quad (\text{П.14})$$

Аналогично, для векторной (токовой) вершины из (П.6) имеем:

$$[\vec{J}(\vec{p}\omega\vec{q}) \cdot \vec{q}] = \frac{e}{m} p \left[ \omega - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\gamma \right] \frac{\frac{1}{d} v_F q + \omega (\hat{p} \cdot \hat{q})}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_F^2 q^2} \quad (\text{П.15})$$

Умножая (П.15) на  $\hat{q}_\mu$  и усредняя по направлениям  $\hat{q}$  с использованием свойств изотропии системы (двойные угловые скобки - упомянутое усреднение):

$$\langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}; \quad \langle \hat{q}_\mu \rangle = \langle \hat{q}_\mu \hat{q}_\nu \hat{q}_s \rangle = 0$$

немедленно получаем окончательное выражение для векторной вершины:

$$J_\mu(\vec{p}\omega\vec{q}) = \frac{e}{m} p_\mu \frac{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \frac{1}{d} v_F^2 q^2}{\omega^2 + \omega M_E(\vec{q}\omega) - \frac{1}{d} v_F^2 q^2} \quad (\text{П.16})$$



## Приложение 2.

Рассмотрим, следуя /130/, влияние эффектов сдвига края зоны в самосогласованной теории локализации для модели Андерсона. Аналогичный анализ для задачи об электроне в поле случайно расположенных рассеивателей проведен в Главе 4. Заметим, что параметр  $E$  во втором выражении в (3.135) фактически представляет собой "перенормированную" энергию, включающую в себя  $\text{Re} \sum^{R,A}(\epsilon)$ , найденную в простейшем приближении теории возмущений. Имеем:

$$\sum^{R,A}(\epsilon_0) = \tilde{W}^2 \Omega_0 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\epsilon_0 - \sum^{R,A}(\epsilon_0) - \epsilon(\vec{p})} \quad (\text{П2.1})$$

где  $\epsilon_0$  обозначает "затравочную" энергию электрона. Определив  $E(\epsilon_0) = \epsilon_0 - \text{Re} \sum^{R,A}(\epsilon_0)$  перепишем (П2.1) в виде:

$$\epsilon_0 - E(\epsilon_0) + i \text{Im} \sum^{R,A}(\epsilon_0) = \tilde{W}^2 \Omega_0 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{E(\epsilon_0) - \epsilon(\vec{p}) - i \text{Im} \sum^{R,A}(\epsilon_0)} \quad (\text{П2.2})$$

Положение края зоны в терминах затравочной энергии  $\epsilon_{0c}$  определяется из условия обращения в нуль плотности состояний:

$$N(\epsilon_0) = \mp \frac{1}{\pi} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \text{Im} G^{R,A}(\epsilon_0, \vec{p}) \xrightarrow{\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_{0c}} 0 \quad (\text{П2.3})$$

что, как легко видеть, эквивалентно в нашей задаче условию:

$$E(\epsilon_0) \xrightarrow{\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_{0c}} -ZV ; \quad \text{Im} \sum^{R,A}(\epsilon_0 = \epsilon_{0c}) = 0 \quad (\text{П2.4})$$

(рассматриваем "левый" край зоны). Тогда из (П2.2)-(П2.4) получаем уравнение для определения  $\epsilon_{0c}$ :

$$\epsilon_{0c} = -ZV - \tilde{W}^2 \Omega_0 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{ZV + \epsilon(\vec{p})} \quad (\text{П2.5})$$

Используя аппроксимацию спектра  $\epsilon(\vec{p})$  в виде (3.155) (приближение эффективной массы) получаем из (П2.5):

$$E_{oc} = -ZV - \tilde{W}^2 \Omega_0 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2/2m^*} = \quad (П2.6)$$

$$= -ZV - \tilde{W}^2 \Omega_0 S_d \frac{2m^* p_0^{d-2}}{d-2} = -ZV - \frac{\tilde{W}^2}{V} \frac{S_d}{d-2}$$

где  $S_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-\frac{d}{2}} / \Gamma(\frac{d}{2})$  и ввели импульс обрезания  $p_0 = a^{-1}$ , а последнее равенство в (П2.6) записано для гиперкубической решетки, где  $\Omega_0 = a^d$ ,  $m^* = (2Va^2)^{-1}$ .

Учтем теперь, что переменная  $\varepsilon$ , входящая в (3.158), имеет смысл энергии, отсчитанной от истинного (сдвинутого) края зоны:

$\varepsilon \simeq E_0 - E_{oc}$ . Тогда из (3.158), (3.160) получаем уравнение, определяющее положение порога подвижности в терминах "затравочной" энергии  $E_0^c$  в гиперкубической решетке:

$$E_0^c - E_{oc} = \left\{ \frac{d}{d-2} \frac{\chi_0^{d-2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \right\}^{\frac{2}{4-d}} V \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)^{\frac{4}{4-d}} \quad (П2.7)$$

или, для  $d=3$ , с учетом (П2.6):

$$\frac{E_0^c}{ZV} = -1 - \frac{1}{2\pi^2 Z} \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)^2 + \left( \frac{3\chi_0^2}{4\pi^2} \right)^2 \frac{1}{Z} \left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)^4 \quad (П2.8)$$

что определяет "траекторию" порога подвижности, качественно показанную на Рис.П2.1. (Картина вблизи "правого" края зоны совершенно симметрична рассмотренной). Полагая в (П2.8)  $E_0^c = 0$ , получаем биквадратное уравнение, определяющее критическое отношение  $\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c$  для полной локализации зоны, с учетом эффекта сдвига ее краев. Элементарное решение для случая  $\chi_0 = 2$  и  $Z = 6$  (ПК - решетка) дает  $\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c \simeq 4.15$ . Сравнение с соответствующим результатом, приведенным в Таблице 3.1, показывает, что учет сдвига краев зоны случайным полем приводит к весьма незначительному изменению критического отношения  $\left( \frac{\tilde{W}}{V} \right)_c$ , что и является оправданием несколько упрощенного рассмотрения, проведенного в Главе 3.

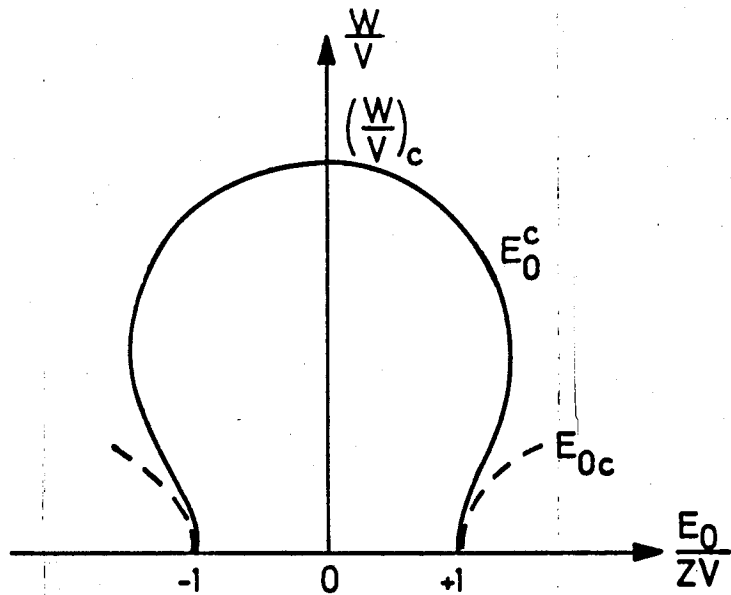


Рис.П2.І. "Траектория" порога подвижности в модели Андерсона на плоскости энергия-беспорядок. Пунктирные линии показывают положение краев зоны.

## Приложение 3.

Рассмотрим аргументацию, используемую при доказательстве теоремы Андерсона в теории "грязных" сверхпроводников /225,226, Гл.V/. Линеаризованное уравнение для сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta(\vec{r})$  (щели), определяющее температуру перехода  $T_c$ , может быть легко получено из уравнений Горькова /99, Гл.7./ и представлено в следующем виде:

$$\Delta(\vec{r}) = g T \int d^4 \vec{r}' \sum_{\epsilon_n} K(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) \Delta(\vec{r}') \quad (\text{ПЗ.1})$$

где  $g$  - константа электрон-электронного притяжения вблизи уровня Ферми,  $\epsilon_n = (2n+1)\pi T$  - мацубаровская частота электрона,

$$K(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) = G(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) G^*(\vec{r}' \vec{r} \epsilon_n) \quad (\text{ПЗ.2})$$

- ядро, образованное одноэлектронными функциями Грина нормально-го металла.

