

## КОМБИНАТОРИКА ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ В ЗАДАЧАХ С ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЕМ

Э. З. Кучинский, М. В. Садовский

*Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук  
620049, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 16 мая 1997 г.

Построен алгоритм вычисления производящей функции для числа «скелетных» графиков неприводимой собственно-энергетической и вершинной частей в диаграммной технике для задач с гауссовским случайным полем. Найдено точное рекуррентное соотношение, определяющее число графиков в любом порядке теории возмущений, и асимптотика в пределе высоких порядков. Полученные результаты применяются к анализу задачи об электроне в гауссовском случайном поле с коррелятором типа «белого шума». В приближении равенства «скелетных» графиков для собственно-энергетической части в данном порядке теории возмущений удастся построить замкнутое интегральное уравнение для одноэлектронной функции Грина, «ядро» которого определяется упомянутой производящей функцией. Проведенный анализ показывает, что рассматриваемое приближение дает качественно правильное описание «хвоста» плотности состояний в области отрицательных энергий и, по-видимому, вполне применимо в наиболее интересной области сильного рассеяния вблизи края исходной зоны, где удастся определить асимптотику функции Грина и плотности состояний в пределе бесконечно сильного рассеяния.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Методы суммирования фейнмановских диаграмм широко используются при рассмотрении обширного класса задач теоретической физики, в которых изучается распространение элементарных возбуждений (квазичастиц) в статических случайных полях, создаваемых теми или иными неоднородностями. Простейший пример такой системы представляет электрон, распространяющийся в системе примесных атомов. Именно для этой задачи, по-видимому, впервые была сформулирована диаграммная техника, рассматриваемая в данной работе [1, 2]. Аналогичная используется при рассмотрении задач статистической радиофизики и оптики, связанных с распространением электромагнитных волн в неупорядоченных средах [3]. Эквивалентный математический подход применим для ряда задач теории критических явлений в неупорядоченных системах [4], в задаче о полимерной цепи с «исключенным объемом» и других проблемах физики полимерных систем [5]. Точно такая же диаграммная техника описывает регулярную модель критических явлений с нулькомпонентным параметром порядка [4].

При рассмотрении задач, связанных с суммированием фейнмановских диаграмм, чрезвычайно полезной является информация о комбинаторике графиков, т. е. о числе диаграмм того или иного типа в данном порядке теории возмущений. В настоящей работе мы подробно исследуем вопрос о комбинаторике диаграмм в упомянутом классе задач.

## 2. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ «СКЕЛЕТНЫХ» ДИАГРАММ. РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Для определенности будем обсуждать задачу об электроне с энергией  $E$  и импульсом  $p$ , распространяющемся в гауссовском случайном поле (системе случайных примесей) [1, 2]. Усредненная одночастичная функция Грина определяется диаграммным рядом, показанным на рис. 1а. Стандартным образом это разложение сводится к дайсоновскому виду:

$$G(E, p) = \frac{1}{E - \varepsilon_p - \Sigma(E, p)}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_p = p^2/2m$  — спектр свободного электрона, а собственно-энергетическая часть  $\Sigma(E, p)$  определяется «скелетными» графиками рис. 1б, в которых внутренняя электронная линия представляет полную («одетую») функцию Грина  $G(E, p)$ .

Полное число графиков в  $N$ -м порядке теории возмущений в разложении рис. 1а, как легко видеть, равно:

$$G_N = (2N - 1)!! = \frac{(2N - 1)!}{2^{N-1}(N - 1)!}, \quad (2)$$

что просто определяется числом способов соединить  $2N$  вершин  $N$  примесными линиями. Задача определения аналогичного числа графиков  $\Sigma_N$  в разложении рис. 1б существенно сложнее, и точный ответ, насколько нам известно, в литературе отсутствует. В работе [6] было найдено простое неравенство

$$(2N - 1)!! > \Sigma_N > (2N - 3)!!, \quad (3)$$

которое дает лишь достаточно грубую оценку величины  $\Sigma_N$ . Как мы увидим, задача может быть решена точно. Это сразу же следует из точного решения задачи об электроне в случайном потенциале  $V(\mathbf{r}) = V$ , где величина  $V$  не зависит от пространственной координаты  $\mathbf{r}$ , но имеет гауссовское распределение с шириной  $\langle V^2 \rangle = W^2$ . Естественно, что

