

## РАЗЛОЖЕНИЕ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ С НЕЧЕТНЫМ СПАРИВАНИЕМ

Э. З. Кучинский, А. И. Посаженникова, М. В. Садовский

Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук  
620219, Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 15 сентября 1994 г.

Проводится вывод разложения Гинзбурга — Ландау для сверхпроводников, щелевая функция которых нечетна по  $k - k_F$ . Показано, что для «нечетного» спаривания возникает дополнительная зависимость коэффициентов разложения от спаривательной константы связи, что приводит к соответствующей зависимости физических характеристик сверхпроводника. Немагнитные примеси, в отличие от обычного случая, весьма существенно влияют на основные свойства «нечетного» сверхпроводника, причем характер его влияния значительно отличается от поведения, предсказываемого традиционной теорией «грязных» сверхпроводников. В частности, это проявляется в аномальном поведении наклона температурной зависимости верхнего критического поля  $H_{c2}$  вблизи  $T_c$ . Проведено исследование  $H_{c2}$  во всем интервале температур.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе Мила и Абрахамса [1] была предложена интересная модель сверхпроводящего состояния с энергетической щелью, являющейся нечетной функцией параметра  $k - k_F$  (т. е. энергии квазичастиц  $\xi_k = v_F(|k| - k_F)$ , отсчитанной от уровня Ферми). В этом случае, как нетрудно убедиться, в приближении БКШ сверхпроводимость оказывается возможной и при сколь угодно сильном точечном отталкивании между электронами. Рассматриваемое состояние реализуется при достаточно сильном отталкивании, когда обычная («четная») сверхпроводимость подавлена, а спаривательное взаимодействие достаточно сильно (соответствующая константа связи превышает некоторое критическое значение) [1]. Естественно, что эта модель является привлекательной с точки зрения объяснения сверхпроводимости в сильно коррелированных системах, хотя в настоящее время достаточно ясно, что она вряд ли может претендовать на роль реалистической модели ВТСП в металлооксидах, хотя бы ввиду присущего ей изотропного характера спаривания (экспериментально установлено, что спаривание в ВТСП анизотропно в проводящей плоскости и соответствует парам  $d$ - или анизотропного  $s$ -типа). Вместе с тем модель [1] представляет самостоятельный интерес в качестве модели нового «экзотического» сверхпроводящего состояния, свойства которого могут заметно отличаться от свойств традиционных сверхпроводников. В связи с этим представляет интерес исследовать широкий набор таких свойств, что позволит сформулировать экспериментальные критерии поиска аномальной «нечетной» сверхпроводимости. Определенная работа в этом направлении уже проведена [2-5], хотя исследования велись, в основном, с точки зрения сравнения со свойствами ВТСП систем. В то же время в литературе отсутствует обсуждение целого ряда традиционных задач теории сверхпроводимости в применении к схеме «нечетного» спаривания рассматриваемого типа.

Целью настоящей работы является микроскопический вывод разложения Гинзбурга — Ландау в модели нечетного спаривания и анализ на его основе поведения ряда основных характеристик сверхпроводника вблизи  $T_c$ . Кроме этого мы проведем полный анализ задачи о верхнем критическом магнитном поле  $H_{c2}$  (как мы увидим, «нечетный» сверхпроводник практически всегда является сильным сверхпроводником второго рода). При этом удастся обнаружить ряд аномалий, которые можно использовать при экспериментальном поиске систем с нечетным спариванием. В то же время из полученных ниже результатов вытекают дополнительные аргументы против использования такой модели для объяснения свойств ВТСП в металлооксидах.

Напомним, что в основе рассматриваемой модели лежит демонстрация того факта [1], что уравнение слабой связи для щели в теории БКШ

$$\Delta(\xi) = -N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' V(\xi, \xi') \frac{\Delta(\xi')}{2\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2(\xi')}} \operatorname{th} \left( \frac{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2(\xi')}}{2T} \right) \quad (1)$$

( $N(0)$  — плотность состояний на уровне Ферми) может иметь нетривиальное решение  $\Delta(\xi) = -\Delta(-\xi)$  (т. е. нечетное по  $k - k_F$ ,  $\xi = v_F(k - k_F)$ ) при наличии в  $V(\xi, \xi')$  притягивающего взаимодействия даже в присутствии сильного (бесконечного) точечного отталкивания. Легко видеть [1], что для нечетной  $\Delta(\xi)$  отталкивательная часть взаимодействия в (1) просто выпадает, а притяжение может обеспечить спаривание с нетривиальными свойствами: щелевая функция  $\Delta(\xi)$  обращается в нуль на ферми-поверхности, что ведет к бесщелевой сверхпроводимости. Следует еще раз подчеркнуть, что речь идет об изотропной модели, в которой щель обращается в нуль всюду на поверхности Ферми, что отличает рассматриваемую модель от случая анизотропного спаривания, например  $d$ -типа.

Итак, в дальнейшем мы всегда подразумеваем, что взаимодействие в уравнении (1) состоит из двух вкладов ( $E_F$  — энергия Ферми):

$$V(\xi, \xi') = V_1(\xi, \xi') + V_2(\xi, \xi'),$$

где

$$V_1(\xi, \xi') = \begin{cases} U > 0 & \text{при } |\xi|, |\xi'| < E_F, \\ 0 & \text{при } |\xi|, |\xi'| > E_F \end{cases} \quad (2)$$

— точечное отталкивание электронов, а  $V_2(\xi, \xi')$  — эффективное спаривательное взаимодействие (притяжение), которое отлично от нуля при  $|\xi|, |\xi'| < \omega_c$  и  $|\xi - \xi'| < \omega_c$  (последнее ограничение является принципиально важным), причем  $\omega_c \ll E_F$  играет роль характерной частоты бозонов, обмен которыми обеспечивает спаривание. «Потенциал» спаривания  $V_2(\xi, \xi')$  можно представлять различными модельными зависимостями [1]. В данной работе мы рассматриваем модельное взаимодействие вида [3, 4]:

$$V_2(\xi, \xi') = \begin{cases} -V \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi - \xi'}{\omega_c} \right) & \text{при } |\xi|, |\xi'|, |\xi - \xi'| < \omega_c, \\ 0 & \text{при } |\xi|, |\xi'| \text{ или } |\xi - \xi'| > \omega_c. \end{cases} \quad (3)$$

В этом случае интегральное уравнение для щели сводится к трансцендентному и легко решается [3, 4]. При этом сохраняются все основные особенности модели, характерные и для других типов модельного потенциала спаривания [1].

