1979 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 21, в. 3
1979 SOLID STATE PHYSICS Vol. 21, № 3

ЭЛЕКТРОН В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ, ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНЫМ ДЕЙСТВИЕМ

М. В. Садовский

Показывается, что форма «хвоста» плотности состояний электронов в гауссовском случайном поле определяется решениями с конечным действием нелинейных уравнений нуль-компонентного скалярного поля. Предлагается метод расчета предэкспоненты в выражении для хвоста плотности состояний, основанный на использовании дисперсионного соотношения по константе связи и соответствии с теорией фазовых переходов. Обсуждается возможность скэйлинга на пороге подвижности.

1. В последнее время в ряде работ [1–6] были предприняты попытки описать поведение электронных состояний вблизи порога подвижности в неупорядоченных системах с использованием идей современной теории критических явлений [7]. При этом в большинстве работ (кроме [1, 3]) использовалось формальное соответствие задачи об электроне в случайном поле и задачи о фазовом переходе с нуль-компонентным параметром порядка (евклидовой теории нуль-компонентного скалярного поля) [8, 9]. Однако, как отмечалось в [1, 2, 4–6], это соответствие не является полным ввиду «неправильного» знака константы взаимодействия соответствующей теории поля, что не позволяет использовать в этом случае стандартный аппарат теории критических явлений [7] и отражает неприменимость теории возмущений в интересующей нас области энергий [2,4]. Окрестность порога подвижности, где теория возмущений неприменима, совпадает с «гинзбурговской» критической областью теории критических явлений [2].

Данная работа, являющаяся продолжением работы [2], посвящена более подробному и корректному рассмотрению области локализованных состояний (области отрицательных энергий) и является некоторым развитием метода, предложенного в работах Лангера [10] и Циттартза—Лангера [11]. Мы покажем, что форма «хвоста» плотности состояний электрона в случайном поле определяется классическими решениями уравнений теории поля, рассмотренной в [2, 4, 5] с конечным действием [12, 13], и предложим метод вычисления предэкспоненты в «хвосте» плотности состояний, основанный на использовании дисперсионного соотношения по константе связи [14, 15] и аналогии с теорией критических явлений. В заключение обсуждается возможность скэйлинга на пороге подвижности.

2. Рассмотрим электрон в поле хаотически расположенных точечных рассеивателей и будем вычислять Фурье-образ $G(E\mathbf{p})$ одноэлектронной функции Грина, усредненной по случайным конфигурациям рассеивателей. В пределе $\rho\to\infty$, $V\to 0$, $\rho V^2\to \mathrm{const}$, где ρ — плотность, а V — потенциал рассеивателей, задача эквивалентна рассмотрению электрона в гауссовском случайном поле с коррелятором типа «белого шума» [2, 11]. Как показано в работе [2], такая функция Грина может быть определена как функция Грина скалярной теории поля с лагранжианом (m — масса электрона, E — его энергия)

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{2m}(\nabla\Phi_j)^2-E\Phi_j^2\right\}-\frac{1}{8}\rho V^2\left(\sum_{j=1}^{n}\Phi_j^2\right)^2, \tag{1}$$

где n — число компонент поля Φ, причем n следует положить равным нулю (в конце вычислений), что исключает «лишние» диаграммы с петлями, отсутствующие в задаче об электроне в случайном поле [2, 8, 9]. В работе [2] рассмотрена область $E > 0$, где использовалась обычная теория возмущений («паркетное» приближение). Область $E < 0$ (область локализованных состояний) была рассмотрена качественно.[1] Ниже проводится последовательное рассмотрение области $E < 0$.

Основная трудность рассматриваемой теории связана с отрицательным знаком константы взаимодействия в (1), что приводит к неустойчивости основного состояния такой теории поля и к неприменимости теории возмущений для энергий электрона [2, 4],

$$E \leqslant E_{sc} = \frac{1}{2ma^2}\left(\frac{u}{4-d}\right)^{\frac{2}{4-d}}, \tag{2}$$

где

$$u = \frac{m^2 a^{4-d}}{2\pi^2}\rho V^2 \tag{3}$$

— безразмерная константа связи, a — постоянная размерности длины, связанная с параметром обрезания расходящихся интегралов (наименьший масштаб длины в задаче, связанный физически с отличием коррелятора случайного поля от модели белого шума), d — размерность пространства.

