

© 1990 г.

Э. З. Кучинский, М. В. Садовский

**ФЛУКТУАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ В КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ВБЛИЗИ ПЕРЕХОДА МЕТАЛЛ — ДИЭЛЕКТРИК**

Рассмотрена статистика одноэлектронных энергетических уровней в конечной закрытой неупорядоченной системе, находящейся вблизи перехода Андерсона. Изучаются флуктуации  $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle$  числа уровней  $N(E)$  в энергетической полосе шириной  $E$  при изменении реализации случайного потенциала. В рамках самосогласованной теории локализации построена интерполяционная схема, описывающая флуктуации числа уровней во всем интервале поведения системы от слабенеупорядоченного металла до андерсоновского диэлектрика. В точке перехода металл — диэлектрик  $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle$  пропорциональна среднему числу уровней в полосе  $\langle N(E) \rangle$  так же, как и в глубоко диэлектрическом состоянии. Коэффициент пропорциональности порядка  $1/2$ . Результаты хорошо согласуются с качественным рассмотрением, основанным на скэйлинговой теории локализации, а общая картина флуктуаций в системах начиная с хорошего металла вплоть до диэлектрика удовлетворительно коррелирует с результатами численного моделирования.

**1. Введение**

В последние годы значительное внимание уделяется изучению статистических флуктуаций физических величин в конечных неупорядоченных системах (мезоскопика) [1]. Одной из важных рассматриваемых здесь задач является проблема флуктуаций числа энергетических уровней в полосе шириной  $E$  при изменении реализации случайного потенциала [2, 3]. Эта задача тесно связана с привлекающей наибольшее внимание статистикой мезоскопических флуктуаций проводимости [2].

Впервые задача о флуктуации числа энергетических уровней в полоске заданной ширины была рассмотрена Дайсоном [4]. В работе Альтшулера и Шкловского [2] было дано ее последовательное решение для случая слабо неупорядоченного металла. В дальнейшем в работе [3] был дан качественный анализ окрестности андерсоновского перехода металл — диэлектрик. Этот анализ основывался на простейшем рассмотрении в духе элементарной скэйлинговой теории локализации [5]. При этом удалось получить порядковые оценки, однако остался ряд недостаточно выясненных вопросов, связанных, например, с ролью частотной (и возможно импульсной) зависимости коэффициента диффузии вблизи порога подвижности. Для произвольного беспорядка в работе [3] было проведено прямое численное моделирование, позволившее качественно изучить статистику уровней во всем интервале от «хорошего» металла до андерсоновского диэлектрика. Однако этот анализ удалось провести лишь для весьма малых систем, что фактически не позволило проследить полностью переход к диэлектрическому случаю.

Ниже мы покажем, что в рамках самосогласованной теории локализации [6, 7] можно дать полный микроскопический анализ рассматриваемой задачи и построить замкнутую картину флуктуаций во всей области поведения системы металлической области до андерсоновского диэлектрика (с достаточным большим радиусом локализации). При этом удается проанализировать вопрос о роли частотной зависимости коэффициента диф-

фузии и несколько уточнить результаты работы [3] в окрестности перехода металл — диэлектрик. Полученные результаты находятся в качественном согласии и с численным анализом работы [3].

## 2. Микроскопическая модель

Рассмотрение задачи о флуктуациях уровней можно провести, используя стандартную примесную диаграммную технику [8]. Для этого нужно найти коррелятор плотностей состояний  $\nu_\epsilon$  при разных энергиях  $\epsilon_1, \epsilon_2$  [2]:

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \langle \nu_{\epsilon_1} \nu_{\epsilon_2} \rangle - \langle \nu_{\epsilon_1} \rangle \langle \nu_{\epsilon_2} \rangle = \\ = \frac{S^2}{\pi^2 V^2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \{ \langle \text{Im } G_{\epsilon_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \text{Im } G_{\epsilon_2}^R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \rangle - \\ - \langle \text{Im } G_{\epsilon_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \rangle \langle \text{Im } G_{\epsilon_2}^R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \rangle \}, \quad (1)$$

где  $G_\epsilon^R(\mathbf{r}\mathbf{r}')$  — запаздывающая функция Грина электрона с энергией  $\epsilon$  при данной реализации примесного потенциала,  $S$  — степень вырождения электронных уровней,  $V$  — объем системы, угловые скобки обозначают усреднение по примесным конфигурациям.

