

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Иллюзия планковской релаксации в металлах

М.В. Садовский

Проведён критический обзор недавних попыток ввести новый квантовый ("планковский") предел для температурной зависимости частоты неупругого рассеяния электронов в металлах. Кратко рассматриваются основные экспериментальные факты и некоторые простые теоретические модели, объясняющие линейное возрастание сопротивления с увеличением температуры (начиная с области очень низких температур) в сверхпроводящих купратах и аналогичных системах. Общепринятое теоретическое объяснение такого поведения в настоящее время отсутствует. Обсуждаются известные квантовые ограничения на величину электропроводности (сопротивления). Показано, что предлагавшийся в ряде работ универсальный планковский предел для частоты неупругой релаксации является в значительной мере иллюзорным и связанным с определённой процедурой представления экспериментальных данных.

Ключевые слова: сопротивление металлов, время релаксации, эффективная масса, квантовые флуктуации, высокотемпературные сверхпроводники

PACS numbers: 72.10.Di, 72.15.Cz, 72.15.Lh

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.08.038821>

Содержание

1. Введение (182).
 2. Эксперимент (183).
 3. Квантовые оценки сопротивления металлов (186).
 - 3.1. Предел Иоффе–Регеля.
 - 3.2. Планковская релаксация.
 - 3.3. Электрон-фононное взаимодействие.
 4. Элементарная модель рассеяния на квантовых флуктуациях в металлах (188).
 - 4.1. Рассеяние электронов на квантовых флуктуациях.
 - 4.2. Фононы.
 - 4.3. Более общая модель.
 - 4.4. Окрестность квантовой критической точки.
 5. Общие соотношения для функции Грина и проводимости (192).
 - 5.1. Функция Грина в системе взаимодействующих частиц.
 - 5.2. Общие выражения для проводимости.
 - 5.3. Самосогласованный расчёт.
 - 5.4. Иллюзия планковской релаксации.
 - 5.5. Ещё раз о соотношении неопределённостей.
 6. Заключение (195).
- Приложение. Распределение по импульсам при планковской релаксации (197).
- Список литературы (198).

1. Введение

Линейное по температуре возрастание электросопротивления купратов и ряда других коррелированных систем в широком интервале температур, от самых низких до достаточно высоких, на протяжении уже многих лет относится к числу главных загадок физики высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП).

Наблюдавшееся в купратах начиная с самых ранних экспериментов [1, 2] указанное возрастание оказалось одним из наиболее ярких свойств этих соединений в нормальной фазе, проявляющимся в оптимально допированных системах при температурах начиная от температуры сверхпроводящего перехода T_c и вплоть до самых высоких температур, которых можно достигнуть без разрушения образцов. Впоследствии аналогичное поведение электросопротивления наблюдалось и в ряде других систем.

Сам по себе факт линейного возрастания электросопротивления металлов с увеличением температуры не вызывает никакого удивления, он наблюдается практически всегда, но при достаточно высоких температурах, $T > \Theta_D/5$, где Θ_D — температура Дебая, которая обычно равна нескольким сотням градусов Кельвина. Удивительным является то, что линейное возрастание в купратах начинается при существенно более низких температурах. Общепринятое объяснение такого поведения электросопротивления до сих пор отсутствует, хотя за прошедшие годы предложено довольно много теоретических моделей, претендующих на такое объяснение. Но не это является целью настоящей статьи.

Дело в том, что в последнее время появился ряд интересных работ [3, 4], в которых на основе анализа довольно обширного экспериментального материала по многим соединениям показано, что в области линейного возрастания сопротивления по температуре частота рассеяния электронов (величина, обратная времени релаксации) с довольно высокой точностью описывается зависимостью $\Gamma(T) = 1/\tau = \alpha k_B T/\hbar$, где $\alpha \sim 1$, k_B — постоянная Больцмана, и слабо изменяется при переходе от одного материала к другому. В частности, для систем в окрестности квантовых критических точек (на фазовой диаграмме купратов и ряда аналогичных систем) вели-

М.В. Садовский. Институт электрофизики УрО РАН, ул. Амурдсена 106, 620016 Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: sadovskii@ier.uran.ru

Статья поступила 5 августа 2020 г.

