ЭЛЕКТРОН В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ С РАЗМЕРНОСТЬЮ $d=4-\varepsilon$

М. В. Садовский

Рассматривается задача о нахождении усредненных характеристик электрона в гауссовом случайном поле. Используя соответствие этой задачи с теорией нулькомпонентного поля для пространства $d=4-\varepsilon$, показывается, что окрестность порога подвижности играет роль переходной области от слабой к сильной связи, что аналогично известной ситуации в проблеме Кондо. Скэйлинговое поведение в переходной области отсутствует.

Описание электронных состояний и кинетики вблизи порогов подвижности представляет собой принципиальную нерешенную задачу теории неупорядоченных систем [1]. В последнее время в ряде работ [2–4] были предприняты попытки описания поведения электронов вблизи порога подвижности с использованием идей теории критических явлений в окрестности точки фазового перехода второго рода [5]. В частности, в работе [2] в рамках подхода Андерсона [6] было показано, что пространственное поведение волновых функций вблизи порога подвижности описывается скэйлинговыми зависимостями с критическими индексами, определяемыми задачей о фазовом переходе с нулькомпонентным параметром порядка [7, 8]. Аналогия теории критических явлений с нулькомпонентным параметром порядка и задачи об электроне в случайном поле наиболее прозрачна при рассмотрении задачи в рамках второго традиционного подхода теории неупорядоченных систем, восходящего к известным работам Эдвардса [9], однако, как уже отмечалось в [2], в этом случае существуют определенные трудности, в значительной степени обесценивающие эту аналогию. Настоящая работа посвящена более подробному разбору возникающих здесь трудностей, которые, к сожалению, не были учтены в недавней работе Шустера [10].

Рассматривается электрон в поле хаотически расположенных точечных рассеивателей и вычисляется одноэлектронная функция Грина $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\,t)$, усредненная по случайным конфигурациям рассеивателей. В пределе $\rho\to\infty$, $V\to 0$, $\rho V^2\to\text{const}$, [9, 11], где ρ — плотность, а V — потенциал рассеивателей, задача эквивалентна рассмотрению электрона в гауссовом случайном поле, а искомая функция Грина представляется в виде следующего континуального интеграла [9, 11]:

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'t)=\int\limits_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}} D\mathbf{r}(\tau)\exp\left\{\frac{im}{2}\int\limits_0^t d\tau\dot{\mathbf{r}}^2(\tau)-\frac{\rho V^2}{2}\int\limits_0^t d\tau_1\int\limits_0^t d\tau_2\delta(\mathbf{r}(\tau_1)-\mathbf{r}(\tau_2))\right\}, \qquad (1)$$

где принята модель примесного коррелятора типа «белого» шума [9, 11, 12]. Выполним в (1) аналитическое продолжение $t\to -i\beta$, тогда

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\beta)=\int\limits_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{r}} Dr(s)\exp\left\{-\frac{m}{2}\int\limits_0^\beta ds\dot{\mathbf{r}}^2(s)+\frac{\rho V^2}{2}\int\limits_0^\beta ds_1\int\limits_0^\beta ds_2\delta(\mathbf{r}(s_1)-\mathbf{r}(s_2))\right\}. \qquad (2)$$

Функциональный интеграл такого типа описывает термодинамику полимерной цепи с притяжением между звеньями [9, 11]. Следуя методу де Женна и де Клуазо, использовавшемуся ими в теории полимерных цепей с отталкиванием (задача исключенного объема) [7, 8] в рамках теории возмущений, можно показать, что $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\ \beta)$, или в импульсном представлении $G(\mathbf{p}\beta)$, определяется обратным преобразованием Лапласа

$$G(p\beta)=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{d\tau}{2\pi i}e^{\tau\beta}G(p\tau), \tag{3}$$

где $G(p\tau)$ — функция Грина теории поля с лагранжианом,

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{2m}(\nabla\Phi_j)^2+\tau\Phi_j^2\right\}-\frac{1}{8}\rho V^2\left(\sum_{j=1}^{n}\Phi_j^2\right)^2. \tag{4}$$

Здесь n — число компонент поля Φ, которое следует (в конце вычислений!) положить равным нулю, что исключает «лишние» диаграммы с петлями, пропорциональные n, отсутствующие в задаче об электроне в случайном поле [9]. Обратим внимание на «неправильный» знак константы взаимодействия в (4), соответствующий притяжению «частиц» поля Φ. Именно это обстоятельство приводит к радикальному отличию рассматриваемой задачи от теории фазовых переходов. Этот факт не был учтен в работе [10], что привело к ошибочным выводам. Хорошо известно, что такая задача теории поля неустойчива в смысле отсутствия основного состояния [13].