Температура сверхпроводящего перехода определяется линеаризованным уравнением

$$\Delta(\xi) = -N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' V(\xi, \xi') \frac{\Delta(\xi')}{2\xi'} \operatorname{th} \left( \frac{\xi'}{2T_c} \right). \quad (4)$$

Отсюда нетрудно убедиться [4], что температура перехода  $T_c$  в нечетное состояние определяется уравнением:

$$1 = g \int_0^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \frac{1}{\xi} \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2T_c} \right), \quad (5)$$

где  $g = N(0)V$  — безразмерная константа спаривательного взаимодействия. В этой модели существует критическое значение спаривательной константы связи: нечетное спаривание возникает лишь при  $g > g_c \approx 1.213$ , даже в отсутствие точечного отталкивания  $U$ . Фактически, при слабом отталкивательном взаимодействии всегда доминирует обычное «четное» спаривание и температура соответствующего перехода выше перехода в состояние с нечетной щелью. С ростом отталкивания и при больших  $g$  становится выгодным нечетное спаривание [4]. В дальнейшем мы полагаем, что система находится в соответствующей области на фазовой диаграмме в переменных  $g$  и  $\mu = N(0)U$ , где устойчивым является только нечетное спаривание.

Щелевая функция в рассматриваемой модели нечетного спаривания имеет вид [4]

$$\Delta(\xi) = \begin{cases} \Delta_0(T) \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) & \text{при } |\xi| < \omega_c, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \omega_c, \end{cases} \quad (6)$$

а температурная зависимость  $\Delta_0(T)$  определяется уравнением

$$1 = g \int_0^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \frac{\operatorname{th} \left( \sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2(T) \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right)} / 2T \right)}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2(T) \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right)}}. \quad (7)$$

Температурная зависимость  $\Delta_0(T)$  напоминает таковую в теории БКШ, но не совпадает с ней [4].

Нормальные (немагнитные) примеси сильно подавляют нечетное спаривание [3, 4]. В этом случае температура перехода определяется уравнением

$$1 = g \int_0^{\omega_c} \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \operatorname{th} \left( \frac{\omega + \xi}{2T_c} \right) \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (8)$$

где  $\gamma$  — частота рассеяния электронов на примесях, хаотически распределенных в пространстве. Сверхпроводимость исчезает при  $\gamma \sim T_{c0}$ , где  $T_{c0}$  — температура перехода в отсутствие рассеяния, определяется уравнением (4). Критическая частота рассеяния

$\gamma_c$ , соответствующая разрушению сверхпроводимости, определяется уравнением [3, 4]

$$1 = \frac{2}{\pi} g \int_0^{\omega_c} \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{\gamma_c} \right). \quad (9)$$

При  $g \simeq g_c$  отсюда следует зависимость  $\gamma_c \sim (g - g_c) \rightarrow 0$ , отражающая сужение области сверхпроводимости на фазовой диаграмме в переменных  $T_c$  и  $\gamma$ . В этом смысле разрушение сверхпроводимости происходит даже быстрее, чем при введении магнитных примесей в обычный сверхпроводник.

По сравнению с подходом типа БКШ теория Гинзбурга — Ландау позволяет, в принципе, описать более широкий набор физических свойств за счет ограничения областью температур  $T \sim T_c$ . Принципиальное значение поэтому представляет микроскопический вывод коэффициентов разложения Гинзбурга — Ландау, знание которых сразу позволяет прийти к ряду полезных выводов.

## 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

### 2.1. Случай беспримесного сверхпроводника

В качестве параметра порядка, по которому ведется разложение Гинзбурга — Ландау, выберем, как обычно, щелевую функцию (6). При этом мы будем считать, что амплитуда  $\Delta_0(T)$  в общем случае является медленной функцией пространственных координат. Соответственно в импульсном пространстве возникает фурье-компонента параметра порядка:

$$\Delta(\xi, T, \mathbf{q}) = \Delta_q(T) \sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right), \quad (10)$$

а разложение Гинзбурга — Ландау для разности свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний в области малых  $q$  имеет вид

$$F_s - F_n = A |\Delta_q|^2 + q^2 C |\Delta_q|^2 + \frac{1}{2} B |\Delta_q|^4. \quad (11)$$

Наша задача состоит в нахождении микроскопических выражений для коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Разложение Гинзбурга — Ландау легко найти, рассмотрев диаграммы, показанные на рис. 1. Оно сводится к обычному петлевому разложению для свободной энергии электронов в поле флуктуаций параметра порядка вида (10). Некоторого пояснения требует только необходимость вычитания второй диаграммы на рис. 1 — легко убедиться, что этим обеспечивается обращение в нуль коэффициента  $A$  в разложении (11) в точке перехода  $T = T_c$ . Все вычисления проводятся стандартным образом, с учетом близости температуры  $T$  к температуре перехода  $T_c$ , некоторые подробности приведены в Приложении 1. В итоге коэффициенты разложения Гинзбурга — Ландау представляются в следующем виде:

$$A = A_0 K_A, \quad B = B_0 K_B, \quad C = C_0 K_C, \quad (12)$$

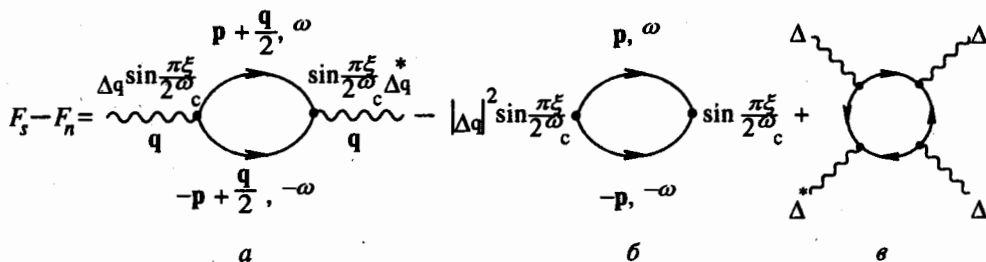


Рис. 1. Диаграммный вид разложения Гинзбурга — Ландау. Волнистым линиям соответствуют флуктуации параметра порядка (10). Сплошные линии — маубаровские функции Грина электрона. Диаграмма (б) вычисляется при  $T = T_c$

