Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 83 *1982* *Вып. 4(10)*

КРИТЕРИЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОНА В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ

М. В. Садовский

Работа посвящена исследованию общего критерия локализации в полевой теории электрона в случайном поле. Показывается эквивалентность критериев локализации Эконому – Коэна и Березинского – Горькова. Общий критерий локализации формируется как требование существования в двухчастичной функции Грина полюсного вклада с факторизующимся вычетом (в импульсном пространстве). Поиск решения такого вида проводится на основе исследования однородного уравнения Бете – Солпитера и в рамках инстантонного подхода. Показано, что уравнение Бете – Солпитера определяет точку неустойчивости «нормальной» (металлической) фазы. Инстантонный подход описывает область энергий, соответствующую локализованной фазе. В обоих подходах критическая энергия, в которой происходит переход (порог подвижности), попадает в «гинзбурговскую критическую область», где существен выход за рамки используемых приближений. Оба подхода естественным образом следуют из формализма эффективного действия, отражая, однако, различные механизмы неустойчивости нормальной фазы.

1. Введение

Очевидная аналогия, которая существует между явлением локализации электронов в неупорядоченных системах (переход Андерсона) и обычными фазовыми переходами, привела к многочисленным попыткам построения полевой теории электрона в случайном поле (см. обзор [1], а также работы [2–5]). Результаты этих работ являются достаточно противоречивыми, и общая картина перехода все еще не вполне ясна. В частности, это касается вопроса о возможности описания локализации на основе представлений о каком-либо параметре порядка.

Недостаточно исследован также вопрос о том, каким образом локализация проявляет себя в основных величинах, с которыми оперирует теория, таких, например, как функции Грина. Это существенно затрудняет окончательное решение задачи. Ясно, например, что вопрос о реализации самого явления локализация отличается, вообще говоря, от вопроса о поведении проводимости вблизи порога подвижности, решение которого может оказаться существенно более сложным. Данная работа посвящена анализу общего критерия локализации и некоторым попыткам поиска соответствующих решений из основных уравнений теории электрона в случайном поле.

2. Эквивалентность критериев локализации Эконому — Коэна и Березинского — Горькова

Рассмотрим невзаимодействующие электроны, движущиеся в поле хаотически расположенных (в d-мерном пространстве) примесей. Определим, следуя Березинскому и Горькову [6], спектральную плотность:

$$\langle\langle \rho_E(\mathbf{r})\rho_{E+\omega}(\mathbf{r}')\rangle\rangle = \frac{1}{N(E)}\left\langle \sum_{\nu\nu'} \varphi_\nu^*(\mathbf{r})\varphi_{\nu'}(\mathbf{r})\varphi_{\nu'}^*(\mathbf{r}')\varphi_\nu(\mathbf{r}')\cdot \right.$$

$$\left. \cdot\delta(E-\varepsilon_\nu)\delta(E+\omega-\varepsilon_{\nu'})\right\rangle, \qquad (1)$$

где

$$N(E)=\left\langle \sum_\nu \varphi_\nu(\mathbf{r})\varphi_\nu^*(\mathbf{r})\delta(E-\varepsilon_\nu)\right\rangle \tag{2}$$

— электронная плотность состояний, усредненная по конфигурациям случайного потенциала; $\varphi_\nu(\mathbf{r})$, ε_ν — точные волновые функции и энергетические уровни электрона в поле примесей, ν — набор квантовых чисел, характеризующих эти состояния, E — энергия электрона, ω — произвольная частота.

Согласно критерию локализации, предложенному в работе [6], в области энергий E, соответствующей локализованным состояниям, в спектральной плотности (1) возникает δ-образный по ω вклад:

$$\langle\!\langle \rho_E(\mathbf{r})\rho_{E+\omega}(\mathbf{r}')\rangle\!\rangle = A_E(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(\omega)+\rho_1{}^E(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega), \tag{3}$$

или в импульсном представлении

$$\langle\!\langle \rho_E\rho_{E+\omega}\rangle\!\rangle_\mathbf{q} = A_E(\mathbf{q})\delta(\omega)+\rho_1{}^E(\mathbf{q}\omega). \tag{4}$$

Второе слагаемое в (3) и (4) регулярно по ω. В области делокализованных состояний $A_E(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=A_E(\mathbf{q})=0$.

Поскольку величины $A_E(\mathbf{q})$ или $A_E(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ сигнализируют появление локализованных состояний, полезно перейти к их определению из стандартного формализма (функций Грина). Вводя запаздывающую и опережающую неусредненные функции Грина электрона

$$G^{R,A}(\mathbf{r}\mathbf{r}'E)=\sum_\nu (\varphi_\nu(\mathbf{r})\varphi_\nu^*(\mathbf{r}')/(E-\varepsilon_\nu\pm i\delta)) \tag{5}$$

и используя определение (1), немедленно получаем

$$\langle\!\langle \rho_E(\mathbf{r})\rho_{E+\omega}(\mathbf{r}')\rangle\!\rangle = \frac{1}{\pi^2N(E)}\langle \operatorname{Im} G^{R,A}(\mathbf{r}\mathbf{r}'E+\omega)\operatorname{Im} G^{R,A}(\mathbf{r}'\mathbf{r}E)\rangle =$$

$$=\frac{1}{2\pi^2N(E)}\operatorname{Re}\{\langle G^R(\mathbf{r}\mathbf{r}'E+\omega)G^A(\mathbf{r}'\mathbf{r}E)\rangle-\langle G^{R,A}(\mathbf{r}\mathbf{r}'E+\omega)G^{R,A}(\mathbf{r}'\mathbf{r}E)\rangle\}, \tag{6}$$

