

НЕОДНОРОДНАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ МЕТАЛЛАХ

Л. Н. Булаевский, С. В. Панюков, М. В. Садовский

Для характеристики влияния беспорядка на сверхпроводимость введен параметр τ_D , определяющий температурную область вблизи T_c , в которой сильны статистические пространственные флуктуации параметра порядка. На основе функционала Гинзбурга — Ландау с помощью метода реплик показано, что в зависимости от степени беспорядка реализуется два типа температурного поведения сверхпроводимости. При $\tau_D > \tau_D^* = 2,49\tau_G$, где τ_G — параметр Гинзбурга, характеризующий размер области сильных термодинамических флуктуаций, сверхпроводимость появляется пространственно неоднородным образом в виде зародышей — капель. В модели невзаимодействующих капель найдены их концентрация, вклад в свободную энергию и диамагнитную восприимчивость. При $\tau_D < \tau_D^*$ сверхпроводимость появляется ниже T_c сразу во всем объеме, т. е. реализуется обычный переход второго рода.

Введение

Теория грязных сверхпроводников, созданная Абрикосовым и Горьковым [1, 2] и Андерсоном [3], представляет собой основу количественного описания сверхпроводящих свойств большого числа неупорядоченных сплавов. Однако с развитием теории сильно неупорядоченных систем стало ясно, что основные результаты работ [1—3] должны быть модифицированы для значений длины свободного пробега l порядка обратного фермиевского волнового числа k_F^{-1} (порядка межатомного расстояния). В трехмерных системах рост беспорядка приводит к тому, что для длин пробега l , меньших некоторого критического значения $l_c \approx k_F^{-1}$, диффузия электронов прекращается, электронные состояния вблизи уровня Ферми становятся локализованными и система переходит в состояние андерсоновского диэлектрика [4, 5]. Такой переход металл — диэлектрик проявляется в непрерывном обращении в нуль металлической проводимости (при $T=0$) при $l \rightarrow l_c$. Для $l \gg l_c$ проводимость определяется стандартной формулой Друде и $\sigma \sim l$, тогда как при $l \gtrsim l_c$ она уменьшается согласно зависимости $\sigma \sim (l - l_c)^\nu$, где ν — некоторый критический индекс. Переход от диффузии к локализации происходит при значениях проводимости σ порядка так называемой минимальной металлической проводимости $\sigma_c \approx (e^2 k_F / \pi^3 \hbar) \approx (2-5) \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Теория грязных сверхпроводников не учитывает эффекты локализации и справедлива для значений проводимости в интервале $(E_F/T_c)\sigma_c \gg \sigma \gg \sigma_c$.

К настоящему времени установлены следующие результаты для поведения сверхпроводников вблизи порога локализации.

1. Предполагая независимость плотности состояний на уровне Ферми $N(E_F)$ и безразмерного параметра электрон-фононного взаимодействия $\lambda_{e, ph}$ от величины l , можно показать, что величина T_c уменьшается с падением l из-за соответствующего роста кулоновского псевдопотенциала μ^* . Этот эффект связан с ростом эффектов запаздывания кулоновского отталкивания в куперовской паре по мере падения коэффициента диффузии при подходе к переходу Андерсона. Падение температуры сверхпроводящего перехода T_c начинается в области $\sigma \gg \sigma_c$ и становится быстрым при $\sigma \lesssim \sigma_c$ [6—8]. Белитц [9] рассчитал уменьшение T_c из-за уменьшения эффективной плотности электронных состояний на уровне Ферми под влия-

нием кулоновского отталкивания в присутствии примесей (эффект Альтшулера — Аронова). Усиление спиновых флуктуаций с ростом беспорядка и появление локализованных магнитных моментов вблизи порога локализации благодаря отталкиванию электронов [10] также могут быть причиной падения T_c в ультрагрязных сверхпроводниках [11, 12], но пока последовательная количественная теория этого эффекта отсутствует. Отметим, что падение T_c из-за взаимного влияния беспорядка и кулоновских эффектов было впервые рассмотрено в рамках модели БКШ с учетом низших локализационных поправок в работах Овчинникова [13] и Маекавы и Фукуямы (см. [4, 13]).

2. Булаевский и Садовский [7] и позднее Капитульник и Котляр [14] нашли сверхпроводящую длину когерентности ξ (при $T=0$) в области $\sigma \leq \sigma_c$, а также в области локализации ($l < l_c$) [7]. На самом пороге подвижности, где $l = l_c \approx k_F^{-1}$ и $\sigma = 0$, величина

$$\xi \approx (\xi_0 k_F^{-2})^{1/2}, \quad \xi_0 = 0,18 \hbar v_F / T_c.$$

В отличие от стандартной теории грязных сверхпроводников с $l \gg l_c$ [1, 2], в которой $\xi^2 \approx \xi_0 l$ пропорциональна σ , при $l \rightarrow l_c$ имеем $\sigma \rightarrow 0$, когда как ξ^2 остается отличной от нуля как на пороге подвижности ($l = l_c$), так и в области локализации ($l < l_c$), т. е. в андерсоновском диэлектрике. Этот же результат был получен несколько иным методом в недавней работе Ма и Ли [15]. Очевидно, что эти результаты справедливы лишь в том случае, когда T_c не обращается в нуль вплоть до перехода Андерсона, что возможно лишь при выполнении достаточно жестких условий из-за эффектов, отмеченных в п. 1. Отличие ξ^2 от нуля при обращении σ в нуль для $l \leq l_c$ означает сохранение сверхпроводящего отклика в фазе андерсоновского диэлектрика.

3. С увеличением беспорядка расширяется область термодинамических флуктуаций вблизи T_c . Ширина этой области определяется как $\tau_G T_c$, где характерный параметр Гинзбурга для грязных сверхпроводников равен $\tau_G = [\pi^2 T_c N(E_F) \xi^3]^{-2}$. Капитульник и Котляр [14] заметили, что вблизи порога подвижности, где $\xi \approx (\xi_0 k_F^{-2})^{1/2}$, параметр τ_G не содержит малого буквенного параметра типа T_c/E_F (не исключено, конечно, что величина τ_G остается малой из-за численного фактора). Поэтому сверхпроводящий переход в окрестности порога локализации в принципе мог бы стать аналогичным λ -переходу в He⁴. Учет флуктуаций фактически привел бы к изменению критических индексов в температурной зависимости термодинамических величин вблизи T_c по сравнению с соответствующими индексами теории молекулярного поля.

Все упомянутые выше теоретические работы, анализирующие влияние беспорядка на сверхпроводимость, выполнены в предположении о самоусредняемости сверхпроводящего параметра порядка. Это замечание относится как к классическим работам по грязным сверхпроводникам [1—3], так и ко всем недавним работам по сверхпроводимости вблизи и в состоянии андерсоновской локализации [6—15]. При этом предполагается, что пространственные флуктуации сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ малы и использование усредненного по беспорядку параметра $\langle \Delta(\mathbf{r}) \rangle$ оправдано. Кажется естественным, что такая процедура справедлива при $\sigma \gg \sigma_c$, однако нет оснований верить в ее корректность вблизи порога локализации¹⁾. В такой системе электронные характеристики флуктуируют сильно и ниже в разд. I мы покажем, что эти флуктуации действительно приводят к существенным пространственным флуктуациям параметра $\Delta(\mathbf{r})$ (краткое изложение этого раздела дано в [17]).

В разд. II рассмотрены сверхпроводники с флуктуирующей в пространстве локальной «температурой» сверхпроводящего перехода. Мы покажем, что если амплитуда таких статистических флуктуаций превышает крити-

¹⁾ Вопрос о величине статистических флуктуаций в грязных сверхпроводниках был поставлен впервые в работе [16].

ческое значение, сверхпроводимость при понижении температуры появляется пространственно неоднородным образом в виде сверхпроводящих капель. Мы найдем концентрацию этих капель в зависимости от температуры. В модели невзаимодействующих капель будет получен также их вклад в свободную энергию системы и диамагнитную восприимчивость.