Физически корректный способ рассмотрения такой теории был предложен Лангером [10], который показал, что все корреляторы теории должны получаться с помощью некоторой процедуры аналитического продолжения по константе связи и имеют разрез вдоль отрицательной части действительной оси в комплексной плоскости константы связи. При этом любой коррелятор (функция Грина) теории может быть представлен с помощью следующего дисперсионного соотношения по константе связи [14, 15] (g — произвольная константа связи)

$$G(g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} dz\,\frac{\Delta(z)}{z-g}, \tag{4}$$

$$\Delta(g) = \frac{1}{2i}\left[G(g+i\varepsilon) - G(g-i\varepsilon)\right] = \operatorname{Im} G(g) \tag{5}$$

— скачок на разрезе (отличный от нуля при $g < 0$), который может быть найден с помощью рассмотрения нелинейных решений классических уравнений теории поля (1) с конечным действием [12–15]. Далее под $G(g)$ будем понимать одночастичную функцию Грина.

3. Действие теории поля (1) есть

$$S[\Phi] = \int d^d r \mathscr{L}(\mathbf{r}), \tag{6}$$

а функция Грина определяется функциональным интегралом

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid g) = -Z^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int \{\delta\Phi(\mathbf{r})\}\,\Phi_j(\mathbf{r})\,\Phi_j(\mathbf{r}')\exp\{-S[\Phi]\}, \tag{7}$$

где

$$Z = \int \{\delta\Phi(\mathbf{r})\}\exp\{-S[\Phi]\}. \tag{8}$$

Знак минус перед (7) выбран из соображений соответствия с видом нулевой функции Грина электрона.

---

[1] В формуле (26) работы [2] допущена ошибка, и сделанный на основании ее вывод (27) о выходе эффективного взаимодействия на фиксированное значение в области больших отрицательных энергий не верен.

Из условия $\delta S\,[\Phi]=0$ следуют классические полевые уравнения

$$\frac{1}{2m}\Delta\Phi_j = -E\Phi_j - \frac{1}{2}\rho V^2\Phi_j\left(\sum_{j=1}^{n}\Phi_j^2\right). \tag{9}$$

Ищем решение в виде [12, 13]

$$\Phi_j(r) = \Phi_0(r)\,\mathbf{u}, \tag{10}$$

где $\mathbf{u}$ — единичный вектор ($\mathbf{u}^2 = 1$) в пространстве «изоспина» рассматриваемой ($0(n)$ — симметричной) теории. Тогда, ограничиваясь классом сферически-симметричных решений [16–18], имеем из (9)

$$\frac{1}{2m}\left\{\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d\Phi_0}{dr}\right\} = -E\Phi_0 - \frac{1}{2}\rho V^2\Phi_0^3. \tag{11}$$

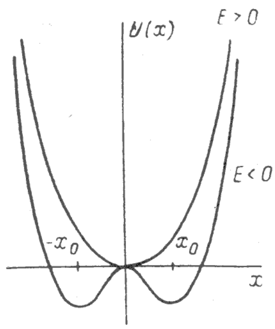

Рис. 1. «Потенциальная энергия», соответствующая уравнению движения (13).

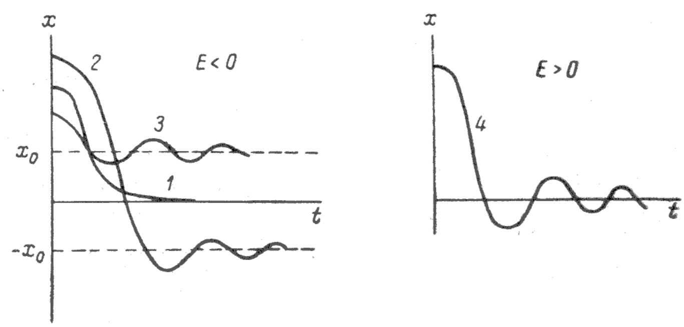

Рис. 2. Качественное поведение решений уравнения (13).

Тривиальное решение $\Phi_0 = 0$ очевидно. Нас будут интересовать нетривиальные решения (11) с конечным действием (т. е. такие, что интеграл в (6) сходится). Для $d = 1$ уравнение (11) решается точно [10]. Используя результаты работ [18, 19], легко показать, что для рассматриваемой задачи искомые решения существуют только для $d < 4$. Мы проведем простой качественный анализ, следуя методу, предложенному в работе [20] (см. также [17]).