или в импульсном пространстве:

$$\langle\!\langle \rho_E\rho_{E+\omega}\rangle\!\rangle_\mathbf{q} = \frac{1}{\pi N(E)}\operatorname{Im}\{\phi^{RA}(E\omega\mathbf{q})-\phi^{RR}(E\omega\mathbf{q})\}, \tag{7}$$

где ввели для краткости обозначение [7]

$$\phi^{RA}(E\omega\mathbf{q})=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\langle G^R(\mathbf{p}_+\mathbf{p}_+'E+\omega)G^A(\mathbf{p}_-'\mathbf{p}_-E)\rangle, \tag{8}$$

где $\mathbf{p}_\pm=\mathbf{p}\pm\mathbf{q}/2$. Величины $\phi^{RR}(E\omega\mathbf{q})$ или $\phi^{AA}(E\omega\mathbf{q})$ определяются аналогично. Нетрудно видеть [7, 8], что при $\mathbf{q}\to 0$, $\omega\to 0$ величины ϕ^{RR} и ϕ^{AA} ведут себя регулярным образом. Ясно, что сингулярный вклад в (4), отвечающий появлению локализованных состояний, может возникнуть только из первого члена в (8). Нетрудно видеть, что

$$A_E(\mathbf{q})=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{N(E)}\delta\operatorname{Im}\phi^{RA}(E\omega+i\delta\mathbf{q})\,|_{\omega=0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi N(E)}\lim_{\delta\to 0}\delta\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\operatorname{Re}\langle G^R(\mathbf{p}_+\mathbf{p}_+'E+i\delta)G^A(\mathbf{p}_-'\mathbf{p}_-E-i\delta)\rangle, \tag{9}$$

или в координатном представлении

$$A_E(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{2\pi N(E)}\lim_{\delta\to 0}\delta\langle|G(\mathbf{r}\mathbf{r}'E+i\delta)|^2\rangle. \tag{10}$$

Полезно ввести величину

$$\mathring{A}_E=A_E(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}=\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}A_E(\mathbf{q})=$$

$$=\frac{1}{2\pi N(E)}\lim_{\delta\to 0}\delta\langle|G(\mathbf{r}\mathbf{r}'E+i\delta)|^2\rangle|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \tag{11}$$

пропорциональную усредненной вероятности возврата электрона к начальной точке координатного пространства за бесконечное время [9]. Отсюда видно, что общий критерий локализации Березинского — Горькова [6] эквивалентен усредненному критерию локализации Эконому — Коэна [9].

3. Локализация из уравнения Бете — Солпитера

Рассмотрим двухчастичную функцию Грина:

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega)=-\frac{1}{2\pi i}\langle G^R(\mathbf{p}_+\mathbf{p}_+{}'E+\omega)G^A(\mathbf{p}_-{}'\mathbf{p}_-E)\rangle. \tag{12}$$

Хорошо известно, что в рамках теории возмущений она определяется интегральным уравнением Бете — Солпитера [7, 8]

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega)=G^R(E+\omega\mathbf{p}_+)G^A(E\mathbf{p}_-)\left\{-\frac{1}{2\pi i}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mathbf{p}''}U^E_{\mathbf{p}\mathbf{p}''}(\mathbf{q}\omega)\Phi_{\mathbf{p}''\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega)\right\}, \tag{13}$$

где $G^{R,A}(E\mathbf{p})$ — полная усредненная запаздывающая (опережающая) одноэлектронная функция Грина, а неприводимая вершинная часть $U^E_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(\mathbf{q}\omega)$ определяется суммой всех графиков, неразрезаемых по двум линиям — опережающей и запаздывающей (см. рис. 1, где пунктирная

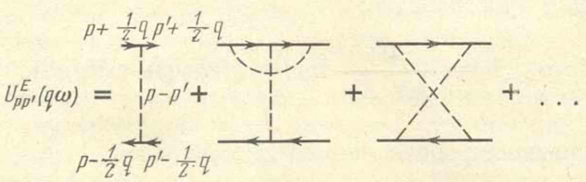


Рис. 1

линия обозначает «взаимодействие» ρV^2, где ρ — плотность примесей, V — фурье-образ потенциала отдельной примеси, который для простоты считается точечным).

Рассмотрим вопрос о том, может ли решение уравнения (13) привести к двухчастичной функции Грина, содержащей особенности, отвечающие локализации. Исходя из результатов предыдущего раздела, предположим, что в области энергий E, где в системе существуют локализованные состояния, $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega)$ имеет полюсный вид

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega)=-\frac{\psi_{\mathbf{p}}{}^{\mathbf{q}}(E)\psi_{\mathbf{p}'}{}^{-\mathbf{q}}(E)}{\omega+i\delta}+\tilde{\Phi}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega), \tag{14}$$

где $\tilde{\Phi}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(E\mathbf{q}\omega)$ — регулярная часть, а факторизация вычета в полюсе (в импульсном пространстве) предполагается по аналогии с задачей о связанном состоянии. Некоторое обоснование этого предположения дается ниже.