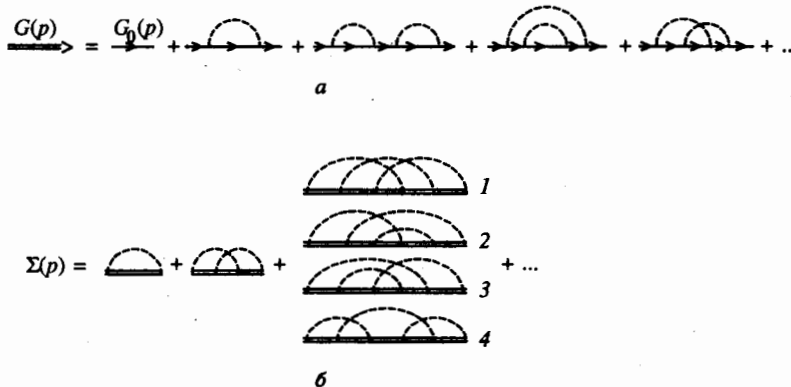


Рис. 1. Диаграммный ряд для усредненной одночастичной функции Грина (а) и собственно-энергетической части (б). Штриховой линией соответствует среднеквадратичный коррелятор случайного поля,  $G_0$  — свободная функция Грина

в этом случае диаграммная техника имеет стандартный вид рис. 1, а каждая линия примесного взаимодействия передает нулевой импульс, т. е. ей соответствует (в импульсном представлении) коррелятор  $(2\pi)^d W^2 \delta(\mathbf{q})$  ( $d$  — размерность пространства) [7, 8]. Все вклады одного порядка в разложении рис. 1а оказываются одинаковыми, и ряд для функции Грина представляется в виде [7]

$$G(E, p) = G_0(E, p) \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (2N-1)!! G_0^{2N}(E, p) W^{2N} \right\}. \quad (4)$$

Тогда с использованием представления

$$(2N-1)!! = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt t^{2N-2} e^{-t^2/2} \quad (5)$$

ряд (4) элементарно суммируется и мы получаем<sup>1)</sup>

$$G(E, p) = \frac{1}{W} \Psi \left( \frac{1}{W G_0(E, p)} \right), \quad (6)$$

где ввели функцию

$$\Psi(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2/2} \frac{1}{t-z}. \quad (7)$$

Рассмотрим собственно-энергетическую часть, соответствующую функции Грина (6). Поскольку добавление примесной линии приводит в этой задаче просто к дополнительному множителю  $W^2 G^2$ , собственно-энергетическая часть, определяемая разложением рис. 1б, может быть записана в виде

$$\Sigma = Q(W^2 G^2) W^2 G, \quad (8)$$

где  $Q(x)$  — некоторая функция. Мы увидим, что эта функция является производящей функцией числа «скелетных» графиков для собственно-энергетической части, т. е. ее коэффициенты разложения в ряд Тейлора дают искомые числа  $\Sigma_N$ .

Запишем уравнение Дайсона для рассматриваемой задачи:

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G = G_0 (1 + Q(W^2 G^2) W^2 G^2). \quad (9)$$

Вводя  $z = (W G_0)^{-1}$  и  $y = W^2 G^2$ , из (6) и (9) получаем следующее параметрическое представление  $Q(y)$ :

$$\begin{aligned} 1 + y Q(y) &= z \Psi(z) = z \sqrt{y}, \\ y &= \Psi^2(z). \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>1)</sup> С математической точки зрения это означает суммирование по Борелю.

Такое представление функции  $Q$  является достаточно неудобным. Покажем, что для нее можно получить дифференциальное уравнение. Нетрудно убедиться, что функция  $\Psi(z)$  удовлетворяет обычному дисперсионному соотношению<sup>2)</sup>

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{Im} \Psi(t)}{t-z}, \quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Psi(t) = \mp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad (11)$$

из которого немедленно следует, что  $\Psi(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Psi}{dz} = 1 - z\Psi \quad (12)$$

с начальным условием

$$\Psi(z = \pm i0) = \mp i\sqrt{\pi/2}. \quad (13)$$

Дифференцируя первое уравнение в (10) по  $y$ , получаем

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2} y^{-3/2} \left\{ 2y^2 \frac{dQ(y)}{dy} + yQ(y) - 1 \right\}. \quad (14)$$

Дифференцируя второе уравнение в (10) по  $z$ , с использованием (12) имеем

$$\frac{dy}{dz} = 2\Psi(z) \frac{d\Psi(z)}{dz} = 2\Psi(z)(1 - z\Psi(z)) = -2y^{3/2}Q(y). \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), получаем нелинейное дифференциальное уравнение для  $Q(y)$ :

$$\frac{dQ(y)}{dy} = \frac{1}{2y^2} \{ 1 - Q^{-1}(y) + yQ(y) \}. \quad (16)$$

Используя (10) и (13), получаем  $y = \Psi^2(z)|_{z=\pm i0} = -\pi/2$ , так что

$$Q\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{z\Psi(z) - 1}{y} \Big|_{z=\pm i0} = \frac{2}{\pi}, \quad (17)$$

что является начальным условием для уравнения (16). Заметим, что точка  $Q(0) = 1$ , с очевидностью следующая из диаграммного представления для  $\Sigma$ , является для уравнения (16) особой и не может служить начальным условием.