Введем новые переменные

$$\Phi_0(r) = \left(\frac{2\,|E\,|}{\rho V^2}\right)^{1/2} x(t), \qquad r = (2m\,|\,E\,|)^{-1/2}\,t. \tag{12}$$

Тогда уравнение (11) принимает безразмерный вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d-1}{t}\frac{dx}{dt} = \pm x - x^3, \tag{13}$$

где верхний знак соответствует $E < 0$, а нижний $E > 0$.

Можно воспользоваться очевидной механической аналогией — уравнение (13) суть уравнение движения частицы единичной массы в потенциале (рис. 1)

$$U(x) = \mp\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \tag{14}$$

находящейся также под действием силы трения, зависящей от времени $\sim 1/t$. В диссипативном характере движения легко убедиться, рассмотрев «энергию»:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x). \tag{15}$$

Непосредственно используя уравнения движения (13), получаем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d-1}{t} < 0; \quad d > 1. \tag{16}$$

Качественный характер движения представлен на рис. 2. Очевидно, что для нас представляют интерес движения, удовлетворяющие начальным условиям

$$x\big|_{t=0}=\mathrm{const},\qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{17}$$

Асимптотику решений (13) при $t \gg 1$ легко найти, линеаризуя (13) вблизи экстремумов $U(x)$, т. е. вблизи $x=0$; $x=\pm x_0=\pm 1$. Очевидно, что решения типа *2*, *3* на рис. 2 для нас не представляют интереса, так как интеграл действия (6) расходится (поле (12) стремится к константе на бесконечности). Асимптотика ($t \gg 1$) решения типа *4* на рис. 2 ($E>0$) имеет вид

$$x(t)\approx \frac{\mathrm{const}}{t^{\frac{d}{2}-1}} J_{\frac{d}{2}-1}(t);\quad t\gg 1, \tag{18}$$

$\left(J_{\frac{d}{2}-1}(t)\right.$ — функция Бесселя$\left.\right)$, и интеграл (6) также расходится на верхнем пределе для $d \geqslant 2$. Существует единственное решение типа *1* на рис. 2 ($E<0$) (единственность очевидна из физических соображений — существует только одна точка на склоне $U(x)$, стартуя с которой частица остановится в точке $x=0$), асимптотика ($t \gg 1$) которого имеет вид

$$x(t)\approx \frac{\mathrm{const}}{t^{\frac{d}{2}-1}} K_{\pm\left(\frac{d}{2}-1\right)}(t)\approx \frac{\mathrm{const}}{t^{\frac{d-1}{2}}}\exp(-t);\quad t\gg 1, \tag{19}$$

$\left(K_{\pm\left(\frac{d}{2}-1\right)}(t)\right.$ — модифицированная функция Бесселя$\left.\right)$ и интеграл действия (6) для которого, очевидно, сходится.

Используя (12), находим

$$S[\Phi_0]=\int d^d r\mathscr{L}(\mathbf{r}\mid\Phi_0(\mathbf{r}))=A_d\frac{m^{-d/2}}{\rho V^2}|E|^{2-d/2}, \tag{20}$$

где зависящая от размерности пространства константа A_d определяется безразмерными интегралами от $x(t)$. Для ее нахождения требуется численное интегрирование уравнений движения (13) с начальными условиями (17).

4. Континуальный интеграл (7) можно вычислять методом перевала вблизи классических решений с конечным действием типа (12) [10, 12–15]. Для $E>0$ существует только тривиальное решение $\Phi_0=0$, и применение метода перевала дает обычную теорию возмущений [10, 15], которая и рассматривалась в предыдущей работе [2]. Для $E<0$ существует нетривиальное решение с конечным действием (12), (17), (19). Поле $\Phi(\mathbf{r})$ можно разложить вблизи $\Phi_0(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r})=\Phi_0(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)+\varphi(\mathbf{r}) \tag{21}$$