Из (8) и (13) сразу получаем

$$\phi^{RA}(E\mathbf{q}\omega)=-\frac{\chi_{\mathbf{q}}(E)\chi_{-\mathbf{q}}(E)}{\omega+i\delta}+\sum_{\mathbf{pp}'}\tilde{\phi}_{\mathbf{pp}'}(E\mathbf{q}\omega), \tag{15}$$

$$\chi_{\mathbf{q}}(E)=\sum_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}{}^{\mathbf{q}}(E). \tag{16}$$

Тогда из (9) следует

$$A_E(\mathbf{q})=\frac{1}{N(E)}\chi_{\mathbf{q}}(E)\chi_{-\mathbf{q}}(E). \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что $\chi_{\pm\mathbf{q}}(E)=\chi^{*}_{\mp q}(E)$. Из общего свойства $A_E(\mathbf{q}=0)=1$ [6] следует условие нормировки $\chi_0(E)=N^{1/2}(E)$. Для вероятности возврата A_E (11) получаем

$$A_E=\frac{1}{N(E)}\sum_{\mathbf{q}}\chi_{\mathbf{q}}(E)\chi_{-\mathbf{q}}(E). \tag{18}$$

Основным преимуществом формулируемого критерия локализации (14) является то обстоятельство, что при подстановке (14) в (13) полюсный член доминирует (при $\omega\to 0$) и мы получаем однородное уравнение Бете — Солпитера, определяющее $\psi_{\mathbf{p}}{}^{\mathbf{q}}(E)$:

$$\psi_{\mathbf{p}}{}^{\mathbf{q}}(E)=G^R(E\mathbf{p}_+)G^A(E\mathbf{p}_-)\sum_{\mathbf{p}'}U^E_{\mathbf{pp}'}(\mathbf{q}\omega=0)\psi_{\mathbf{p}'}{}^{\mathbf{q}}(E). \tag{19}$$

Представляется, что исследование такого уравнения существенно проще, нежели решение общего уравнения (13). Локализации отвечало бы возникновение нетривиального решения $\psi_{\mathbf{p}}{}^{\mathbf{q}}(E)\neq 0$ уравнения (19), которое оставалось бы отличным от нуля в целой области энергий $E\leqslant E_c$, где E_c — порог подвижности. Однако может оказаться (и ниже показывается, что это, по-видимому, так), что уравнение (19) дает лишь сам порог E_c и не описывает область $E<E_c$. Мы считаем поэтому, что уравнение (19) дает относительно простой метод нахождения порога устойчивости «нормальной» (металлической) фазы.

Очевидно, что анализ уравнения (19) в общем виде невозможен. После появления работ [10, 11] ясно, что по крайней мере в «квазиметаллической» области двумерных систем эффекты локализации связаны со вкладом «максимально перекрещивающихся» графиков для $U^E_{\mathbf{pp}'}(\mathbf{q}\omega)$ (рис. 2):

$$U^E_{\mathbf{pp}'}(\mathbf{q}\omega)=2\gamma(E)\rho V^2/(D_0{}^E(\mathbf{p}+\mathbf{p}')^2-i\omega), \tag{20}$$

где $D_0{}^E=E/md\gamma(E)$ — классический коэффициент диффузии, $\gamma(E)=\pi\rho V^2N(E)$.

Рис. 2

Тогда в металлической области уравнение (19) приобретает вид

$$\left[E-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{q}\right)^2+i\gamma(E)\right]\left[E-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{q}\right)^2-i\gamma(E)\right]\psi_{\mathbf{p}}{}^{\mathbf{q}}(E)=$$

$$=\lambda(E)\int\frac{d^d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\frac{\psi_{\mathbf{p}'}{}^{\mathbf{q}}(E)}{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')^2}, \tag{21}$$

где $\lambda(E)=2dm\gamma^2(E)\rho V^2/E$. После перехода к безразмерным переменным $\mathbf{p}\to\mathbf{p}/(2mE)^{1/2}$ представим уравнение (21) в симметризованном виде

$$\tilde{\psi}_{-\mathbf{p}}^{\mathbf{q}}(E)=\lambda_E\int d^d\mathbf{p}' K_{\mathbf{q}}^E(\mathbf{p},\mathbf{p}')\tilde{\psi}_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{q}}(E), \tag{22}$$

где

$$\tilde{\psi}_{-\mathbf{p}}^{\mathbf{q}}(E)=R_{\mathbf{q}}^{-1/2}(\mathbf{p})\psi_{-\mathbf{p}}^{\mathbf{q}}(E),$$
$$R_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})=[1-(\mathbf{p}-{}^1/{}_2\mathbf{q})^2+i\gamma/E]^{-1}[1-(\mathbf{p}+{}^1/{}_2\mathbf{q})^2-i\gamma/E]^{-1}, \tag{23}$$
$$\lambda_E=4(2\pi)^d m^2(2mE)^{d/2-3}\lambda(E),$$

причем

$$K_{\mathbf{q}}^E(\mathbf{p},\mathbf{p}')=R_{\mathbf{q}}^{1/2}(\mathbf{p})R_{\mathbf{q}}^{1/2}(-\mathbf{p}')\frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2} \tag{24}$$

— симметричное (эрмитово) ядро положительного типа [12], удовлетворяющее неравенству

$$|K_{\mathbf{q}}^E(\mathbf{p},\mathbf{p}')|<E^2/\gamma^2|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2. \tag{25}$$