В произвольной неупорядоченной системе можно воспользоваться представлением точных собственных функций электрона в случайном поле (3.2) и с помощью (ср. (3.16))

$$G(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) = \sum_{\nu} \frac{\varphi_{\nu}(\vec{r}) \varphi_{\nu}^*(\vec{r}')}{i\epsilon_n - \epsilon_{\nu}} \quad (\text{ПЗ.3})$$

получить (энергии отсчитываются от уровня Ферми  $E_F$ ):

$$K(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) = \sum_{\nu \nu'} \frac{\varphi_{\nu}(\vec{r}) \varphi_{\nu}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu'}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu'}(\vec{r})}{(i\epsilon_n - \epsilon_{\nu}) (-i\epsilon_n - \epsilon_{\nu'})} \quad (\text{ПЗ.4})$$

В случае инвариантности относительно операции обращения времени (в отсутствие внешнего магнитного поля, магнитных примесей и т.п.) (ПЗ.4) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} K(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) &= \sum_{\nu \nu'} \frac{\varphi_{\nu}(\vec{r}) \varphi_{\nu}^*(\vec{r}') \varphi_{\nu'}(\vec{r}') \varphi_{\nu'}^*(\vec{r})}{(i\epsilon_n - \epsilon_{\nu}) (-i\epsilon_n - \epsilon_{\nu'})} = \\ &= G(\vec{r} \vec{r}' \epsilon_n) G(\vec{r}' \vec{r} - \epsilon_n) \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.5})$$

Усредняя (ПЗ.1) по беспорядку в системе, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\vec{r}) \rangle &= gT \int d^d \vec{r}' \sum_{\epsilon_n} \langle K(\vec{r}-\vec{r}', \epsilon_n) \Delta(\vec{r}') \rangle \approx \\ &\approx gT \int d^d \vec{r}' \sum_{\epsilon_n} \mathcal{K}(\vec{r}-\vec{r}', \epsilon_n) \langle \Delta(\vec{r}') \rangle \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.2})$$

где в последнем равенстве проведено простейшее "расцепление" и введено усредненное ядро, которое (в случае инвариантности относительно обращения времени) равно:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\vec{r}-\vec{r}', \epsilon_n) &= \mathcal{K}^*(\vec{r}-\vec{r}', \epsilon_n) = \left\langle \sum_{\nu\nu'} \frac{\varphi_\nu(\vec{r}) \varphi_{\nu'}^*(\vec{r}) \varphi_{\nu'}(\vec{r}') \varphi_\nu^*(\vec{r}')}{(i\epsilon_n - \epsilon_\nu)(-i\epsilon_n - \epsilon_{\nu'})} \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{\nu\nu'} \frac{\varphi_\nu^*(\vec{r}) \varphi_{\nu'}(\vec{r}) \varphi_{\nu'}^*(\vec{r}') \varphi_\nu(\vec{r}')}{(-i\epsilon_n - \epsilon_\nu)(i\epsilon_n - \epsilon_{\nu'})} \right\rangle = \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{1}{-i\epsilon_n - E} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{i\epsilon_n - E - \omega} \left\langle \sum_{\nu\nu'} \varphi_\nu^*(\vec{r}) \varphi_{\nu'}(\vec{r}) \varphi_{\nu'}^*(\vec{r}') \varphi_\nu(\vec{r}') \cdot \right. \\ &\left. \times \delta(E - \epsilon_\nu) \delta(E + \omega - \epsilon_{\nu'}) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE N(E) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle}{(i\epsilon_n + E)(E + \omega - i\epsilon_n)} \end{aligned}$$

где мы воспользовались определением (3.3) спектральной плотности Березинского-Горькова /IOI/.

Если искать решение (ПЗ.6) в виде  $\langle \Delta(\vec{r}) \rangle = \text{const}$  (однородная в пространстве щель), то сразу же получаем уравнение для  $T_c$ :

$$\begin{aligned} 1 &= gT_c \int d^d \vec{r}' \sum_{\epsilon_n} \mathcal{K}(\vec{r}-\vec{r}', \epsilon_n) = \\ &= gT_c \int d^d \vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} d\omega N(E) \sum_{\epsilon_n} \frac{\langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle}{(E + i\epsilon_n)(E + \omega - i\epsilon_n)} \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.8})$$

Используя общее правило сумм (3.5) /IOI/:

$$\int d^d \vec{r}' \langle\langle \rho_E(\vec{r}) \rho_{E+\omega}(\vec{r}') \rangle\rangle = \delta(\omega) \quad (\text{ПЗ.9})$$

немедленно сводим (ПЗ.8) к стандартному виду теории БКШ:

$$1 = g T_c \int_{-\infty}^{\infty} dE N(E) \sum'_{\epsilon_n} \frac{1}{E^2 + \epsilon_n^2} = \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$= g \int_0^{\omega_D} dE N(E) \frac{1}{E} \text{th} \frac{E}{2T_c}$$

где учли необходимость обрезания суммы по  $\epsilon_n$  на  $\epsilon_n \sim 2\omega_D$ . Заметим, что здесь  $N(E)$  - истинная плотность электронных состояний в неупорядоченной системе. Из (ПЗ.10) следует обычный результат ( $\ln \gamma = C \approx 0.577$  - постоянная Эйлера):

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D \exp \left\{ -\frac{1}{g N(E_F)} \right\} \quad (\text{ПЗ.11})$$

В этом и состоит основное утверждение теоремы Андерсона: в отсутствие процессов рассеяния, нарушающих инвариантность относительно обращения времени, а также внешнего магнитного поля, неупорядоченность влияет на  $T_c$  только через изменение плотности состояний  $N(E_F)$  на уровне Ферми (которая является относительно плавной функцией беспорядка).

Поскольку в силу правила сумм (3.5), (ПЗ.9) из уравнения для  $T_c$  "выпали" все особенности спектральной плотности Березинского-Горькова, полученный результат не зависит, в частности, и от того, имеется-ли в ней  $\delta(\omega)$ -вклад (3.7), "сигнализирующий" о возникновении локализованных состояний. Поэтому результат (ПЗ.10), (ПЗ.11) сохраняется и в области локализации.

Наиболее существенным моментом проведенного рассмотрения является "расцепление" в уравнении (ПЗ.6). Ясно, что оно оправдано, если существует пространственно-однородное решение исходного (неусредненного) уравнения (ПЗ.1):  $\Delta(\vec{r}) = \text{Const}$  ("самоусредняемость" параметра порядка). Последнее справедливо в ситуации, когда близкие по энергии уровни электронов расположены в достаточно близких точках координатного пространства. В области локализации можно ввести характерное энергетическое расстояние между

уровнями (дискретными!), расположенными в точках пространства, находящихся внутри области с размерами порядка  $R_{loc}(E)$  :

$$\delta \sim \frac{1}{N(E)R_{loc}^3(E)} \quad (\text{ПЗ.12})$$

Пространственно-однородное решение уравнения для сверхпроводящей щели существует, когда величина щели  $\Delta_0$  (при  $T = 0$ ) значительно превосходит величину  $\delta$  из (ПЗ.12) и локальной дискретностью уровней можно пренебречь:

$$\Delta_0 \sim T_c \gg \delta \sim \frac{1}{N(E)R_{loc}^3(E)} \quad (\text{ПЗ.13})$$

Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении задачи о спаривании в атомных ядрах (конечных ферми-системах) /203, Гл. II.4/. Условие типа (ПЗ.13) определяет также возможность куперовского спаривания в металлических гранулах конечного размера /213, 265/. В этом случае, в энергетическом интервале  $\sim \Delta_0$  вокруг уровня Ферми имеется много электронных уровней, центры локализации которых находятся внутри области  $\sim R_{loc}(E)$ , так что задача о куперовском спаривании качественно не отличается от таковой в металлическом состоянии. В неусредненных уравнениях (ПЗ.1-5) при этом можно перейти от суммирования по дискретным уровням  $\epsilon_\nu$  к интегрированию и свести уравнение для щели к стандартному виду теории БКШ (ср./203, Гл. II.4/). В противном случае куперовское спаривание исчезает /265/.

## Приложение 4.

Приведем детали вывода выражений (6.10)-(6.12) для коэффициентов разложения Гинзбурга-Ландау  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Используя (6.3), (6.5) и (6.6), получаем:

$$A = \frac{1}{g} - 2N(E_F) \sum_{n \geq 0}^{n^*} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{g} - N(E_F) \ln \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\omega_D}{T} = \quad (\text{П4.1})$$

$$= N(E_F) \ln \frac{T}{T_c}$$

где  $T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D \exp\left(-\frac{1}{gN(E_F)}\right)$  - стандартная температура сверхпроводящего перехода в модели БКШ ( $\ln \gamma = C \approx 0.577$  - постоянная Эйлера,  $2\gamma/\pi \approx 1.13$ ). В (П4.1)  $n^* = \omega_D/2\pi T$  введено для обрешения логарифмической расходимости суммы по  $n$ , с учетом того, что межэлектронное притяжение существует в слое шириной  $\sim 2\omega_D$  вокруг уровня Ферми. Обобщенный коэффициент диффузии  $D_{E_F}(\omega_m)$  не входит в выражение для коэффициента  $A$  (поскольку в (6.3)  $\vec{q}=0$ ) а с ним не входят и все характеристики перехода Андерсона. Это является следствием теоремы Андерсона /225,226, Приложение 3/: беспорядок влияет на  $T_c$  только через изменения плотности состояний  $N(E_F)$ .

Коэффициент  $B$  определяется диаграммами, показанными на Рис. П4.1. При этом мы пренебрегли слабой зависимостью от  $\vec{q}$ . Вклад диаграмм Рис.П4.1(б,в) мал по сравнению с вкладом диаграммы на Рис.П4.1(а). "Треугольные" вершины могут быть найдены в рамках самосогласованной теории локализации, как это описано в Приложении I. Для интересующей нас в данном случае скалярной вершины имеем (ср.(П1.14),(5.64)):

$$\gamma(\vec{q}=0, \omega_m = 2\varepsilon_n) \approx 1 + \frac{1}{|\varepsilon_n|} \gamma(E_F) \quad (\text{П4.2})$$

где единица приписана для корректного учета области высоких частот ( $\omega_m \gg \gamma(E_F)$ ), а второе слагаемое - диффузионный



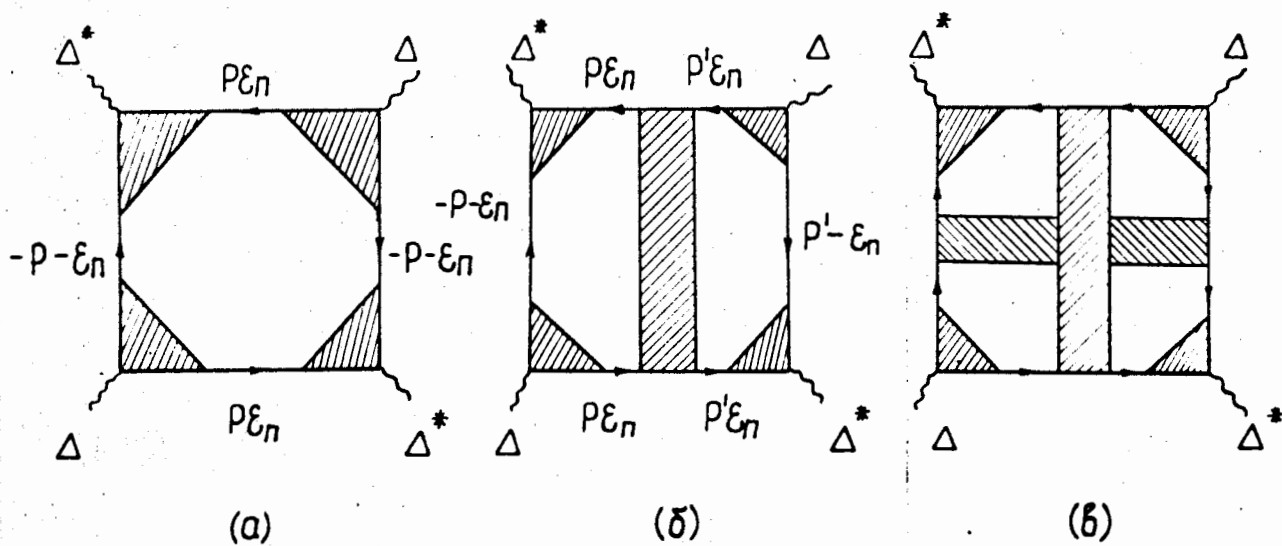


Рис.П4.1. Диаграммы, определяющие коэффициент  $B$  в разложении Гинзбурга-Ландау.