I. Оценка области сильных статистических флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка

В качестве отправной точки рассмотрим обычный гамильтониан БКШ

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_M, \quad \mathcal{H}_M = \int d\mathbf{r} B^2(\mathbf{r})/8\pi, \\ \mathcal{H}_0 &= \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{2m} \left(i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}), \\ \mathcal{H}_{int} &= \frac{1}{N(E_F)} \int d\mathbf{r} \lambda_{e,ph}(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и $U(\mathbf{r})$ — случайный потенциал в неупорядоченной системе. Величина спаривательного взаимодействия также может испытывать пространственные флуктуации, и далее мы предположим, что оно является слабым, $\lambda_{e,ph}(\mathbf{r}) \ll 1$.

Запишем функционал Гинзбурга — Ландау для неусредненного параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$. Для этого введем точные собственные значения энергии ϵ_μ и точные собственные функции $\varphi_\mu(\mathbf{r})$ электронов, соответствующие гамильтониану \mathcal{H}_0 . С их помощью получаем сверхпроводящий функционал в виде [18]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\{\mathbf{A}(\mathbf{r}), \Delta(\mathbf{r})\} &= \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{B^2(\mathbf{r})}{8\pi} + N(E_F) \int d\mathbf{r}' \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left[\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lambda_{e,ph}(\mathbf{r})} - K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \Delta(\mathbf{r}) \Delta^*(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \lambda N(E_F) |\Delta(\mathbf{r})|^4 \right\}, \\ K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{T}{N(E_F)} \sum_{\epsilon_n, \mu, \nu} \frac{\varphi_\mu^*(\mathbf{r}) \varphi_\mu(\mathbf{r}') \varphi_\nu^*(\mathbf{r}) \varphi_\nu(\mathbf{r}')}{(i\epsilon_n - \epsilon_\mu)(-i\epsilon_n - \epsilon_\nu)}, \\ \epsilon_n &= \pi T(2n+1), \quad \lambda = 7\zeta(3)/8\pi^2 T^2. \end{aligned} \quad (2)$$

*Статистические флуктуации $\lambda_{e,ph}(\mathbf{r})$ и ядра $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (из-за случайного характера величин $\varphi_\nu(\mathbf{r})$ и ϵ_ν) вызывают пространственные флуктуации сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$. В (2) мы пренебрегли флуктуациями параметра λ ; как видно из дальнейшего анализа, они менее существенны, чем флуктуации ядра $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Считая флуктуации ядра $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и параметра $\Delta(\mathbf{r})$ малыми, мы оценим область температур, где это предположение оказывается неверным и где описание с помощью усредненного параметра порядка неадекватно. Ниже мы увидим, что дисперсия определяется в основном длинноволновыми изменениями $\Delta(\mathbf{r})$. Поэтому можно перейти от (2) к функционалу ГЛ для параметра порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{GL}\{\mathbf{A}(\mathbf{r}), \Delta(\mathbf{r})\} &= \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{B^2(\mathbf{r})}{8\pi} + N(E_F) \left[(\tau + t(\mathbf{r})) |\Delta(\mathbf{r})|^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \xi^2 \left| \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \Delta(\mathbf{r}) \right|^2 + \frac{1}{2} \lambda |\Delta(\mathbf{r})|^4 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\xi^2 = \frac{1}{6} \int K_0(r) r^2 dr, \quad K_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle, \quad \tau = \frac{T}{T_{c0}} - 1, \quad (3b)$$

где T_{c_0} — температура перехода, определяемая усредненным ядром $K_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ с учетом вклада коротковолновых флуктуаций ядра $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. При выводе (3) мы пренебрегли флуктуациями коэффициента ξ^2 . Функция $t(\mathbf{r})$ играет роль флуктуирующей локальной критической «температуры». Она учитывает флуктуации спаривательного взаимодействия, для которых $t(\mathbf{r}) = \lambda_{e,ph}^{-1}(\mathbf{r}) - \langle \lambda_{e,ph}^{-1}(\mathbf{r}) \rangle$, а также флуктуации локальной плотности электронных состояний $N(\mathbf{r}, E_F)$:

$$t(\mathbf{r}) = \int_0^{\omega_D} \frac{dE}{E} \operatorname{th} \frac{E}{2T_{c_0}} \left[\frac{N(\mathbf{r}, E)}{N(E_F)} - 1 \right], \quad (4)$$

$$N(\mathbf{r}, E) = \sum_{\nu} |\varphi_{\nu}(\mathbf{r})|^2 \delta(E - \varepsilon_{\nu}), \quad N(E_F) = \langle N(\mathbf{r}, E_F) \rangle.$$

Функционал (3) для флуктуаций спаривательного взаимодействия исследовался Ларкиным и Овчинниковым [19] в связи с изучением влияния структурных неоднородностей образцов на их сверхпроводящие свойства, и дальнейший анализ проводится аналогично. В рамках теории возмущений по флуктуациям $\Delta(\mathbf{r})$ находим из (3) перенормированную температуру T_c и дисперсию $\Delta(\mathbf{r})$:

$$\frac{T_c - T_{c_0}}{T_{c_0}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\gamma(\mathbf{q}) d\mathbf{q}}{\xi^2 q^2}, \quad \gamma(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \langle t(\mathbf{r}) t(0) \rangle, \quad (5a)$$

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle - \langle \Delta \rangle^2}{\langle \Delta \rangle^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\gamma(\mathbf{q}) d\mathbf{q}}{(\xi^2 q^2 + 2|\tau|)^2}. \quad (5b)$$

Из (5a) следует, что флуктуационный сдвиг T_c положителен и вклад в него коротковолновых флуктуаций, вообще говоря, не мал. Согласно (5b), флуктуации $\Delta(\mathbf{r})$ определяются в основном поведением корреляционной функции $\gamma(\mathbf{q})$ при малых q .

В пренебрежении флуктуациями спаривательного взаимодействия $\gamma(\mathbf{q})$ была найдена в работе [17]. В грязных сверхпроводниках с $\sigma \gg \sigma_c$ (т. е. $l \gg k_F^{-1}$) величина $\gamma(0) \approx \xi N^{-2}(E_F) D_0^{-2}$, где $D_0 = v_F l / 3$ есть классический коэффициент диффузии. Из (5) тогда получаем

$$\langle \Delta^2 \rangle / \langle \Delta \rangle^2 - 1 \approx (\tau_D / \tau)^{1/2}, \quad \tau_D = \gamma^2(0) \xi^{-6}, \quad (6)$$

где $\xi \approx (\xi_0 l)^{1/2}$. Параметр τ_D , введенный нами, определяет область, где существенны статистические (пространственные) флуктуации параметра порядка²⁾. Из (6) видно, что в грязных сверхпроводниках $\tau_D \approx \tau_G^2 \ll \tau_G \ll 1$, т. е. статистические флуктуации несущественны даже в области, где достаточно заметны термодинамические флуктуации.

Ситуация совершенно меняется в окрестности порога подвижности, где³⁾ $\gamma(\mathbf{q}) \approx \xi^3 \ln(1/\xi q)$. Из (5) для дисперсии $\Delta(\mathbf{r})$ находится выражение

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\langle \Delta \rangle^2} - 1 \approx \frac{1}{(|\tau|)^{1/2}} \ln \frac{1}{|\tau|}. \quad (7)$$

Согласно (7), вблизи порога подвижности статистические флуктуации оказываются крайне существенными, здесь они сильнее, чем термодина-

²⁾ Параметр $\tau_G^{-1/2} \approx T_c N(E_F) \xi^3 = \langle \mathcal{N} \rangle$, где \mathcal{N} — число уровней в системе на энергетическом интервале T_c в объеме ξ^3 . Условие узости флуктуационной области есть $\langle \mathcal{N} \rangle \gg 1$. Параметр $\tau_D^{1/2} \approx \langle (\mathcal{N} - \langle \mathcal{N} \rangle)^2 \rangle / \langle \mathcal{N} \rangle^2$, и он определяет флуктуации относительного числа уровней.

³⁾ При получении этого результата использована скейлинговая зависимость корреляционной функции $\langle N(\mathbf{r}, E_F + \omega) N(0, E_F) \rangle$ вблизи порога подвижности [20].