Отсюда видно, что при $2<d<4$ рассматриваемое уравнение является интегральным уравнением с ядром со слабой особенностью [12] и заведомо обладает конечным (или счетным) спектром собственных значений, лежащим на отрезке вещественной оси, длина которого определяется нормой интегрального оператора. Из теоремы Ентча [12] следует, что первое собственное значение этого ядра является положительным и простым, а соответствующая собственная функция является всюду положительно определенной. Используя ограниченность интегрального оператора, нетрудно убедиться, что рассматриваемое уравнение не имеет нетривиальных решений при

$$\lambda_E<\left\{\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{d-2}\frac{E^2}{\gamma^2}\right\}^{-1}, \tag{26}$$

т. е. при

$$E>\left(\frac{A_d}{d-2}\right)^{2/(4-d)}E_{sc}, \tag{27}$$

где $A_d=2^{1-d/2}\pi^{-d/2}d/\Gamma(d/2)$ и введена характерная энергия

$$E_{sc}=m^{d/(4-d)}(\rho V^2)^{2/(4-d)}. \tag{28}$$

Отсюда видно, что для $d=3$ соответствующая пороговая энергия попадает в область «сильной связи» $E_{sc}=m^3(\rho V^2)^2$, где проведенный отбор диаграмм, вообще говоря, несправедлив [1, 13] и требуется учет всех диаграмм теории возмущений. При $d\to2$ область энергий, где решение отсутствует, «уходит» на бесконечность, что означает, что в этом случае порог подвижности $E_c\to\infty$. По нашему мнению, этот результат является достаточно строгим доказательством представлений о полной локализации при $d=2$ [10]. Вместе с тем нетрудно видеть, что неравенство (27) задает аналог «гинзбурговской критической области» [1, 13], в которой существенны высшие порядки теории возмущений. Поэтому при $d\to2$ простая теория возмущений становится неприменимой при любых энергиях.

4. Локализация и инстантоны

Ввиду того что для описания самой области локализованных состояний изложенный выше подход, основанный на однородном уравнении Бете — Солпитера, по-видимому, недостаточен, обратимся к альтернативному подходу, который позволяет получить двухчастичную функцию Грина вида (14) в целой области энергий. Известно [1, 14, 15], что явление локализации тесно связано с появлением (в соответствующей области энергий) нелинейных решений с конечным действием (инстантонов) классических уравнений эффективной теории поля, сопоставляемой задаче об электроне в случайном поле [1]. Рассмотрим подробнее вклад таких решений в двухчастичную функцию Грина.

Для расчета двухчастичной функции Грина электрона в случайном поле можно ввести [1] следующий эффективный лагранжиан:

$$\mathscr{L}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{2m}(\nabla\phi_j)^2 - (E+\omega+i\delta)\phi_j^2\right\} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{2m}(\nabla\varphi_i)^2 - (E-i\delta)\varphi_i^2\right\} - \frac{1}{8}\rho V^2\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_j^2\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\phi_j^2\varphi_i^2\right\}, \tag{29}$$

где в конце вычислений подразумевается предельный переход $n\to 0$, $m\to 0$. Используя качественный анализ классических полевых уравнений, следующих из этого лагранжиана [14, 15], можно убедиться, что при $E<0$, $E+\omega>0$ эти уравнения имеют сферически-симметричное инстантонное решение вида

$$\varphi_i^{cl}(\mathbf{r}) = \varphi_{cl}(r)e_i, \quad \phi_j^{cl}(\mathbf{r}) = 0, \tag{30}$$

$$\varphi_{cl}(r) = \left(\frac{2|E|}{\rho V^2}\right)^{1/2}\chi_{cl}(t), \quad r = (2m|E|)^{-1/2}t, \tag{31}$$

причем $\chi_{cl}(t)\sim t^{(1-d)/2}\exp(-t)$ при $t\gg 1$, $\chi_{cl}'(0)=0$. В (30) e_i — единичный (m-компонентный) изотопический вектор поля φ.

Рассматривая в соответствующем функциональном интеграле вклад, связанный с гауссовыми флуктуациями вокруг классического решения (30), получим

$$\langle G^R(\mathbf{r}\mathbf{r}'; E+\omega+i\delta)G^A(\mathbf{r}'\mathbf{r}; E-i\delta)\rangle \sim \exp\{-S[\varphi_{cl}]\}\cdot J_L^{d/2}[\varphi_{cl}]J_T^{(m-1)/2}[\varphi_{cl}]\int d^d\mathbf{R}_0\int d\mathbf{e}\varphi_{cl}(\mathbf{r}'-\mathbf{R}_0)\cdot \varphi_{cl}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)\int D\phi\int \widetilde{D}\varphi\,\phi_j(\mathbf{r})\phi_j(\mathbf{r}')\exp\{-S_0[\phi,\varphi]\}, \tag{32}$$

где $S[\varphi_{cl}]\sim m^{-d/2}|E|^{2-d/2}/\rho V^2$ — классическое действие на инстантоне,

$$\begin{aligned} J_L[\varphi_{cl}] &= \int d^d\mathbf{r}(\nabla\varphi_{cl})^2 \sim m^{2-d/2}|E|^{(4-d)/2}/\rho V^2, \\ J_T[\varphi_{cl}] &= \int d^d\mathbf{r}\varphi_{cl}^2(r) \sim m^{-d/2}|E|^{(2-d)/2}/\rho V^2 \end{aligned} \tag{33}$$