где через  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  обозначены стандартные выражения для коэффициентов в обычной теории «четных» сверхпроводников [6]:

$$A_0 = N(0) \frac{T - T_c}{T_c}, \tag{13}$$

$$B_0 = N(0) \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}, \tag{14}$$

$$C_0 = N(0) \frac{7\zeta(3)}{48\pi^2} \frac{v_F^2}{T_c^2} \approx N(0)\xi_0^2, \tag{15}$$

а все особенности модели нечетного спаривания содержатся в безразмерных комбинациях  $K_A$ ,  $K_B$  и  $K_C$ :

$$K_A = \int_0^{\omega_c/T_c} dx \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{T_c}{\omega_c} x\right)}{2 \operatorname{ch}^2(x/2)}, \tag{16}$$

$$K_B = \frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} \int_0^{\omega_c/T_c} dx \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{T_c}{\omega_c} x\right)}{x^2} \left[ \frac{\operatorname{th}(x/2)}{x} - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2(x/2)} \right], \tag{17}$$

$$K_C = \frac{1}{2} - \frac{4}{7\zeta(3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-\pi^2 \frac{T_c}{\omega_c} (2n+1)\right]}{(2n+1)^3} \left[ 1 + \pi^2 \frac{T_c}{\omega_c} (2n+1) + \frac{\pi^4}{2} \frac{T_c^2}{\omega_c^2} (2n+1)^2 \right]. \tag{18}$$

Эти безразмерные величины являются функциями отношения  $T_c/\omega_c$ , которое, в свою очередь, известным образом [3, 4] зависит от безразмерной константы спаривательного взаимодействия  $g$ . Соответствующие зависимости  $K_A$ ,  $K_B$  и  $K_C$  от  $g$  представлены на рис. 2. Таким образом, в отличие от обычного случая, когда коэффициенты разложения Гинзбурга — Ландау зависят от спаривательной константы связи только через соответствующую зависимость температуры перехода  $T_c$ , в нашем случае возникает дополнительная немонотонная зависимость от константы связи.

Уравнения Гинзбурга — Ландау, как известно, определяют две характерные длины: длину когерентности и глубину проникновения магнитного поля [6].

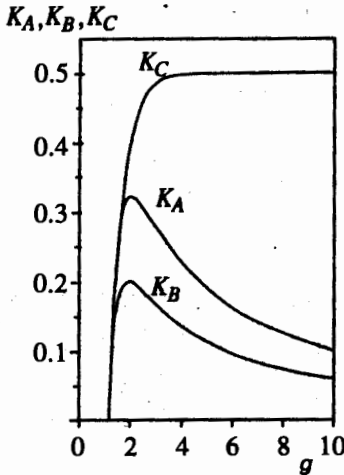


Рис. 2. Зависимость коэффициентов  $K_A$ ,  $K_B$  и  $K_C$  от константы связи  $g$

Длина когерентности при данной температуре  $\xi(T)$  является характерным масштабом неоднородностей параметра порядка  $\Delta$ , т. е. фактически представляет собой «размер» куперовской пары:

$$\xi^2(T) = -\frac{C}{A}. \tag{19}$$

В обычных сверхпроводниках

$$\xi_{\text{БКШ}}^2(T) = -\frac{C_0}{A_0}, \tag{20}$$

$$\xi_{\text{БКШ}}(T) \approx 0.74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - T/T_c}}, \tag{21}$$

где  $\xi_0 = 0.18v_F/T_c$ . В нашем случае имеем

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_{\text{БКШ}}^2(T)} = \frac{K_C}{K_A}. \tag{22}$$

Зависимость этого отношения от  $g$  приведена на рис. 3.

Для глубины проникновения магнитного поля обычного сверхпроводника имеем

$$\lambda_{\text{БКШ}}(T) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - T/T_c}}, \tag{23}$$

где  $\lambda_0^2 = mc^2/4\pi e^2$  определяет глубину проникновения при  $T = 0$ . В общем случае имеем следующее выражение для глубины проникновения через коэффициенты Гинзбурга — Ландау:

$$\lambda^2(T) = -\frac{c^2}{32\pi e^2} \frac{B}{AC}. \tag{24}$$

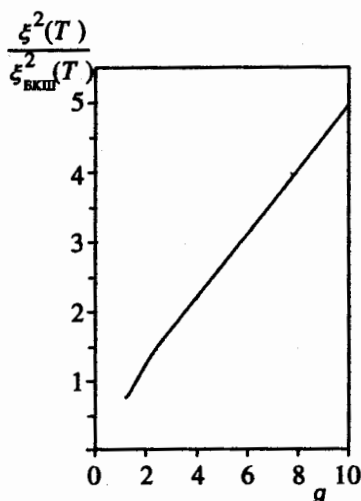


Рис. 3. Зависимость безразмерной длины когерентности от константы связи  $g$

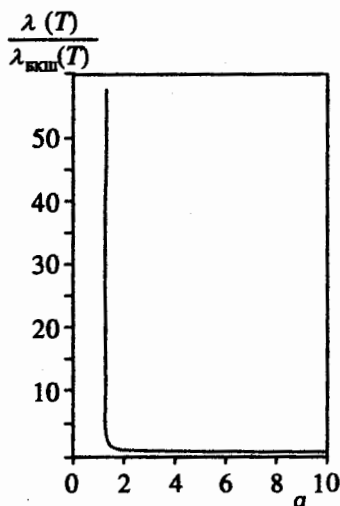


Рис. 4. Зависимость безразмерной глубины проникновения магнитного поля от константы связи  $g$

Тогда в рассматриваемой модели:

$$\frac{\lambda(T)}{\lambda_{\text{БКШ}}(T)} = \left( \frac{K_B}{K_A K_C} \right)^{1/2} \quad (25)$$

Зависимость этой величины от константы спаривательного взаимодействия представлена на рис. 4. Стремление  $\lambda$  к бесконечности при  $g$ , стремящейся к критическому значению  $g_c$ , физически понятно и связано с исчезновением нечетного спаривания.