мические флуктуации из-за логарифмического фактора в $\gamma(\mathbf{q})$. Таким образом, вблизи порога локализации $\tau_D \gg \tau_G \approx 1$. Переход от режима слабых статистических флуктуаций ($\tau_D \ll \tau_G$) к режиму сильных флуктуаций ($\tau_D \gg \tau_G$) происходит при значениях проводимости $\sigma \approx \sigma^* \approx \sigma_c (k_F \xi_0)^{-1/2}$, физический смысл которой обсуждался в [7]. При этой проводимости происходит переход от обычной теории грязных сверхпроводников к зависимостям, характерным для окрестности порога локализации.

Ниже порога локализации область сильных флуктуаций $\Delta(\mathbf{r})$ расширяется еще больше. Это связано с появлением в корреляторе локальной плотности состояний дополнительной дельта-функциональной особенности [21]. Соответственно получаем в $\gamma(\mathbf{q})$ дополнительное слагаемое $[N(E_F)T_c(1+R_l^2q^2)]^{-1}$, где R_l — радиус локализации электронных состояний на уровне Ферми. В дисперсии $\Delta(\mathbf{r})$, согласно (5), при $R_l > \xi(T)$ является дополнительный к (7) член

$$\langle \Delta^2 \rangle / \langle \Delta \rangle^2 - 1 \approx [N(E_F)T_c R_l^3 \tau^2]^{-1},$$

который быстро растет с падением радиуса локализации R_l (на пороге локализации $R_l = \infty$). В [7] показано, что если на пороге локализации значение T_c остается отличным от нуля, то при дальнейшем росте беспорядка и падении R_l куперовское спаривание выживает только до значений $R_l \gg [N(E_F)T_c]^{-1/2}$. Это неравенство означает, что на энергетическом интервале T_c располагается много дискретных уровней, центры которых находятся внутри области с радиусом R_l (см. также [15]). Кроме того, оно гарантирует, что радиус локализации существенно превышает характерный размер куперовских пар. Теперь видно, что при этом же условии относительная дисперсия $\Delta(\mathbf{r})$ остается на уровне порядка единицы во всем температурном интервале существования сверхпроводимости в диэлектрической фазе.

Если причиной статистических флуктуаций $t(\mathbf{r})$ являются случайно расположенные области с размерами a , $k_F^{-1} \ll a \ll \xi$ и повышенным значением параметра электрон-фононного взаимодействия $\lambda_{e, ph} + \delta\lambda_{e, ph}$ (благодаря изменению структуры дислокаций, плоскостей двойникования и т. п.), то для такой модели

$$\gamma(0) = c(1-c)a^3(\delta\lambda_{e, ph}/\lambda_{e, ph})^2, \quad \tau_D = \gamma^2(0)\xi^{-6}, \quad (8)$$

где c — относительный полный объем областей с измененным параметром $\lambda_{e, ph}$. В этом случае при $c \approx 1$ и $\delta\lambda_{e, ph}/\lambda_{e, ph} \approx 1$ режим сильных статистических флуктуаций $\tau_D \gg \tau_G$ реализуется при $a \gg k_F^{-1}(E_F/T_c)^{1/2}$. Это условие совместимо с принятым выше ограничением $a \ll \xi$. Отметим, что при $a \gg \xi$ появление неоднородной сверхпроводимости неудивительно: при охлаждении она формируется сначала только в областях с повышенной «температурой» перехода, соответствующей параметру $\lambda_{e, ph} + \delta\lambda_{e, ph}$. Гораздо менее тривиально, что при $a \ll \xi$ усреднение сверхпроводящих свойств также отсутствует, если уровень флуктуаций $t(\mathbf{r})$ (из-за флуктуаций $N(\mathbf{r}, E_F)$ или $\lambda_{e, ph}(\mathbf{r})$) достаточно велик.

II. Сверхпроводящий переход в системах с сильным беспорядком

1. Постановка задачи

Мы рассмотрим теперь сверхпроводимость в системах с сильными пространственными статистическими гауссовыми флуктуациями локальной «температуры» перехода $T_c(\mathbf{r})$. Мы покажем, что в этой модели в зависимости от степени беспорядка, т. е. отношения τ_D/τ_G , возможно два типа сверхпроводящих переходов. При $\tau_D < \tau_D^* = 2,49\tau_G$ сверхпроводимость является переходом второго рода в точке T_c . Сверхпроводящий параметр порядка при этом равен нулю при $T > T_c$ и пространственно однороден на масштабах, превышающих корреляционную длину $\xi(T)$ ниже T_c . Стати-

стические флуктуации приводят только к изменению критических индексов в температурной зависимости основных характеристик системы $\xi(T)$, $\lambda_L(T)$ и т. п. [22, 23].

При $\tau_D > \tau_D^*$ сверхпроводящее состояние появляется неоднородным образом даже в случае, если корреляционный радиус a флуктуаций температуры $T_c(\mathbf{r})$ из-за беспорядка мал по сравнению со сверхпроводящей корреляционной длиной ξ (беспорядок такого типа с $a \ll \xi$ мы будем называть микроскопическим). Впервые вывод о возможности неоднородного сверхпроводящего перехода для микроскопического беспорядка был сделан Иоффе и Ларкиным [24]. Исследуя случай экстремально сильного беспорядка (фактически $\tau_D \gg (\tau_G \tau)^{1/2}$), они показали, что по мере понижения температуры в нормальной фазе появляются локализованные сверхпроводящие области (капли) с характерным размером $\xi(T)$. Далеко от T_c их концентрация мала, но по мере охлаждения концентрация и размеры капель растут и они начинают перекрываться друг с другом. Сверхпроводящий переход принимает при этом перколяционный характер.

Переход Иоффе — Ларкина, применимый в пределе очень сильного беспорядка, не учитывал термодинамические флуктуации и не дал критерия для перехода от однородного режима сверхпроводимости к неоднородному. Соответствующий критерий $\tau_D > \tau_D^* \approx 2,49 \tau_G$ будет получен ниже для модели с гауссовым характером флуктуаций величины $T_c(\mathbf{r})$.

Согласно приведенным в разд. I оценкам, в системе с примесями, влияющими только на локальную плотность состояний $N(\mathbf{r}, E_F)$, по мере роста беспорядка и перехода от режима $l \gg k_F^{-1}$ к режиму локализации электронов ($l \approx k_F^{-1}$) параметр τ_D/τ_G растет от очень малой величины до значений, больших единицы. Поэтому при приближении к порогу локализации можно ожидать появления неоднородного режима сверхпроводимости. В системе, содержащей области с повышенным значением параметра λ_e, \hbar в условиях $l \gg k_F^{-1}$, этот режим может реализоваться и при значении параметра $\tau_D \ll 1$, так как в такой системе $\tau_G \ll 1$.

Наше рассмотрение сверхпроводников с сильным беспорядком будет основано на функционале ГЛ (3а) с гауссовым распределением температуры $t(\mathbf{r})$. Свободная энергия системы и коррелятор параметра порядка для заданного распределения $t(\mathbf{r})$ равны

$$F_s\{t(\mathbf{r})\} = -T \ln Z, \quad Z = \int D\{\mathbf{A}, \Delta\} \exp[-\mathcal{F}_{GL}\{\mathbf{A}, \Delta\}/T], \quad (9a)$$

$$\langle \Delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}') \rangle = Z^{-1} \int D\{\mathbf{A}, \Delta\} \Delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}') \exp[-\mathcal{F}_{GL}\{\mathbf{A}, \Delta\}/T], \quad (9b)$$

и их надо усреднить, считая известным коррелятор

$$\langle t(\mathbf{r}) t(\mathbf{r}') \rangle = \gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \gamma = \tau_D^{1/2} \xi^3. \quad (10)$$

Для гауссовых флуктуаций с коррелятором (10) вероятность конфигурации с данным распределением $t(\mathbf{r})$ равна

$$P\{t(\mathbf{r})\} = \exp\left[-\frac{1}{2\gamma} \int d\mathbf{r} t^2(\mathbf{r})\right]. \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению функций $F_s\{t(\mathbf{r})\}$ и $\langle \Delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}') \rangle$ (9б) и дальнейшему их усреднению с помощью (11).

В этой статье мы ограничимся рассмотрением не взаимодействующих капель. Тогда можно не учитывать присутствия в образце вихрей и в каждой капле фазу параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ можно считать несингулярной⁴⁾. После выполнения калибровочного преобразования

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + (c\hbar/2e) \nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad \Delta(\mathbf{r}) \rightarrow \Delta(\mathbf{r}) \exp[-i\varphi(\mathbf{r})],$$

⁴⁾ При учете взаимодействия капель следует учитывать вихри в области между каплями, которые разрушают когерентность фаз разных зародышей. С аналогичной ситуацией мы встречаемся в гранулированных сверхпроводниках.