чина α лежит в интервале 0,7–1,1 и, как кажется на первый взгляд, является универсальной и не зависящей от величины взаимодействия, ведущего к релаксации электронного тока. Более того, оказалось, что аналогичная зависимость довольно хорошо описывает данные и для целого ряда обычных металлов (типа Cu, Au, Al, Ag, Pb, Nb и т.п.) в области линейного по температуре возрастания сопротивления. При этом область изменения α охватывает заметно более широкий интервал — от 0,7 до 2,8 [3, 4]. В связи с этими (и аналогичными) результатами было введено [5] представление об универсальном (не зависящем от силы взаимодействия) "планковском" верхнем пределе частоты рассеяния: $1/\tau_p = \Gamma_p \sim k_B T/\hbar$.

Ниже мы дадим краткий обзор соответствующих экспериментальных данных, а также обсудим некоторые теоретические модели, накладывающие квантовые ограничения на электросопротивление металлов, с целью понять степень обоснованности концепции "планковской" релаксации в металлах.

2. Эксперимент

Температурная зависимость электросопротивления в области достаточно низких температур ($T < 0,2\Theta_D \ll E_F$, где E_F — энергия Ферми) описывается выражением

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_T(T) = \rho_0 + a_{ee} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 + a_{ep} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^5, \quad (1)$$

где ρ_0 — остаточное сопротивление при нулевой температуре, обусловленное рассеянием на примесях, второе слагаемое в правой части — вклад электрон-электронного (ee) рассеяния, третье — низкотемпературный вклад электрон-фононного (ep) рассеяния, описываемый теорией Блоха–Грюнайзена [6]. При достаточно высоких температурах, $T > 0,2\Theta_D$, эта теория даёт

$$\rho(T) - \rho_0 = AT. \quad (2)$$

Такое поведение электросопротивления чётко наблюдается и в эксперименте, как показано на рис. 1, где приведены данные для ряда простых металлов [7]. Из этих результатов видно, что температурная зависимость сопротивления (проводимости) почти целиком связана с процессами неупругого рассеяния на фононах. В случае существенного вклада рассеяния на других коллективных возбуждениях, например на спиновых флуктуациях, можно выписать, по сути дела, вполне аналогичные выражения.

Из представленных данных видно, что при температурах $T > \Theta_D/5$ сопротивление металла линейно возрастает с увеличением температуры. В большинстве металлов $\Theta_D \sim 200$ –600 К. В то же время критическая температура сверхпроводящего перехода в купратах составляет несколько десятков градусов Кельвина, так что $T_c \sim \Theta_D/5$. Поэтому в течение довольно длительного времени можно было питать надежду [8] на то, что в купратах линейное возрастание электросопротивления с увеличением температуры можно объяснить обычным электрон-фононным рассеянием с учётом того, что это возрастание происходит вне области низкотемпературного степенного возрастания, которая маскируется переходом в сверхпроводящее состояние. Имелись, правда, данные по единичным образцам с низкими значениями T_c , для которых линейное возрастание наблюдалось на-

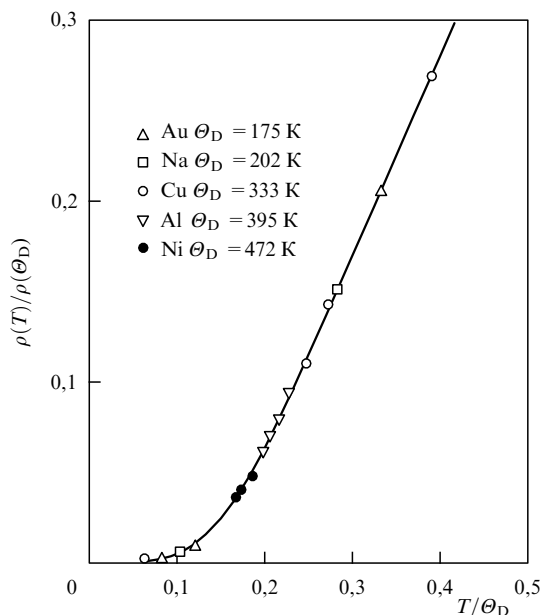


Рис. 1. Температурная зависимость электросопротивления типичных металлов [7].