Рассмотрим параметр Гинзбурга — Ландау:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} = \frac{c}{4eC} \sqrt{B/2\pi}. \quad (26)$$

Как известно, в зависимости от величины параметра  $\kappa$  сверхпроводники делятся на два типа: значения  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  отвечают сверхпроводникам первого рода, а значения  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  соответствуют сверхпроводникам второго рода. Соответственно, в рассматриваемой модели нечетного спаривания имеем

$$\frac{\kappa}{\kappa_{\text{БКШ}}} = \frac{\sqrt{K_B}}{K_C}, \quad (27)$$

где

$$\kappa_{\text{БКШ}} = \frac{3c}{\sqrt{7}\zeta(3)e} \frac{T_c}{v_F^2 \sqrt{N(0)}} \quad (28)$$

— параметр Гинзбурга — Ландау для обычного случая. Зависимость  $\kappa/\kappa_{\text{БКШ}}$  от константы связи  $g$  показана на рис. 5. Из этого графика видно, что при всех разумных

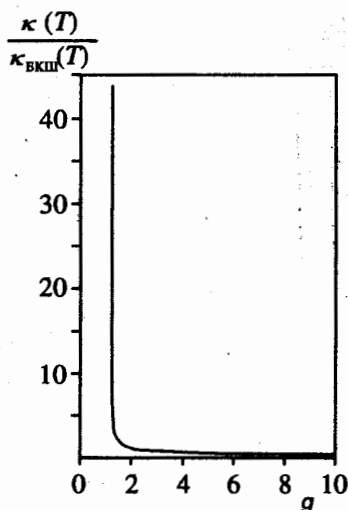


Рис. 5. Зависимость относительного параметра Гинзбурга — Ландау от константы связи  $g$

значениях  $g$  (вблизи  $g_c$ ) нечетный сверхпроводник заведомо является сильным сверхпроводником второго рода. Напомним, в связи с этим, что асимптотика больших  $g \gg g_c$  нефизична, так как по сути дела все наше рассмотрение основано на уравнениях слабой связи типа БКШ (1), а переход в область сильной связи требует [4] гораздо более серьезного рассмотрения в духе работы [7]. Соответствующее рассмотрение для нечетного спаривания еще не проводилось.

### 2.2. Влияние «нормальных» примесей

Рассмотрим сверхпроводник, содержащий «нормальные» (немагнитные) примеси. При выводе диаграммного разложения Гинзбурга — Ландау мы должны теперь учесть

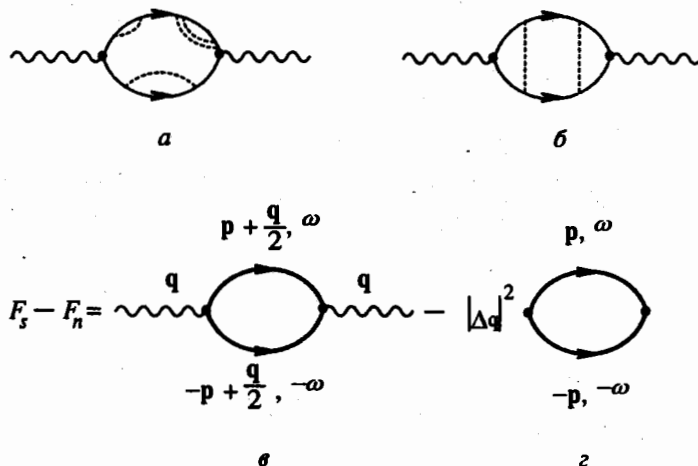


Рис. 6. Диаграммы разложения свободной энергии в присутствии примесного рассеяния. Штриховые линии — рассеяние на примесях



соответствующие процессы рассеяния, т. е. диаграммы типа показанных на рис. 6а,б. Легко убедиться, что вклад диаграмм типа изображенных на рис. 6б фактически равен нулю, что связано с нечетностью по  $\xi$  функций, стоящих в вершинах (множители  $\sin(\xi)$ ). Таким образом, в случае нечетного сверхпроводника с примесями петлевое разложение имеет вид, представленный на рис. 6в,г (с точностью до членов второго порядка), где электронные линии обозначают полные усредненные функции Грина с учетом рассеяния на примесях. «Диффузионная» перенормировка за счет графиков типа изображенных на рис. 6б, характерная для обычной теории «грязных» сверхпроводников [8], не возникает. В этом смысле структура всех выражений ближе к теории обычных «чистых» сверхпроводников. Заметим, впрочем, что «грязный» предел в смысле обычного критерия  $\xi_0 \ll l$  (где  $l$  — длина свободного пробега) вообще недостижим для нечетных сверхпроводников, поскольку, как уже отмечено выше, такое сверхпроводящее состояние разрушается примесным рассеянием уже при  $\gamma \sim T_c$  [3,4]. Ниже мы обсудим наиболее существенные изменения коэффициентов  $A$  и  $C$ , связанные с рассеянием на примесях. Подробности вычислений можно найти в Приложении 1.

Коэффициенты разложения Гинзбурга — Ландау снова представляются в виде (12), а примесное рассеяние приводит к перенормировке безразмерных функций  $K_A$  и  $K_C$ , которые приобретают теперь вид:

$$K_A^d = \frac{T_{c0}}{T_c} \int_0^{\omega_c/T_{c0}} \frac{dx}{x} \sin^2 \left( \frac{\pi T_{c0}}{2 \omega_c} x \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{y+x}{\text{ch}^2 \left( \frac{y+x}{2} \frac{T_{c0}}{T_c} \right)} \frac{\gamma/T_{c0}}{y^2 + \gamma^2/T_{c0}^2}, \quad (29)$$

$$K_C^d = \frac{4\pi^3}{7\zeta(3)} \frac{T_c}{T_{c0}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[ (2n+1)\pi \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{\gamma}{T_{c0}} \right]^3} \frac{\exp \left( -\pi \frac{T_{c0}}{\omega_c} \left[ (2n+1)\pi \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{\gamma}{T_{c0}} \right] \right)}{\left[ (2n+1)\pi \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{\gamma}{T_{c0}} \right]^3} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \pi \frac{T_{c0}}{\omega_c} \left[ (2n+1)\pi \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{\gamma}{T_{c0}} \right] + \frac{\pi^2 T_{c0}^2}{2 \omega_c^2} \left[ (2n+1)\pi \frac{T_c}{T_{c0}} + \frac{\gamma}{T_{c0}} \right]^2 \right] \right\}. \quad (30)$$

Здесь  $T_{c0}$  — температура перехода в отсутствие примесей, а  $T_c$  — истинная температура перехода в примесной системе, определяемая уравнением (8), а  $\gamma$  — частота рассеяния электронов на примесях. В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  выражения (29) и (30) естественно переходят в (16) и (18).