— якобианы перехода к интегрированию по коллективным переменным $\mathbf{R}_0$ (центр инстантона) и $\mathbf{e}$ (направление в изотопическом пространстве), $S_0[\phi,\varphi]$ — действие, описывающее гауссовы флуктуации вблизи инстантонного решения (φ обозначает теперь отклонение от φ_{cl})

$$S_0[\phi,\varphi] = \int d^d\mathbf{r}\{\mathscr{L}_0(\phi) + \mathscr{L}_0(\varphi)\}, \tag{34}$$

$$\mathscr{L}_0(\varphi) = \sum_{ij}\varphi_i(M_T+i\delta)(\delta_{ij}-e_ie_j)\varphi_j + \sum_{ij}\varphi_i(M_L+i\delta)e_ie_j\varphi_j, \tag{35}$$

$$\mathscr{L}_0(\phi) = \sum_{ij}\phi_i(M_T-\omega-i\delta)\delta_{ij}\phi_j, \tag{36}$$

где

$$M_L=-\frac{1}{2m}\nabla^2-E-\frac{3}{2}\rho V^2\varphi_{cl}^2,$$
$$M_T=-\frac{1}{2m}\nabla^2-E-\frac{1}{2}\rho V^2\varphi_{cl}^2. \tag{37}$$

Тильда над символом функционального интегрирования по φ означает исключение нулевых собственных значений операторов M_L и M_T («нулевых мод»), учитываемых интегрированием по коллективным переменным $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{e}$.

Вводя собственные функции и собственные значения

$$M_L\Psi_k^L=\lambda_k^L\Psi_k^L,\qquad M_T\Psi_k^T=\lambda_k^T\Psi_k^T, \tag{38}$$

легко получаем

$$\int D\phi\,\phi_j(\mathbf{r})\,\phi_j(\mathbf{r}')\exp\{-S_0[\phi,\varphi]\}\sim$$
$$\sim\sum_k\frac{\Psi_k^T(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)\,\Psi_k^T(\mathbf{r}'-\mathbf{R}_0)}{(\lambda_k^T-\omega-i\delta)^{1+n/2}}\xrightarrow[n\to 0]{}\frac{\Psi_0^T(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)\,\Psi_0^T(\mathbf{r}'-\mathbf{R}_0)}{\omega+i\delta}+\sum_{k\neq 0}\ldots, \tag{39}$$

где нормированная собственная функция низшего уровня оператора M_T ($\lambda_0^T=0$ — «ротационная» нулевая мода [14, 15]) имеет вид

$$\Psi_0^T(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)=J_T^{-1/2}[\varphi_{cl}]\varphi_{cl}(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0). \tag{40}$$

В результате получаем сингулярный вклад в двухчастичную функцию Грина:

$$\langle G^R(\mathbf{r}\mathbf{r}';E+\omega+i\delta)\,G^A(\mathbf{r}'\mathbf{r};E-i\delta)\rangle\sim\frac{i}{\omega+i\delta}\exp\{-S[\varphi_{cl}]\}J_L^{d/2}[\varphi_{cl}]\cdot$$
$$\cdot J_T^{1/2}[\varphi_{cl}]\,(|\mathrm{Det}'\,M_L|)^{-1/2}(\mathrm{Det}'\,M_T)^{1/2}\int d^d\mathbf{R}_0\varphi_{cl}^2(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)\,\varphi_{cl}^2(\mathbf{r}'-\mathbf{R}_0). \tag{41}$$

Здесь $\mathrm{Det}'\,M_L$ и $\mathrm{Det}'\,M_T$ не содержат вклад нулевых собственных значений операторов M_L и M_T. Выражение, эквивалентное (41), впервые было приведено (для $\omega=0$) в работе Карди [14]. Учитывая конспективный характер этой работы, мы решили привести достаточно подробные вычисления. Отметим, что сингулярный вклад оказывается связанным с существованием «нулевой» ротационной моды, т. е. фактически с симметрией системы. Поэтому можно надеяться, что этот вклад не исчезнет и при учете поправок к гауссову приближению.

Учитывая теперь явный вид плотности состояний, который в рассматриваемой области энергий определяется аналогичным инстантонным вкладом [14, 15], из (10), (11) и (41) сразу получаем

$$A_E(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\sim\int d^d\mathbf{R}_0\varphi_{cl}^2(\mathbf{r}-\mathbf{R}_0)\,\varphi_{cl}^2(\mathbf{r}'-\mathbf{R}_0)\left[\int d^d\mathbf{r}\varphi_{cl}^2(\mathbf{r})\right]^{-1}, \tag{42}$$

что справедливо с точностью до безразмерной константы. Для вероятности возврата отсюда находим: $A_E\sim|E|^{d/2}$.