Уравнение (16) можно переписать в более удобном для дальнейшего анализа виде

$$Q(y) = 1 + y \frac{d}{dy} yQ^2(y). \quad (18)$$

Нас интересует разложение  $Q(y)$  в ряд Тейлора:

$$Q(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n. \quad (19)$$

<sup>2)</sup> Знак мнимой части определяется рассмотрением запаздывающей или опережающей функции Грина.

Поскольку число «скелетных» диаграмм  $N$ -го порядка для собственно-энергетической части является просто коэффициентом при  $W^{2N}$  в разложении  $\Sigma$  в ряд по степеням  $W^2$ , легко видеть, что выражение (8) дает искомое  $\Sigma_N$  в виде

$$\Sigma_N = a_{N-1}. \quad (20)$$

Это и означает, что функция  $Q(y)$  является производящей функцией для интересующих нас комбинаторных факторов  $\Sigma_N$ .

Подстановка (19) в (18) приводит к следующему рекуррентному соотношению для коэффициентов  $a_n$ :

$$a_n = n \sum_{m=0}^{n-1} a_m a_{n-1-m}, \quad (21)$$

где  $a_0 = 1$ . Из равенства  $a_0 = 1$  сразу следует  $Q(0) = 1$ . Именно в этом смысле данная точка является особой — равенство  $Q(0) = 1$  выполняется для любых начальных условий, при которых уравнение (18) имеет решение.

Из (21) нетрудно найти значения  $a_n$  при малых  $n$ , соответствующие результаты приведены в таблице.

Таблица

$N$	$\Gamma_N = a_N$	$b_N = a_N/(2N+1)!!$	$\Sigma_N = a_{N-1}$	$U_N = (2N-1)a_{N-1}$
1	1	0.3333	1	1
2	4	0.2667	1	3
3	27	0.2571	4	20
4	248	0.2624	27	189
5	2830	0.2722	248	2232
6	38232	0.2829	2830	3120
7	593859	0.2930	38232	497016
8	10401712	0.3019	593859	8907885
9	202601898	0.3158	10401712	176829104
10	4342263000	0.3211	202601898	3849436062
$N \gg 1$	$\frac{1}{e} \left[ 1 - \frac{5}{4N} \right] (2N+1)!!$	$\frac{1}{e} \left[ 1 - \frac{5}{4N} \right]$	$\frac{1}{e} \left[ 1 - \frac{5}{4N} \right] (2N-1)!!$	$\frac{1}{e} \left[ 1 - \frac{9}{4N} \right] (2N+1)!!$

Зная комбинаторику диаграмм для собственно-энергетической части, нетрудно воспроизвести и комбинаторику для двухчастичной функции Грина — как для полной вершинной части  $\Gamma$ , так и для неприводимой вершины  $U$ , диаграммное разложение для которых приведено на рис. 2. Действительно, собственно-энергетическая часть  $\Sigma$  связана с полной вершиной  $\Gamma$  уравнением, графически представленным на рис. 3. Для задачи с нулевым передаваемым импульсом [7, 8] это уравнение имеет вид

$$\Sigma = W^2 G(1 + G^2 \Gamma). \quad (22)$$

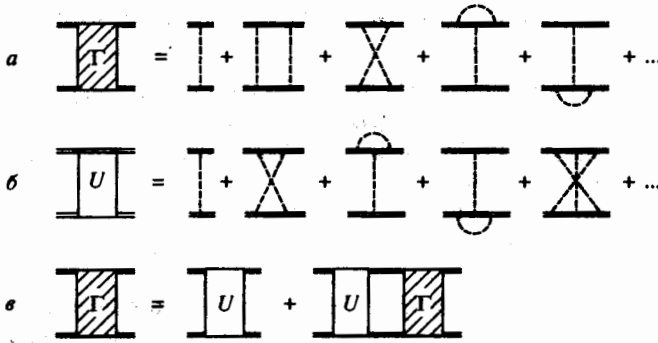


Рис. 2. Диаграммный ряд для полной вершинной части  $\Gamma$  (а) для неприводимой вершины  $U$  (б) и уравнение Бете-Солпитера, связывающее  $\Gamma$  и  $U$  (в)



Рис. 3. Уравнение, связывающее собственно-энергетическую часть с полной вершиной

Поэтому для числа диаграмм  $N$ -го порядка в полной вершине  $\Gamma_N$  сразу же получаем

$$\Gamma_N = \Sigma_{N+1} = a_N. \tag{23}$$

Таким образом, функция  $Q(y)$  является производящей функцией и для числа диаграмм полной вершинной части.

Число диаграмм  $N$ -го порядка для неприводимой вершины  $U_N$  может быть легко получено, если заметить, что разрыв любой из  $2N - 1$  внутренних линий Грина в диаграмме для собственно-энергетической части  $N$ -го порядка порождает соответствующую диаграмму для вклада  $N$ -го порядка в неприводимую вершину  $U$  (рис. 4). Поэтому

$$U_N = (2N - 1)\Sigma_N = (2N - 1)a_{N-1}. \tag{24}$$

В Приложении мы еще раз выводим дифференциальное уравнение (18) для производящей функции  $Q(y)$ , используя только уравнение Бете-Солпитера, связывающее  $U$  и  $\Gamma$ , и тождество Уорда, без использования явного вида функции Грина (6).