Коррелятор гриновских функций в (1) легко выражается через двухчастичную функцию Грина. Наиболее существенный вклад в него определяется диаграммами, показанными на рис. 1, на котором представлены

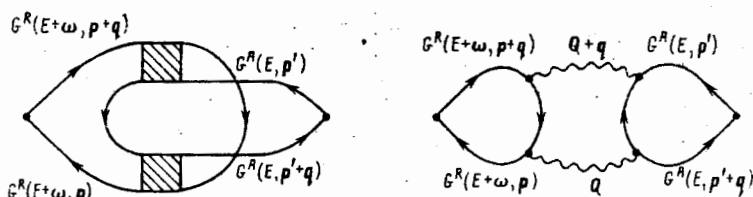


Рис. 1. График, определяющий коррелятор локальных плотностей состояний  $K(\epsilon_1, \epsilon_2)$

два эквивалентных способа изображения графика, определяющего коррелятор локальных плотностей состояний. Заштрихованные блоки и волнистые линии обозначают диффузионный пропагатор. Такой же вклад дает график, отличающийся направлением электронных линий одной из петель (куперонный вклад). Отсюда получается следующее выражение для  $K(\epsilon_1, \epsilon_2)$  [2]:

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = - \frac{S^2}{\pi^2 V^2} \text{Re} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{(\epsilon_1 - \epsilon_2 + iD_0 q^2 + i\gamma)^2}. \quad (2)$$

где  $D_0$  — друдевский коэффициент диффузии электрона,  $\gamma$  — уширение электронных уровней, например из-за неупругих процессов рассеяния. Для изолированного образца в форме параллелепипеда с размерами  $L_x, L_y, L_z$  условия квантования по импульсу имеют вид [2]

$$q_\mu = \pi n_\mu / L_\mu, \quad n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (\mu = x, y, z). \quad (3)$$

Для оценки интересующего нас коррелятора в окрестности порога подвижности можно, в духе самосогласованной теории локализации [6, 7], воспользоваться в (2) простой заменой  $D_0$  на обобщенный коэффициент диффузии  $D_\epsilon(\omega)$ , определяемый следующим уравнением самосогласования:

$$\frac{D_0}{D_\epsilon(\omega)} = 1 + \frac{1}{\pi \nu(\epsilon)} \sum_{|q| < k_0} \frac{1}{-i\omega + D_\epsilon(\omega) q^2}, \quad (4)$$

где  $k_0$  — импульс обрезания, обсуждаемый ниже.

Среднее число уровней в полосе шириной  $E$  с центром в точке  $\varepsilon$  на энергетической оси следующим образом выражается через плотность состояний:

$$N(E) = V \int_{\varepsilon-E/2}^{\varepsilon+E/2} d\varepsilon' \nu(\varepsilon'). \quad (5)$$

Тогда среднеквадратичная флуктуация числа уровней равна [2]

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle = V^2 \int_{\varepsilon-E/2}^{\varepsilon+E/2} d\varepsilon_1 \int_{\varepsilon-E/2}^{\varepsilon+E/2} d\varepsilon_2 K(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (6)$$

В уравнении самосогласования (4) необходимо учесть неупругое затухание  $\gamma$ . Оно будет входить в это уравнение в комбинации  $\omega + i\gamma$ . С учетом такого изменения уравнение (4) дает следующий вид для обобщенного коэффициента диффузии:

$$\frac{D_\varepsilon(\omega)}{D_0} = \begin{cases} 1 - 3\lambda x_0 = \alpha, & |\omega + i\gamma| \ll \omega_c, \quad \lambda < \lambda_c, \\ {}^{3/2}\pi\lambda [-i(\omega + i\gamma)/\varepsilon]^{1/2}, & |\omega + i\gamma| \gg \omega_c, \\ ({}^{3/2}\pi\lambda)^2 \alpha^{-2} [-i(\omega + i\gamma)/\varepsilon], & |\omega + i\gamma| \ll \omega_c, \quad \lambda > \lambda_c. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\lambda = \gamma(\varepsilon)/\pi\varepsilon$ , где  $\gamma(\varepsilon) = \pi\rho U^2 \nu(\varepsilon)$  — «борновская» частота столкновений электронов с примесями (примеси считаем точечными) [8],  $\rho$  — концентрация примесей,  $U$  — их потенциал;  $x_0 = k_0/k_F$  — параметр обрезания, где  $k_0$  и  $k_F$  — соответственно импульсы обрезания и Ферми.