и провести расчеты в низшем порядке теории возмущений по $\varphi(\mathbf{r})$. Все корреляторы будут содержать неаналитичный по константе связи множитель $\exp[-S[\Phi_0]]$, а также предэкспоненциальный фактор, получающийся при вычислении гауссовского интеграла по $\varphi(\mathbf{r})$. При этом специального рассмотрения требуют вопросы, связанные с отрицательным знаком константы взаимодействия, произвольностью выбора положения решения $\Phi_0(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)$ в пространстве (произвольность $\mathbf{R}_0$) и произвольностью направления вектора $\mathbf{u}$ в изотопическом пространстве (10) ($O(n)$ — симметрия). Все вычисления вполне аналогичны проведенным в работах [10, 12–15, 17]. Для мнимой части одноэлектронной функции Грина получаем

$$\operatorname{Im} G(E\mathbf{p}\mid-\rho V^2)=C(|E|,\ \mathbf{p})\exp\left\{-\frac{A(E)}{\rho V^2}\right\}\frac{\theta(-\rho V^2)}{(\rho V^2)^{\frac{d+1}{2}}}, \tag{22}$$

где $C(|E|, \mathbf{p})$ — некоторая функция E и $\mathbf{p}$, не зависящая от константы связи ρV^2,

$$A(E) = A_d m^{-d/2} |E|^{2-\frac{d}{2}}, \tag{23}$$

θ-функция в (22) показывает, что мнимая часть функции Грина отлична от нуля только для отрицательных констант связи в теории поля с лагранжианом (1). Степень константы связи в предэкспоненте (22) нетрудно понять. Трансляционная инвариантность (произвольность $\mathbf{R}_0$) приводит к фактору $(\rho V^2)^{-d/2}$ (см. [15, 17]) (d — трансляционных «нулевых» мод); еще один фактор $(\rho V^2)^{-\frac{n-1}{2}}$ связан с произвольностью направления вектора $\mathbf{u}$ ($n-1$ — ротационная «нулевая» мода), и фактор $(\rho V^2)^{-\nu/2}$ связан с произведением ν полей, входящим в определение $\nu/2$-й функции Грина (в данном случае $\nu=2$). [15] Эти результаты не зависят от конкретного вида классических решений $\Phi_0(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)$ [15, 17], от него зависит явный вид $C(|E|, \mathbf{p})$.

Зная $\operatorname{Im} G(E\mathbf{p}| -\rho V^2)$ (т. е. скачок на разрезе в комплексной плоскости константы связи), функцию Грина определяем дисперсионным интегралом (4)

$$G(E\mathbf{p}|g) = \frac{1}{\pi} C(|E|, \mathbf{p}) \int_{-\infty}^{0} dz \frac{\exp\left\{\frac{A(E)}{z}\right\}}{(z-g)(-z)^{\frac{d+1}{2}}}, \tag{24}$$

где g — произвольная константа связи, для электрона в случайном поле $g = -\rho V^2$. Интеграл в (24) может быть вычислен

$$G(E\mathbf{p}|g) = -\frac{1}{\pi} C(|E|, \mathbf{p}) g^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left\{\frac{A(E)}{g}\right\} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-d}{2}, \frac{A(E)}{g}\right), \tag{25}$$

где $\Gamma(\alpha, x) = \int\limits_x^\infty dt e^{-t} t^{\alpha-1}$ — неполная Γ-функция.

Функцию Грина электрона в случайном поле следует понимать как аналитическое продолжение (25) из области $g > 0$ на отрицательные $g = -\rho V^2$ (ср. с работой Таулеса [21]).

Из выражения (22) сразу ясно, что мы получили правильный вид экспоненциального фактора в хвосте плотности состояний [11, 22, 23]. Видно, что этот фактор полностью определяется классическими решениями теории поля (1) с конечным действием. Преимуществом излагаемого метода являются известный автоматизм рассмотрения и отсутствие ряда дополнительных предположений, использовавшихся в [11, 22, 23], таких, как предположение о доминирующей роли первого уровня во флуктуационной яме. «Автоматически» возникает и необходимость различного рассмотрения областей $E > 0$ и $E < 0$, что определяется наличием классических решений с конечным действием только для $E < 0$, и влечет неаналитические зависимости от константы связи (неприменимость обычной теории возмущений).