чина с аномально низких температур, $T < 10$ К [9], но такие примеры были очень редки. Эксперименты в нормальной фазе при достаточно низких температурах просто отсутствовали, поскольку для разрушения сверхпроводящего состояния в типичных купратах требовались слишком большие магнитные поля.

Ситуация в этом отношении сильно изменилась в последние годы, когда такие эксперименты [3, 4] удалось провести. В работах [3, 4] приведены данные по сопротивлению в целом ряде ВТСП на основе купратов и их аналогов в очень сильных магнитных полях, подавляющих сверхпроводимость. На основе детального анализа этих экспериментов и данных других авторов было показано, что линейный по температуре ход сопротивления сохраняется во многих случаях в нормальной фазе при значениях температур вплоть до самых низких.

Типичные примеры экспериментальных данных из работ [3, 4] приведены на рис. 2–4. В самих работах [3, 4], отличающихся весьма детальным анализом экспериментальной ситуации, можно найти много дополнительных данных. Эти результаты обострили вопрос о природе линейного по температуре электросопротивления в рассматриваемых системах. Надо сразу сказать, что данная проблема до сих пор остаётся нерешённой, но не её анализ является целью настоящей статьи.

Для нас сейчас основной интерес представляет проведённый в [3, 4] анализ экспериментальных данных, позволивший авторам установить температурную зависимость времени релаксации τ , определяющего величину сопротивления, и прийти к довольно неожиданным результатам и выводам.

Основная идея анализа, проведённого в работах [3, 4], состояла в следующем. Запишем формулу Друде для проводимости как

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} = \frac{ne^2v_F\tau}{\hbar k_F}, \quad (3)$$

где v_F — скорость электрона на поверхности Ферми, m^* — эффективная масса, $p_F = m^*v_F = \hbar k_F$ — импульс

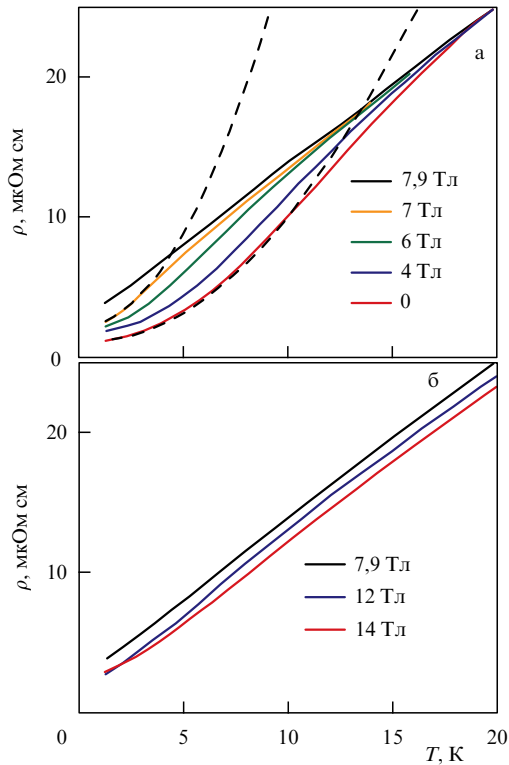


Рис. 2. (В цвете онлайн.) (а) Электросопротивление ρ как функция температуры T высокочистого монокристалла $\text{Sr}_3\text{Ru}_2\text{O}_7$ в нулевом магнитном поле (красная кривая), в магнитных полях величины 4 Тл (синяя), 6 Тл (зелёная), 7 Тл (оранжевая) и в критическом поле $H_c = 7,9$ Тл (чёрная), соответствующем квантовой критической точке ($H_c, T = 0$). Штриховые линии — результаты подгонки зависимости $\rho_0 + AT^2$ в области низких температур, сравнение с которыми демонстрирует сужение области температур, в которой наблюдается квадратичная зависимость от температуры и переход к линейной зависимости [3]. (б) Температурная зависимость сопротивления ρ в поле H_c (чёрная кривая), 12 Тл (синяя) и 14 Тл (красная) [3].