Диффузионное приближение верно для импульсов порядка  $l^{-1}$ , где  $l$  — длина свободного пробега. В металлической области, где  $l^{-1} \gg k_F$ , в качестве импульса обрезания выбирается  $k_0 = l^{-1} = \pi\lambda k_F$ . В диэлектрической области  $l^{-1} \ll k_F$  и в качестве импульса обрезания выбирается  $k_0$  порядка  $k_F$ . Переход в диэлектрическое состояние происходит при  $\alpha = 0$ , т. е. при  $\lambda = \lambda_c = (3\pi)^{-1/2}$ . Поэтому из условия сшивания импульса обрезания в точке перехода получаем

$$x_0 = \frac{k_0}{k_F} = \begin{cases} \pi\lambda, & \lambda < \lambda_c, \\ (\pi/3)^{1/2}, & \lambda > \lambda_c. \end{cases} \quad (8)$$

Характерную частоту  $\omega_c$  выбираем из условия сшивания выражений (7) для коэффициента диффузии по абсолютной величине. При таком выборе сшивания

$$\omega_c = \varepsilon |\alpha|^3 ({}^{3/2}\pi\lambda)^{-3}. \quad (9)$$

Коррелятор плотностей состояний  $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  симметричен относительно переменных  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Поэтому достаточно рассмотреть лишь случай  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . Тогда вместо (2) получаем

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{S^2}{\pi^2 V^2} \operatorname{Re} \sum_q [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + iD_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q^2 + i\gamma]^{-2} = K_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (10)$$

Переходя в (6) к новым переменным  $\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  и  $w = \varepsilon + E/2 - \varepsilon_2$  (рис. 2), имеем

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle = 2V^2 \int_0^E dw \int_0^w d\omega K_{\varepsilon+E/2-w}(\omega). \quad (11)$$

Рассматривается закрытый образец, поэтому в сумму по импульсу в (10) входит член с  $q=0$  (см. (3)). Его необходимо выделить, так как

при  $E, \gamma \ll D_e/L^2$  вклад этого слагаемого будет основным. Здесь  $L$  — размер образца (в дальнейшем в качестве образца будем рассматривать куб со стороной  $L$ ). Вклад этого слагаемого во флуктуации числа уровней не зависит от поведения коэффициента диффузии и равен [2]

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_0 = (S^2/\pi^2) \ln(1 + E^2/\gamma^2). \quad (12)$$

Если неупругое затухание  $\gamma$  много меньше среднего расстояния между уровнями в полосе  $\delta = E/\langle N(E) \rangle \sim 1/v(\epsilon)L^3 \sim \epsilon/(Lk_F)^3$ , то размытие ширины полоски определяется  $\delta$ . В этом случае

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_0 = 2(S^2/\pi^2) \ln \langle N(E) \rangle. \quad (13)$$

Здесь  $\langle N(E) \rangle$  — среднее число уровней в полосе. Поведение флуктуаций числа уровней (13) было получено Дайсоном [4]. В дальнейшем вклад  $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_0$  будем называть дайсоновским.

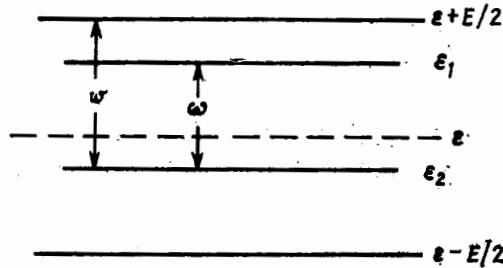


Рис. 2. Новые переменные интегрирования

Учет оставшихся членов в сумме по импульсам можно провести, заменяя суммирование интегрированием. Верхний предел необходимо ограничить импульсом обрезания  $k_0$ , нижний предел будет порядка  $L^{-1}$ . Однако если вклад членов с  $q \neq 0$  ( $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_q$ ) много больше дайсоновского, то отличаем от нуля нижнего предела интегрирования по  $q$  можно пренебречь. Тогда

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_q = -\frac{S^2}{\pi^4} V \int_0^{k_0} q^2 dq \int_0^E dw \int_0^w d\omega [\omega + i\gamma + iD_{\epsilon + E/2 - w}(\omega) q^2]^{-2}. \quad (14)$$

В области энергий, где  $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_0 \gg \langle [\delta N(E)]^2 \rangle_q$ , поведение флуктуаций будет дайсоновским.

### 3. Основные результаты и их обсуждение

Будем рассматривать полоску с центром на уровне Ферми ( $\epsilon = \epsilon_F$ ). Введем  $\Delta = |\epsilon - \epsilon_c|$  — энергетическое расстояние от уровня Ферми до порога подвижности  $\epsilon_c$  и будем интересоваться окрестностью перехода металл — диэлектрик, т. е. случаем  $\Delta \ll \epsilon$ .

Нас интересуют полоски с большим числом уровней ( $\langle N(E) \rangle \gg 1$ ), т. е. полоски с шириной, много большей среднего расстояния между уровнями в полоске:

$$E \gg \delta = E/\langle N(E) \rangle \sim \epsilon/(Lk_F)^3.$$

Если ширина полоски  $E \ll \Delta$ , то частотная зависимость коэффициента диффузии для различных пар уровней в полоске меняется слабо и энергетической зависимостью от  $w$  в коэффициенте диффузии в (14) можно пренебречь.