Переходя к импульсному представлению с помощью

$$\chi_\mathbf{q}=\int d^d\mathbf{r}e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\varphi_{cl}^2(\mathbf{r}), \tag{43}$$

получим

$$A_E(\mathbf{q})\sim\tilde{\chi}_\mathbf{q}\tilde{\chi}_{-\mathbf{q}}, \tag{44}$$

что воспроизводит (17). Вводя фурье-образ инстантона

$$\varphi_{\mathbf{q}}^{cl}=\int d^d\mathbf{r}e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\varphi_{cl}(\mathbf{r}), \tag{45}$$

видим, что

$$\tilde{\chi}_{\mathbf{q}}=\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\varphi_{\mathbf{p}}^{cl}\varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^{cl}, \tag{46}$$

и, сравнивая с (16), получаем

$$\psi_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}}(E)\sim\varphi_{\mathbf{p}}^{cl}(E)\varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^{cl}(E). \tag{47}$$

Таким образом, проведенное рассмотрение фактически является оправданием в рамках инстантонного подхода предположенного выше в (14) вида сингулярного вклада в двухчастичную функцию Грина, отвечающего локализации. При этом вычет в полюсе выражается через инстантоны. Область применимости инстантонного подхода грубо определяется условием $S[\varphi_{cl}]\gg1$ [1, 14, 15], что приводит к требованию $|E|\gg E_{sc}$, где E_{sc} определена в (28) (необходимые уточнения приведены ниже).

5. Формализм эффективного действия

Возникает вопрос о соотношении обсуждавшихся выше двух подходов к нахождению сингулярной части двухчастичной функции Грина. Ниже показывается, что оба способа описания естественным образом возникают как проявления разных, вообще говоря, неустойчивостей системы в рамках формализма эффективного действия для составных полей [16]. Для рассматриваемой системы полей ϕ и φ эффективное действие представляет собой [16] функционал Γ от «классических» (средних) значений полей ϕ_{cl} и φ_{cl} и соответствующих функций Грина, удовлетворяющий вариационному принципу:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}(\mathbf{r})}=0,\quad\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_{cl}(\mathbf{r})}=0,\quad\frac{\delta\Gamma}{\delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}=0. \tag{48}$$

Удобно использовать матричные обозначения

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\end{pmatrix},\quad\Phi^+=(\phi\varphi), \tag{49}$$

$$\hat{G}=\begin{bmatrix}G_{\phi\phi} & G_{\phi\varphi}\\ G_{\varphi\phi} & G_{\varphi\varphi}\end{bmatrix},\quad G_{\phi\varphi}=G_{\varphi\phi}. \tag{50}$$

Лагранжиан (29) переписывается в компактном виде:

$$\mathscr{L}(\mathbf{r})={}^1/_2\,\mathrm{Sp}\int d^d\mathbf{r}'\Phi^+\hat{G}_0^{-1}\Phi-{}^1/_8\rho V^2(\mathrm{Sp}\,\Phi^+\Phi)^2, \tag{51}$$

$$\hat{G}_0^{-1}(\mathbf{r}\mathbf{r}')=\begin{bmatrix}\left\{-\frac{1}{2m}\nabla^2-(E+\omega+i\delta)\right\}\delta_{ij} & 0\\ 0 & \left\{-\frac{1}{2m}\nabla^2-(E-i\delta)\right\}\delta_{ij}\end{bmatrix}\times$$
$$\times\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{52}$$

Согласно [16] с очевидными обобщениями на случай двух полей, имеем

$$\Gamma(\Phi_{cl},\hat{G})=S(\Phi_{cl})-{}^1/_2\mathrm{Tr}\ln\hat{G}^{-1}-{}^1/_2\mathrm{Tr}\,\{\hat{G}^{-1}\hat{G}-1\}+\mathscr{F}(\Phi_{cl},\hat{G}), \tag{53}$$

где Tr и ln понимаются в функциональном смысле [16], т. е. в частности Tr включает все необходимые интегрирования, а $\ln\hat{G}=\ln\mathrm{Det}\,\hat{G}$, $\hat{G}^{-1}$ —

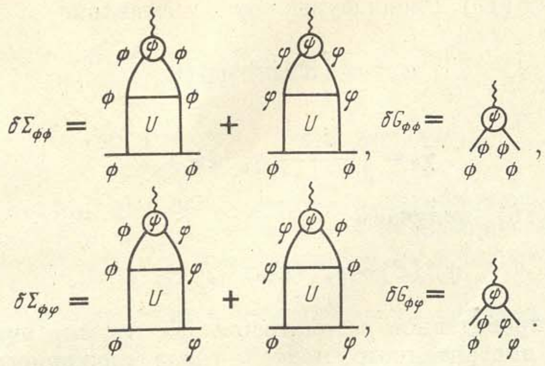


Рис. 3

обратная матрица функции Грина в классическом поле:

$$\hat{G}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{54}$$

где

$$a=\left\{-\frac{1}{2m}\nabla^2-(E+\omega+i\delta)-\frac{1}{2}\rho V^2(\phi_{cl}{}^2+\varphi_{cl}{}^2)\right\}\delta_{ij}-\rho V^2\phi_{cl_i}\phi_{cl_j},$$

$$b=-\rho V^2\phi_{cl_j}\varphi_{cl\,i},\quad c=-\rho V^2\varphi_{cl\,i}\phi_{cl_j},$$

$$d=\left\{-\frac{1}{2m}\nabla^2-(E-i\delta)-\frac{1}{2}\rho V^2(\phi_{cl}{}^2+\varphi_{cl}{}^2)\right\}\delta_{ij}-\rho V^2\varphi_{cl_i}\varphi_{cl_j};$$

$$\phi_{cl}{}^2=\sum_{j=1}^{n}\phi_{cl\,j}^2,\quad \varphi_{cl}{}^2=\sum_{i=1}^{m}\varphi_{cl_i}^2.$$

Функционал $\mathcal{F}(\Phi_{cl},\hat{G})$ удовлетворяет условиям

$$\delta\mathcal{F}/\delta\hat{G}={}^1/_2\hat{\Sigma} \tag{55}$$

так, что уравнение

$$\delta\Gamma/\delta\hat{G}={}^1/_2\hat{G}^{-1}-{}^1/_2\tilde{G}^{-1}+{}^1/_2\hat{\Sigma}=0 \tag{56}$$

есть просто уравнение Дайсона, причем матрица $\hat{\Sigma}$ состоит из неприводимых собственно-энергетических частей с одетыми внутренними линиями. Формальную схему расчета $\mathcal{F}(\Phi_{cl},\hat{G})$ нетрудно получить соответствующим обобщением рецепта работы [16].