Численными методами получаем графические зависимости отношений  $K_A^d/K_A$  и  $K_C^d/K_C$  от частоты рассеяния  $\gamma$ , представленные на рис. 7 и 8. Наиболее существенная зависимость возникает для коэффициента  $K_A^d$ , который быстро уменьшается с ростом рассеяния и обращается в нуль при  $\gamma \rightarrow \gamma_c$ .

Поведение коэффициентов Гинзбурга — Ландау  $A$  и  $C$ , как известно, определяет температурную зависимость верхнего критического магнитного поля вблизи  $T_c$  [6]:

$$H_{c2}(T) = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)} = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{A}{C}, \quad (31)$$

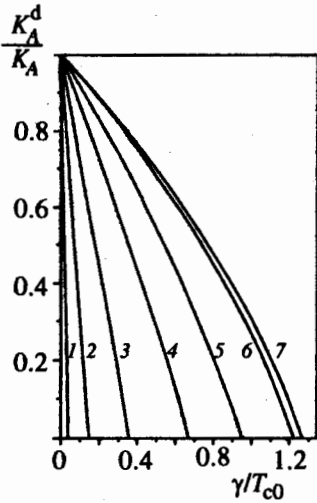


Рис. 7. Зависимость нормированного коэффициента  $K_A^d$  от частоты столкновений с примесями для разных значений константы связи  $g$ : 1 — 1.22; 2 — 1.24; 3 — 1.3; 4 — 1.5; 5 — 2.0; 6 — 5.0; 7 — 10.0

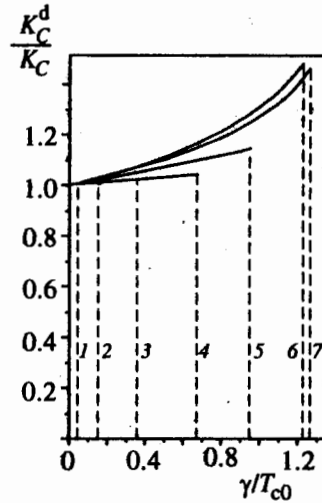


Рис. 8. Зависимость нормированного коэффициента  $K_C^d$  от частоты столкновений с примесями для разных значений константы связи  $g$ : 1 — 1.22; 2 — 1.24; 3 — 1.3; 4 — 1.5; 5 — 2.0; 6 — 5.0; 7 — 10.0

где  $\phi_0 = \pi/e$  — квант потока. Отсюда легко найти «наклон» температурной зависимости  $H_{c2}(T)$  вблизи  $T_c$ , т. е. производную поля по температуре:

$$\left| \frac{dH_{c2}}{dT} \right|_{T_c} = \frac{24\pi\phi_0}{7\zeta(3)v_F^2} T_c \frac{K_A^d}{K_C^d}. \tag{32}$$

На рис. 9 показана зависимость нормированной производной  $|dH_{c2}/dT|_{T_c}$  от беспорядка (частоты рассеяния  $\gamma$ ). Видно, что наклон поля быстро уменьшается с ростом беспорядка и при  $\gamma \rightarrow \gamma_c$  обращается в нуль. Это поведение противоположно результатам обычной теории, где в «чистом» пределе наклон  $H_{c2}$  не меняется от добавления примесей, а в «грязном» пределе он растет с ростом рассеяния [8]. Полученное anomalous поведение может служить одним из экспериментальных критериев при поиске сверхпроводников с нечетным спариванием. Заметим, в связи с этим, что в ВТСП-оксидах такое поведение не наблюдается и модель нечетного спаривания, по-видимому, не способна объяснить наблюдающиеся в них аномалии  $H_{c2}$  [9]. Данное обстоятельство может рассматриваться как еще один аргумент против применения моделей такого типа к ВТСП-системам [3, 4].

### 3. ВЕРХНЕЕ КРИТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

В связи с отмеченными выше аномалиями в поведении  $H_{c2}$  в модели нечетного спаривания, представляет интерес провести полное исследование температурной зависимости верхнего критического поля таких систем с учетом роли примесного рассеяния. Для

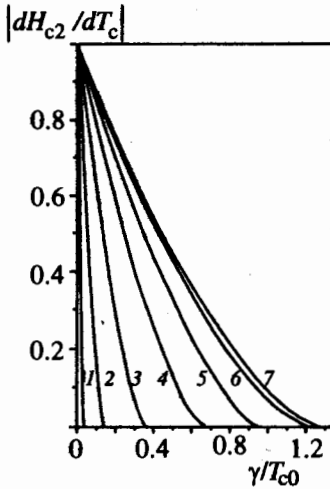


Рис. 9. Зависимость наклона кривой верхнего критического поля  $H_{c2}$  от частоты столкновений с примесями для разных значений константы связи  $g$ : 1 — 1.22; 2 — 1.24; 3 — 1.3; 4 — 1.5; 5 — 2.0; 6 — 5.0; 7 — 10.0. Производная поля нормирована на ее значение в отсутствие рассеяния

этого необходимо выйти за рамки теории Гинзбурга — Ландау и провести рассмотрение на основе микроскопического подхода, т. е. исходя из картины куперовской неустойчивости во внешнем магнитном поле. Задача о куперовской неустойчивости, приводящей к нечетному спариванию в отсутствие поля, была рассмотрена в работе [4]. Здесь мы используем аналогичный подход. Анализ проведем сразу для системы с примесями.