Нетрудно видеть, что пространственно-временной Фурье-образ $G^R(\mathbf{p}E)$ запаздывающей функции Грина может быть получен из $G(\mathbf{p}\tau)$ теории поля (4) с помощью аналитического продолжения $\tau\to-(E+i\delta)$.

Хорошо известно, что в пространстве размерности $d=4$ задача типа (4) может быть решена в паркетном приближении [14]. Паркет образует доминирующую последовательность и для $d=4-\varepsilon$ [15]. Ряды теории возмущений для теории (4), содержащие только паркетные графики, представляют собой разложение по степеням параметра us, где

$$s=\begin{cases}\ln\dfrac{a^{-1}}{\max\{\sqrt{2m\tau},\ p_i\}}; & d=4,\\[2ex] \dfrac{1}{\varepsilon}\left\{\dfrac{1}{\max a^{\varepsilon}[\sqrt{2m\tau},\ p_i]^{\varepsilon}}-1\right\}; & d=4-\varepsilon,\end{cases} \tag{5}$$

$$u=\frac{m^2a^{\varepsilon}}{2\pi^2}\rho V^2. \tag{6}$$

Здесь u играет роль безразмерной константы связи; p_i — набор внешних импульсов, от которых зависит данный график; a — постоянная размерности длины, связанная с параметром обрезания расходящихся интегралов и являющаяся наименьшим масштабом длины в задаче. Далее всюду, где это возможно, выполняется предел $a\to 0$.

При анализе рядов теории возмущений особую роль играет поведение вершинной части $\Gamma(s)$ (четыреххвостки), все внешние импульсы которой одного порядка [14]. Паркетное приближение дает [14]

$$\Gamma(s)=-\frac{u}{1-us}. \tag{7}$$

Полюс при $s=u^{-1}$ означает неприменимость теории возмущений для $s\geqslant u^{-1}$.

Посмотрим, к каким физическим следствиям приводит существование такого полюса. Введем

$$Z_\beta=\int d^dr G(\mathbf{r}-\mathbf{r},\ \beta)=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{d\tau}{2\pi i}e^{\tau\beta}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}G(\mathbf{p}\tau), \tag{8}$$

играющую роль статистической суммы полимерной цепи [9]. Переход от Z_β к $Z(t)$ посредством аналитического продолжения $\beta \to it$ позволяет определить плотность состояний электрона в рассматриваемом случайном поле [9,11]

$$N(E) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt} Z(t). \tag{9}$$

Определим

$$C = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\partial G(\mathbf{p}\tau)}{\partial \tau}, \tag{10}$$

имеющую смысл теплоемкости в теории фазовых переходов [14]. Тождество Уорда

$$\frac{\partial G(\mathbf{p}\tau)}{\partial \tau} = \mathcal{T}(s) G^2(\mathbf{p}\tau) \tag{11}$$

позволяет найти [14]

$$C(s) = -\frac{m^2}{2\pi^2} \int\limits_0^s dt \mathcal{T}^2(t), \tag{12}$$

где

$$\mathcal{T}(s) = \exp\left\{2 \int\limits_0^s dt \Gamma(t)\right\}. \tag{13}$$

В рассматриваемом случае $(n = 0)$ имеем

$$C(s) = \frac{m^2}{\pi^2 u} \{[1 - us]^{1/2} - 1\}. \tag{14}$$

Используя правило дифференцирования изображения Лапласа, из (9) получим

$$Z_\beta = -\frac{1}{\beta} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\tau}{2\pi i} e^{\tau\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G(\mathbf{p}\tau) = -\frac{1}{\beta} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\tau}{2\pi i} e^{\tau\beta} C(\tau). \tag{15}$$