Критерий применимости выписанных формул имеет вид $S[\Phi_0] \gg 1$, когда хорошо работает перевальный метод расчета континуального интеграла. Другими словами, требуется выполнение условия

$$\frac{A(E)}{\rho V^2} = \frac{A_d}{2\pi^2} \frac{1}{4-d} \left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{2-\frac{d}{2}} \gg 1,$$

т. е.

$$|E| \gg E_{sc}, \tag{25a}$$

что совпадает с условием, найденным в [2]. Критерий применимости «теории возмущений» вблизи классического решения с конечным действием (21) фактически тот же, что и для обычной теории возмущений в области $E > 0$. В [2] уже отмечалось, что область шириной $2E_{sc}$ вокруг $E=0$ есть аналог «гинзбурговской» критической области в теории критических явлений. Однако в нашем случае в отличие от теории критических явлений теория возмущений неприменима в этой области даже для пространства с размерностью $d=4-\varepsilon$.

5. Вычисление предэкспоненты $C(|E|, \mathbf{p})$ в (22) требует, вообще говоря, явного знания классических решений с конечным действием. Для $d > 1$ они могут быть найдены только численно. Ниже предлагается метод расчета предэкспоненты, основанный на соответствии с теорией фазовых переходов, позволяющий обойти эти трудности.

Для $g > 0$ функция Грина (25) описывает коррелятор устойчивой теории поля (теории фазовых переходов второго рода). Вдали от критической области вид этого коррелятора хорошо известен [7] — это обычный коррелятор Орнштейна—Цернике. В нашем случае для $|E| \gg E_{sc}$ мы должны иметь

$$G(E\mathbf{p} \mid g > 0) \approx -\frac{1}{|E| + \frac{p^2}{2m}}. \tag{26}$$

С другой стороны, используя асимптотику неполной Г-функции [23, 24] из (25), находим ($|E| \gg E_{sc}$; $E < 0$)

$$G(E\mathbf{p} \mid g > 0) \approx -\frac{1}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)[A(E)]^{-\frac{d+1}{2}}\, C(|E|, \mathbf{p}). \tag{27}$$

Сравнивая (26) и (27), получаем

$$C(|E|, \mathbf{p}) \approx \frac{\pi A_d^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\, m^{-\frac{d(d+1)}{4}}\, \frac{|E|^{(d+1)\left(1-\frac{d}{4}\right)}}{|E| + \frac{p^2}{2m}}, \tag{28}$$

$$|E| \gg E_{sc},$$

что дает для мнимой части функции Грина электрона ($|E| \gg E_{sc}$)

$$\operatorname{Im} G(E\mathbf{p} \mid -\rho V^2) \approx \pm \frac{\pi A_d^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\, \frac{|E|^{(d+1)\left(1-\frac{d}{4}\right)}}{|E| + \frac{p^2}{2m}}\, \frac{1}{\left(m^{\frac{d}{2}}\rho V^2\right)^{\frac{d+1}{2}}} \exp\left\{-\frac{A(E)}{\rho V^2}\right\}. \tag{29}$$

Теперь можно рассчитать плотность электронных состояний в области хвоста, включая предэкспоненту. Имеем ($|E| \gg E_{sc}$; $E < 0$)

$$N(E) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\, \operatorname{Im} G^R(E\mathbf{p} \mid -\rho V^2) \approx$$

$$\approx K_d\, \frac{A_d^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\, \frac{|E|^{(d+1)\left(1-\frac{d}{4}\right)}}{\left(m^{\frac{d}{2}}\rho V^2\right)^{\frac{d+1}{2}}} \exp\left\{-\frac{A(E)}{\rho V^2}\right\} \int_0^{1/a} dp\, p^{d-1}\, \frac{1}{|E| + \frac{p^2}{2m}}, \tag{30}$$

где $K_d = 2^{-(d-1)}\,\pi^{-\frac{d}{2}}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$. Для $d=1$ можно перейти к пределу $a \to 0$, и из (30) имеем

$$N(E) = K_1\, \frac{\pi A_1}{\sqrt{2}}\, \frac{|E|}{\rho V^2} \exp\left\{-A_1\, \frac{|E|^{3/2}}{m^{1/2}\rho V^2}\right\}. \tag{31}$$