где $\varphi(\mathbf{r})$ — фаза параметра порядка, величина $\Delta(\mathbf{r})$ в (9б) является действительной и функционал ГЛ принимает вид

$$\mathcal{F}_{GL}\{\mathbf{A}(\mathbf{r}), \Delta(\mathbf{r})\} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{B^2(\mathbf{r})}{8\pi} + N(E_F) \left[(\tau + t(\mathbf{r})) \Delta^2(\mathbf{r}) + \frac{4e^2 \xi^2}{c^2 \hbar^2} A^2(\mathbf{r}) \Delta^2(\mathbf{r}) + \xi^2 (\nabla \Delta(\mathbf{r}))^2 + \frac{\lambda \Delta^4(\mathbf{r})}{2} \right] \right\}. \quad (12)$$

Интегрирование по фазе в (9) приводит к появлению несущественного постоянного множителя в статистической сумме, который в дальнейшем мы опустим. Для вычисления свободной энергии системы невзаимодействующих капель мы используем подход, аналогичный флуктуационной теории появления зародышей новой фазы при переходах первого рода, а также метод решлик.

2. Флуктуационная теория капель

В заданной конфигурации $t(\mathbf{r})$ сверхпроводящие капли могут появиться только в областях с локально повышенным значением температуры сверхпроводящего перехода. В дальнейшем мы будем нумеровать такие области индексом i . В каждой из них параметр порядка определяется нетривиальным локализованным решением $\Delta_d^{(i)}(\mathbf{r}) \neq 0$ уравнения ГЛ, и вклад такой капли в статистическую сумму системы равен

$$N^{(i)}\{t(\mathbf{r})\} \exp\left(-\frac{E_d^{(i)}\{t(\mathbf{r})\}}{T}\right), \quad E_d^{(i)}\{t(\mathbf{r})\} = \mathcal{F}_{GL}\{0, \Delta_d^{(i)}(\mathbf{r})\},$$

где $E_d^{(i)}$ — энергия капли, а предэкспоненциальный фактор $N^{(i)}$ определяется вкладом конфигураций $\Delta(\mathbf{r})$, близких к классическому решению $\Delta_d^{(i)}(\mathbf{r})$. Суммируя вклады конфигураций, содержащих произвольное число капель, в пренебрежении их взаимодействием друг с другом находим статистическую сумму (9а) системы

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 \left[1 + \sum_i N^{(i)} \exp\left(-\frac{E_d^{(i)}}{T}\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2!} \sum_{i,j} N^{(i)} N^{(j)} \exp\left(-\frac{E_d^{(i)} + E_d^{(j)}}{T}\right) + \dots \right] = \\ &= Z_0 \exp \left[\sum_i N^{(i)} \exp\left(-\frac{E_d^{(i)}}{T}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь Z_0 — статистическая сумма системы в отсутствие капель. Подставляя (13) в (9а) и усредняя свободную энергию системы по конфигурациям $t(\mathbf{r})$, находим

$$F_s = -\frac{T}{N} \int D\{t(\mathbf{r})\} \sum_i N^{(i)}\{t(\mathbf{r})\} \exp\left(-\frac{\mathcal{F}_d^{(i)}\{t(\mathbf{r})\}}{T}\right), \quad (14)$$

где N — нормировочный множитель и \mathcal{F}_d играет роль свободной энергии капли:

$$\mathcal{F}_d\{t(\mathbf{r})\} = E_d\{t(\mathbf{r})\} - T \ln P\{t(\mathbf{r})\}. \quad (15)$$

Основной вклад в функциональный интеграл (14) вносят конфигурации $t_0(\mathbf{r})$, реализующие экстремум функционала (15):

$$t_0(\mathbf{r}) = -\tilde{\gamma} \Delta_d^2(\mathbf{r}), \quad \tilde{\gamma} = \gamma N(E_F) / T_c. \quad (16)$$

Отметим, что $t_0(\mathbf{r})$ отрицательно в соответствии с тем, что капли появляются в областях с повышенным значением температуры сверхпроводящего перехода. Подстановка (16) в уравнение ГЛ, соответствующее функционалу (За), дает нелинейное уравнение для нахождения параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ в сверхпроводящей капле. В обезразмеренных переменных это уравнение имеет вид

$$\Delta_d(r) = \left(\frac{\tau}{\tilde{\gamma} - \lambda} \right)^{1/2} \chi \left[\frac{r}{\xi(T)} \right], \quad \xi(T) = \frac{\xi}{\tau^{1/2}}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} (x\chi(x)) - \chi(x) + \chi^3(x) = 0, \quad \chi(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (18)$$

Асимптотика функции $\chi(x)$ при $x \gg 1$ определяется из линеаризованной формы уравнения (18), и $\chi(x) \sim x^{-1} e^{-x}$. Таким образом, сверхпроводящие зародыши локализованы на масштабе порядка радиуса корреляции $\xi(T)$. Величина \mathcal{F}_{min} находится подстановкой (16) и (17) в (15):

$$S_0(\tau) \equiv \frac{\mathcal{F}_{min}}{T} = \frac{A \xi^3 \tau^{1/2}}{\gamma - \lambda T / N(E_F)} = \frac{A (\tau / \tau_D)^{1/2}}{1 - (\tau_G / \tau_D)^{1/2}}, \quad \lambda < \tilde{\gamma}. \quad (19a)$$

Она определяет с экспоненциальной точностью свободную энергию капель (14). Постоянная A в (19a) равна [25]

$$A = 4\pi \int_0^\infty dx x^2 \left[\chi^2(x) + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \chi^4(x) \right] = 37,8. \quad (19b)$$

Отметим, что энергия $E_d\{t_0(\mathbf{r})\}$ сверхпроводящих капель отрицательна и их появление энергетически выгодно по сравнению со случаем пространственно однородного решения $\Delta(\mathbf{r})=0$. Согласно (19a), сверхпроводящие капли могут существовать только при наличии достаточно сильных статистических флуктуаций $\tau_D > \tau_G$, более строгое ограничение будет найдено ниже.

Для определения предэкспоненциального фактора в (14) следует вернуться к решению полной задачи (11), (13). В пренебрежении термодинамическими флуктуациями параметра порядка он может быть найден в рамках метода Иоффе — Ларкина [24]. Для величины свободной энергии системы и концентрации капель ρ_s находим следующие выражения:

$$F_s(\tau) \approx -T \xi^{-3}(T) (\tau_D / \tau_G)^{1/2} \exp[-S_0(\tau)], \quad (20a)$$

$$\rho_s(\tau) \approx \xi^{-3}(T) S_0(\tau) \exp[-S_0(\tau)]. \quad (20b)$$

Здесь экспонента $S_0(\tau)$ определена выражением (19a) с $\lambda=0$. Отметим, что предэкспоненциальный фактор в (20a) отличается от найденного в [24], что связано с неточным выражением для свободной энергии одной капли, использованной в [24]. Из (19a) видно, что при $\lambda \ll \tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau)$ мы получаем для $S_0(\tau)$ результат теории слабых термодинамических флуктуаций Иоффе — Ларкина. Это означает, что их подход справедлив при выполнении неравенства $\tau_D \ll \tau \ll \tau_D^2 / \tau_G$, что возможно только при $\tau_D \gg \tau_G$. Как следует из (20), в области применимости этих выражений средняя энергия каждой капли F_s / ρ_s велика по сравнению с температурой T и сравнивается с ней при $\lambda \approx \tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau)$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением области $\lambda \gg \tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau)$, т. е. $\tau \gg \tau_D^2 / \tau_G$, где становится существенным вклад тепловых флуктуаций. Ниже будет показано, что именно при этом ограничении флуктуации параметра порядка относительно наиболее вероятной конфигурации (17) малы. Это позволяет воспользоваться для нахождения свободной энергии системы и коррелятора параметра порядка в области сильных термодинамических флуктуаций стандартными методами теории поля.