вклад. Тогда из Рис. П4.1(а) получим:

$$\begin{aligned}
 B &\approx N(E_F) T \sum_{\epsilon_n} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_p \gamma^4(\vec{q}=0, \omega_m=2\epsilon_n) G^2(\epsilon_n, \zeta_p) G^2(-\epsilon_n, \zeta_p) = \\
 &= N(E_F) T \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\epsilon_n^3} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} N(E_F) \quad (\text{П4.3})
 \end{aligned}$$

где

$$G(\epsilon_n, \zeta_p) = \left[ i\epsilon_n - \zeta_p + i\gamma(E_F) \frac{\epsilon_n}{|\epsilon_n|} \right]^{-1}; \quad \zeta_p = \frac{p^2}{2m} - E_F \quad (\text{П4.4})$$

Перейдем к рассмотрению коэффициента  $C$ . Используя (6.4), (6.6), в металлической области ( $E_F > E_C$ ), не слишком близко к порогу подвижности, когда согласно (6.9)  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m) \approx \mathcal{D}_{E_F}$  имеем:

$$\begin{aligned}
 C &= -i\pi T N(E_F) \sum_{\epsilon_n} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{1}{2i|\epsilon_n| + i\mathcal{D}_{E_F} q^2} \Big|_{\vec{q}=0} = \\
 &= \pi T N(E_F) \mathcal{D}_{E_F} \sum_{\epsilon_n} \frac{1}{2\epsilon_n^2} = \frac{N(E_F) \mathcal{D}_{E_F}}{\pi T} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8T} N(E_F) \mathcal{D}_{E_F} \quad (\text{П4.5})
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, в области локализации ( $E_F < E_C$ ), но тоже не слишком близко к порогу подвижности, когда согласно (6.9)

$$\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m) = \mathcal{D}_{E_F} \frac{\omega_m}{\omega_m + 3\mathcal{D}_{E_F} \omega_0^2(E_F)/v_F^2} \quad \text{получаем:}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\pi}{2} T N(E_F) \sum_{\epsilon_n} \frac{1}{\epsilon_n^2} \mathcal{D}_{E_F} (2|\epsilon_n|) = \\
 &= \pi T N(E_F) \mathcal{D}_{E_F} \sum_{\epsilon_n} \frac{1}{(2n+1)^2 + (2n+1) \frac{3\mathcal{D}_{E_F} \omega_0^2(E_F)}{2\pi T v_F^2}} = \\
 &= \frac{N(E_F) v_F^2}{3\omega_0^2(E_F)} \left\{ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{3\mathcal{D}_{E_F} \omega_0^2(E_F)}{4\pi T v_F^2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \\
 &= N(E_F) R_{loc}^2(E_F) \left\{ \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathcal{D}_{E_F}}{4\pi T R_{loc}^2(E_F)}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \approx N(E_F) R_{loc}^2(E_F) \ln \frac{1.78 \mathcal{D}_{E_F}}{\pi T R_{loc}^2(E_F)} \quad (\text{П4.6})
 \end{aligned}$$

где  $\Psi(x)$  - дигамма функция, а последнее приближенное выражение справедливо при  $\mathcal{D}_{E_F} R_{loc}^{-2}(E_F) \gg 4\pi T$ .

В непосредственной окрестности порога подвижности, как для металла, так и для андерсоновского диэлектрика, согласно /118, 126/ имеем (ср. (6.9))  $\mathcal{D}_{E_F}(\omega_m) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} \mathcal{D}_0^{E_F} \left(\frac{\omega_m}{2\gamma(E_F)}\right)^{1/3} = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)^{2/3} (\mathcal{D}_0^{E_F} l)^{2/3} \omega_m^{1/3}$  так что:

$$C = \frac{\pi}{2} T N(E_F) \sum_{\epsilon_n} \frac{1}{\epsilon_n^2} \mathcal{D}(2|\epsilon_n|) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{2/3} (\mathcal{D}_0^{E_F} l)^{2/3} T N(E_F) \sum_{\epsilon_n} \frac{1}{|\epsilon_n|^{5/3}} = \quad (\text{П4.7})$$

$$= \frac{1}{6^{1/3}} \left(\frac{\mathcal{D}_0^{E_F} l}{T}\right)^{2/3} N(E_F) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^{5/3}} = \frac{1}{6^{1/3}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/3}}\right] \zeta\left(\frac{5}{3}\right) N(E_F) \left(\frac{\mathcal{D}_0^{E_F} l}{T}\right)^{2/3}$$

Выражение (П4.7) доминирует по сравнению с (П4.5), (П4.6) при  $\frac{\mathcal{D}_{E_F}}{T_c} \approx \mathcal{D}_0^{E_F} \frac{l}{\xi_{loc}(E_F) T_c} \ll (\mathcal{D}_0^{E_F})^{2/3} \left(\frac{l}{T_c}\right)^{2/3}$  что определяет пределы применимости различных асимптотик в (6.12).

## Приложение 5.

Рассмотрим решение линеаризованного уравнения для щели (6.36) для системы, находящейся на пороге подвижности, когда кулоновское ядро определяется, главным образом, вторым слагаемым в (6.35 б). Будем искать решение в виде:

$$\Delta(\omega) = \Delta_1 \theta(\omega_D - |\omega|) + f(\omega) \quad (\text{П5.1})$$

Тогда для  $f(\omega)$  получаем интегральное уравнение следующего вида:

$$f(x) = \tilde{\mu} \Delta_1 F(x) - \tilde{\mu} \int_0^{E_F/\omega_D} dx' g(x-x') f(x') \frac{1}{x'} \text{th} \frac{\omega_D}{2T_c} x' \quad (\text{П5.2})$$

где

$$F(x) = \int_0^1 dx' g(x-x') \frac{1}{x'} \text{th} \frac{\omega_D}{2T_c} x' \quad (\text{П5.3})$$

$$g(x) = x^{-1/3}; \quad x = \frac{\omega}{\omega_D}; \quad \tilde{\mu} = \mu \left( \frac{\omega_D}{2\gamma(E_F)} \right)^{-1/3}$$

При изменении  $x$  от 0 до 1  $F(x)/\ln \frac{\omega_D}{T_c}$  изменяется от 4.2 до 1, а для  $x \gg 1$  мы получаем асимптотическое поведение  $F(x) \approx x^{-1/3} \ln \frac{\omega_D}{T}$ . Используя близость значений  $\left(\frac{\omega_D}{T_c}\right)^{1/3}$  и  $\ln \frac{\omega_D}{T_c}$  при всех разумных значениях  $\omega_D$  и  $T_c$  и слабость зависимости  $F(x)$  от  $x$  для  $0 < x < 1$ , мы приходим к выводу, что неизвестная функция  $f(x)$  в (П5.2) слабо зависит от  $x$  при  $x \lesssim 1$  и  $f(x) \sim x^{-1/3}$  при  $x \gg 1$ . Учитывая все эти обстоятельства, после несложных вычислений получаем следующее уравнение для  $T_c$ :

$$1 = \lambda_{ph} \left\{ 1 - \frac{(\beta_1 \tilde{\mu} - m) \ln \frac{\omega_D}{T_c}}{1 + (\beta_2 \tilde{\mu} - m) \ln \frac{\omega_D}{T_c}} \right\} \ln \frac{\omega_D}{T_c} \quad (\text{П5.4})$$

где

$$\beta_1 = \left[ \ln \frac{\omega_D}{T_c} \right]^{-2} \int_0^1 dx \int_0^1 dx' \frac{1}{xx' |x-x'|^{1/3}} \text{th} \frac{\omega_D}{2T_c} x \text{th} \frac{\omega_D}{2T_c} x' \approx 1 \quad (\text{П5.5})$$

$$m = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\mu}^2}{1 + \beta_3 \tilde{\mu}} ; 1 < \beta_2 < 4.2 ; \frac{3}{2} < \beta_3 < 3$$

При  $\tilde{\mu} \gg 1$  имеем  $\beta_2 \approx 1$ , а  $\beta_3 \approx 3$ . Таким образом из (П5.4) мы получаем оценку  $\mu^* \approx \beta \tilde{\mu}$ , где  $0,5 < \beta < 3$  (для больших значений  $\tilde{\mu}$  имеем  $\beta \approx 1$ ). Этот результат и приведен выше в (6.42). Аналогичная оценка может быть получена и при решении уравнения (6.36) с ядром (6.35 б) с помощью известной двухступенчатой аппроксимации  $\Delta(\omega)$  /226,235/.