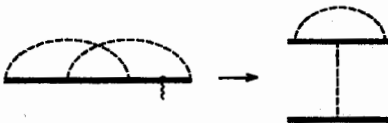


Рис. 4. Разрыв любой из  $2N - 1$  внутренних линий функций Грина в «скелетной» диаграмме  $N$ -го порядка для собственно-энергетической части порождает соответствующую диаграмму для  $U$

3. АСИМПТОТИКА ДЛЯ ЧИСЛА ДИАГРАММ ПРИ БОЛЬШИХ  $N$ 

В пределе высоких порядков,  $N \gg 1$ , использование рекуррентного соотношения (21) становится неудобным ввиду факториального роста числа диаграмм [6]. В то же время факт факториального роста можно использовать для существенного упрощения задачи. Перепишем (21) в виде

$$a_n = 2na_0a_{n-1} + 2na_1a_{n-2} + 2na_2a_{n-3} + \dots, \quad (25)$$

где  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 4$ . Естественно предположить, что в пределе больших  $n$  имеем  $a_n \approx (2n + \beta)a_{n-1}$ , тогда  $a_{n-2} \approx a_{n-1}/(2n - 2 + \beta)$  и т.д. Подстановка этих выражений в (25) сразу дает  $\beta = 1$  и

$$a_n = \left(2n + 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) a_{n-1}. \quad (26)$$

Это означает, что в пределе больших  $n$  число  $a_n \sim (2n + 1)!!$ . Определим  $b_n$  как

$$b_n = \frac{a_n}{(2n + 1)!!}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (21), получаем рекуррентное соотношение для  $b_n$ :

$$b_n = n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(2m + 1)!!(2n - 2m - 1)!!}{(2n + 1)!!} b_m b_{n-1-m}, \quad (28)$$

причем  $b_0 = 1$ . В пределе больших  $n$  и с учетом  $b_1 = 1/3$ ,  $b_2 = 4/15$ , ограничиваясь точностью порядка  $b/n^2$  (где  $b \sim b_n \sim b_{n-1} \sim b_{n-2} \sim b_{n-3}$ ), получаем

$$\Delta b_n = b_n - b_{n-1} = \frac{5}{4} \frac{b_{n-1}}{n^2} + O\left(\frac{b}{n^3}\right). \quad (29)$$

Таким образом, для  $b_n$  в пределе больших  $n$  можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{db_n}{dn} = \frac{5}{4} \frac{b_n}{n^2} + O\left(\frac{b}{n^3}\right), \quad (30)$$

из которого сразу же следует

$$b_n = b \exp\left(-\frac{5}{4} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = b \left\{1 - \frac{5}{4} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}. \quad (31)$$

Естественно, что на основе такого анализа невозможно определить константу  $b = \lim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Численный анализ поведения  $b_n$  с использованием рекуррентного соотношения (28) полностью подтверждает зависимость (31) (см. рис. 5) и дает  $b = 1/e = 0.36787944\dots$  (вычисления проводились до  $n = 5000$ , что обеспечивает указанную точность). Нам неизвестен аналитический способ получения этого любопытного результата.

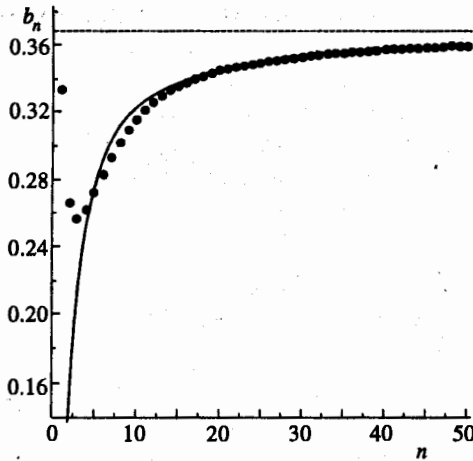


Рис. 5. Поведение  $b_n$  с ростом  $n$ . Точки соответствуют значениям  $b_n$ , полученным из рекуррентного соотношения (28), кривая соответствует асимптотической зависимости  $e^{-1}(1 - 5/4n)$ , штриховая линия — асимптотике  $1/e$