Константа $A_1 = 4\sqrt{2}/3$ [11] (уравнение (11) для $d=1$ решается точно) и (31) совпадают с точным результатом Гальперина [25, 11] с точностью до множителя $3/\pi$. Для $d \geqslant 2$ расходимость интеграла в (30) обрезается на импульсах $\sim 1/a$, связанных с обратным радиусом действия коррелятора случайных полей. Все рассмотрение годится для энергий $|E| \ll E_0 = 1/2ma^2$. При $|E| \gg E_0$ хвост плотности состояний определяется квазиклассическим рассмотрением [26–28]. Из (30) имеем ($E_{sc} \ll |E| \ll E_0$)

$$N(E) \approx \text{const}\, \frac{|E|^{3/2}}{m^{1/2}(\rho V^2)^{3/2}} \ln \frac{E_0}{|E|} \exp\left\{-A_2 \frac{|E|}{m\rho V^2}\right\} \tag{32}$$

для $d=2$, а для $d=3$

$$N(E) \approx \text{const}\, \frac{|E|\, E_0^{1/2}}{m^{3/2}(\rho V^2)^2} \exp\left\{-A_3 \frac{|E|^{1/2}}{m^{3/2}\rho V^2}\right\}. \tag{33}$$

Для $2 < d < 4$ хвост плотности состояний имеет вид

$$N(E) \approx K_d \left(\frac{A_d}{2\pi^2(4-d)}\right)^{\frac{d+1}{2}} \frac{2m}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{(2mE_0)^{\frac{d-2}{2}}}{(d-2)} \times$$

$$\times \left(\frac{|E|}{E_{sc}}\right)^{(d+1)\left(1-\frac{d}{4}\right)} \exp\left\{-A_d \frac{m^{-\frac{d}{2}}}{\rho V^2} |E|^{2-\frac{d}{2}}\right\}. \tag{34}$$

Можно надеяться, что эти выражения дают (с точностью до постоянного множителя) точные выражения для предэкспоненты плотности состояний в рассматриваемой области энергий.

6. Область $|E| \ll E_{sc}$ остается за пределами применимости полученных выше выражений. Из теории критических явлений известно, что для $g > 0$ в области $|E| \ll E_{sc}$ имеет место скэйлинговое поведение коррелятора

$$G(E\mathbf{p}\,|\,g > 0) \approx C\,|E|^{-\gamma} D(p^2\xi^2); \quad \xi \sim |E|^{-\nu}. \tag{35}$$

В (35) γ и ν — известные критические индексы восприимчивости и корреляционной длины ξ, $D(x)$ — универсальная (не зависящая от деталей взаимодействия) функция, C — неуниверсальный фактор. Универсальность скачка на разрезе в дисперсионном соотношении (4) ($\Delta(z)$ в (4) один и тот же при любом g) позволяет надеяться на подобную же универсальность поведения функции Грина при $|E| \ll E_{sc}$ независимо от знака g. Если формально использовать выражение (25) в области $|E| \ll E_{sc}$, то получим, используя $\Gamma(\alpha, x) \to \Gamma(\alpha)$ при $x \to 0$ ($\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$); $A(E) \to 0$ при $E \to 0$ и $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{d}{2}\right) = \pi \Big/ \cos\frac{\pi d}{2}$,

$$G(E\mathbf{p}\,|\,g > 0) \approx -\frac{1}{\cos\frac{\pi d}{2}} g^{-\frac{d+1}{2}} C(|E|, \mathbf{p}); \quad |E| \ll E_{sc}, \tag{36}$$

где $d \neq 1, 3$, но можно использовать $d=2$, $d=4-\varepsilon$. Требуя совпадения (35) и (36), имеем

$$C(|E|, \mathbf{p}) \sim |E|^{-\gamma} D(p^2\xi^2). \tag{37}$$

Тогда из (22)

$$\operatorname{Im} G(E\mathbf{p}\,|\,-\rho V^2) \approx B\,|E|^{-\gamma} D(p^2\xi^2), \tag{38}$$

где B — некоторая (неуниверсальная) постоянная (не зависящая от E и $\mathbf{p}$). Разумеется, (36)—(38) представляет собой недопустимую экстраполяцию формулы (25) за пределы ее применимости. Однако для получения результата типа (38) достаточно предположить факторизацию скачка на разрезе в дисперсионном соотношении (4)

$$\Delta(E\mathbf{p}\,|\,z) = \operatorname{Im} G(E\mathbf{p}\,|\,z) \approx C(|E|, \mathbf{p})\, f(z) \tag{39}$$