В диэлектрической области ( $E_F < E_C$ ), когда кулоновское ядро определяется (6.44), уравнение (6.36) может быть решено точно. Дополнительные кулоновские эффекты, рассмотренные выше и связанные с "регулярными" вкладами в спектральной плотности Березинского-Горькова могут быть качественно учтены простой заменой  $\lambda_{ph} \rightarrow \lambda^* = \lambda_{ph} \mu^*$ , где  $\mu^*$  дается уравнением (6.42). Можно убедиться, что такая процедура переоценивает роль кулоновского взаимодействия в области локализации. Тогда нетрудно видеть, что решение уравнения (6.36) может быть записано в виде:

$$\Delta(\omega) = \frac{\theta(\omega_D - |\omega|) \Delta_1}{1 + \frac{\mu A_{EF}}{2N(E_F)} \frac{1}{\omega} \text{th} \frac{\omega}{2T_c}} \quad (\text{П5.6})$$

где

$$\Delta_1 = \lambda^* \int_0^{\omega_D} d\omega \Delta(\omega) \frac{1}{\omega} \text{th} \frac{\omega}{2T_c} \quad (\text{П5.7})$$

Соответственно, уравнение для  $T_c$  имеет вид:

$$1 = \lambda^* \int_0^{\omega_D} d\omega \frac{\text{th} \frac{\omega}{2T_c}}{\omega + \frac{\mu A_{EF}}{2N(E_F)} \text{th} \frac{\omega}{2T_c}} \quad (\text{П5.8})$$

которое с хорошей точностью сводится к (6.45).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson P.W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices.-  
Phys.Rev., 1958, v. 109, N. 5, p. 1492-1505.
2. Мотт Н. Дэвис Э. Электронные процессы в некристаллических веществах.- т. т. I, 2. 664 с. М. "Мир" 1982.
3. Мотт Н. Переходы металл-изолятор.- 344 с. М. "Наука" 1979.
4. Ioffe A.F. Regel A.R. Non-Crystalline, Amorphous and Liquid Electronic Semiconductors.- Progr. Semiconductors, 1960, v. 4, p. 237-291.
5. Abrahams E. Anderson P.W. Licciardello D.C. Ramakrishnan T.V. Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two-Dimensions.- Phys.Rev.Lett., 1979, v. 42, N. 10, p. 673-676.
6. Thouless D.J. Electrons in Disordered Systems and the Theory of Localization.- Phys.Reports, 1974, v. 13, N. 3, p. 93-142.
7. Эфрос А.Л. Локализация электронов в неупорядоченных системах (переход Андерсона).- УФН, 1978, т. 126, №1, с. 41-65.
8. Шкловский Б.И. Эфрос А.Л. Электронные свойства легированных полупроводников.- 416 с. М. "Наука" 1979.
9. Алексеев В.А. Андреев А.А. Садовский М.В. Переход полупроводник-металл в жидких полупроводниках.- УФН, 1980, т. 132, №1, с. 47-90.
10. Садовский М.В. Локализация электронов в неупорядоченных системах: критическое поведение и макроскопические проявления.- УФН, 1981, т. 133, №2, с. 223-257.
11. Бонч-Бруевич В.Л. Звягин И.П. Кайпер Р. Миронов А.Г. Эндерлайн Р. Эссер Б. Электронная теория неупорядоченных полупроводников.- 384 с. М. "Наука" 1981.
12. Лифшиц И.М. Гредескул С.А. Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем.- 360 с. М. "Наука" 1982.
13. Anderson Localization. Ed. by Y. Nagaoka, H. Fukuyama. 225 p.p. Springer Series in Solid State Sciences, v. 39. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

14. Altshuler B.L. Aronov A.G. Khmel'nitskii D.E. Larkin A.I. Coherent Effects in Disordered Conductors. - In Quantum Theory of Solids. Ed. by I.M. Lifshits. Mir Publishers, Moscow, 1982, p. 130-237.
15. Бонч-Бруевич В.Л. Вопросы электронной теории неупорядоченных полупроводников. - УФН, 1983, т. 140, №4, с. 583-637.
16. Efetov K.V. Supersymmetry and Theory of Disordered Metals. - Adv. Phys., 1983, v. 32, N. 1, p. 53-127.
17. Эдвардс С.Ф. Новый метод вычисления электропроводности металлов. - В сб. Вопросы квантовой теории необратимых процессов. Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. М. ИЛ. 1961, с. 240-254.
18. Мотт Н. Туз У. Теория проводимости по примесям. - УФН, 1963, т. 79, №4, с. 691-740.
19. Halperin B.I. Properties of a Particle in a One-Dimensional Random Potential. - Adv. Chem. Phys., 1967, v. 13, p. 123-177.
20. Березинский В.Л. Кинетика квантовой частицы в одномерном случайном потенциале. - ЖЭТФ, 1973, т. 65, №3(9), с. 1251-1266.
21. Abrikosov A.A. Ryzhkin I.A. Conductivity of Quasi-One-Dimensional Metal System. - Adv. Phys., 1978, v. 27, N. 2, p. 147-230.
22. Gogolin A.A. Electron Localization and Hopping Conductivity in One-Dimensional Disordered Systems. - Phys. Reports, 1982, v. 86, N. 1, p. 1-53.
23. Erdos P. Herndon R.C. Theories of Electrons in One-Dimensional Disordered Systems. - Adv. Phys., 1982, v. 31, N. 2, p. 65-163.
24. Cohen M.H. Review of the Theory of Amorphous Semiconductors. - J. Non-Cryst. Sol., 1970, v. 4, p. 391-409.
25. Kadanoff L.P. Götze W. Hamblen D. Hecht R. Lewis E.A.S. Palciauskas W.V. Rayl M. Swift J. Aspnes D. Kane J. Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment. - Rev. Mod. Phys., 1967, v. 39, N. 2, p. 395-431.
26. Паташинский А.З. Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. - 384 с. М. "Наука" 1982.
27. Wilson K.G. Kogut J. The Renormalization Group and the  $\epsilon$ -Expansion. - Phys. Reports, 1974, v. 12, N. 2, p. 75-200.

28. Wilson K.G. The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem. - Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, N. 4, p. 773-840.
29. Amit D.J. Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena. - 335 p. McGraw-Hill Inc. N.Y. 1978.
30. Ма Ш. Современная теория критических явлений. - 304 с. М. "Мир" 1980.
31. Садовский М.В. Локализация электронов в неупорядоченных системах. Порог подвижности и теория критических явлений. - ЖЭТФ, 1976, т. 70, №5, с. 1936-1940.
32. Wegner F.J. Electrons in Disordered Systems. Scaling Near the Mobility Edge. - Zs. Phys. B., 1976, v. 25, N. 4, p. 327-337.
33. Edwards J.T. Thouless D.J. Numerical Studies of Localization in Disordered Systems. - J. Phys. C., 1972, v. 5, N. 8, p. 807-820.
34. Last B.J. Thouless D.J. Evidence for Power Law Localization in Disordered Systems. - J. Phys. C., 1974, v. 7, N. 4, p. 699-715.
35. Licciardello D.C. Thouless D.J. Constancy of Minimum Metallic Conductivity in Two Dimensions. - Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, N. 21, p. 1475-1478.
36. Licciardello D.C. Thouless D.J. Conductivity and Mobility Edges for Two-Dimensional Disordered Systems. - J. Phys. C., 1975, v. 8, N. 24, p. 4157-4170.
37. Licciardello D.C. Thouless D.J. Conductivity and Mobility Edges in Disordered Systems II. Further Calculations for the Square and Diamond Lattices. - J. Phys. C., 1978, v. 11, N. 5, p. 925-936.
38. Wilson K.G. Renormalization Group and Strong Interactions. - Phys. Rev. D., 1971, v. 3, N. 3, p. 1818-1846.
39. Боголюбов Н.Н. Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. - 480 с. М. "Наука" 1976.
40. Владимиров А.А. Ширков Д.В. Ренормализационная группа и ультрафиолетовые асимптотики. - УФН, 1979, т. 129, №3, с. 407-441.
41. Shapiro B. Abrahams E. Scaling Theory of the Hall Effect in Disordered Electronic System. - Phys. Rev. B., 1981, v. 24, N. 7, p. 4025-4030.



42. Imry Y. Possible Role of Incipient Anderson Localization in the Resistivities of Highly Disordered Metals.-Phys.Rev.Lett., 1980, v.44,N.7,p.469-471.
43. Bergmann G. Weak Localization in Thin Films, a Time-of-Flight Experiment with Conduction Electrons.-Phys.Reports,1984, v.107,N.1,p.1-58.
44. Mott N.F. Pepper M. Pollit S. Wallis R.H. Adkins C.J. The Anderson Transition.-Proc.Roy.Soc.A., 1975, v.345, p.169-205.
45. Mott N.F. The Degenerate Electron Gas in Tungsten Bronzes and in Highly-Doped Silicon.-Phil.Mag., 1977, v.35, N.1, p.III-128.
46. Sasaki W. Metal-Non-Metal Transition in Phosphorous-Doped Silicon.-Phil.Mag.B., 1980, v.42, N.6, p.725-733.
47. Rosenbaum T.F. Andres K. Thomas G.A. Bhatt R.N. Sharp Metal-Insulator Transition in a Random Solid.-Phys.Rev.Lett., 1980, v.45, N.21, p.1723-1726.
48. Paalanen M.A. Rosenbaum T.F. Thomas G.A. Bhatt R.N. Stress Tuning of the Metal-Insulator Transition at Millikelvin Temperatures.-Phys.Rev.Lett., 1982, v.48, N.18, p.1284-1287.
49. Hess H.F. De Conde K. Rosenbaum T.F. Thomas G.A. Giant Dielectric Constants at the Approach to the Insulator-Metal Transition.-Phys.Rev.B., 1982, v.25, N.8, p.5578-5580.
50. Rosenbaum T.F. Milligan R.F. Paalanen M.A. Thomas G.A. Bhatt R.N. Lin W. Metal-Insulator Transition in a Doped Semiconductor.-Phys.Rev.B., 1983, v.27, N.12, p.7509-7523.
51. Thomas G.A. Paalanen M.A. Rosenbaum T.F. Measurements of Conductivity Near the Metal-Insulator Critical Point.-Phys.Rev.B., 1983, v.27, N.6, p.3897-3900.
52. Paalanen M.A. Rosenbaum T.F. Thomas G.A. Bhatt R.N. Critical Scaling of the Conductance in a Disordered Insulator.-Phys.Rev.Lett., 1983, v.51, N.20, p.1896-1899.