3. Метод реплик и инстантоны

Для выполнения усреднения логарифма статистической суммы (9а) по $t(\mathbf{r})$ с весом (11) воспользуемся методом реплик, который позволяет выполнить усреднение в явном виде [26].

Запишем среднюю величину свободной энергии системы (9а) в виде

$$F = -T \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} [\langle Z^n \rangle - 1]. \quad (21)$$

Для вычисления $\langle Z^n \rangle$ в соответствии с идеей метода реплик положим сначала величину n произвольным целым числом. Расписывая Z^n через n -кратный функциональный интеграл по полям реплик $A_\alpha(\mathbf{r})$, $\Delta_\alpha(\mathbf{r})$, $\alpha=1, \dots, n$ и выполняя точно гауссово усреднение по $t(\mathbf{r})$, находим

$$\langle Z^n \rangle = \int D\{A_\alpha, \Delta_\alpha\} \exp[-S_n\{A_\alpha, \Delta_\alpha\}], \quad (22)$$

$$S_n\{A_\alpha, \Delta_\alpha\} = \int d\mathbf{r} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \frac{B_\alpha^2(\mathbf{r})}{8\pi} + \frac{N(E_F)}{T} \sum_{\alpha=1}^n \left[\tau \Delta_\alpha^2(\mathbf{r}) + \frac{4e^2 \xi^2}{c^2 \hbar^2} A_\alpha^2(\mathbf{r}) \Delta_\alpha^2(\mathbf{r}) + \xi^2 (\nabla \Delta_\alpha(\mathbf{r}))^2 + \frac{1}{2} \lambda \Delta_\alpha^4(\mathbf{r}) \right] - \frac{1}{2} N(E_F) T^{-1} \tilde{\gamma} \left[\sum_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha^2(\mathbf{r}) \right]^2 \right\}.$$

Отметим, что в этих выражениях уже отсутствуют случайные величины $t(\mathbf{r})$ и действие $S_n\{A_\alpha, \Delta_\alpha\}$ трансляционно-инвариантно. Для среднего значения коррелятора параметра порядка (9б) находим выражение

$$\langle \Delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}') \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \int D\{A_\alpha, \Delta_\alpha\} \exp[-S_n\{A_\alpha, \Delta_\alpha\}] \sum_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha(\mathbf{r}) \Delta_\alpha(\mathbf{r}'), \quad (23)$$

где мы выполнили симметризацию по репличным индексам.

Вдали от области сильных флуктуаций параметра порядка $|\tau| \gg \tau_D$, τ_G при вычислении функциональных интегралов (22), (23) можно использовать метод перевала. Экстремальные траектории являются классическими решениями для действия (22), и при вычислении функциональных интегралов надо учесть гауссовы флуктуации около них. Экстремальные траектории определяются уравнениями

$$\left[\tau - \xi^2 \nabla^2 + \lambda \Delta_\alpha^2(\mathbf{r}) - \tilde{\gamma} \sum_{\beta=1}^n \Delta_\beta^2(\mathbf{r}) \right] \Delta_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \quad A_\alpha(\mathbf{r}) = 0. \quad (24)$$

Эти уравнения для $\Delta_\alpha(\mathbf{r})$ имеют пространственно однородное решение и локализованные (инстантонные) решения. Последние при $\tau > 0$ соответствуют сверхпроводящим каплям. В этой статье мы ограничимся рассмотрением невзаимодействующих капель и учтем только одноинстантонные решения выше T_c (при $\tau > 0$). В дальнейшем нас будет интересовать лишь те из них, которые допускают аналитическое продолжение при $n \rightarrow 0$. Мы будем обозначать их через $\Delta_\alpha^{(i)}(\mathbf{r})$, где индекс i характеризует тип таких решений. Для нахождения их вкладов следует разложить действие (22) с точностью до квадратичных по отклонениям $\varphi_\alpha(\mathbf{r}) = \Delta_\alpha(\mathbf{r}) - \Delta_\alpha^{(i)}(\mathbf{r})$ членов. В Приложении показано, что флуктуациями полей $A_\alpha(\mathbf{r})$ можно пренебречь при рассмотрении изолированных зародышей. Тогда действие

(22) принимает вид

$$S_n\{\Delta_\alpha\} = S_n\{\Delta_\alpha^{(i)}\} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha, \beta} (\varphi_\alpha \hat{M}_{\alpha\beta}^{(i)} \varphi_\beta). \quad (25)$$

Для вычисления функционального интеграла по полям φ_α разложим их по нормированным собственным функциям оператора $\hat{M}^{(i)}$:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_k c_k \varphi_{k\alpha}(\mathbf{r}), \quad \sum_\beta M_{\alpha\beta}^{(i)} \varphi_{k\beta} = \varepsilon_k \varphi_{k\alpha}. \quad (26)$$

Подстановка (26) в (25) для величины действия дает выражение

$$S_n\{\Delta_\alpha\} = S_n\{\Delta_\alpha^{(i)}\} + \frac{1}{2} \sum_k c_k^2 \varepsilon_k. \quad (27)$$

Гауссов функциональный интеграл в (22) вычисляется заменой переменных интегрирования:

$$\int D\{\varphi_\alpha\} \dots = \prod_k \int \frac{dc_k}{(2\pi)^{1/2}} \dots, \quad (28)$$

и его величина определяется спектром собственных значений оператора $\hat{M}^{(i)}$.

При $\lambda=0$ уравнения (24) симметричны относительно поворотов в пространстве реплик и допускают решения вида [5, 27]

$$\Delta_\alpha^{(e)}(r) = \Delta_d(r) e_\alpha, \quad \Delta_d(r) = \left(\frac{\tau}{\tilde{\gamma}}\right)^{1/2} \chi\left[\frac{r}{\xi(T)}\right], \quad \sum_{\alpha=1}^n e_\alpha^2 = 1, \quad (29)$$

где e_α — произвольный единичный вектор в пространстве реплик, а функция $\chi(x)$ определена ранее. Такие инстантоны соответствуют предельному случаю слабых термодинамических флуктуаций, рассмотренному выше, и величина действия на них равна $S_0(\tau)$ из (19а) при $\lambda=0$.

При $\lambda \neq 0$ эта симметрия действия (22) нарушается членом $\lambda \Delta_\alpha^4$ (он играет роль кубической анизотропии в пространстве реплик) и имеется n типов инстантонных решений уравнений (24):

$$\Delta_\alpha^{(i)}(r) = \Delta_d(r) \delta_{\alpha i}, \quad i=1, \dots, n. \quad (30)$$

Здесь функция $\Delta_d(r)$ определена в (17), а индекс i характеризует направление в пространстве реплик, вдоль которого происходит спонтанное нарушение симметрии⁵⁾. Ряд важных соотношений между интегралами от функции $\chi(x)$ может быть найден, если заметить, что уравнение (18) может быть получено из условия экстремума функционала $A\{\chi(x)\}$ (19б) по $\chi(x)$. Для этого заменим в нем $\chi(x)$ на $\alpha\chi(\beta x)$. Минимум функции $A(\alpha, \beta)$ по α и β должен достигаться при $\alpha=\beta=1$, что дает

$$\int_0^\infty dx x^2 \chi^2(x) = \frac{1}{3} \int_0^\infty dx x^2 \left(\frac{d\chi}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4} \int_0^\infty dx x^2 \chi^4(x) = \frac{A}{8\pi}. \quad (31)$$

Действие (22) на инстантонном решении (30) равно величине $S_0(\tau)$, определенной в (19а). Как следует из (22), инстантонный вклад в $\langle Z^n \rangle$

⁵⁾ При целых $n \geq 2$ наряду с решением (30) уравнения (24) имеют решения со спонтанно нарушенной симметрией вдоль двух и более координатных осей в пространстве реплик. Однако такие решения не допускают аналитического продолжения $n \rightarrow 0$ и в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

пропорционален $n \exp[-S_0(\tau)]$, где множитель n появился в результате суммирования вкладов всех n типов решений (30). Подставляя это выражение в (21), для свободной энергии зародышей находим результат (14), (19) флуктуационной теории. Учет флуктуаций полей реплик в окрестности классического решения позволяет найти предэкспоненциальный фактор в (14).