Ферми. Соответственно, для сопротивления имеем¹

$$\rho = \frac{m^*}{ne^2\tau} = \frac{\hbar k_F}{ne^2v_F\tau}. \quad (4)$$

Эффективная масса m^* , или величина $\hbar k_F/v_F$, определялась в [3, 4] из измерений электронного вклада в теплоёмкость, который выделяется при низких температурах, или из измерений эффекта де Гааза – ван Альфена, который также измеряется при достаточно низких температурах. Эти измерения фактически определяют эффективную массу m^* и фермиевский волновой вектор k_F как некие усреднённые значения для каждого из карманов поверхности Ферми.

Плотность электронов n , входящая в выражения (3), (4), может быть вычислена (для систем разной размерности) как

$$n = \frac{2k_F}{\pi d_b d_c} \quad (\text{квазиодномерный случай}), \quad (5)$$

$$n = \frac{k_F^2}{2\pi d} \quad (\text{квазидвумерный случай}), \quad (6)$$

¹ Для краткости мы приводим здесь выражения для однозонной модели. В многозонном случае надо учесть вклады от всех карманов поверхности Ферми. Соответствующие выражения можно найти в [3, 4].

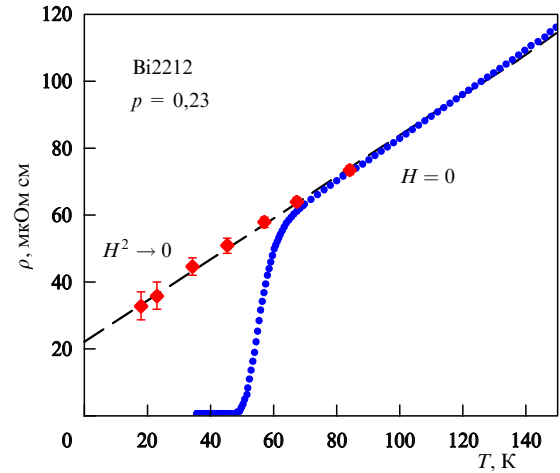


Рис. 3. (В цвете онлайн.) Электросопротивление тонкой плёнки Bi2212 как функция температуры при $H = 0$ (синяя кривая). Красные кружки (и штриховая линия) показывают сопротивление в нормальной фазе при $T < T_c$, полученной подавлением сверхпроводимости внешним магнитным полем, экстраполяцией зависимости $\rho = a + bH^2$ [4].

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad (\text{трёхмерный случай}), \quad (7)$$

где d_b и d_c — расстояния между соседними проводящими цепочками (ориентированными вдоль оси a) в направлении осей b и c в квазиодномерной системе, d — расстояние между соседними проводящими плоскостями в квазидвумерном случае.

Если выделить температурно-зависящую часть сопротивления в виде (2) и ввести линейную по температуре (планковскую) частоту релаксации

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \alpha \frac{k_B T}{\hbar}, \quad \alpha \sim \text{const}, \quad (8)$$

то сразу же получим

$$A = \frac{d\rho}{dT} = \alpha \frac{k_B}{\hbar} \frac{m^*}{ne^2} \quad \text{или} \quad (9)$$

$$\frac{ne^2}{k_B k_F} \frac{d\rho}{dT} = \alpha \frac{m^*}{\hbar k_F} = \frac{\alpha}{v_F}, \quad (10)$$

что даёт рабочие формулы для представления экспериментальных данных в области линейной по температуре зависимости электросопротивления [3, 4].

В работах [3, 4] проведён чрезвычайно детальный анализ экспериментальных данных по довольно большому числу систем (соединений) с весьма различными электронными структурами — от ВТСП на основе оксидов меди и железа до органических металлов типа $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$, соединений $\text{Sr}_3\text{Ru}_2\text{O}_7$, CeCoIn_5 , UPt_3 , CeRu_2Si_2 , в которых наблюдается линейное возрастание сопротивления с увеличением температуры.