53. Mott N.F. The Minimum Metallic Conductivity in Three Dimensions. Phil. Mag. B., 1981, v. 44, N. 2, p. 265-284.
54. Capizzi M. Thomas G.A. De Rosa F. Bhatt R.N. Rice T.M. Observation of the Approach to a Polarization Catastrophe. - Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, N. 15, p. 1019-1022.
55. Newman P.F. Holcomb D.F. Metal-Insulator Transition in Si:As. - Phys. Rev. B., 1983, v. 28, N. 2, p. 638-640.
56. Thomas G.A. Ootuka Y. Katsumoto S. Kobayashi S. Sasaki W. Evidence for Localization Effects in Compensated Semiconductors. - Phys. Rev. B., 1982, v. 25, N. 6, p. 4228-4290.
57. Ionov A.N. Shlimak I.S. Matveev M.N. An Experimental Determination of the Critical Exponents at the Metal-Insulator Transition. Sol. State Comm., 1983, v. 47, N. 10, p. 763-766.
58. Забродский А.Г. Зиновьева К.Н. Низкотемпературная проводимость и переход металл-диэлектрик в компенсированном n-Ge. - ЖЭТФ, 1984, т. 86, №2, с. 727-742.
59. Hertel G. Bishop D.J. Spencer E.G. Rowell J.M. Dynes R.C. Tunneling and Transport Measurements at the Metal-Insulator Transition of Amorphous Nb:Si. - Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, N. 10, p. 743-746.
60. Epstein K. Goldman A.M. Kadin A.M. Quantum Localization Versus Classical Percolation and the Metal-Nonmetal Transition in Hg-Xe Films. - Phys. Rev. B., 1983, v. 27, N. 11, p. 6685-6690.
61. Anderson P.W. The Fermi-Glass: Theory and Experiment. - Comments on Solid State Physics, 1970, v. 2, N. 6, p. 193-198.
62. Anderson P.W. Local Moments and Localized States. - Rev. Mod. Phys. - v. 50, N. 2, p. 191-201.
63. Economou E.N. Cohen M.H. Existence of Mobility Edges in Anderson model for Random Lattices. - Phys. Rev. B., 1972, v. 5, N. 5, p. 2931-2948.
64. Economou E.N. Green's Functions in Quantum Physics. - 250 p.p. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

65. Licciardello D.C. Economou E.N. Study of Localization in Anderson's Model for Random Lattices.-Phys.Rev.B., 1975, v.II, N.10, p.3697-3717.
66. Ziman J.M. Localization of Electrons in Ordered and Disordered Systems. II. Bound Bands.-J.Phys.C., 1969, v.2, N.7, p.1230-1247.
67. Shante V.K.S. Kirkpatrick S. An Introduction to Percolation Theory.-Adv.Phys., 1971, v.20, N.85, p.325-357.
68. Stein J. Krey U. Numerical Studies on the Anderson Localization Problem I. Localization Edges and Critical Exponents.-Zs.Phys.B., 1979, v.34, N.3, p.287-296.
69. Stein J. Krey U. Numerical Studies on the Anderson Localization Problem II. Conductivity.-Zs.Phys.B., 1980, v.37, N.1, p.13-22.
70. Kramer B. Mac Kinnon A. Weaire D. Numerical Study of Conductivity for the Anderson Model in Two and Three Dimensions.-Phys.Rev.B., 1981, v.23, N.12, p.6357-6370.
71. Mac Kinnon A. Kramer B. One-Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems.-Phys.Rev.Lett., 1981, v.47, N.21, p.1546-1549.
72. Mac Kinnon A. Kramer B. The Scaling Theory of Electrons in Disordered Solids: Additional Numerical Results.-Zs.Phys.B., 1983, v.53, N.1, p.1-13.
73. Abou-Chacra R. Anderson P.W. Thouless D.J. A Self-Consistent Theory of Localization.-J.Phys.C., 1973, v.6, N.10, p.1734-1752.
74. Abou-Chacra R. Thouless D.J. Self-Consistent Theory of Localization II. Localization Near the Band Edges.-J.Phys.C., 1974, v.7, N.1, p.65-75.
75. Soukoulis C.M. Economou E.N. Localization in Disordered Two-Dimensional Systems.-Phys.Rev.Lett., 1980, v.45, N.19, p.1590-1593.
76. Soukoulis C.M. Economou E.N. Localization in Disordered Three-Dimensional Systems.-J.Phys.C., 1981, v.14, N.9, p.1221-1224.

77. Antoniou P.D. Economou E.N. Absence of Anderson's Transition in Random Lattices with Off-Diagonal Disorder. - Phys. Rev. B., 1977, v. 16, N. 8, p. 3768-3781.
78. Садовский М.В. Локализация электронов в модели случайных фаз и в магнитном поле. - ЖЭТФ, 1981, т. 80, №3, с. 1135-1148.
79. Kogut J.B. An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems. - Rev. Mod. Phys., 1979, v. 51, N. 4, p. 659-713.
80. Toulouse G. Theory of Frustration Effect in Spin Glasses I. - Communications on Physics, 1977, v. 2, N. 4, p. 115-119.
81. Fradkin E. Huberman B.A. Shenker S.H. Gauge Symmetries in Random Magnetic Systems. - Phys. Rev. B., 1978, v. 18, N. 9, p. 4789-4814.
82. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. ч. I. 496 с. М. "Наука" 1976.
83. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. кн. I. 752 с. М. "Советское радио" 1969.
84. Evangelou S.N. Quantum Percolation and the Anderson Transition in Dilute Systems. - Phys. Rev. B., 1983, v. 27, N. 2, p. 1397-1400.
85. Beckman P. Rayleigh Distribution and its Generalizations. - J. Res. Nat. Bureau of Standards USA (Radio Science), 1964, v. 68D, N. 9, p. 927-936.
86. Friedman L. The Hall Effect in Ordered and Disordered Systems. - Phil. Mag., 1978, v. 38, N. 5, p. 467-476.
87. Anderson P.W. The Size of Localized States Near the Mobility Edge. - Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1972, v. 69, N. 5, p. 1097-1099.
88. Freed K.F. Electron Localization in Disordered Systems. - Phys. Rev. B., 1972, v. 5, N. 12, p. 4802-4826.
89. Abram R.A. Edwards S.F. The Nature of the Electronic States of a Disordered System I. Localized States. - J. Phys. C., 1972, v. 5, N. 11, p. 1183-1195.
90. Abram R.A. Edwards S.F. The Nature of the Electronic States of a Disordered System II. Extended States. - J. Phys. C., 1972, v. 5, N. 11, p. 1196-1206.

91. De Gennes P.G. Exponents for the Excluded Volume Problem.-  
Phys. Lett. A., 1972, v. 38, N. 5, p. 339-340.
92. Des Cloizeaux J. Lagrangian Theory for a Self-Avoiding Random Chain.-Phys. Rev. A., 1974, v. 10, N. 5, p. 1665-1669.
93. Де Жен П. Идеи скейлинга в физике полимеров.-368 с. М. "Мир" 1982.
94. Freed K.F. Functional Integrals and Polymer Statistics.-  
Adv. Chem. Phys., 1972, v. 22, p. 1-128.
95. Emery V.J. Critical Properties of Many-Component Systems.-  
Phys. Rev. B., 1975, v. 11, N. 1, p. 239-247.
96. Mott N.F. Some Properties of the Mobility Edge in Disordered Systems.-Communications on Physics, 1976, v. 1, N. 7, p. 203-206.
97. Economou E.N. Cohen M.H. Localization in One-Dimensional Disordered Systems.-Phys. Rev. B., 1971, v. 4, N. 2, p. 396-404.
- ✓ 98. Thouless D.J. Phase Transitions for the One-Dimensional Landau-Ginzburg System and their Relation to the Theory of Polymers and of Electrons in a Random Potential.-J. Phys. C., 1975, v. 8, N. 12, p. 1803-1812.
99. Абрикосов А.А. Горьков Л.П. Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике.-444 с. М. Физматгиз 1962.
100. Садовский М.В. Критерий локализации в полевой теории электрона в случайном поле.-ЖЭТФ, 1982, т. 83, №4(10), с. 1418-1429.
101. Березинский В.Л. Горьков Л.П. К теории электронов локализованных в поле дефектов.-ЖЭТФ, 1979, т. 77, №6(12), с. 2498-2517.
102. Wegner F.J. Inverse Participation Ratio in  $2+\epsilon$  Dimensions.-  
Zs. Phys. B., 1980, v. 36, N. 3, p. 209-214.
103. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика.-  
416 с. М. "Наука" 1971. §16, §17.
104. Кубо Р. Статистическая механика необратимых процессов I. Общая теория и некоторые простые приложения к задачам магнетизма и электропроводности.-В сб. Вопросы квантовой теории необратимых процессов. Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. М. ИЛ. 1961, с. 59-72.