Диаграммы, определяющие рассеяние и взаимодействие в куперовском канале, приведены на рис. 10. На рис. 10а представлена вершинная часть примесного рассеяния в лестничном приближении, а на рис. 10б введена вершинная часть, учитывающая спаривательное взаимодействие (представленное на диаграмме точкой). Для нее имеем следующее интегральное уравнение:

$$\Phi_{pp'}(\mathbf{q}\omega\omega') = \Gamma_{pp'}(\mathbf{q}\omega)\delta_{\omega\omega'} - T \sum_{\omega_1} \sum_{p_1 p_2} \Gamma_{pp_1}(\mathbf{q}\omega) V(p_1 p_2) \Phi_{p_1 p'}(\mathbf{q}\omega_1 \omega'), \quad (33)$$

где примесная вершина  $\Gamma_{pp'}(\mathbf{q}\omega)$  определяется, как уже отмечено, лестничным приближением рис. 10а, а  $V(pp')$  — спаривательное взаимодействие. Следуя работе [4], введем вершины, просуммированные по частотам:

$$\Gamma_{pp'}(\mathbf{q}) = -T \sum_{\omega} \Gamma_{pp'}(\mathbf{q}\omega), \quad (34)$$

$$\Phi_{pp'}(\mathbf{q}) = -T \sum_{\omega\omega'} \Phi_{pp'}(\mathbf{q}\omega\omega'), \quad (35)$$

которые удовлетворяют уравнению, следующему из (33):

$$\Phi_{pp'}(\mathbf{q}) = \Gamma_{pp'}(\mathbf{q}) - T \sum_{p_1 p_2} \Gamma_{pp_1}(\mathbf{q}) V(p_1 p_2) \Phi_{p_1 p'}(\mathbf{q}). \quad (36)$$

Нечетную куперовскую неустойчивость удобно искать из уравнения, показанного на рис. 10в, фактически представляющего функцию отклика на интересующие нас флуктуации нечетного параметра порядка:

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi_0(\mathbf{q}) - \Pi_0(\mathbf{q}) V \Pi(\mathbf{q}), \quad (37)$$

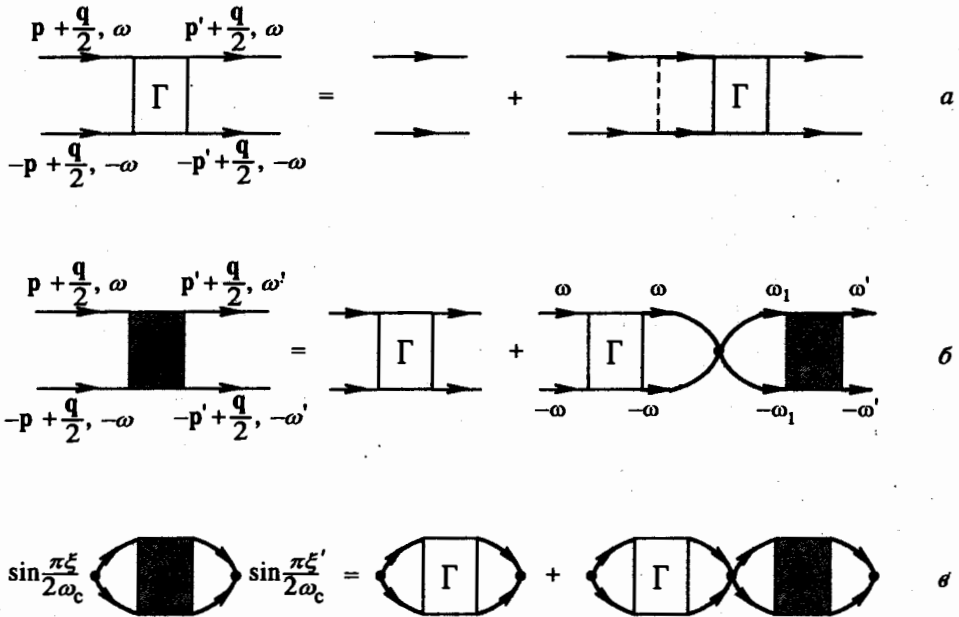


Рис. 10. Диаграммы, определяющие куперовскую неустойчивость в системе с примесями: *a* — вершинная часть примесного рассеяния в куперовском канале, *b* — вершинная часть спаривательного взаимодействия, *c* — функция отклика, расходимость которой определяет нечетное спаривание

где петлевым графикам сопоставляются следующие выражения:

$$\Pi_0(\mathbf{q}) = \sum_{|\xi_p|, |\xi_{p'}| < \omega_c} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi_p}{\omega_c}\right) \Gamma_{pp'}(\mathbf{q}) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi_{p'}}{\omega_c}\right), \quad (38)$$

$$\Pi(\mathbf{q}) = \sum_{|\xi_p|, |\xi_{p'}| < \omega_c} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi_p}{\omega_c}\right) \Phi_{pp'}(\mathbf{q}) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi_{p'}}{\omega_c}\right) \quad (39)$$

и мы учли явный вид спаривательного взаимодействия в нашей модели (3). Решение уравнения (37) дает

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{\Pi_0(\mathbf{q})}{1 + V\Pi_0(\mathbf{q})}. \quad (40)$$

Расходимость этого выражения (нуль знаменателя — расходимость отклика) и определяет точку нечетной куперовской неустойчивости.

При вычислении величины  $\Pi_0(\mathbf{q})$  нетрудно убедиться, что из-за нечетности вершин по переменной  $\xi$ , вклад в нее дает только первый график из лестницы рис. 10а, а диффузионный вклад обращается в нуль. Тогда имеем

$$\Pi_0(\mathbf{q}) = -T \sum_{\omega} \sum_{|\xi| < \omega_c} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c}\right) G_{\omega}(p + q/2) G_{-\omega}(p - q/2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -TN(0) \sum_{\omega} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \frac{1}{\xi - v_F q t / 2 + i(\omega + \gamma)} \frac{1}{\xi + v_F q t / 2 - i(\omega + \gamma)} = \\
 &= -TN(0) \sum_{\omega} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \frac{1}{4\theta\xi} \ln \left( \frac{(\theta + \xi)^2 + \Omega^2}{(\theta + \xi)^2 - \Omega^2} \right), \quad (41)
 \end{aligned}$$

где  $\Omega = \omega + \gamma$  и  $\theta = v_F q / 2$ . Тогда расходимость (40) определяется уравнением

$$1 = gT \sum_{\omega} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \frac{1}{4\theta\xi} \ln \left( \frac{(\theta + \xi)^2 + \Omega^2}{(\theta + \xi)^2 - \Omega^2} \right), \quad (42)$$

что при  $q = 0$  сводится к

$$1 = gT \sum_{\omega} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\xi \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right)}{\xi^2 + (\omega + \gamma)^2}, \quad (43)$$

откуда стандартными методами (ср. (47)) получается (8).

Для системы во внешнем магнитном поле  $H$  импульс куперовской пары  $q$  заменяется обычным образом на  $q - (2e/c)A$ , где  $A$  — вектор-потенциал. Тогда куперовская неустойчивость по-прежнему определяется уравнением (42), только под  $\theta$  следует понимать  $\theta = v_F q_0 / 2$ , где  $q_0$  — минимальное собственное значение оператора  $(q - (2e/c)A)^2$ , равное, как известно (см. [6]),  $\sqrt{2\pi H / \phi_0}$ , где  $\phi_0$  — введенный выше квант потока, соответствующий удвоенному заряду электрона. Возникающее таким образом уравнение и определяет верхнее критическое поле во всем интервале температур.