Если  $E \gg \Delta$ , то частотная зависимость коэффициента диффузии в (14) критическим образом зависит от  $w$  и энергетическую зависимость необ-

ходимо учитывать. В этом случае величина флуктуаций мало отличается от их величины в точке перехода. Поэтому сразу же рассмотрим точку перехода. Используя (7) и (14), получаем

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_q = \begin{cases} \frac{S^2}{4\pi^3} V k_F^3 \frac{E^2}{\varepsilon \gamma}, & E \ll \gamma, \\ \frac{S^2}{8\pi^2} V k_F^3 \frac{E}{\varepsilon}, & \gamma \ll E \ll (\gamma \varepsilon^2)^{1/2}, \\ S^2 \frac{\sqrt{2+1}}{8\pi^3} V k_F^3 \frac{E}{\varepsilon}, & (\gamma \varepsilon^2)^{1/2} \ll E. \end{cases} \quad (15)$$

Сравнивая с вкладом  $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle_0$ , видим, что область дайсоновского поведения флуктуаций отсутствует. Окончательно, для точки перехода находим

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} \frac{S}{\pi} \frac{E}{\gamma}, & E \ll \gamma, \\ S/2, & \gamma \ll E \ll (\gamma \varepsilon^2)^{1/2}, \\ \frac{\sqrt{2+1}}{2\pi} S \approx 0,38S, & (\gamma \varepsilon^2)^{1/2} \ll E. \end{cases} \quad (16)$$

Поведение флуктуаций при  $\gamma \ll E \ll (\gamma \varepsilon^2)^{1/2}$  определяется частотной зависимостью Гетце [9] для обобщенного коэффициента диффузии ( $D_e(\omega) \propto \omega^{1/2}$ ). Этот результат является точным в рамках самосогласованной теории локализации.

При  $E \gg (\gamma \varepsilon^2)^{1/2}$  величина флуктуаций определяется суммарным вкладом от пар уровней с металлическим ( $D_e(\omega) = \text{const}$ ) и диэлектрическим ( $D_e(\omega) \propto -i\omega$ ) поведением коэффициента диффузии, т. е. от областей частот, меньших характерной. Этот результат во многом определяется выбранным нами способом сшивания выражений (7) для коэффициента диффузии из разных областей частот и соответствующим выбором характерной частоты (9). Поэтому к численному значению  $\langle [\delta N(E)]^2 \rangle / \langle N(E) \rangle \approx 0,38S$  при  $E \gg (\gamma \varepsilon^2)^{1/2}$  следует относиться осторожно.

В случае  $\gamma \ll \delta$  размытие ширины полосы определяется средним расстоянием между уровнями в полоске:

$$\delta = E / \langle N(E) \rangle \sim \varepsilon / (L k_F)^3.$$

Тогда для флуктуаций в точке перехода, получаем

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} \approx \begin{cases} S/2, & E \ll \varepsilon / L k_F, \\ 0,38S, & E \gg \varepsilon / L k_F. \end{cases} \quad (17)$$

Теперь перейдем к рассмотрению окрестности перехода. Введем корреляционную длину  $\xi \sim (\varepsilon / \Delta) k_F^{-1}$ , которая в диэлектрической области имеет смысл радиуса локализации. В металлической области  $\xi$  определяет размерный масштаб применимости закона Ома для проводимости [10] и соответственно применимости описания отталкивания энергетических уровней в рамках подхода Дайсона [4].

Характерная частота  $\omega_c$  в полосках с  $E \ll \Delta$  мало меняется для различных пар уровней и определяется средним разбросом уровней в области образца с линейными размерами  $\sim \xi$  ( $\omega_c \sim \Delta^3 / \varepsilon^2 \sim 1 / \nu(\varepsilon) \xi^3$ ). Поэтому при  $\gamma \gg \Delta^3 / \varepsilon^2$  дальнейшее увеличение  $\xi$  уже не влияет ни на поведение коэффициента диффузии ( $D_e(\omega) \propto (-i\omega)^{1/2}$  слабо зависит от  $\xi$ ), ни на поведение флуктуаций. Флуктуации ведут себя так же, как в точке перехода. При  $\gamma \ll \delta \sim \varepsilon / (L k_F)^3$  среднее расстояние между уровнями  $\delta$  определяет