в области $|E| \ll E_{sc}$. Такая факторизация выполняется при формальном использовании (25) при $|E| \ll E_{sc}$, она очевидным образом обеспечивает скэйлинг (37) независимо от знака g. К сожалению, провести доказательство соотношения (39) в настоящее время не представляется возможным. Если принять (39) как предположение, то из (35) следуют (37), (38), а для плотности состояний при $|E| \ll E_{sc}$ имеем

$$N(E) \approx -\frac{B}{\pi} |E|^{-\gamma} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} D(p^2 \xi^2) = D\{\mathrm{const} + |E|^{1-\alpha}\}, \tag{40}$$

где α — критический индекс теплоемкости. Для $d = 4 - \varepsilon$ при $n = 0$ имеем

$$\alpha \approx \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2), \tag{41}$$

D — некоторая константа (не зависящая от E). Тогда

$$\frac{dN(E)}{dE} \sim |E|^{-\alpha}; \quad |E| \to 0. \tag{42}$$

Плотность состояний при $|E| \to 0$ имеет излом, производная плотности состояний расходится, как теплоемкость в теории критических явлений.

Таким образом, в предположении факторизации (39) имеем скэйлинг на пороге подвижности для усредненной функции Грина электрона в случайном поле. Если это так, то исчезает известное различие результатов, получающихся в подходе Андерсона, где рассматривается «наиболее вероятная» функция Грина электрона [1], и в стандартном подходе Эдвардса для усредненной функции Грина. Альтернативой остается рассмотрение окрестности порога подвижности как аналога переходной области в проблеме Кондо, когда подходы Андерсона и Эдвардса оказываются дополнительными [2].

Автор благодарен Л. В. Келдышу за обсуждения и интерес к данной работе и Д. В. Ширкову за присылку препринта работы [15] до ее опубликования.

Литература

[1] М. В. Садовский. ЖЭТФ, *70*, 1936, 1976.
[2] М. В. Садовский. ФТТ, *19*, 1334, 1977.
[3] F. J. Wegner. Zs. Physik, *B25*, 327, 1976.
[4] S. F. Edwards, M. B. Green, G. Srinivasan. Phil. Mag., *35*, 1421, 1977.
[5] A. Nitzan, K. F. Freed, M. H. Cohen. Phys. Rev., *B15*, 4476, 1977.
[6] A. Aharony, Y. Ymry. J. Phys., *C10*, 1487, 1977.
[7] K. G. Wilson, J. Kogut. Phys. Reports, *12C*, 75, 1974.
[8] P. G. de Gennes. Phys. Lett., *38A*, 339, 1972.
[9] J. des Cloizeaux. Phys. Rev., *A10*, 1665, 1974.
[10] J. S. Langer. Ann. Phys., *41*, 108, 1967.
[11] J. Zittartz, J. S. Langer. Phys. Rev., *148*, 741, 1966.
[12] Л. Н. Липатов. ЖЭТФ, *72*, 411, 1977.
[13] E. Brezin, J. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev., *D15*, 1544, 1977.
[14] E. B. Bogomolny. Phys. Lett., *67B*, 193, 1977.
[15] B. D. Dorfel, D. I. Kazakov, D. V. Shirkov. JINR Preprint E2-10720, 1977.
[16] S. Coleman. Phys. Rev., *D15*, 2929, 1977.
[17] C. G. Callan, S. Coleman. Phys. Rev., *D16*, 1762, 1977.
[18] S. Coleman, V. Glaser, A. Martin. CERN Preprint TH2364, 1977.
[19] V. G. Makhankov. Phys. Lett., *61A*, 431, 1977.
[20] R. Finkelstein, R. Le Levier, M. Ruderman. Phys. Rev., *83*, 326, 1951.
[21] D. J. Thouless. J. Phys., *C8*, 1803, 1975.
[22] И. М. Лифшиц. ЖЭТФ, *53*, 743, 1967.

[23] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур. ФНТ, *2*, 1093, 1976.
[24] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 2, гл. 9. «Наука», М., 1966.
[25] B. I. Halperin. Phys. Rev., *139*, A104, 1965.
[26] Л. В. Келдыш. Автореф. канд. дисс. ФИАН, 1965.
[27] А. Л. Эфрос. ЖЭТФ, *59*, 880, 1970.
[28] M. Saitoh, S. F. Edwards. J. Phys., *C7*, 3937, 1974.

Институт физики металлов
УНЦ АН СССР
Свердловск

Поступило в Редакцию
25 сентября 1978 г.