Численное решение такого уравнения удобнее провести, сводя сумму по дискретным частотам к интегралу. Соответствующие подробности приведены в Приложении 2. В результате вместо (42) возникает следующее уравнение для  $H_{c2}$ :

$$\begin{aligned}
 1 &= 2gT \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\omega_c} \right) \int_0^{\infty} dx \sin \left( \frac{v_F x \sqrt{\frac{\pi H}{2\phi_0}}}{2\pi T} \right) \times \\
 &\times \frac{\exp \left[ - \left( \frac{\gamma}{2\pi T} + \frac{1}{2} \right) x \right] \sin \left( \frac{\xi x}{2\pi T} \right)}{v_F \sqrt{\frac{\pi H}{2\phi_0}} \xi x (1 - \exp(-x))}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

На рис. 11 представлены результаты численного решения этого уравнения, демонстрирующие температурную зависимость  $H_{c2}$  для разных степеней разупорядочения системы. Качественный вид температурной зависимости  $H_{c2}$  мало отличается от обычного, однако ясно видно резкое падение наклона кривой  $H_{c2}(T)$  вблизи  $T_c$  по мере роста частоты рассеяния. Нетрудно убедиться, что это падение описывается полученными выше формулами теории Гинзбурга — Ландау. Отметим, что качественный вид  $H_{c2}$  вполне аналогичен для широкого набора значений спаривательной константы связи  $g$ , поэтому на рис. 11 приведены данные только для одного ее значения. Подчеркнем еще раз,

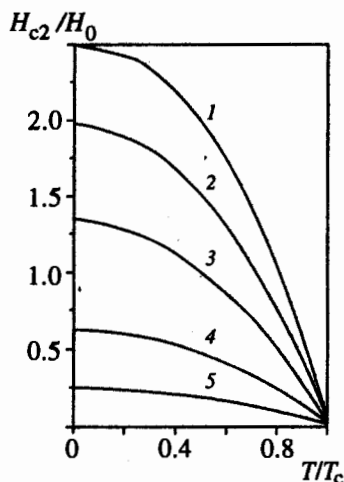


Рис. 11. Температурное поведение верхнего критического поля для систем с различной степенью беспорядка  $\gamma/T_{c0}$ . Спаривательная константа связи  $g = 2$ , магнитное поле в единицах  $H_0 = (2/\pi)\phi_0 T_{c0}/v_F^2$ , температура нормирована на  $T_c$ , зависящую от беспорядка,  $\gamma/T_{c0}$ : 1 — 0.2; 2 — 0.25; 3 — 0.5; 4 — 0.75; 5 — 0.87

что найденное anomальное поведение  $H_{c2}$  с ростом беспорядка существенно отличает нечетное спаривание от обычного четного и может быть использовано для экспериментального выявления таких «экзотических» сверхпроводников.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе проведен микроскопический анализ коэффициентов Гинзбурга — Ландау в модели нечетного по  $k - k_F$  спаривания. Показано, что в этих коэффициентах возникает дополнительная сильная зависимость от спаривательной константы связи, не сводящаяся к соответствующей зависимости  $T_c$ , что характерно для обычного четного случая. Проанализированы соответствующие зависимости для характерных параметров теории Гинзбурга — Ландау.

При рассмотрении влияния рассеяния на нормальных примесях, основным с теоретической точки зрения является вывод об отсутствии диффузионной перенормировки, что приводит к размерным зависимостям коэффициентов, характерным для теории «чистых» сверхпроводников. В то же время резкое подавление  $T_c$  примесным рассеянием и существенная зависимость коэффициентов Гинзбурга — Ландау от беспорядка приводят к значительному отличию поведения верхнего критического поля  $H_{c2}$  в зависимости от степени упорядочения как от «чистого», так и от «грязного» предела обычной теории четного спаривания. Это отличие проявляется в резком уменьшении наклона кривой  $H_{c2}(T)$  вблизи  $T_c$  с ростом примесного рассеяния, что представляет интерес в качестве одного из экспериментальных критериев поиска систем с нечетным спариванием.

Решена задача о поведении  $H_{c2}$  во всем температурном интервале на основе анализа нечетной куперовской неустойчивости во внешнем магнитном поле. Характерной особенностью этого анализа также является отсутствие диффузионной перенормировки уравнений, что непосредственно связано с нечетностью параметра порядка (щели) по  $k - k_F$ . Полученные результаты полностью соответствуют выводам, основанным на приближении Гинзбурга — Ландау.

Работа поддерживается Научным Советом по проблеме ВТСП и выполнена в рамках проекта № 93-001 Государственной программы исследований по сверхпроводимости. Эта работа также частично поддерживается грантом Фонда Сороса № RGL000 и грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 93-02-2066.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведем некоторые подробности вычислений, требующихся для вывода приведенных выше выражений для коэффициентов Гинзбурга — Ландау. Выражение для диаграммы *a* на рис. 1 с точностью до членов, квадратичных по *q*, сводится к

$$\begin{aligned} \text{Рис.1a} &= -|\Delta_q|^2 \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega} \int d\mathbf{p} \sin^2 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) G_{\omega}(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) G_{-\omega}(-\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \approx \\ &\approx -|\Delta_q|^2 N(0) \left\{ \int_0^{\omega_c} d\xi \sin^2 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) \frac{1}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} + \right. \\ &\left. + \frac{\pi v_F^2 q^2}{48} T \sum_{\omega} \frac{1}{|\omega|^3} \left[ 2 - 2 \exp \left( -\pi \frac{|\omega|}{\omega_c} \right) \left( 1 + \pi \frac{|\omega|}{\omega_c} + \pi^2 \frac{|\omega|^2}{2\omega_c^2} \right) \right] \right\}. \quad (45) \end{aligned}$$

Здесь  $G_{\omega}(\mathbf{p}) = [i\omega - \xi_{\mathbf{p}}]^{-1}$  — обычная мацубаровская функция Грина электрона,  $\omega = (2n + 1)\pi T$ . В подынтегральном выражении следует еще провести разложение по отклонению температуры  $T$  от  $T_c$ , а в члене, содержащем малую величину  $q^2$ , положить  $T = T_c$ . Используя уравнение для  $T_c$  (5), нетрудно убедиться, что вклад диаграммы *b* на рис. 1 равен

$$\text{Рис.1b} = -|\Delta_q|^2 \left\{ \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega} \int d\mathbf{p} G_{\omega}(\mathbf{p}) G_{-\omega}(-\mathbf{p}) \sin^2 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) \right\} = -\frac{N(0)}{g} |\Delta_q|^2, \quad (46)$$

что сокращается с членом нулевого порядка по  $T - T_c$  и  $q$  в выражении для диаграммы *a* на рис. 1. В результате получаем выражения (12), (16) и (18), определяющие коэффициенты  $A$  и  $C$ .