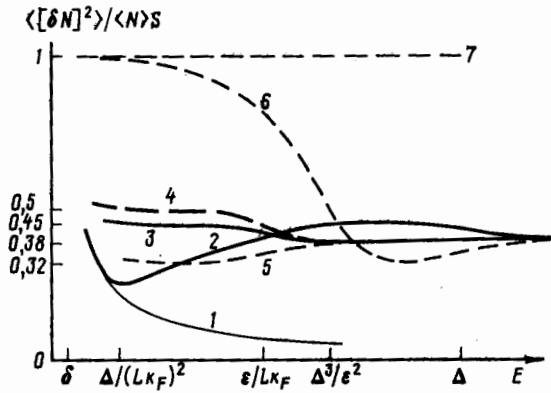


Рис. 3. Качественное поведение флуктуаций числа энергетических уровней при  $\gamma \ll \delta \sim \varepsilon / (Lk_F)^3$ : 1 — дайсоновское поведение флуктуаций; 2 — в металлической области ( $\xi \ll L$ ); 3 — в металлической области ( $\xi \sim L$ ); 4 — в точке перехода металл — диэлектрик; 5 — в диэлектрической области ( $\xi \sim L$ ); 6 — в диэлектрической области ( $\xi \ll L$ ); 7 — в «глубоком» диэлектрике

При  $E \gg \Delta$  мы находимся практически в точке перехода (17), поэтому

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\pi} S \approx 0,38S.$$

Этот результат, как уже отмечалось, также происходит из области частот, меньших характерной. Однако в отличие от предыдущего случая (19) здесь характерные частоты  $\omega_c$  сильно отличаются для разных положений нижнего уровня, т. е. разных  $w$ , и основной вклад во флуктуации дает как область с металлическим поведением ( $D_e(\omega) = \text{const}$ ), так и область с диэлектрическим поведением ( $D_e(\omega) \propto -i\omega$ ).

2. Флуктуации в металлической области,  $L \sim \xi$  (рис. 3, кривая 3). С увеличением беспорядка корреляционная длина  $\xi$  в металлической области растет,  $\Delta(\xi)$  уменьшается. При  $L \sim \xi$  получаем  $\Delta \sim \varepsilon / Lk_F$  и  $\Delta / (Lk_F)^2 \sim \Delta^3 / \varepsilon^2 \sim \varepsilon / (Lk_F)^3$ . Таким образом, область применимости дайсоновского поведения флуктуаций и поведения типа (18) пропадает. Получаем

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} \approx \begin{cases} 0,45S, & E \ll \varepsilon / Lk_F, \\ 0,38S, & E \gg \varepsilon / Lk_F. \end{cases} \quad (20)$$

3. Флуктуации в диэлектрической области,  $L \gg \xi$  (рис. 3, кривая 6). При  $E \ll \Delta^3 / \varepsilon^2 \sim 1/\nu(\varepsilon)\xi^3$  самосогласованная теория локализации не дает разумных значений для величины флуктуаций (Приложение 1). Это связано с необходимостью учета дискретности уровней в диэлектрической области. Действительно, среднее энергетическое расстояние между уровнями, расположенными в области образца с размерами порядка  $\xi$ , будет  $\sim 1/\nu(\varepsilon)\xi^3 \sim \Delta^3 / \varepsilon^2$ . Соответственно уровни в полоске, ширина которой много меньше  $\Delta^3 / \varepsilon^2$ , будут пространственно разнесены на расстояния, большие  $\xi$ . Следовательно, уровни перекрываются слабо, они независимы, и флуктуации будут такими же, как в «глубоком» диэлектрике:

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} = S. \quad (21)$$

При  $\Delta^3 / \varepsilon^2 \ll E \ll \Delta$  имеем

$$\langle [\delta N]^2 \rangle = \frac{S^2}{4\pi^3} V k_F^3 \frac{E}{\varepsilon}, \quad \frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{S}{\pi} \approx 0,32S. \quad (22)$$

Такая величина флуктуаций определяется областью частот, меньших характерной частоты  $\omega_c$  с диэлектрическим поведением коэффициента диф-