Рассмотрим сначала «нормальную» фазу, в которой $\phi_{cl}=\varphi_{cl}=0$ и отличны от нуля только функции Грина $G_{\phi\phi}$ и $G_{\varphi\varphi}$. Тогда (53) упрощается

$$\Gamma(\hat{G})=\mathcal{F}(\hat{G})-{}^1/_2\mathrm{Tr}\ln\hat{G}^{-1}-{}^1/_2\mathrm{Tr}\,\{\hat{G}_0{}^{-1}\hat{G}-1\}. \tag{57}$$

Матрица (54) сводится к (52). Устойчивая система должна удовлетворять условию $\delta^2\Gamma>0$ при любых вариациях Φ_{cl} и $\hat{G}$. Рассмотрим устойчивость относительно произвольных вариаций функций Грина в «нормальной» фазе. На рис. 3 графически показаны примеры вариации собственно-энергетических частей при варьировании функций Грина. Отсюда нетрудно, в частности, найти

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta G_{\phi\varphi}\delta G_{\phi\varphi}}=\frac{1}{2}\frac{\delta G_{\phi\varphi}{}^{-1}}{\delta G_{\phi\varphi}}+\frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma_{\phi\varphi}}{\delta G_{\phi\varphi}}=-\frac{1}{2}G_{\phi\phi}{}^{-1}G_{\varphi\varphi}{}^{-1}+\frac{1}{2}U_{\phi\varphi\phi\varphi} \tag{58}$$

и т. д., где $U_{\phi\varphi\phi\varphi}$ — неприводимая в соответствующем двухчастичном канале вершинная часть. Для нас интересен вопрос об устойчивости системы относительно вариации $\delta G_{\phi\varphi}$. В устойчивой системе

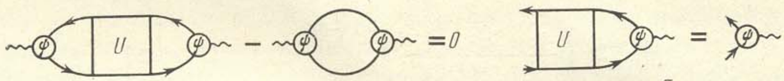
$$\mathrm{Tr}\,\delta G_{\phi\varphi}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta G_{\phi\varphi}\delta G_{\varphi\phi}}\delta G_{\phi\varphi}\geqslant 0. \tag{59}$$

Используя $\delta G_{\phi\varphi}=G_{\phi\phi}\psi_{\phi\varphi}G_{\varphi\varphi}$ (см. рис. 3) в (59), с помощью (58) получаем, что порог устойчивости «нормальной» фазы определяется условием

$$\mathrm{Tr}\, G_{\varphi\varphi}\psi_{\varphi\phi}G_{\phi\phi}U_{\phi\varphi\varphi\phi}G_{\phi\phi}\psi_{\phi\varphi}G_{\varphi\varphi}-\mathrm{Tr}\, G_{\varphi\varphi}\psi_{\varphi\phi}\psi_{\phi\varphi}G_{\phi\phi}=0, \tag{60}$$

графически представленным на рис. 4, *а*. Достаточно очевидно, что при появлении нетривиального решения однородного уравнения Бете — Солпитера (19) устойчивость системы нарушается (рис. 4, *б*).

Проведенный анализ показывает, что появление нетривиального решения уравнения (19) дает в общем случае порог устойчивости «нормаль-



а *б*

Рис. 4

ной» фазы, причем речь идет об устойчивости относительно вариаций $\delta G_{\phi\varphi}$. Разложение функционала $\Gamma(G)$ (57) по степеням $\delta G_{\phi\varphi}\sim\psi_{\phi\varphi}$ дает в принципе способ рассмотрения соответствующей «конденсированной» фазы, причем $\psi_{\phi\varphi}$ при этом играет роль параметра порядка.

Первые два уравнения (48) являются фактически обобщением классических полевых уравнений, следующих из лагранжиана (29), (51). Для нас важен случай, когда они приобретают нетривиальные решения типа (30). Тогда матрица (54) сводится к

$$\tilde G^{-1}(\mathbf{r}\mathbf{r}')=\begin{bmatrix}(M_T-\omega-i\delta)\,\delta_{ij} & 0\\ 0 & (M_L+i\delta)\,e_ie_j+(M_T+i\delta)\,(\delta_{ij}-e_ie_j)\end{bmatrix}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{61}$$

а простейшее приближение для $\Gamma(\Phi_{cl},\tilde G)$ сводится к пренебрежению в (53) вкладом $\mathcal{F}(\Phi_{cl},\tilde G)$. Тогда (53) дает

$$\Gamma(\varphi_{cl})=S(\varphi_{cl})-{}^1/_2\,\mathrm{Tr}\ln\tilde G_{\phi\phi}{}^{-1}-{}^1/_2\,\mathrm{Tr}\ln\tilde G_{\varphi\varphi}{}^{-1}=S(\varphi_{cl})+\Gamma_1(\varphi_{cl}), \tag{62}$$