Окончательно, асимптотики числа диаграмм разных типов при больших  $N$  имеют вид<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} \Sigma_N = a_{N-1} = b_{N-1}(2N-1)!! &= \frac{1}{e} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} (2N-1)!! = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}e} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} 2^N \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_N = a_N &= \frac{1}{e} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} (2N+1)!! = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}e} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} 2^{N+1} \Gamma\left(N + \frac{3}{2}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} U_N = (2N-1)a_{N-1} &= \frac{1}{e} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} (2N-1)(2N-1)!! = \frac{1}{e} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{9}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} (2N+1)!! = \frac{1}{\sqrt{\pi}e} \left\{ 1 - \frac{9}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} 2^{N+1} \Gamma\left(N + \frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Интересно отметить, что:

$$\frac{\Sigma_N}{\Gamma_N} = b_{N-1} = \frac{1}{e} \left\{ 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right\} \rightarrow \frac{1}{e}, \quad (35)$$

$$\frac{U_N}{\Gamma_N} = 1 - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \rightarrow 1. \quad (36)$$

В таблице приведена сводка основных результатов для числа графиков различного типа.

<sup>3)</sup> Асимптотика типа (32)  $\Sigma_N \approx c \cdot 2^N \Gamma(N + \beta)$  была получена в работе [6] методом Липатова, однако коэффициенты  $c$  и  $\beta$  не были найдены.



#### 4. ЭЛЕКТРОН В ГАУССОВСКОМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ С КОРРЕЛЯТОРОМ ТИПА «БЕЛЫЙ ШУМ»

В качестве примера практического использования полученных выше результатов рассмотрим задачу об электроны в гауссовском случайном поле с коррелятором типа «белый шум», когда примесной линии взаимодействия соответствует выражение [1, 2, 9]:

$$w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = W^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4), \quad (37)$$

где  $W^2 = \rho V^2$ ,  $\rho$  — плотность примесных атомов,  $V$  — борновская амплитуда рассеяния на точечной примеси. Хорошо известно, что основные трудности в этой задаче возникают в области энергий, определяемой условием [9]

$$|E| \lesssim \gamma(E) \quad \text{или} \quad |E| \lesssim E_{sc}, \quad (38)$$

где  $\gamma(E) = \pi \rho V^2 N(E)$  — борновское «затухание» ( $N(E)$  — плотность состояний, соответствующих энергии  $E$ ),  $E_{sc} \sim m^{d/(4-d)} (\rho V^2)^{2/(4-d)}$  — характерный размер «критической» области вблизи края зоны, где возникает сильное рассеяние. Эти трудности связаны, главным образом, с невозможностью отбора какой-либо доминирующей последовательности фейнмановских диаграмм, аналогично тому, как это делается в области слабого рассеяния,  $E \gg \gamma(E)$ ,  $E \gg E_{sc}$  [1, 2]<sup>4)</sup>. Фактически все диаграммы для собственно-энергетической части становятся в области  $|E| \lesssim E_{sc}$  одного порядка и должны учитываться.

В терминах «скелетных» графиков ряд теории возмущений для собственно-энергетической части представлен на рис. 1б. Путем простых замен переменных можно показать, что все графики 3-го порядка в этом разложении оказываются равными друг другу (диаграммы рис. 1б (1-4)). Несмотря на то что такое равенство нарушается уже в следующем порядке, представляется разумным сформулировать приближение, в котором предполагается равенство всех графиков такого типа в каждом порядке теории возмущений. Такое приближение должно давать неплохие результаты, прежде всего, в «критической области»  $|E| \lesssim E_{sc}$ , где все вклады имеют, по крайней мере, один и тот же порядок величины. Выберем в качестве «базового» графика в каждом порядке «максимально перекрестный» типа показанного на рис. 6а. Входящая в него последовательность линий взаимодействия для систем, инвариантных относительно обращения времени, может быть преобразована в «лестницу», как показано на рис. 6б. Тогда полный ряд для собственно-энергетической части в нашем приближении представляется в виде

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} W^2 \Sigma_n \sum_{\mathbf{p}_1} \sum_{\mathbf{p}_2} [W^2 G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}) G(-\mathbf{p}_2)]^{n-1} G(\mathbf{p}_1) = \\ &= \sum_{\mathbf{p}_1} W^2 Q \left[ W^2 \sum_{\mathbf{p}_2} G(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}) G(\mathbf{p}_2) \right] G(\mathbf{p}_1), \end{aligned} \quad (39)$$

<sup>4)</sup> В этом случае доминирующими являются «неперекрещивающиеся» графики, так что можно учесть только первую диаграмму на рис. 1б.