В случае примесного сверхпроводника вычисления проводятся аналогично, нужно только учесть, что функция Грина электрона имеет теперь вид

$$G_{\omega}(\mathbf{p}) = [i\omega - \xi_{\mathbf{p}} + i\gamma \operatorname{sign}(\omega)]^{-1}.$$

Соответственно, например, выражение для диаграммы *z* на рис. 6 содержит сумму

$$T_c \sum_{\omega} \frac{1}{(\omega + \gamma)^2 + \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{1}{2\xi} \operatorname{th} \left( \frac{\omega + \xi}{2T_c} \right) \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (47)$$

и сводится, с учетом уравнения для  $T_c$  (8), к

$$\text{Рис.6z} = -N(0) |\Delta_q|^2 \int_0^{\omega_c} \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \operatorname{th} \left( \frac{\omega + \xi}{2T_c} \right) \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} = -\frac{N(0)}{g} |\Delta_q|^2. \quad (48)$$

Этот вклад сокращает члены нулевого порядка  $T - T_c$  и  $q^2$  в выражении для диаграммы  $\epsilon$  на рис. 6. В результате в коэффициенты Гинзбурга — Ландау входит истинная температура перехода  $T_c$  в присутствии примесей. Аналогичным образом следует учесть рассеяние  $\gamma$  и в части диаграммы  $\epsilon$  на рис. 6, определяющей вклады порядка  $T - T_c$  и  $q^2$ . В итоге получим выражения для коэффициентов Гинзбурга — Ландау  $A$  и  $C$ , приведенные выше для примесного случая.

Коэффициент  $B$  проще найти, воспользовавшись выражением для разности свободных энергий сверхпроводящей и нормальной фаз при произвольной температуре в однородном случае:

$$F_s - F_n = N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ \frac{|\Delta(\xi)|^2}{2\epsilon} \operatorname{th} \left( \frac{\epsilon}{2T} \right) - 2T \ln \left( \frac{\operatorname{ch}(\epsilon/2T)}{\operatorname{ch}(\xi/2T)} \right) \right\}, \quad (49)$$

где  $\epsilon = \sqrt{\xi^2 + |\Delta(\xi)|^2}$ , а  $\Delta(\xi)$  определяется из (6) и (7). Проводя здесь разложение по степеням  $\Delta_0$  и по отклонению  $T$  от  $T_c$ , используя уравнение для  $T_c$  (5), получаем

$$F_s - F_n = N(0) \frac{\Delta_0^2}{g} + N(0) \int_0^{\omega_c} d\xi \left\{ -\frac{\Delta_0^2}{\xi} \sin^2 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2T_c} \right) + \right. \\ \left. + (T - T_c) \Delta_0^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right)}{2T_c^2 \operatorname{ch}^2 \left( \frac{\xi}{2T_c} \right)} + \frac{1}{4} \frac{\Delta_0^4}{\xi^2} \sin^4 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) \left( \frac{1}{\xi} \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2T_c} \right) - \frac{1}{2T_c} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{\xi}{2T_c} \right)} \right) \right\}. \quad (50)$$

Используя еще раз уравнение для  $T_c$  (5) при  $\Delta_0^2$  выделим коэффициент  $A$ , найденный выше. При  $\Delta_0^4/2$  получаем коэффициент  $B$  в виде

$$B = \frac{N(0)}{2} \int_0^{\omega_c} \frac{d\xi}{\xi^3} \sin^4 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right) \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2T_c} \right) - \frac{N(0)}{4T_c} \int_0^{\omega_c} \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{\sin^4 \left( \frac{\pi\xi}{2\omega_c} \right)}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{\xi}{2T_c} \right)}, \quad (51)$$

откуда немедленно следует выражение (17).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

При рассмотрении введенного выше блока  $\Pi_0(q)$  возникает необходимость вычисления сумм по частотам вида

$$S = \sum_w \frac{1}{\xi - \theta t + i(\gamma + \omega)} \frac{1}{\xi + \theta t - i(\gamma + \omega)}. \quad (52)$$

Удобное представление этой суммы в виде интеграла можно получить, воспользовавшись известным выражением

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+a} \frac{1}{n+b} = \frac{1}{b-a} [\psi(b) - \psi(a)] \quad (53)$$



и интегральным представлением логарифмической производной  $\Gamma$ -функции

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1 - e^{-x}} \right), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (54)$$

так что

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{1 - e^{-x}}, \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0. \quad (55)$$

Тогда получаем

$$S = \frac{1}{\pi T \xi} \int_0^{\infty} dx \sin\left(\frac{\xi x}{2\pi T}\right) \frac{\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{2\pi T} + \frac{1}{2}\right)x\right) \exp\left(-i\frac{\theta t x}{2\pi T}\right)}{1 - \exp(-x)}. \quad (35)$$

Интегрирование по  $t$  выполняется элементарно, и в результате уравнение (42) сводится к (44).

## Литература

1. F. Mila and E. Abrahams, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2379 (1991).
2. Q. P. Li and R. Joynt, *Modern Phys. Lett.* **6**, 1145 (1992).
3. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, *Письма в ЖЭТФ* **57**, 494 (1993).
4. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, М. А. Эркабаев, *ЖЭТФ* **104**, 3350 (1993).
5. M. Dobroliubov, E. Langmann, and P. C. E. Stamp, *Europhys. Lett.* **26**, 141 (1994).
6. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
7. P. Nozieres and S. Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
8. Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **37**, 1407 (1959).
9. M. V. Sadovskii, in *Studies of High-Temperature Superconductors*, ed. by A. V. Narlikar, Nova Science Publishers, NY (1993), v. 11, p. 131.