а уравнение $\delta\Gamma/\delta\varphi_{cl}=0$ сводится к

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\varphi_{cl}-E\varphi_{cl}-\frac12\rho V^2\varphi_{cl}{}^3+\frac{\delta\Gamma_1(\varphi_{cl})}{\delta\varphi_{cl}}=0, \tag{63}$$

представляющему собой обобщенное уравнение на инстантон, приводящее к решению (30). Здесь $\Gamma_1(\varphi_{cl})$ представляет собой результат суммирования однопетлевых поправок к классическому действию. Рассматривая в нем член первого порядка по $\rho V^2\varphi_{cl}{}^2$, получаем

$$\Gamma_1^{(1)}(\varphi_{cl})=-\frac12\rho V^2\int d^d\mathbf{r}\varphi_{cl}{}^2(\mathbf{r})\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mathbf{p}^2/2m-E}=$$

$$=-\frac12\delta E\int d^d\mathbf{r}\varphi_{cl}{}^2(\mathbf{r}), \tag{64}$$

где δE дает однопетлевую перенормировку «массы» в исходном лагранжиане. Понимая под E уже перенормированную «массу», будем считать, что «критической точке» отвечает $E\to 0$, так что в терминах «затравочной массы»

$$E_0=E-\delta E\underset{E\to 0}{\longrightarrow}E_{0c}=-\rho V^2\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mathbf{p}^2/2m}=-\rho V^2 2mS_d\frac{p_0^{d-2}}{d-2}, \tag{65}$$

что определяет сдвинутый (в однопетлевом приближении) край зоны. Здесь p_0 — импульс обрезания, $S_d=2^{-(d-1)}\pi^{-d/2}/\Gamma(d/2)$. Наше определение сдвинутого края зоны отличается от принятого в работе [17]. Для E получаем уравнение

$$E=E_0+\delta E=E_0-E_{0c}-\rho V^2\left[\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mathbf{p}^2/2m-E}-\int\frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mathbf{p}^2/2m}\right]=$$

$$=E-E_{0c}+\rho V^2\pi m S_d(-2mE)^{d/2-1}\left\{\sin\pi\left(\frac{d}{2}-1\right)\right\}^{-1},\quad 2<d<4. \tag{66}$$

«Критерий Гинзбурга» следует [18] из требования справедливости простейшей формулы $E\approx E_0-E_{0c}$, означающей равенство перенормированной «массы» энергии электрона, отсчитанной от сдвинутого края зоны. Именно таков смысл переменной E всюду в этой работе и в работах [1, 14, 15]. Очевидно, что это равенство выполняется при

$$|E|\gg\left(\frac{B_d}{|\sin(\pi d/2)|}\right)^{2/(4-d)}E_{sc},\quad 2<d<4, \tag{67}$$

где $B_d=2^{-d/2}\pi^{1-d/2}/\Gamma(d/2)$, а E_{sc} определена в (28). Это неравенство, определяющее условие применимости нашего приближения, эквивалентно, в частности, полученному выше неравенству (27). В области отрицательных энергий оно ограничивает область, за пределами которой справедлив инстантонный подход.

Таким образом, из формализма эффективного действия естественным образом вытекает как неустойчивость «нормальной» (металлической) фазы, связанная с появлением нетривиального решения однородного уравнения Бете — Солпитера (19), так и неустойчивость этой фазы, связанная с появлением инстантонных решений. В рамках использованных приближений эти две неустойчивости остаются независимыми, что в принципе может указывать на существование двух типов локализации электронов. Вместе с тем ясно, что полное решение вопроса о соотношении двух неустойчивостей требует выхода за рамки использованных приближений и реального проникновения в область «сильной связи». Формализм эффективного действия дает, по крайней мере в принципе, удобный аппарат для совместного рассмотрения этих неустойчивостей.

Литература

1. *Садовский М. В.* УФН, 1981, 133, 223.
2. *Ефетов К. Б., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* ЖЭТФ, 1980, 79, 1120.
3. *McKane A. J., Stone M.* Ann. Phys., 1981, 131, 36.
4. *Parisi G.* J. Phys., 1981, **A14**, 735.
5. *Harris A. B., Lubensky T. C.* Phys. Rev., 1981, **B23**, 2640.
6. *Березинский В. Л., Горьков Л. П.* ЖЭТФ, 1979, 77, 2498.
7. *Vollhardt D., Wölfle P.* Phys. Rev., 1980, **B22**, 4666.
8. *Малеев С. В., Топерверг Б. П.* ЖЭТФ, 1975, 69, 1140.
9. *Economou E. N., Cohen M. H.* Phys. Rev., 1972, **B5**, 2931.
10. *Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.* Phys. Rev. Lett., 1979, 42, 673.
11. *Горьков Л. П., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, 248.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
13. *Садовский М. В.* ФТТ, 1977, 19, 2334.
14. *Cardy J. L.* J. Phys., 1978, **C11**, L321.
15. *Садовский М. В.* ФТТ, 1979, 21, 743.
16. *Cornwall J. M., Jackiw R., Tomboulis E.* Phys. Rev., 1974, **D10**, 2428.
17. *Brezin E., Parisi G.* J. Phys., 1980, **C13**, L307.
18. *Amit D. J.* J. Phys., 1974, **C7**, 3369.

Институт физики металлов УНЦ
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2.IV.1982