4. Предэкспоненциальный фактор в случае сильных термодинамических флуктуаций

Предэкспоненциальный фактор в F_s определяется конфигурациями полей реплик (26) вблизи экстремального решения (30). Оператор $\hat{M}^{(i)}$ на решениях (30) равен

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\alpha\beta}^{(i)} &= [\hat{M}_L \delta_{\alpha i} + \hat{M}_T (1 - \delta_{\alpha i})] \delta_{\alpha\beta}, \\ \hat{M}_{L,T} &= \frac{2N(E_F)}{T} [-\xi^2 \nabla^2 + \tau U_{L,T}(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (32)$$

$$U_L(\mathbf{r}) = 1 - 3\chi^2[r/\xi(T)], \quad U_T(\mathbf{r}) = 1 - (1 - \lambda/\bar{\gamma})^{-1} \chi^2[r/\xi(T)].$$

Его собственные функции имеют вид

$$\varphi_{k,\alpha}^L(\mathbf{r}) = \varphi_k^L(\mathbf{r}) \delta_{\alpha i}, \quad \varphi_{k,\alpha}^T(\mathbf{r}) = \varphi_k^T(\mathbf{r}) \delta_{\alpha\beta}, \quad \beta \neq i, \quad (33)$$

где функции $\varphi_k^{L,T}(\mathbf{r})$ являются решением уравнений на собственные значения для операторов $\hat{M}_{L,T}$:

$$\hat{M}_{L,T} \varphi_k^{L,T}(\mathbf{r}) = \varepsilon_k^{L,T} \varphi_k^{L,T}(\mathbf{r}). \quad (34)$$

Эти уравнения имеют вид уравнений Шредингера с потенциалами $U_{L,T}(\mathbf{r})$, показанными схематически на рис. 1. Исследуем спектр этих уравнений. В потенциале $U_L(\mathbf{r})$ всегда имеется дискретный уровень с нулевым собственным значением $\varepsilon_1^L = 0$. Его присутствие связано с трансляционной симметрией уравнения (22). Наряду с (30) решением уравнений (24) с той же величиной действия является функция $\Delta_\alpha^{(i)}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$ со сдвигом центра локализации на произвольный вектор \mathbf{r}_0 . Соответствующее отклонение $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ при трансляции на бесконечно малый вектор $\delta\mathbf{r}_0$ имеет вид

$$\varphi_\alpha(\mathbf{r}) = [\Delta_d(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}_0) - \Delta_d(\mathbf{r})] \delta_{\alpha i} = (J_L^{1/2} \delta\mathbf{r}_0) \varphi_1^L(\mathbf{r}) \delta_{\alpha i}, \quad (35)$$

$$\varphi_1^L(\mathbf{r}) = J_L^{-1/2} \frac{\partial \Delta_d(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad J_L = \frac{1}{3} \int d\mathbf{r} \left(\frac{\partial \Delta_d}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 = \frac{S_0(\tau) T}{2\xi^2 N(E_F)}. \quad (36)$$

Непосредственной подстановкой (36) в (33) можно убедиться, что функции $\varphi_{1,x,y,z}^L(\mathbf{r})$ являются собственными функциями оператора \hat{M}_L с нулевым собственным значением. В (36) мы выразили с помощью (17) и (34) интеграл, определяющий J_L , через величину действия (22). Сравнение (35) с общим выражением (26) позволяет найти дифференциал коэффициента ε_1^L разложения (26): $d\varepsilon_1^L = J_L^{1/2} d\mathbf{r}_0$. Поскольку собственное значение ε_1^L трехкратно вырождено, величина $J_L^{1/2}$ является якобианом перехода от коэффициентов ε_1^L к коллективным переменным \mathbf{r}_0 , определяющим положение сверхпроводящей капли. Интеграл по \mathbf{r}_0 дает объем системы V . Вычисляя остальные гауссовы интегралы по c_k в (27), (28), находим вклад инстантонных конфигураций (30) в величину $\langle Z^n \rangle$ (22):

$$n V (J_L/2\pi)^{3/2} [\det' \hat{M}_L]^{-1/2} [\det \hat{M}_T]^{(1-n)/2} \exp[-S_0(\tau)]. \quad (37)$$

Детерминант оператора равен произведению всех его собственных значений, а штрих означает исключение из этого произведения нулевых соб-

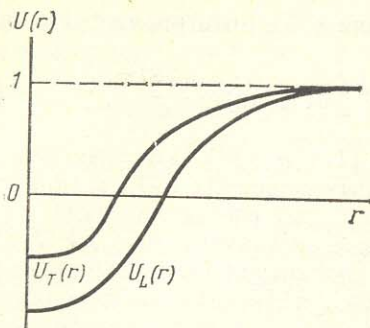


Рис. 1

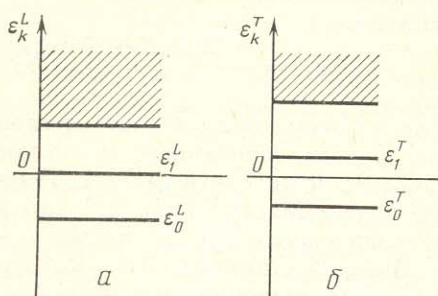


Рис. 2

ственных значений. Подставляя (37) в (21), находим вклад сверхпроводящих капель в свободную энергию системы:

$$F_s = -\theta_s(\tau) T, \quad \theta_s(\tau) = \left[\frac{TS_0(\tau)}{4\pi N(E_F)} \right]^{1/2} \left[\frac{\det \hat{M}_T}{\det' \hat{M}_L} \right]^{1/2} \xi^{-3} \exp[-S_0(\tau)]. \quad (38)$$

Для определения величины θ_s необходимо найти остальные собственные значения операторов \hat{M}_L и \hat{M}_T (32).

Рассмотрим сначала оператор \hat{M}_L . Угловая зависимость найденной выше собственной функции (36) соответствует состоянию p -типа с орбитальным моментом $l=1$. Минимальное собственное значение ϵ_0^L должно соответствовать невырожденному s -состоянию с $l=0$. Таким образом, оператор \hat{M}_L должен иметь хотя бы одно отрицательное собственное значение $\epsilon_0^L < \epsilon_1^L = 0$. Более строгий анализ [28] показывает, что такое собственное значение единственно. Остальные собственные значения ϵ_k^L с $k > 1$ положительны. Описанный спектр собственных значений оператора \hat{M}_L показан на рис. 2 (заштрихован непрерывный участок спектра).

Рассмотрим теперь спектр собственных значений оператора \hat{M}_T . Величина ρ_s в (38) положительна только в случае, когда оператор \hat{M}_T имеет единственное отрицательное собственное значение. Далее мы покажем, что такая ситуация реализуется при выполнении условия $0 < \lambda < \lambda^* = 2\tilde{\gamma}/3$, которое и определяет область существования сверхпроводящих капель. Спектр собственных значений оператора \hat{M}_T показан на рис. 2.

В случае $\lambda \ll \lambda^*$ минимальное собственное значение $\epsilon_0^T < 0$ может быть найдено с помощью теории возмущений по малому параметру λ/λ^* . При $\lambda=0$ оператор \hat{M}_T (32) имеет единственное нулевое собственное значение $\epsilon_0^T=0$. Соответствующая ему голдстоуновская мода связана с изотропией уравнений (24) в пространстве реплик, она отвечает вращению единичного вектора e_α (29) в пространстве реплик

$$\varphi_\alpha(\mathbf{r}) = \Delta_d(r) \delta e_\alpha = (J_T^{1/2} \delta e_\alpha) \varphi_0^T(\mathbf{r}), \quad (39)$$

где нормировочная компонента J_T и функция φ_0^T равны

$$\varphi_0^T(\mathbf{r}) = J_T^{-1/2} \Delta_d(r), \quad J_T = \int d\mathbf{r} \Delta_d^2(r) = S_0(\tau) T / 2\tau N(E_F). \quad (40)$$

Нетрудно убедиться, что функция (40) при $\lambda=0$ действительно является решением уравнения (34) с нулевым собственным значением $\epsilon_0^T=0$. Сравнивая (39) с выражением (26), находим соотношение

$$c_{0\alpha}^T = J_T^{1/2} \delta e_\alpha. \quad (41)$$

При малых $\lambda \ll \lambda^*$ можно пренебречь изменением собственной функции (40) оператора \hat{M}_T . Его минимальное собственное значение ϵ_0^T находится ум-