Оказалось, что во всех этих случаях для столь различных систем экспериментальные данные для так определённой частоты релаксации хорошо описываются зависимостью типа (8), причём величина α для большинства этих систем лежит в интервале 0,7–1,1 и, как кажется, является универсальной (не зависящей от особенностей электронного спектра или величины взаимодействия, приводящего к рассеянию электронов). Более

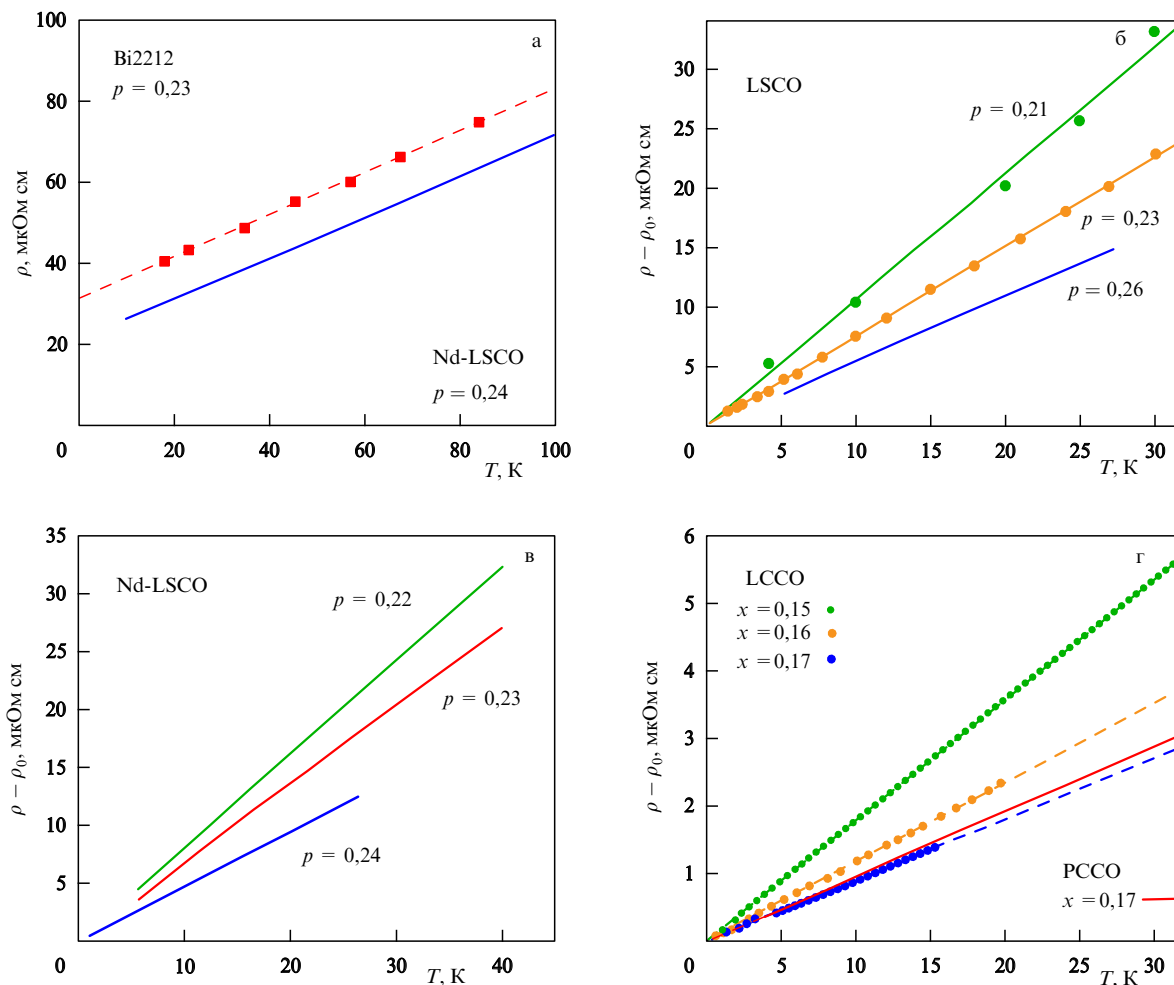


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Линейная по температуре зависимость сопротивления в передопоированных купратах. Показано поведение: (а) ρ в высокопроводящей плоскости (т.е. ρ_{ab}) в Nd-LSCO при $p = 0,24$ (синяя прямая, $H = 16$ Тл) и Bi2212 при $p = 0,23$ (красные символы, $H = 55$ Тл); (б) $\rho(T) - \rho_0$ в LSCO при $p = 0,21$ (зелёные символы, $H = 48$ Тл) и $p = 0,23$ (оранжевые, $H = 48$ Тл), $p = 0,26$ (синие, $H = 18$ Тл); (в) $\rho(T) - \rho_0$ в Nd-LSCO при $H = 33$ Тл для $p = 0,22$ (зелёные), $p = 0,23$ (оранжевые) и $p = 0,24$ (синие); (г) $\rho(T) - \rho_0$ в LCCO при $x = 0,16$ (оранжевые, $H = 6,5$ Тл) и $x = 0,17$ (синие, $H = 4$ Тл) и PCCO при $x = 0,17$ (красные, $H = 16$ Тл) [4].

Таблица 1. Экспериментальные значения параметров для ряда квазидвумерных систем

Соединение	Легирование	$n, 10^{27} \text{ м}^{-3}$	m^*/m_0	$A/d, \text{ Ом К}^{-1}$	α
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8-\delta}$ (Bi2212)	$p = 0,23$	6,8	$8,4 \pm 1,6$	$8,0 \pm 0,9$	$1,1 \pm 0,3$
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CuO}_{6+\delta}$ (Bi2201)	$p = 0,40$	3,5	$7 \pm 1,5$	8 ± 2	$1,0 \pm 0,4$