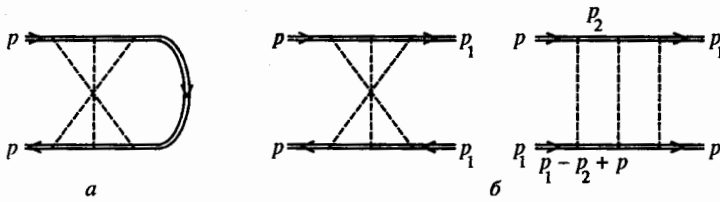


Рис. 6. (а) — «базовый» график, используемый при построении приближения для собственно-энергетической части, (б) — «развернутая» последовательность «максимально перекрещивающихся» графиков дает «лестницу» в случае инвариантности системы относительно операции обращения времени

где использовались определения (19) и (20), а также то, что в изотропной системе  $G(\mathbf{p}) = G(-\mathbf{p})$ . Соответственно, получаем замкнутое уравнение для усредненной одночастичной функции Грина в виде

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - W^2 \sum_q Q \left[ W^2 \sum_{p_1} G(p_1 - q) G(p_1) \right] G(p + q), \quad (40)$$

где  $G_0^{-1}(p) = E - p^2/2m$ . Вся нетривиальная часть рассматриваемой задачи выражается теперь с помощью рассмотренной выше производящей функции  $Q(y)$ , которая определяет «ядро» сложного нелинейного интегрального уравнения (40). Ограничение первым членом разложения (19) дает  $Q = 1$ , и (40) сводится к стандартной задаче суммирования «неперекрещивающихся» графиков [1, 2]. Очевидным преимуществом результата (40) по сравнению со стандартным подходом [1, 2], основанным на выделении доминирующей последовательности диаграмм (например, учет лишь первого графика на рис. 1б), является формальный учет всех диаграмм, сделанный, однако, в приближении равенства всех «скелетных» графиков для собственно-энергетической части в данном порядке теории возмущений.

Уравнение (40) является чрезвычайно сложным нелинейным интегральным уравнением, решение его в общем виде невозможно, тем более, что мы не знаем общий вид функции  $Q(y)$  (которая к тому же входит в (40) как функция комплексного аргумента). Ниже мы ограничимся некоторым качественным анализом возникающих из (40) следствий. Запишем (40) в компактном виде как

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - W^2 Q [W^2 G \otimes G] \otimes G, \quad (41)$$

где ввели обобщенное произведение (свертку) функций

$$F \otimes \Phi = \sum_p F(p - q) \Phi(p), \quad (42)$$

и вернемся к системе уравнений (10), определяющей функцию  $Q$  параметрически. Второе уравнение в (10) записывается теперь как

$$G \otimes G = \frac{1}{W^2} \Psi^2(z). \quad (43)$$

Выше мы видели, что в задаче с нулевым передаваемым импульсом  $z = W^{-1} G_0^{-1}$ . Рассмотрим в (43) предел  $W \rightarrow 0$ . Тогда левая часть (43) сводится к  $G_0 \otimes G_0$ , а в правой

части можно по аналогии с задачей с нулевым передаваемым импульсом предположить  $z \sim W^{-1}$  и воспользоваться асимптотикой  $\Psi(z) \approx 1/z$  при  $|z| \gg 1$ . Здесь есть некоторая некорректность, поскольку точный вид  $\Psi(z)$ :

$$\Psi(z) = R(z) \mp i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z^2/2}, \quad (44)$$

где для  $R(z)$  имеется асимптотическое разложение вида

$$R(z) = e^{-z^2/2} \int_0^z e^{t^2/2} dt = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^5} + \dots \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right). \quad (45)$$

Мы пользуемся асимптотикой  $\Psi(z) \approx 1/z$ , что не вполне верно, однако результаты, получающиеся при использовании этого приближения, подтверждаются при более корректном, но гораздо более громоздком анализе. Таким образом, в пределе  $W \rightarrow 0$  (43) сводится к

$$G_0 \otimes G_0 = \frac{1}{W^2 z^2} \quad \text{или} \quad z = \frac{1 + O(W^2)}{W \sqrt{G_0 \otimes G_0}}. \quad (46)$$

Соответственно, в пределе  $W \rightarrow 0$  вместо (43) можно написать

$$G \otimes G = \frac{1}{W^2} \Psi^2 \left( \frac{1}{W \sqrt{G_0 \otimes G_0}} \right). \quad (47)$$

Рассмотрим область энергий  $E < 0$ , где возникает флуктуационный «хвост» плотности состояний [9, 10]. В этом случае из (46) имеем  $z \in \text{Re}$ . С помощью (44) и (46) из (47) получаем

$$G \otimes G \approx G_0 \otimes G_0 - i \frac{2}{W} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{G_0 \otimes G_0} \exp \left\{ -\frac{1}{2W^2 G_0 \otimes G_0} \right\}, \quad (48)$$

где, как мы сейчас увидим, второе слагаемое и порождает флуктуационный «хвост» плотности состояний. Воспользовавшись

$$\sum_q G \otimes G = \sum_p \sum_q G(p-q)G(p) = \left( \sum_p G(p) \right)^2,$$

из (48) немедленно получаем плотность состояний в виде

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_p \text{Im} G^R(E, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} W} \frac{\sum_q \sqrt{G_0 \otimes G_0} \exp \{ -1/(2W^2 G_0 \otimes G_0) \}}{\left| \sum_p G_0(E, p) \right|}. \quad (49)$$

Далее все определяется конкретным видом  $G_0 \otimes G_0$  в пространствах различной размерности.