ножением обеих частей уравнения (34) для ε_0^T и интегрированием по координате \mathbf{r} :

$$\varepsilon_0^T = -\frac{2\lambda N(E_F)}{T} \int d\mathbf{r} \Delta_d^4(r) / \int d\mathbf{r} \Delta_d^2(r) = -\frac{8\lambda\tau}{\gamma}, \quad (42)$$

где мы воспользовались соотношениями (17) и (30). Условие применимости подхода, основанного на инстантонных решениях (30), можно сформулировать в виде $\langle (\delta e_\alpha)^2 \rangle \ll 1$. Поскольку, как следует из (27), характерные значения $(c_0^T)^2 \propto |\varepsilon_0^T|^{-1}$, это условие принимает вид $\lambda \gg \tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau)$. Противоположный случай малых λ был рассмотрен выше в рамках подхода Иоффе — Ларкина. При $\tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau) \ll \lambda \ll \lambda^* = 2\tilde{\gamma}/3$ при вычислении всех собственных значений оператора \hat{M}_T , кроме ε_0^T , можно положить $\lambda=0$, а величина ε_0^T найдена в (42). Нетрудно видеть, что в этом случае все собственные значения операторов \hat{M}_T и \hat{M}_L , кроме ε_0^T и ε_1^L , пропорциональны $\tau N(E_F)/T$ и не зависят от $\tilde{\gamma}$ и λ . Поэтому размерная оценка отношения их детерминантов дает

$$|\det' \hat{M}_T / \det' \hat{M}_L| = [N(E_F) \tau / T]^2. \quad (43)$$

Подставляя (42) и (43) в (38), находим

$$\theta_s(\tau) \approx \frac{1}{\xi^3(T)} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\gamma}} \right)^{1/2} S_0^{3/2}(\tau) \exp[-S_0(\tau)] \approx \xi^{-3}(T) \frac{\tau_G^{1/4} \tau_D^{3/4}}{\tau} \exp[-S_0(\tau)]. \quad (44)$$

При вычислении коррелятора параметра порядка (23) в предэкспоненциальном факторе достаточно учесть только флуктуации, связанные с трансляционной модой с нулевым собственным значением:

$$\Delta_\alpha(\mathbf{r}) = \Delta_d(\mathbf{r}) \delta_{\alpha i} + c_1^L \varphi_{1,\alpha}^L(\mathbf{r}) = \Delta_d(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \delta_{\alpha i}. \quad (45)$$

В результате находим

$$\langle \Delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}') \rangle = \theta_s(\tau) \int d\mathbf{r}_0 \Delta_d(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \Delta_d(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0). \quad (46)$$

Интегрирование по координате \mathbf{r}_0 в (46) фактически означает усреднение по различным положениям локализации капель. После усреднения коррелятор (46) зависит только от разности координат. Отметим, что из-за возможного разброса амплитуды капель параметр θ_s не определяет их концентрацию. Для ее нахождения следует найти распределение капель по их амплитудам. При $\lambda \approx \tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau)$ выражения (38) и (44) переходят в (20а) и (20б).

При $\lambda = \lambda^* = 2\tilde{\gamma}/3$ операторы \hat{M}_T и \hat{M}_L совпадают. Соответственно при этом равны все их собственные значения и оператор \hat{M}_T имеет единственное отрицательное собственное значение $\varepsilon_0^T < 0$ и трехкратно вырожденное нулевое собственное значение $\varepsilon_1^T = 0$. При малых $\lambda^* - \lambda \ll \lambda^*$ собственное значение ε_1^T найдем по теории возмущений с помощью соответствующей ему функции (36):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T &= \frac{6N(E_F)}{T} (\lambda^* - \lambda) \int d\mathbf{r} \Delta_d^2(r) \left(\frac{\partial \Delta_d}{\partial r} \right)^2 / \int d\mathbf{r} \left(\frac{\partial \Delta_d}{\partial r} \right)^2 \approx \\ &\approx \frac{N(E_F) \tau}{T} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} - 1 \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Остальные собственные значения оператора \hat{M}_T при $\lambda < \lambda^*$ положительны. Воспользовавшись результатом (47) для ε_1^T и положив остальные $\varepsilon_k^T = \varepsilon_k^L$ при $k \neq 0$, находим при $\lambda^* - \lambda \ll \lambda^*$

$$\theta_s(\tau) \approx \frac{1}{\xi^3(T)} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} - 1 \right)^{1/2} S_0^{3/2}(\tau) \exp[-S_0(\tau)], \quad \frac{\lambda^*}{\lambda} = 0,64 \left(\frac{\tau_D}{\tau_G} \right)^{1/2}. \quad (48)$$

При $\lambda \rightarrow \lambda^*$ собственное значение $\epsilon_1^T \rightarrow 0$ и следует учитывать негауссовый характер флуктуаций полей $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$. Такие флуктуации могут привести к изменению зависимости (48) в области малых $\lambda^* - \lambda \ll \tilde{\gamma} S_0^{-1}(\tau)$. Таким образом, сверхпроводящие капли существуют только при $\tau_D > \tau_D^*$, причем их плотность при $\lambda \rightarrow \lambda^*$ обращается в нуль из-за эффекта разрушения сверхпроводимости в каплях под действием термодинамических флуктуаций.

При вычислении коррелятора параметра порядка в (23) в случае $\lambda^* - \lambda \ll \lambda^*$ наряду с нулевой трансляционной модой следует учитывать также вклад $n-1$ мод оператора \hat{M}_T , собственные значения которых ϵ_1^T стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \lambda^*$. Пренебрегая вкладом остальных мод, аналогично выводу (45) мы можем заменить в (23) величину

$$\sum_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha(\mathbf{r}) \Delta_\alpha(\mathbf{r}')$$

на

$$n \Delta_\alpha \left(\mathbf{r} + J_L^{1/2} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{c}_{1,\alpha} \right) \Delta_\alpha \left(\mathbf{r}' + J_L^{1/2} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{c}_{1,\alpha} \right). \quad (49)$$

Выполняя интегрирование по всем коэффициентам c_k в (28), (23), для коррелятора параметра порядка находим результат (46), где величина множителя $\theta_s(\tau)$ определена в (48). Отметим, что на больших масштабах функция (46) спадает как $\exp[-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\xi(T)]$ и не содержит орнштейн-церниковского множителя $|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^{-1}$.

Заключение

В этой работе мы показали, что в случае достаточно сильных статистических флуктуаций параметра порядка $\tau_D > \tau_D^*$ сверхпроводимость появляется в виде изолированных зародышей — сверхпроводящих капель. Мы нашли свободную энергию такого неоднородного сверхпроводящего состояния и коррелятор параметра порядка в области температур $\tau \gg \tau_D$, где функция θ_s , определенная в (38), экспоненциально мала: $\theta_s \sim \exp[-A(\tau/\tau_D)^{1/2}]$. Здесь капли можно считать невзаимодействующими. Они дают экспоненциально малый вклад в теплоемкость системы, проводимость и диамагнитную восприимчивость. Для вычисления последней найдем изменение экспоненты (19), (15) и (20) под действием внешнего поля H :

$$\Delta S_0(\tau, H) = \frac{4e^2 \xi^2 N(E_F)}{3c^2 \hbar^2 T} H^2 \int d\mathbf{r} r^2 \Delta_d^2(\mathbf{r}). \quad (50)$$

Дифференцируя свободную энергию системы $F_s(\tau, H)$ по H , находим

$$\chi_s = -F_s(\tau) S_0(\tau) \xi^4(T) / \Phi_0^2, \quad (51)$$

где Φ_0 — квант потока.

Локально внутри капли в области $\xi(T) = \xi \tau^{-1/2}$ параметр порядка мал лишь в меру малости $\tau^{1/2}$ и локальные измерения (например, с помощью туннельного микроскопа) могут обнаружить появление капель.

Таким образом, теория предсказывает резкое усиление термодинамических и статистических флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка вблизи порога локализации. Сами по себе термодинамические флуктуации оставляют систему пространственно однородной и потому не ведут к качественно новому поведению. Эффект статистических флуктуаций меняет сверхпроводящий переход радикально — он приобретает перколяционный характер [24]. Хотя количественная теория такого перехода в области температур, где концентрация капель велика, пока отсутствует,

можно сделать ряд качественных выводов, допускающих экспериментальную проверку.