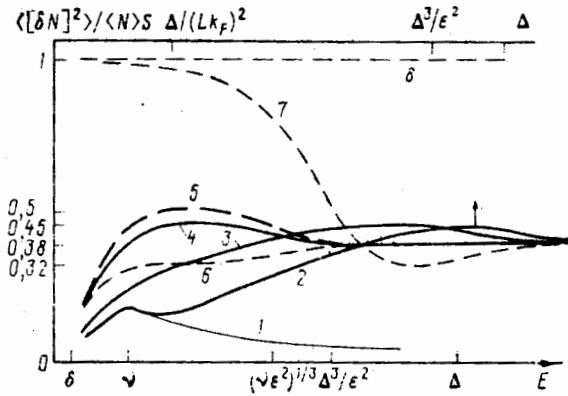


Рис. 4. Качественное поведение флуктуаций числа энергетических уровней при  $\gamma \gg \delta \sim \epsilon / (Lk_F)^3$ : 1 — дайсоновское поведение флуктуаций; 2 — в металлической области,  $\gamma \ll \Delta / (Lk_F)^2$ ; 3 — в металлической области,  $\Delta / (Lk_F)^2 \ll \gamma \ll \Delta^3 / \epsilon^2$ ; 4 — в металлической области,  $\gamma \sim \Delta^3 / \epsilon^2$ ; 5 — в точке перехода металл — диэлектрик; 6 — в диэлектрической области,  $\gamma \sim \Delta^3 / \epsilon^2$ ; 7 — в диэлектрической области,  $\gamma \ll \Delta^3 / \epsilon^2$ ; 8 — в «глубоком» диэлектрике (на рисунке вместо  $\gamma$  следует читать  $\gamma$ )

фузии. Как и в случае (19), результат (22) количественно зависит от способа сшивания решений для коэффициента диффузии из разных областей частот и от выбора  $\omega_c$ .

При  $E \gg \Delta$  мы находимся практически в точке перехода, т. е.

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\pi} S \approx 0,38S.$$

4. Флуктуации в диэлектрической области,  $L \sim \xi$  (рис. 3, кривая 5). При приближении к переходу с диэлектрической стороны  $\xi$  растет,  $\Delta$  уменьшается, и при  $L \sim \xi$  получаем  $\Delta^3 / \epsilon^2 \sim \epsilon / (Lk_F)^3 \sim \delta$  и  $\Delta \sim \epsilon / Lk_F$ , т. е. область применимости выражения (21) пропадает:

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} \approx \begin{cases} 0,32S, & E \ll \epsilon / Lk_F, \\ 0,38S, & E \gg \epsilon / Lk_F. \end{cases} \quad (23)$$

#### Б. Поведение флуктуаций при $\gamma \gg \epsilon / (Lk_F)^3 \sim \delta$

Поведение флуктуаций при  $\gamma \gg \delta$  приведено на рис. 4, а соответствующие аналитические выражения — в Приложении 2.

1. Флуктуации в металлической области,  $\gamma \ll \Delta / (Lk_F)^2$ . При  $E \ll \Delta / (Lk_F)^2 \sim E_c$  осуществляется дайсоновское поведение флуктуаций, которое для  $\gamma \gg \delta$  имеет вид

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle = \frac{S^2}{\pi^2} \ln \left( 1 + \frac{E^2}{\gamma^2} \right).$$

В остальном поведение флуктуаций совпадает с описанным в случае А для металлической области с  $L \gg \xi$ .

2. Флуктуации в металлической области,  $\Delta / (Lk_F)^2 \ll \gamma \ll \Delta^3 / \epsilon^2$ . Область применимости дайсоновского поведения пропадает. При  $E \ll \gamma$  флуктуации становятся больше дайсоновских и имеют вид

$$\langle [\delta N]^2 \rangle = S^2 \frac{(3\pi)^4}{2^7 \pi^3} V k_F^3 \frac{E^2}{\Delta^4 \gamma^{1/2}}.$$

При  $E \gg \gamma$  флуктуации имеют такой же вид, как и в случае 1 при  $E \gg \Delta / (Lk_F)^2$ .

3. Флуктуации в металлической и диэлектрической областях,  $\gamma \sim \Delta^3/\epsilon^2$ . При  $E \ll \gamma$  флуктуации имеют вид

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{S E}{\pi \gamma}.$$

При  $E \gg \gamma$ , так же как и в случае А при  $L \sim \xi$ ,

$$\frac{\langle [\delta N]^2 \rangle}{\langle N \rangle} = \text{const},$$

причем величины const такие же, как и в случае А для металлической и диэлектрической областей с  $L \sim \xi$  соответственно. Однако небольшое изменение величины const, происходящее в случае А при  $E \sim \epsilon/Lk_F$ , здесь происходит при  $E \sim (\gamma \epsilon^2)^{1/2}$ .

4. Флуктуации в диэлектрической области,  $\gamma \ll \Delta^3/\epsilon^2$ . Флуктуации совпадают с описанными в случае А для диэлектрической области с  $L \gg \xi$ .