В одномерном ( $d = 1$ ) случае все интегралы, входящие в (49), вычисляются точно. После довольно громоздких, но достаточно элементарных расчетов получаем

$$N(E) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \exp \left\{ -\sqrt{2} \frac{|E|^{3/2}}{m^{1/2} W^2} \right\}. \quad (50)$$

Величина показателя экспоненты в (50) отличается от известного точного результата Гальперина [11] (см. также гл. II в [10]) отсутствием множителя  $4/3$ . Предэкспонента в (50) также отличается от точной, которая  $\sim |E|/W^2$  [11]. Тем не менее качественно поведение «хвоста» плотности состояний воспроизводится в нашем приближении достаточно удовлетворительно. Напомним в связи с этим распространенное мнение, что «хвост» плотности состояний вообще не может быть получен по теории возмущений.

Аналогичные (но уже приближенные) вычисления плотности состояний согласно (49) для  $d = 3$  дают

$$N(E) \sim \exp \left\{ -\sqrt{2} \frac{|E|^{1/2}}{m^{3/2}W^2} \right\}. \quad (51)$$

Показатель экспоненты здесь опять с точностью до константы совпадает с известными результатами непертурбативного инстантонного подхода [9, 12–14]. Опущенный в (51) предэкспоненциальный множитель, следующий из (49), не совпадает ни с одним из известных вариантов, полученных в цитированных работах. Тем не менее результат (51) для доминирующей экспоненты также достаточно удовлетворительный, несмотря на приближенный характер уравнения<sup>5)</sup> (40).

Особый интерес представляет анализ следствий из уравнения (40) в области «сильной связи» [9], определяемой условием (38), т. е. в окрестности края исходной зоны, где происходит переход от распространенных к локализованным состояниям. Есть все основания полагать, что в этой области приближение равных вкладов в собственную-энергетическую часть в данном порядке теории возмущений может оказаться хорошим просто в силу известного факта их равенства по порядку величины. Сильное условие типа (38), очевидно, эквивалентно переходу к пределу  $W \rightarrow \infty$ . В этом пределе в «нулевом» приближении в уравнении (41) можно пренебречь первым слагаемым в правой части по сравнению со вторым и записать

$$G^{-1}(p) = -W^2 Q [W^2 G \otimes G] \otimes G. \quad (52)$$

Убедимся, что это соответствует пределу  $z = \pm i0$  в (43) или  $y = -\pi/2$  в (10). В этом случае (43) сводится к

$$W^2 G \otimes G = \Psi(z = \pm i0) = -\pi/2, \quad (53)$$

а из (17) имеем

$$Q [W^2 G \otimes G] = 2/\pi. \quad (54)$$

Формальное решение (53) имеет вид

$$G = \pm i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{W \sqrt{\mathcal{K}}}, \quad (55)$$

<sup>5)</sup> Для  $d > 4$  знание асимптотики (32) и использование статистического анализа работы [6] позволяет определить правильный показатель степени  $W^{-1}$  в предэкспоненте плотности состояний. В этом случае наше приближение эквивалентно использованной в [6] гипотезе стационарности вкладов высоких порядков, справедливой для  $d > 4$ .

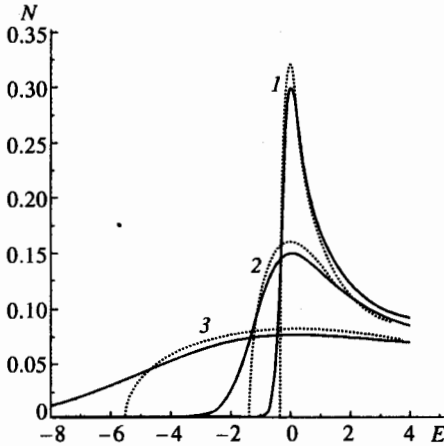


Рис. 7. Плотность состояний в одномерной системе при различных значениях среднего квадрата случайного поля  $W^2(2m)^{1/2}/E_0^{3/2}$ : 1 — 0.25; 2 — 2; 3 — 16. Сплошные кривые — точное решение, пунктирные — самосогласованное борновское приближение (56). Энергия приведена в единицах  $E_0$ , плотность состояний в единицах  $\sqrt{2m/E_0}$ , где  $E_0$  — произвольно