Тогда, используя (14) и (15) (при $p_i = 0$), имеем

$$Z_\beta = -\frac{m^2}{\pi^2 u} \frac{1}{\beta} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\tau}{2\pi i} e^{\tau\beta} \left\{\left[1 - \left(\frac{E_{sc}}{\tau}\right)^{\varepsilon/2}\right]^{1/2} - 1\right\}. \tag{16}$$

Здесь $c > E_{sc}$, где

$$E_{sc} = \frac{1}{2ma^2} \left(\frac{u}{\varepsilon}\right)^{2/\varepsilon}. \tag{17}$$

Разлагая подынтегральное выражение в (16) в ряд и проводя почленно обратное преобразование Лапласа, аналитическое продолжение $\beta \to it$ и преобразование Фурье (9), найдем

$$N(E) = \frac{m^2}{\pi^2 u} E \left\{\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{-\varepsilon/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2-\varepsilon)} \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{-\varepsilon} + \frac{1}{16} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right) \Gamma\left(2 - \frac{3}{2}\varepsilon\right)} \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{-\frac{3}{2}\varepsilon} + \cdots \right\} \tag{18}$$

при $E > E_{sc}$. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$N(E) = \frac{m^2}{\pi^2 u} E \left\{\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{-\varepsilon/2} + \frac{1}{8} \varepsilon \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{-\varepsilon} + \frac{1}{16} \frac{3}{2} \varepsilon \left(\frac{E}{E_{sc}}\right)^{-\frac{3}{2}\varepsilon} + \cdots \right\}, \tag{19}$$

что легко суммируется

$$N(E)=N_0(E)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{E_{sc}}{E}\right)^{\varepsilon/2}}}, \tag{20}$$

где

$$N_0(E)=\frac{1}{(4\pi)^2}(2m)^{2-\varepsilon/2}E^{1-\varepsilon/2} \tag{21}$$

— плотность состояний свободных электронов в пространстве $d=4-\varepsilon$.

Таким образом, учет взаимодействия в паркетном приближении приводит к сингулярности плотности состояний при $E=E_{sc}$, что является отражением нефизического полюса в вершине (7). Энергия E_{sc} в (17) в точности совпадает с характерной величиной «гинзбурговской» критической области для данной теории, которая из интуитивных соображений оценивалась Тулузом [3]. Разложение (19) справедливо в области $E \gg E_{sc}$, где работает теория возмущений по $u \ll 1$ и теряет смысл при $E \sim E_{sc}$.

В теории неупорядоченных систем хорошо известно приближение «самосогласованного» поля Циттарза—Лангера—Эдвардса [9, 12] (или метод оптимальной флуктуации Лифшица) [16], позволяющее определить дальнюю асимптотику хвоста плотности состояний, соответствующего локализованным электронным состояниям. Для сравнения с теорией возмущений проведем обобщение соответствующих результатов на случай пространства $d=4-\varepsilon$.

Считается [9, 12, 16], что электрон в области локализованных состояний находится в эффективной потенциальной яме с линейными размерами R, причем дальняя асимптотика хвоста плотности состояний определяется низшим состоянием электрона в этой яме. Тогда в пространстве размерности d [9]

$$N(E)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\exp\left\{-it\left[\frac{d\pi^2}{2mR^2}-E\right]-\frac{\rho V^2t^2}{2R^d}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{R^d}{2\pi\rho V^2}\right\}^{1/2}\exp\left\{-\frac{\left[\frac{d\pi^2}{2mR^2}-E^2\right]^2R^d}{2\rho V^2}\right\}. \tag{22}$$

Размер ямы (радиус локализации) определяется из

$$\frac{d}{dR}R^d\left\{\frac{d\pi^2}{2mR^2}-E\right\}^2=0, \tag{23}$$

откуда следует

$$R_0=\left\{\frac{2m(-E)}{(4-d)\pi^2}\right\}^{-1/2}, \tag{24}$$

$$N(E)\sim\exp\left\{-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{\varepsilon/2}\right\};\ E<0;\ \varepsilon\to 0. \tag{25}$$

Предэкспоненциальный множитель мы опускаем. Критерий применимости данного рассмотрения $|E|\gg E_{sc}$, где E_{sc} по-прежнему определяется (17). Наличие в плотности состояний бесконечного хвоста связано с гауссовым характером случайного поля и наличием в нем сколь угодно глубоких флуктуаций. В этом проявляется отмеченное выше отсутствие основного состояния в теории поля (4). Очевидно, что это не является в данном случае принципиальной трудностью.