#### 4. Заключение

Использование самосогласованной теории локализации позволяет получить картину поведения флуктуаций числа энергетических уровней в системах начиная от слабонеупорядоченного металла вплоть до андерсоновского диэлектрика (с достаточно большим радиусом локализации). Качественно картина поведения флуктуаций согласуется с рассмотрением, основанным на скэйлинговой теории локализации [3]. Учет частотной зависимости коэффициента диффузии приводит к незначительному изменению отношения  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle$  вблизи перехода по сравнению с полученным в [3]. Качественный же вывод о том, что это отношение вблизи перехода слабо зависит от ширины полосы, сохраняется. Из работы следует, что в точке перехода  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle \approx 1/2$ . Следует заметить, однако, что численное значение отношения  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle$  в окрестности перехода может несколько отличаться от полученных в данной работе. Дело в том, что эти числа в сильной степени определяются способом спивания решений для  $D_e(\omega)$  из разных областей частот и соответствующим выбором характерной частоты  $\omega_c$ . Следовало бы ожидать, например, что величина флуктуаций, а следовательно, и  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle$ , в окрестности перехода со стороны диэлектрика будет несколько больше, чем со стороны металла, вследствие уменьшения величины отталкивания уровней с увеличением беспорядка. В наших расчетах это не так (см. рис. 3, 4). Имеет ли полученная немонотонность физический смысл, в настоящее время неясно. Возможно также, что в диэлектрической области необходим учет импульсной зависимости коэффициента диффузии. Об этом, возможно, говорит неприменимость приближений, основанных на самосогласованной теории локализации, в диэлектрической области при  $E \ll 1/\nu(\epsilon) \xi^3$ . Полученная нами картина поведения флуктуаций хорошо согласуется также с результатами численного моделирования, осуществленного в работе [3]. Например, вблизи перехода численное значение  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle$  действительно лежит около значения  $1/2$ . Следует заметить также, что численное моделирование в [3] включало лишь область с  $E < \epsilon/Lk_F$ , т. е. не позволило рассмотреть в диэлектрической области «колено» перехода от поведения  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle = 1$  при  $E \ll 1/\nu(\epsilon) \xi^3$  до  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle \approx 1/2$  при  $E \gg 1/\nu(\epsilon) \xi^3 > \epsilon/Lk_F$  (см. рис. 3).

Идея настоящей работы возникла в ходе полезных дискуссий с Б. Л. Альтшулером, которому авторы выражают свою искреннюю признательность.



**Флуктуации числа энергетических уровней  
в диэлектрической области ( $\gamma, E \ll \Delta^3/\epsilon^2 \sim 1/\nu(\epsilon)\xi^3$ )**

В диэлектрической области при  $E, \gamma \ll \Delta^3/\epsilon^2$  коэффициент диффузии принимает вид

$$D(\omega) = -i(\omega + i\gamma)\xi^2, \quad (\text{П1.1})$$

где  $\xi = (3\pi)^{1/2}(\epsilon/\Delta)k_F^{-1}$  — радиус локализации. Тогда, используя (14), получаем следующее выражение для флуктуаций:

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle = \frac{S^2}{8\pi^3} \frac{V}{\xi^3} \ln\left(1 + \frac{E^2}{\gamma^2}\right) = \frac{1}{8\pi} \frac{V}{\xi^3} \langle [\delta N(E)]^2 \rangle_0. \quad (\text{П1.2})$$

Результат (П1.2) можно интерпретировать как сумму независимых дайсоновских флуктуаций в  $V/\xi^3$  кубиках размером порядка  $\xi$ . Флуктуации в кубиках независимы, поскольку при  $E \ll 1/\nu(\epsilon)\xi^3$  уровни пространственно разнесены на расстояния, большие  $\xi$ , и слабо перекрываются. Однако в самом кубике размером порядка  $\xi$  среднее число уровней из полоски с  $E \ll 1/\nu(\epsilon)\xi^3$  будет много меньше единицы, и наше описание неприменимо. В действительности полоски такой ширины требуют учета дискретности уровней. Уровни в полоске слабо перекрываются, и флуктуации будут такими же, как в глубоком диэлектрике, т. е.  $\langle [\delta N]^2 \rangle / \langle N \rangle = 1$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**Флуктуации числа энергетических уровней ( $\gamma \gg \delta \sim \epsilon / (Lk_F)^2$ )**

1. Флуктуации в металлической области,  $\gamma \ll \Delta / (Lk_F)^2$  (рис. 4, кривая 2). При  $E \ll \Delta / (Lk_F)^2$  осуществляется дайсоновское поведение флуктуаций:

$$\langle [\delta N(E)]^2 \rangle = \frac{S^2}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{E^2}{\gamma^2}\right).$$