где  $\mathcal{N} = \sum_p 1$  — число состояний в зоне. Прямой подстановкой (55) и (54) в (52) легко убедиться, что это уравнение удовлетворяется. Таким образом, в «первом» приближении в пределе  $W \rightarrow \infty$  можно записать функцию Грина (41) в виде

$$G(p) = \frac{1}{G_0^{-1}(p) - (2/\pi)W^2 \sum_p G(p)}, \quad (56)$$

что удивительным образом совпадает с результатом самосогласованного борновского приближения (первая диаграмма на рис. 1б или рис. 3) [1, 2] с точностью до «лишнего» множителя  $2/\pi$ . Очевидным образом (56) приводит к плотности состояний борновского приближения  $N_0(E)$ , практически совпадающей для  $d = 3$  с плотностью состояний модели свободных электронов (с учетом однопетлевого сдвига края зоны). На рис. 7 приведено сравнение результатов, следующих из (56), для плотности состояний в одномерной ( $d = 1$ ) системе с точным результатом Гальперина [11], демонстрирующее удовлетворительное совпадение этих результатов в области «сильной связи»  $|E| < E_{sc} \sim m^{1/3}W^{4/3}$ , ширина которой растет с ростом  $W$ . Следует отметить, что хотя «хвост» плотности состояний подавляется с ростом  $W$  (см. (50)), однако растет промежуточная область, где  $|E| \sim E_{sc}$ .

Возможно, что результат типа (56) позволяет качественно оправдать использование простейшего борновского приближения для одноэлектронной функции Грина в подходах типа самосогласованной теории локализации [9, 15] — порог подвижности возникает в области «сильной связи»  $|E| \lesssim E_{sc}$  (38), где приближение (56) оказывается достаточно удовлетворительным и функция Грина действительно имеет простой борновский вид.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-16065), а также в рамках проекта IX.1 Госпрограммы «Статистическая физика» Министерства науки России. Авторы признательны А. И. Посажениковой за помощь при выполнении численных расчетов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем вывод уравнения (18) для производящей функции  $Q(y)$  без использования явного вида одночастичной функции Грина (6). В задачах с нулевым передаваемым импульсом уравнение Бете–Солпитера рис. 2*в* имеет вид

$$\Gamma = U + UG^2\Gamma, \quad (\text{П.1})$$

так что

$$\Gamma = \frac{U}{1 - UG^2}. \quad (\text{П.2})$$

Используя (П.2) и (22), получаем уравнение, связывающее собственно-энергетическую часть с неприводимой вершиной  $U$ :

$$\Sigma = \frac{W^2G}{1 - UG^2}. \quad (\text{П.3})$$

Воспользуемся «тождеством Уорда»:

$$W^2 \frac{\partial}{\partial W} \Big|_G \frac{\Sigma}{W} = UG, \quad (\text{П.4})$$

в справедливости которого нетрудно убедиться с помощью (8) и (24), и уравнением (П.2), чтобы записать

$$W^2 \frac{\partial}{\partial W} \Big|_G \frac{\Sigma}{W} = UG = \frac{1}{G} \left\{ 1 - W^2 \frac{G}{\Sigma} \right\}$$

или

$$\Sigma = W^2G + W^2G\Sigma \frac{\partial}{\partial W} \Big|_G \frac{\Sigma}{W}. \quad (\text{П.5})$$

Используя (8), получаем искомое дифференциальное уравнение для  $Q$ :

$$Q(W^2G^2) = 1 + W^2GQ(W^2G^2) \frac{\partial}{\partial W} \Big|_G WGQ(W^2G^2) = 1 + W^2G^2 \frac{d}{d(W^2G^2)} W^2G^2Q^2(W^2G^2),$$

что переписывается как

$$Q(y) = 1 + y \frac{d}{dy} yQ^2(y). \quad (\text{П.6})$$

Заметим, однако, что из этих рассуждений невозможно найти правильное граничное условие (17), которое тесно связано с соотношением (11), отражающим принцип причинности.

## Литература

1. S. F. Edwards, *Phil. Mag.* **3**, 1020 (1958).
2. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962), гл. 7.
3. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. Н. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику*, часть II, Наука, Москва (1978), гл. VIII.
4. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980), гл. 10.
5. А. Ю. Гросберг, А. Р. Хохлов, *Статистическая физика макромолекул*, Наука, Москва (1989), гл. 2.
6. И. М. Сулов, *ЖЭТФ* **102**, 1951 (1992).
7. Л. В. Келдыш, Дисс.... докт. физ. мат. наук, ФИАН, Москва (1965).
8. А. Л. Эфрос, Б. И. Шкловский, *Электронные свойства легированных полупроводников*, Наука, Москва (1979), гл. 11.
9. M. V. Sadovskii, *Sov. Sci. Rev. A-Phys. Rev.* **7**, 1 (1986).
10. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982), гл. IV.
11. V. I. Halperin, *Phys. Rev.* **139**, A104 (1965).
12. J. Cardy, *J. Phys. C* **11**, L321 (1978).
13. М. В. Садовский, *ФТТ* **21**, 743 (1979).
14. И. М. Сулов, *ЖЭТФ* **111**, 1896 (1997).
15. D. Vollhardt, P. Wölfle, in *Electronic Phase Transition*, ed. by W. Hanke and Yu. V. Kopayev, North-Holland, Amsterdam (1992), p. 1.