Попытаемся понять поведение вершинной части теории поля (4), соответствующее плотности состояний типа (25). Нетрудно видеть (опуская предэкспоненциальные множители), что (см. (10)—(13)) выражению (25) соответствует

$$C(\tau)\sim\exp\left\{-\frac{\pi^2}{\varepsilon}\left(\frac{\tau}{E_{sc}}\right)^{\varepsilon/2}\right\};\ \mathcal{T}(s)\sim\exp\left\{-\frac{\pi^2}{2\varepsilon}us\right\}, \tag{26}$$

так что из (13) ($us \gg 1$)

$$\Gamma(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \ln \mathscr{T}(s) \approx -\frac{u}{\varepsilon} \frac{\pi^2}{4} + 0\left(\frac{1}{us}\right). \tag{27}$$

Таким образом, эффективное взаимодействие рассматриваемой теории, имеет два различных режима, как функция параметра us, соответствующих области сильной и слабой связи

$$\Gamma(s) = \begin{cases} -\dfrac{u}{1-us}, & us \ll 1, \\ -\dfrac{\pi^2}{4} \dfrac{u}{\varepsilon} + 0\left(\dfrac{1}{us}\right), & us \gg 1. \end{cases} \tag{28}$$

Область $us \sim 1$ (промежуточная связь) находится за пределами использованных приближений и, по-видимому, может быть описана только численно.

Видно, что рассматриваемая задача, сходна с проблемой Кондо и характеризуется переходом с режима слабой связи $u \ll 1$ на режим сильной связи, когда эффективная константа взаимодействия становится порядка $u/\varepsilon \gg 1$. Аналогия с поведением эффективного взаимодействия в проблеме Кондо позволяет предположить, что этот переход происходит непрерывно [17]. Такое поведение не имеет ничего общего со скэйлингом теории критических явлений в противоположность утверждениям работы [10]. В этом смысле подход Эдвардса является дополнительным к описанию локализации по Андерсону, где, как показано в [2], поведение вблизи порога подвижности определяется скэйлингом теории критических явлений с $n=0$. Вместе с тем между обоими подходами имеется и определенное единство, что проявляется, например, в универсальной роли размерности пространства $d=4$.

Литература

[1] N. F. Mott, E. A. Davis. Electronic Processes in Non-Crystalline Materials. Oxford, 1971; D. J. Thouless. Phys. Rep., *13C*, 93, 1974.
[2] М. В. Садовский. ЖЭТФ, *70*, 1936, 1976.
[3] G. Toulouse. Comptes Rendus, *280B*, 33, 1975.
[4] D. J. Thouless. J. Phys., *C8*, 1803, 1975.
[5] K. Wilson, J. Kogut. Phys. Rep., *12C*, 75, 1974.
[6] P. W. Anderson. Phys. Rev., *109*, 1492, 1958; Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *69*, 1097, 1972.
[7] P. G. de Gennes. Phys. Lett., *38A*, 339, 1972.
[8] J. de Cloizeaux. Phys. Rev., *A10*, 1665, 1974.
[9] S. F. Edwards. Phil. Mag., *3*, 1020, 1958; J. Non-Cryst. Sol., *4*, 417, 1970; S. F. Edwards, R. Abram. J. Phys., *C5*, 1185, 1972.
[10] H. G. Schuster. Phys. Lett., *58A*, 432, 1976.
[11] K. F. Freed. Phys. Rev., *B5*, 4802, 1972.
[12] J. Zittartz, J. Langer. Phys. Rev., *148*, 741, 1966.
[13] J. Illiopoulos, C. Itzykson, A. Martin. Rev. Mod. Phys., *47*, 163, 1975.
[14] А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий. ЖЭТФ, *56*, 2087, 1969.
[15] T. Tsuneto, E. Abrahams. Phys. Rev. Lett., *30*, 217, 1973.
[16] И. М. Лифшиц. ЖЭТФ, *53*, 743, 1967.
[17] K. Wilson. Rev. Mod. Phys., *47*, 773, 1975.

Институт физики металлов
УНЦ АН СССР
Свердловск

Поступило в Редакцию
9 марта 1977 г.