Переход в неоднородном режиме сверхпроводимости должен быть сильно размазан по температуре, причем степень размытости должна зависеть от пропускаемого тока в измерениях сопротивления R и от поля при измерениях магнитной восприимчивости χ_s . Из-за сильных флуктуаций $\Delta(\mathbf{r})$ особенность БКШ в плотности состояний квазичастиц может отсутствовать, и при $\tau_D \gg 1$ вплоть до нулевой температуры она будет иметь бесщелевой характер (к такому же результату приводит и рост частоты неупругих соударений электронов вблизи порога локализации из-за усиления эффекта кулоновского отталкивания электронов [29]). Наконец, неоднородный характер сверхпроводимости (капли) может быть обнаружен с помощью локальных измерений типа туннельной микроскопии.

Для гранулированного алюминия действительно наблюдалось существенное уширение сверхпроводящего перехода и размывание особенности в плотности состояний квазичастиц по мере уменьшения проводимости ниже уровня $1000 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ [29]. Эти факты могут служить свидетельством растущей роли флуктуаций, хотя в [29] для интерпретации бесщелевого характера спектра при $\sigma = 10 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ привлекались лишь соображения о росте частоты неупругих соударений электронов вблизи порога локализации.

Аналогичные особенности сверхпроводящего поведения должны присутствовать также и в системах с сильными статистическими флуктуациями спаривательного взаимодействия независимо от их близости к порогу локализации. При этом, естественно, вдали от андерсоновского перехода нет никаких оснований для усиления неупругого рассеяния электронов и бесщелевой характер спектра квазичастиц может быть связан только со статистическими флуктуациями сверхпроводящего параметра порядка.

Авторы признательны Б. Л. Альтшулеру, С. Л. Гинзбургу, Л. П. Горькову, И. Я. Коренблиту, А. И. Ларкину, Д. Е. Хмельницкому и Е. Ф. Шендеру за полезное обсуждение вопросов, затронутых в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что термодинамические флуктуации магнитного поля в сверхпроводящих каплях, которыми мы выше пренебрегали, несущественны в грязных сверхпроводниках.

Разложим действие (22) в окрестности инстантонного решения (30) по отклонениям $A_{\mu\alpha}$ и φ_α с точностью до квадратичных членов. ($A_{\mu\alpha}$ есть компоненты вектора A_α , $\mu=1, 2, 3$.) Тогда к действию (25) добавляется дополнительное слагаемое, описывающее флуктуации магнитного поля:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu, \alpha, \beta} \int d\mathbf{r} (A_{\mu\alpha} \bar{K}_{\mu\alpha, \nu\beta} A_{\nu\beta}), \quad (\text{II.1})$$

где оператор \bar{K} квадратичной формы равен

$$\bar{K}_{\mu\alpha, \nu\beta}^{(i)} = \bar{K}_{L\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha i} + \bar{K}_{T\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} (1 - \delta_{\alpha i}), \quad (\text{II.2})$$

$$K_{T\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{T} D_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{II.3})$$

$$K_{L\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{T} D_{\mu\nu}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{8e^2 N(E_F) \xi^2}{c^2 T} \Delta_d^2(\mathbf{r}) \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{II.4})$$

Здесь $D_{\mu\nu}(\mathbf{r})$ есть фотонная функция Грина, в кулоновской калибровке равная $\delta_{\mu\nu}/r$. Вычисляя гауссовы интегралы по φ_α и $A_{\mu\alpha}$, находим, что флуктуации магнитного поля приводят к появлению дополнительного множителя Θ в предекспоненциальном факторе в (38). Рассматривая в

(П.4) член, содержащий Δ_d^2 , как возмущение, находим для множителя Θ выражение

$$\Theta = \exp \left[\frac{8e^2 N(E_F) \xi^2}{c^2 T} \sum_{\mu} D_{\mu\mu}(0) \int d\mathbf{r} \Delta_d^2(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + \frac{32e^4 N^2(E_F) \xi^4}{c^4 T} \sum_{\mu, \nu} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \Delta_d^2(\mathbf{r}) \Delta_d^2(\mathbf{r}') D_{\mu\nu}^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \dots \right]. \quad (\text{П.5})$$

Первый член в экспоненте (П.5) дает перенормировку температуры сверхпроводящего перехода. Она одинакова как для пространственно однородного состояния, так и для капле, и в дальнейшем ее можно считать выполненной. Второй член в экспоненте (П.5) описывает влияние экранировки флуктуирующего магнитного поля на форму сверхпроводящего зародыша. Подставляя в (П.5) инстантонные решения для $\Delta_d(\mathbf{r})$ и выполняя интегрирование по \mathbf{r} и \mathbf{r}' , получаем условия, при которых этот член в (П.4) мал и влияние флуктуаций магнитного поля на капли не существенно. Оно имеет вид

$$\lambda \ll \lambda^* (\lambda_L^2 \xi_0^2 / \xi^4(T)). \quad (\text{П.6})$$

Это условие заведомо выполняется в сверхпроводниках второго рода с $\lambda_L \gg \xi_0$. В сверхпроводниках первого рода оно накладывает ограничение на величину критического беспорядка, при котором термодинамические флуктуации магнитного поля влияют на свойства зародышей.

Литература

1. Абрикосов А. А., Горьков Л. П. ЖЭТФ, 1958, 35, 1158; 1959, 36, 319.
2. Горьков Л. П. ЖЭТФ, 1959, 37, 1407.
3. Anderson P. W. J. Phys. Chem. Solids, 1959, 11, 26.
4. Anderson Localization/Ed. by Y. Nagaoka, H. Fukuyama.— Springer Series in Solid State Sciences, v. 39. Berlin — Heidelberg — New York: Springer Verlag, 1982.
5. Садовский М. В. УФН, 1984, 133, 223; Sov. Scient. Rev. Phys. Rev./Ed. by I. M. Khalatnikov, 1986, v. 7, New York: Harwood Academic Publ., 1986, p. 3.
6. Anderson P. W., Muttalib K. A., Ramakrishnan T. V. Phys. Rev., 1983, B28, 117.
7. Булаевский Л. Н., Садовский М. В. Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, 524; J. Low Temp. Phys., 1985, 59, 89.
8. Kolley E., Kolley W. Z. Phys., 1984, B57, 185.
9. Belitz D. J. Phys. 1985, F15, 2315.
10. Finkelstein A. M. Z. Phys., 1984, B56, 189.
11. Kolley E., Kolley W. Z. Phys., 1984, 56, 119.
12. Ebisawa H., Fukuyama H., Maekawa S. Preprint 1985. Fukuyama H. J. Phys. Soc. Japan, 1985, 54, 2393.
13. Овчинников Ю. И. ЖЭТФ, 1973, 64, 719. Fukuyama H., Ebisawa H., Maekawa S. J. Phys. Soc. Japan, 1984, 53, 3560.
14. Kapitulnik A., Kotliar G. Phys. Rev. Lett., 1985, 54, 473; Phys. Rev., 1986, B33, 3146.
15. Ma M., Lee P. A. Phys. Rev., 1985, B32, 5658.
16. Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J. J. Phys. Rad., 1962, 23, 707.
17. Булаевский Л. Н., Садовский М. В. Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, 76.
18. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
19. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н. ЖЭТФ, 1971, 61, 1221.
20. Oppermann R., Wegner F. J. Phys., 1979, B34, 327.
21. Березинский В. Л., Горьков Л. П. ЖЭТФ, 1979, 77, 2498.
22. Хмельницкий Д. Е. ЖЭТФ, 1975, 68, 1960.
23. Lubensky T. C. Phys. Rev., 1975, B11, 3573.
24. Иоффе Л. Б., Ларкин А. И. ЖЭТФ, 1981, 81, 707.
25. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982, с. 204.
26. Grinstein G., Luther A. Phys. Rev., 1976, B13, 1329.
27. Cardy J. L. J. Phys., 1978, C11, L321. Садовский М. В. ФТТ, 1979, 21, 743.
28. Zinn-Justin J. Phys. Reports. 1981, 70, 109.
29. Dynes R. C., Garno J. P., Hertel G., Orlando T. P. Phys. Rev. Lett., 1984, 53, 2437.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21.VII.1986