В других случаях получаем

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} \frac{S}{(3\pi)^{1/2}} \frac{\epsilon E^{1/2}}{\Delta^{3/2}}, & \frac{\Delta}{(Lk_F)^2} \ll E \ll \frac{\Delta^3}{\epsilon^2}, \\ \frac{2^{1/2}}{\pi} S \approx 0,45S, & \frac{\Delta^3}{\epsilon^2} \ll E \ll \Delta, \\ \frac{2^{1/2}+1}{2\pi} S \approx 0,38S, & \Delta \ll E. \end{cases} \quad (\text{П2.1})$$

2. Флуктуации в металлической области,  $\Delta / (Lk_F)^2 \ll \gamma \ll \Delta^3/\epsilon^2$  (рис. 4, кривая 3). Область применимости дайсоновского поведения флуктуаций пропадает и флуктуации имеют вид

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} S \frac{(3\pi)^{1/2}}{2^{1/2}\pi} \frac{\epsilon E}{\Delta^{3/2}\gamma^{1/2}}, & E \ll \gamma, \\ \frac{S}{(3\pi)^{1/2}} \frac{\epsilon E^{1/2}}{\Delta^{3/2}}, & \gamma \ll E \ll \frac{\Delta^3}{\epsilon^2}, \\ \frac{2^{1/2}}{\pi} S \approx 0,45S, & \frac{\Delta^3}{\epsilon^2} \ll E \ll \Delta, \\ \frac{2^{1/2}+1}{2\pi} S \approx 0,38S, & \Delta \ll E. \end{cases} \quad (\text{П2.2})$$

3. Флуктуации в металлической области,  $\gamma \sim \Delta^3/\epsilon^2$   
(рис. 4, кривая 4):

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} \frac{S}{\pi} \frac{E}{\gamma}, & E \ll \gamma, \\ \frac{2^{1/2}}{\pi} S \approx 0,45S, & \gamma \ll E \ll (\gamma \epsilon^2)^{1/2}, \\ \frac{2^{1/2}+1}{2\pi} S \approx 0,38S, & (\gamma \epsilon^2)^{1/2} \ll E. \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

4. Флуктуации в точке перехода (рис. 4, кривая 5):

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} \frac{S}{\pi} \frac{E}{\gamma}, & E \ll \gamma, \\ S/2, & \gamma \ll E \ll (\gamma \epsilon^2)^{1/2}, \\ \frac{2^{1/2}+1}{2\pi} S \approx 0,38S, & (\gamma \epsilon^2)^{1/2} \ll E. \end{cases} \quad (\text{П2.4})$$

5. Флуктуации в диэлектрической области,  $\gamma \sim \Delta^3/\epsilon^2$   
(рис. 4, кривая 6):

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} \frac{S}{\pi} \frac{E}{\gamma}, & E \ll \gamma, \\ S/\pi \approx 0,32S, & \gamma \ll E \ll (\gamma \epsilon^2)^{1/2}, \\ \frac{2^{1/2}+1}{\pi} S \approx 0,38S, & (\gamma \epsilon^2)^{1/2} \ll E. \end{cases} \quad (\text{П2.5})$$

6. Флуктуации в диэлектрической области,  $\gamma \ll \Delta^3/\epsilon^2$   
(рис. 4, кривая 7):

$$\frac{\langle [\delta N(E)]^2 \rangle}{\langle N(E) \rangle} = \begin{cases} S, & E \ll \Delta^3/\epsilon^2, \\ S/\pi \approx 0,32S, & \Delta^3/\epsilon^2 \ll E \ll \Delta, \\ \frac{2^{1/2}+1}{\pi} S \approx 0,38S, & \Delta \ll E. \end{cases} \quad (\text{П2.6})$$

#### Список литературы

1. Washburn S., Webb R. A. // *Adv. Phys.* 1986. V. 35. P. 375.
2. Альшутлер Б. Л., Шкловский Б. И. // *ЖЭТФ*. 1986. Т. 91. С. 220.
3. Альшутлер Б. Л., Жареклиев И. Х., Кочичгова С. А., Шкловский Б. И. // *ЖЭТФ*. 1988. Вып. 3. Т. 94. С. 343.
4. Dyson F. J. // *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. P. 701.
5. Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V. // *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 42. P. 673.
6. Wölfle P., Vollhardt D. // *Anderson localization*/Ed. by Y. Nagaoka, H. Fukuyama. Springer Series in Solid State Sciences. V. 39. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1982. P. 26.
7. Sadovskii M. V. // *Sov. Sci. Rev.—Physics Reviews*/Ed. by I. M. Khalatnikov. V. 7. New York: Harwood Academic, 1986. P. 1.
8. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. // *Методы квантовой теории поля в статистической физике*. М.: Наука, 1962.
9. Götze W. // *Phil. Mag.* B. 1981. V. 43. P. 219.
10. Imry Y. // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 44. P. 489.

Институт электрофизики  
Уральского отделения  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
22.02.90