- IO5. Kwok P.C. Schulz T.D. Correlation Functions and Green Functions: Zero-Frequency Anomalies.-J.Phys.C., 1969, v.2, N.7, p.II96-I205.
- IO6. Vollhardt D. Wölfle P. Diagrammatic, Self-Consistent Treatment of the Anderson Localization Problem in  $d \leq 2$  Dimensions.-Phys.Rev.B., 1980, v.22, N.10, p.4666-4679.
- IO7. Малеев С.В. Топерверг Б.П. Поправки к диффузии и проводимости в поле случайно расположенных силовых центров.-ЖЭТФ, 1975, т.69, №4(10), с.1440-1452.
- IO8. Горьков Л.П. Ларкин А.И. Хмельницкий Д.Е. Проводимость частицы в двумерном случайном потенциале.-Письма ЖЭТФ, 1979, т.30, №4, с.248-252.
- IO9. Langer J.S. Neal T. Breakdown of the Concentration Expansion for the Impurity Resistivity of Metals.-Phys.Rev.Lett., 1966, v.16, N.22, p.984-986.
- II0. Wick G.C. Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions.-Phys.Rev., 1954, v.96, N.4, p.II24-II34.
- III. Cutkosky R.E. Solutions of a Bethe-Salpeter Equation.-Phys.Rev., 1954, v.96, N.4, p.II35-II45.
- II2. Nakanishi N. A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation.-Suppl.Progr.Theor.Phys., 1969, N.43, p.I-81.
- II3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.-436 с. М."Наука"1967.
- II4. Götze W. An Elementary Approach Towards the Anderson Transition.-Sol.State Comm., 1978, v.27, N.12, p.I393-I395.
- II5. Götze W. A Theory for the Conductivity of a Fermion Gas Moving in a Strong Three-Dimensional Random Potential.-J.Phys.C., 1979, v.12, N.7, p.I279-I296.
- II6. Götze W. The Mobility of a Quantum Particle in a Three-Dimensional Random Potential.-Phil.Mag.B., 1981, v.43, N.2, p.219-250.

- II7. Vollhardt D. Wölfle P. Scaling Equations from a Self-Consistent Theory of Anderson Localization. - Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, N. 10, p. 699-702.
- II8. Wölfle P. Vollhardt D. Self-Consistent Diagrammatic Theory of Anderson Localization. - In /13/, p. 26-43.
- II9. Sadvskii M. V. The Theory of Electron Localization in Disordered Systems. - Soviet Scientific Reviews - Physics Reviews. Ed. by I. M. Khalatnikov., v. 7, p. 3-131. Harwood Academic Publishers. NY. 1985.
- I20. Мясников А. В. Садовский М. В. Самосогласованная теория локализации в пространствах с размерностью  $2 \leq d < 4$ . - ФТТ, 1982, т. 24, №12, с. 3569-3574.
- I21. Келдыш Л. В. Полупроводники в сильном электрическом поле. - Диссертация. М. ФИАН СССР, 1965. 303 с.
- I22. Эфрос А. Л. Теория электронных состояний в сильно легированных полупроводниках. - ЖЭТФ, 1970, т. 59, №9, с. 880-892.
- I23. Садовский М. В. Об одной модели неупорядоченной системы (к теории "жидких полупроводников"). - ЖЭТФ, 1974, т. 66, №5, с. 1720-1733.
- I24. Садовский М. В. Точное решение для электронной плотности состояний в одной модели неупорядоченной системы. - ЖЭТФ, 1979, т. 77, №5(II), с. 2070-2080.
- I25. Пайнс Д. Нозьер Ф. Теория квантовых жидкостей. - 384 с. М. "Мир" 1967. Гл. 3, §4, Гл. 4, §1.
- I26. Shapiro B. Self-Consistent Calculation of the Frequency-Dependent Conductivity Near the Anderson Transition. - Phys. Rev. B., 1982, v. 25, N. 6, p. 4266-4269.
- I27. Thouless D. J. Electrons in a Four-Dimensional Disordered System. - J. Phys. C., 1976, v. 9, N. 21, p. L603-L608.
- I28. Götze W. The Conductor-Nonconductor Transition in Strongly Disordered Three-Dimensional Systems. - In Recent Developments in Condensed Matter Physics. v. I. Ed. by J. T. Devreese, Plenum Press, NY., 1981, p. 1304-1319.

- I29. Prelovšek P. Conductor-Insulator Transition in the Anderson Model of a Disordered Solid.-Phys.Rev.B., 1981, v.23, N.3, p.1304-1319.
- I30. Kotov E.A. Sadovskii M.V. Self-Consistent Theory of Localization for the Anderson Model.-Zs.Phys.B., 1983, v.51, N.1, p.17-23.
- I31. Kopp T.A. Diagrammatic Two-Particle Locator Theory for Disordered Systems I. General Formulation.-J.Phys.C., 1984, v.17, N.11, p.1897-1917.
- I32. Kopp T.A. Diagrammatic Two-Particle Locator Theory for Disordered Systems II. Self-Consistent Treatment of the Anderson Transition and the Role of Hopping Processes.-J.Phys.C., 1984, v.17, N.11, p.1919-1940.
- I33. Altshuler B.L. Khmel'nitzkii D.E. Larkin A.I. Lee P.A. Magnetoresistance and Hall Effect in a Disordered Two-Dimensional Electron Gas.-Phys.Rev.B., 1980, v.22, N.11, p.5142-5153.
- I34. Fukuyama H. Hall Effect in Two-Dimensional Disordered Systems.-J.Phys.Soc.Japan, 1980, v.49, N.2, p.644-651.
- I35. Ono Y. Anderson Transition in a Magnetic Field - Weak Field Conductivity and Hall Effect.-Zs.Phys.B., 1979, v.35, N.2, p.133-140.
- I36. Котов Е.А. Садовский М.В. Эффект Холла в самосогласованной теории локализации.-ФММ, 1985, т.60, №1, с.22-30.
- I37. Fukuyama H. Ebisawa H. Wada Y. Theory of Hall Effect I.-Progr.Theor.Phys., 1969, v.42, N.3, p.494-511.
- I38. Friedman L. Hall Conductivity of Amorphous Semiconductors in the Random Phase Model.-J.Non-Cryst.Sol., 1971, v.6, p.329-341.
- I39. Yoshioka D. Ono Y. Fukuyama H. Self-Consistent Treatment of Two-Dimensional Anderson Localization in Magnetic Fields.-J.Phys.Soc.Japan, 1981, v.50, N.10, p.3419-3426.
- I40. Gogolin A.A. Zimanyi G.T. Hopping Conductivity and Weak Localization in Two-Dimensional Disordered Systems.-Sol.State Comm., 1983, v.46, N.6, p.469-475.



- I41. Warren W.W. Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation in the "Liquid Semiconductors"  $\text{In}_2\text{Te}_3$ ,  $\text{Ga}_2\text{Te}_3$  and  $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ . - Phys. Rev. B., 1971, v. 3, N. 11, p. 3708-3724.
- I42. Warren W.W. Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation in Liquid Tellurium. - Phys. Rev. B., 1972, v. 6, N. 7, p. 2522-2530.
- I43. Götze W. Ketterle W. Nuclear Spin Relaxation in Disordered Conductors. - Zs. Phys. B., 1983, v. 54, N. 1, p. 49-57.
- I44. Нарат А. Ядерный магнитный резонанс в магнетиках и металлах. - В сб. Сверхтонкие взаимодействия в твердых телах. Под ред. Е.А.Турова. М. "Мир" 1970, с. 163-236.
- I45. Soda G. Jerome D. Weger M. Alizon J. Gallice J. Robert H. Fabre J.M. Giral L. Electronic Properties of TTF-TCNQ: An NMR Approach. - J. de Phys., 1977, v. 38, N. 8, p. 931-948.
- I46. Tunstall D.P. Magnetic Resonance in Impurity Bands. - Phil. Mag. B. 1980, v. 42, N. 6, p. 735-749.
- I47. Lee P.A. Density of States and Screening Near the Mobility Edge. - Phys. Rev. B., 1982, v. 26, N. 10, p. 5882-5885.
- I48. Toulouse G. Pfeuty P. Critère de Ginzburg et Dimensionnalité Caractéristique pour la Problème de la Localisation dans les Systèmes Désordonnés. - Comptes Rendus B, 1970, v. 280, N. 2, p. 33-35.
- I49. Садовский М.В. Электрон в случайном поле в пространстве с размерностью  $d = 4 - \epsilon$ . ФТТ, 1977, т. 19, №8, с. 1334-1338.
- I50. Edwards S.F. Green M.B. Srinivasan G. The Density of States of Electrons in a Disordered Material. - Phil. Mag., 1977, v. 35, N. 5, p. 1421-1424.
- I51. Nitzan A. Freed K.F. Cohen M.H. Renormalization Group and Critical Localization. - Phys. Rev. B., 1977, v. 15, N. 9, p. 4476-4489.
- I52. Amit D.J. The Ginzburg Criterion - Rationalized. - J. Phys. C., 1974, v. 7, N. 18, p. 3369-3377.
- I53. Brezin E. Parisi G. Exponential Tail of the Electron Density of Levels in a Random Potential. - J. Phys. C., 1980, v. 13, N. 12, p. L307-L310.

- I54. Ларкин А.И. Хмельницкий Д.Е. Фазовый переход в одноосных сегнетоэлектриках. - ЖЭТФ, 1969, т.56, №6, с.2087-2098.
- I55. Люксютов И.Ф. Покровский В.Л. Хмельницкий Д.Е. Пересечение линий переходов второго рода. - ЖЭТФ, 1975, т.69, №5(II), с.1817-1824.
- I56. Zittartz J. Langer J.S. Theory of Bound States in a Random Potential. - Phys.Rev., 1966, v.148, N.2, p.741-747.
- I57. Halperin B.I. Lax M. Impurity-Band Tails in the High-Density Limit I. Minimum Counting Methods. - Phys.Rev., 1966, v.148, N.2, p.722-740.
- I58. Лифшиц И.М. Теория флуктуационных уровней в неупорядоченных системах. - ЖЭТФ, 1967, т.53, №2(8), с.743-758.
- I59. Langer J.S. Theory of the Condensation Point. - Ann.Phys., 1967, v.41, N.1, p.108-157.
- I60. Cardy J.L. Electron Localization in Disordered Systems and Classical Solutions in Ginzburg-Landau Field Theory. - J.Phys.C., 1978, v.II, N.8, p.L321-L327.
- I61. Садовский М.В. Электрон в случайном поле, теория фазовых переходов и нелинейные решения с конечным действием. - ФТТ, 1979, т.21, №3, с.743-751.
- I62. Collins J.C. Soper D.E. Large Order Expansion in Perturbation Theory. - Ann.Phys., 1978, v.II2, p.209-234.
- I63. Kazakov D.I. Shirkov D.V. Asymptotic Series of Quantum Field Theory and their Summation. - Fortschr.Physik, 1980, v.28, N.8/9, p.465-499.
- I64. Zinn-Justin J. Perturbation Series at Large Orders in Quantum Mechanics and Field Theories: Application to the Problem of Resummation. - Phys.Reports, 1981, v.70, N.2, p.109-167.
- I65. Dyson F.J. Divergence of Perturbation Theory in Quantum Electrodynamics. - Phys.Rev., 1952, v.85, N.4, p.631-632.
- I66. Липатов Л.Н. Расходимость ряда теории возмущений и квазиклассика. - ЖЭТФ, 1977, т.72, №2, с.411-427.

- I67. Bender C.M. Wu T.T. Anharmonic Oscillator II. A Study of Perturbation Theory in Large Order. - Phys. Rev. D, 1973, v. 7, N. 6, p. 1620-1636.
- I68. Bogomolny E.B. Calculation of the Green Functions by the Coupling Constant Dispersion Relations. - Phys. Lett. B., 1977, v. 67, N. 2, p. 193-194.
- I69. Dorfel B.D. Kazakov D.I. Shirkov D.V. The Universality of Coupling Constant Singularity in QFT. - Preprint JINR, 1977, E2-I0720, 12 p.p.
- I70. Wallace D.J. Some Applications of Instantons in Statistical Mechanics. - In Solitons and Condensed Matter Physics. Ed. by A.R. Bishop. T. Schneider. Springer Series in Solid State Sciences. v. 8. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1978, p. 104-115.
- I71. Coleman S. Fate of the False Vacuum: Semiclassical Theory. - Phys. Rev. D., 1977, v. 15, N. 10, p. 2929-2936.
- I72. Callan. C.G. Coleman S. Fate of the False Vacuum II. First Quantum Corrections. - Phys. Rev. D., 1977, v. 16, N. 6, p. 1762-1768.
- I73. Makhankov V.G. On the Existence of Non-One-Dimensional Soliton-like Solutions for some Field Theories. - Phys. Lett. A., 1977, v. 61, N. 7, p. 431-433.
- I74. Coleman S. Gläser V. Martin A. Action Minima Among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations. - Comm. Math. Phys. - 1978, v. 58, p. 211-222.
- I75. Finkelstein R. Le Levier R. Ruderman M. Nonlinear Spinor Fields. - Phys. Rev., 1951, v. 83, N. 2, p. 326-332.
- I76. Harris A.B. Lubensky T.C. Mean-Field Theory and  $\epsilon$  - Expansion for Anderson Localization. - Phys. Rev. B., 1981, v. 23, N. 6, p. 2640-2673.
- I77. Brezin E. Parisi G. Critical Exponents and Large-Order Behavior of Perturbation Theory. J. Stat. Phys., 1978, v. 19, N. 3, p. 269-292.

- I78. Luttinger J.M. Tao R. Electronic Density of Levels in a Disordered System.- Ann.Phys., 1983, v.145, N.1, p.185-203.
- I79. Halperin B.I. Green's Functions for a Particle in a One-Dimensional Random Potential.- Phys.Rev., 1965, v.139, N.1A, p.A104-A117.
- I80. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Статистическая физика. ч.1. - 584 с. М. "Наука" 1976, §146.
- I81. Parisi G. Some Remarks on the Electronic States in Disordered Materials.- J.Phys.A., 1981, v.14, N.3, p.735-743.
- I82. Cornwall J.M. Jackiw R. Tomboulis E. Effective Action for Composite Operators.- Phys.Rev.D., 1974, v.10, N.8, p.2428-2445.
- I83. Morandi G. Stability of Conserving Approximations and Second-Order Phase Transitions in Interacting Fermi Systems.- J.Phys.A., 1969, v.2, N.5, p.487-502.
- I84. Альтшулер Б.Л. Аронов А.Г. К теории неупорядоченных металлов и сильнолегированных полупроводников. - ЖЭТФ, 1979, т.77, №5(II), с.2028-2044.
- I85. Altshuler B.L. Aronov A.G. Lee P.A. Interaction Effects in Disordered Fermi Systems in Two Dimensions.- Phys.Rev.Lett., 1980, v.44, N.19, p.1288-1291.
- I86. Altshuler B.L. Aronov A.G. Fermi-Liquid Theory of the Electron-Electron Interaction Effects in Disordered Metals.- Sol.State Comm., 1983, v.46, N.6, p.429-435.
- I87. Efros A.L. Shklovskii B.I. Coulomb Gap and Low Temperature Conductivity of Disordered Systems.- J.Phys.C., 1975, v.8, N.4, p.L49-L51.
- I88. Efros A.L. Coulomb Gap in Disordered Systems.- J.Phys.C., 1976, v.9, N.11, p.2021-2030.
- I89. Baranovskii S.D. Efros A.L. Gelmont B.L. Shklovskii B.I. Coulomb Gap in Disordered Systems: Computer Simulation.- J.Phys.C., 1979, v.12, N.6, p.1023-1034.

- I90. Davies J.H. Lee P.A. Rice T.M. Electron Glass. - Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, N. 10, p. 758-761.
- I91. McMillan W.L. Scaling Theory of the Metal-Insulator Transition in Amorphous Materials. - Phys. Rev. B., 1981, v. 24, N. 5, p. 2739-2743.
- I92. Oppermann R. The Mott-Anderson Metal-Insulator Transition in N-Orbital Model. - Zs. Phys. B., 1983, v. 49, p. 273-287.
- I93. Финкельштейн А.М. Влияние кулоновского взаимодействия на свойства неупорядоченных металлов. - ЖЭТФ, 1983, т. 84, №1, с. 367 - 380.
- I94. Финкельштейн А.М. О переходе металл-изолятор в неупорядоченной системе. - ЖЭТФ, 1984, т. 86, №1, с. 367-380.
- I95. Grest G.S. Lee P.A. Scaling Theory of Interacting Disordered Fermions. - Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, N. 9, p. 693-697.
- I96. Ma M. Fradkin E. Localization and Interactions in a Disordered Electron Gas. - Phys. Rev. B., 1983, v. 28, N. 6, p. 2990-3006.
- I97. Castellani C. Di Castro C. Lee P.A. Ma M. Interaction Driven Metal-Insulator Transitions in Disordered Fermion System. - Phys. Rev. B., 1984, v. 30, N. 2, p. 527-543.
- I98. Freedman R. Hertz J.A. Theory of a Fermi Glass. - Phys. Rev. B., 1977, v. 15, N. 4, p. 2384-2398.
- I99. Fleishman L. Licciardello D.C. Anderson P.W. Elementary Excitations in the Fermi Glass. - Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, N. 20, p. 1340-1343.
200. Fleishman L. Anderson P.W. Interactions and the Anderson Transition. - Phys. Rev. B., 1980, v. 21, N. 6, p. 2366-2377.
201. Кацнельсон М.И. Садовский М.В. Плотность состояний и экранирование вблизи порога подвижности. - ЖЭТФ, 1984, т. 87, №2(8), с. 523-536.
202. Кацнельсон М.И. Садовский М.В. Межэлектронное взаимодействие в самосогласованной теории локализации. - ФТТ, 1983, т. 25, №11, с. 3372 - 3382.

203. Мигдал А.Б. Теория конечных Ферми-систем и свойства атомных ядер.- 432 с. М. "Наука" 1983.
204. Abrahams E. Anderson P.W. Lee P.A. Ramakrishnan T.V. Quasiparticle Lifetime in Disordered Two-Dimensional Metals.- Phys.Rev.B., 1981, v.24, N.12, p.6783-6789.
205. Mott N.F. Conduction in Non-Crystalline Systems VIII. The Highly Correlated Electron Gas in Doped Semiconductors and in Vanadium Monoxide.- Phil.Mag., 1971, v.24, N.190, p.935-958.
206. Kamimura H. Diagonal and Off-Diagonal Correlation Effects in Anderson-Localized States.- Phil.Mag.B., 1980, v.42, N.6, p.763-779.
207. Березинский В.Л. Горьков Л.П. Термодинамика взаимодействующих электронов в неупорядоченных одномерных проводниках.- ЖЭТФ, 1980, т.78, №2, с.813-830.
208. Maldague P.F. Quantum Diffusion and Divergent Fluctuations in Disordered Metals.- Phys.Rev.B, 1981, v.23, N.4, p.1719-1728.
209. Imry Y. Gefen Y. Bergman D.J. Dielectric Anomalies Near the Anderson Metal-Insulator Transition.- Phys.Rev.B., 1982, v.26, N.6, p.3436-3439.
210. Rice T.M. Correlation Effects in Metal-Insulator Transitions.- In Disordered Systems and Localization. Lecture Notes in Physics, v.149, Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1981, p.220-234.
211. Jäckle J. Screening of the Random Potential Near the Anderson Metal-Insulator Transition.- Phil.Mag.B., 1982, v.46, N.4, p.313-319.
212. Bardeen J. Cooper L. Schrieffer J.R. Theory of Superconductivity. Phys.Rev., 1957, v.108, N.5, p.1175-1204.
213. Imry Y. Strongin M. Destruction of Superconductivity in Granular and Highly-Disordered Metals.- Phys.Rev.B., 1981, v.24, N.11, p.6353-6360.

- 2I4. Maekawa S. Fukuyama H. Localization Effects in Two-Dimensional Superconductors. - J. Phys. Soc. Japan, 1981, v. 51, N. 5, p. 1380-1385.
- 2I5. Maekawa S. Localization Versus Superconductivity. - In /I3/, p. 103-112.
- 2I6. Maekawa S. Ebisawa H. Fukuyama H. Upper Critical Field in Two-Dimensional Superconductors. - J. Phys. Soc. Japan, 1983, v. 52, N. 4, p. 1352-1360.
- 2I7. Takagi H. Kuroda Y. Anderson Localization and Superconducting Transition Temperature in Two-Dimensional Systems. - Sol. State Comm., 1982, v. 41, N. 9, p. 643-648.
- 2I8. Takagi H. Souda R. Kuroda Y. Anderson Localization and Ginzburg-Landau Equations in Two-Dimensional Superconductors. - Progr. Theor. Phys., 1982, v. 68, N. 2, p. 426-438.
- 2I9. Takagi H. Kuroda Y. Anderson Localization and Energy Gap in Two-Dimensional Superconductors. - Progr. Theor. Phys., 1983, v. 69, N. 6, p. 1677-1685.
220. Oppermann R. Superconductivity and Localization in Disordered Systems: A Local Gauge Invariant Approach. - J. Phys. Soc. Japan, 1983, v. 52, N. 10, p. 3354-3562.
221. Anderson P. W. Muttalib K. A. Ramakrishnan T. V. Theory of the "Universal" Degradation of  $T_c$  in High-Temperature Superconductors. Phys. Rev. B., 1983, v. 28, N. 1, p. 117-120.
222. Coffey L. Muttalib K. A. Levin K. Theory of Upper Critical Fields in Highly Disordered Superconductors: Localization Effects. - Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52, N. 9, p. 783-786.
223. Булаевский Л. Н. Садовский М. В. Локализация и сверхпроводимость. - Письма ЖЭТФ, 1984, т. 39, № II, с. 524-527.
224. Bulaevskii L. N. Sadovskii M. V. Anderson Localization and Superconductivity. - J. Low. Temp. Phys., 1985, v. 59, N. 1/2, p. 89-113.

225. Anderson P.W. Theory of Dirty Superconductors.-  
J.Phys.Chem.Solids, 1959, v.II, N.I-2, p.26-30.
226. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. - 280 с.  
М. "Мир" 1968.
227. Горьков Л.П. К теории сверхпроводящих сплавов в сильном маг-  
нитном поле вблизи критической температуры. - ЖЭТФ, 1959,  
т. 37, №5, с. 1407-1416.
228. Жарков Г.Ф. Туннельный эффект Джозефсона в сверхпроводниках.-  
В сб. Сверхпроводимость. М. "Наука" 1967, с.135-166.
229. Давыдов С.А. Архипов В.Е. Воронин В.И. Гощицкий Б.Н. Влияние ре-  
акторного облучения на физические свойства соединения  $\text{SnMo}_5\text{S}_6$ .  
ФММ, 1983, т55, №5, с.931-935.
230. Алексеевский Н.Е. Митин А.В. Самосюк В.Н. Фирсов В.И. Изменение  
физических свойств сверхпроводящих сульфидов молибдена при  
облучении и последующем отжиге.-ЖЭТФ, 1983, т.85, №3(9), с.1092.
231. Сан-Жам Д. Сарма Г. Томас Е. Сверхпроводимость второго рода.-  
364 с. М. "Мир" 1970.
232. Werthamer N.R. Helfand E. Temperature and Purity Dependence of  
the Superconducting Critical Field  $H_{c2}$  II. Phys.Rev., 1966,  
v.147, N.1, p.288-294.
233. Werthamer N.R. Helfand E. Hohenberg P.C. Temperature and Purity  
Dependence of the Superconducting Critical Field  $H_{c2}$  III.  
Electron Spin and Spin-Orbit Effects.-Phys.Rev., 1966,  
v.147, N.1, p.295-302.
234. Джонсон У. Сверхпроводимость в металлических стеклах.- В кн.  
Металлические стекла. Под ред. Г. Гюнтеродта и Г. Бека. М. "Мир",  
1983. с. 280-324.
235. Вонсовский С.В. Изюмов Ю.А. Курмаев Э.З. Сверхпроводимость пере-  
ходных металлов, их сплавов и соединений.-384 с. М. "Наука" 1977.
236. Keck B. Schmid A. Superconductivity and Electron-Phonon Interac-  
tion in Impure Simple Metals.-J.Low Temp.Phys., 1976, v.24,  
N.5/6, p.611-629.



237. Fleurov V.N. Kondratenko P.S. Kozlov A.N. Conductivity of Impure Metals at Low Temperatures. - J. Phys. F., 1980, v. 10, N. 9, p. 1953-73.
238. Freeman A.J. Jarlborg T. Electronic Structure and Superconductivity/Magnetism in Ternary Compounds. - In Superconductivity in Ternary Compounds II. Superconductivity and Magnetism. Ed. by M.B. Maple, F. Fischer. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 1982, p. 167-200.
239. Коут П. Майзел Л. Электронные явления переноса в стеклообразных металлах. - В кн. Металлические стекла. Под ред. Г. Гюнтеродта и Г. Бека. М. "Мир" 1983, с. 207-244.
240. Jerome D. Schulz H.J. Organic Conductors and Superconductors. - Adv. Phys., 1982, v. 31, N. 4, p. 299-490.
241. Медведев М.В. Садовский М.В. Локализация одночастичных спиновых возбуждений в ферромагнетике с хаотической анизотропией типа "легкая ось". - ФТТ, 1981, т. 23, №7, с. 1943-1947.
242. Edwards S.F. Jones R.C. A Green Function Theory of Spin Waves in Randomly Disordered Magnetic Systems I. The Ferromagnet. - J. Phys. C., 1971, v. 4, N. 14, p. 2109-2126.
243. Korenblit I. Ya. Shender E.F. Spin Waves in Amorphous Ferromagnets with Random Anisotropy Axis. - J. Phys. F., 1979, v. 9, N. 11, p. 2245-2252.
244. Medvedev M.V. Spin Waves in a Uniaxial Ferromagnet with Random Exchange Bonds of Different Signs. - Phys. Stat. Sol. (b), 1978, v. 88, N. 1, p. 117-127.
245. Blandin A. Theories Versus Experiments in the Spin Glass Systems. - J. de Phys., 1978, Colloq. C6, Suppl. N. 8, v. 39, p. C6-1499-1516.
246. Fisher K.H. Spin Glasses (I). - Phys. Stat. Sol. (b), 1983, v. 116, p. 357-414.
247. Hertz J.A. Fleishman L. Anderson P.W. Marginal Fluctuations in a Bose Glass. - Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, N. 13, p. 942-945.

248. Hertz J.A. Spectra of Condensed Modes in Spin-Glasses: Mean-Field Theory and Time Dependence.-Phys.Rev.Lett., 1983, v.51, N.20, p.1880-1883.
249. Feigelman M.V. Ioffe L.B. Hierarchical Nature of Spin Glass.-J.de Phys.-Lettres, 1984, v.45, p.1475-1481.
250. Vanninemus J. Toulouse G. Theory of the Frustration Effect II: Ising Spins on a Square Lattice.-J.Phys.C., 1977, v.10, N.18, p.L537-L542.
251. Jayaprakash C. Chalupa J. Wortis M. Spin-Glass Behavior from Migdal's Recursion Relations.-Phys.Rev.B., 1977, v.15, N.3, p.1495-1501.
252. Kirkpatrick S. Frustration and Ground-State Degeneracy in Spin Glasses.-Phys.Rev.B., 1977, v.16, N.10, p.4630-4641.
253. Medvedev M.V. Phase Diagrams of an Ising Magnet with Random Exchange Bonds.-Phys.Stat.Sol.(b), 1978, v.86, N.1, p.109-118.
254. Grinstein C. Jayaprakash C. Wortis M. Ising Magnets with Frustration. Zero-Temperature Properties from Series Expansion.-Phys.Rev.B., 1979, v.19, N.1, p.260-264.
255. Schuster H.G. Phase Transitions in the Frustration Network.-Zs.Phys.B., 1979, v.35, N.2, p.163-170.
256. Turban L. Guilmin P. Ising Spin Glasses in the Effective Interaction Approximation.-J.de Phys.-Lettres, 1980, v.41, N.7, p.LI45-LI49.
257. Medvedev M.V. Sadovskii M.V. Random Bond Ising Model in Self-Avoiding Walk Approximation.-Phys.Stat.Sol.(b), 1982, v.109, N.1, p.49-57.
258. Domb C. Self-Avoiding Walks and the Ising and Heisenberg Models.-J.Phys.C., 1970, v.3, N.2, p.256-284.
259. Фишер М. Природа критического состояния.-224 с.М."Мир" 1968.
260. Прохоров Ю.В. Розанов Ю.А. Теория вероятностей.-496 с. М. "Наука" 1967.

261. Петраковский Г.А. Кузьмин Е.В. Аплеснин С.С. Исследование Изинговской модели со случайными обменными связями методом Монте-Карло. - ФТТ, 1981, т.23, №10, с.3147-3152.
262. Edwards S.F. Anderson P.W. Theory of Spin Glasses. - J. Phys. F., 1975, v.5, p.965-974.
263. Medvedev M.V. Sadowskii M.V. Random Site Ising Model in Self-Avoiding Walk Approximation. - Phys. Stat. Sol. (b), 1982, v.109, N.2, p.449-456.
264. Medvedev M.V. Romyantsev E.L. On the Existence of a Spin-Glass State in an Ising Alloy Model with Mixed Nearest-Neighbour Exchange Interactions. - Phys. Stat. Sol. (b), 1978, v.85, N.2, p.427-438.
265. Mühlischlegel B. Scalapino D.J. Denton R. Thermodynamic Properties of Small Superconducting Particles. - Phys. Rev. B., 1972, v.6, N.5, p.1767-1777.