$\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (LSCO)	$p = 0,26$	7,8	$9,8 \pm 1,7$	$8,2 \pm 1,0$	$0,9 \pm 0,3$
$\text{La}_{1,6-x}\text{Nd}_{0,4}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (Nd-LSCO)	$p = 0,24$	7,9	12 ± 4	$7,4 \pm 0,8$	$0,7 \pm 0,4$
$\text{Pr}_{2-x}\text{Ce}_x\text{CuO}_{4\pm\delta}$ (PCCO)	$x = 0,17$	8,8	$2,4 \pm 0,1$	$1,7 \pm 0,3$	$0,8 \pm 0,2$
$\text{La}_{2-x}\text{Ce}_x\text{Cu}_4$ (LCCO)	$x = 0,15$	9,0	$3,0 \pm 0,3$	$3,0 \pm 0,45$	$1,2 \pm 0,3$
$(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$ (TMTSF)	$P = 11$ кбар	1,4	$1,15 \pm 0,2$	$2,8 \pm 0,45$	$1,0 \pm 0,3$

того, оказалось, что аналогичная зависимость довольно хорошо описывает данные и для целого ряда обычных металлов (Cu, Au, Al, Ag, Pb, Nb), хотя область изменения α для них охватывает заметно более широкий интервал — от 0,7 до 2,8 [3, 4].

В таблице 1 мы приводим в качестве примера экспериментальные значения обсуждавшихся выше параметров, найденные в работе [4], для ряда квазидвумерных систем (дырочные и электронные купраты, органика).

В работах [3, 4] можно найти дальнейшие подробности и детальные данные аналогичного типа для всех упомянутых выше систем.

Сказанное выше хорошо иллюстрируется сводным графиком, приведённым на рис. 5, где в логарифмическом масштабе показаны данные, представленные в соответствии с выражением (10). Эти результаты выглядят вполне нетривиальными и, казалось бы, подтверждают концепцию универсального "планковского" механизма релаксации электронов в металлах, высказанную ранее [5] применительно к физике купратов. Более того, значение $\alpha \sim 1$, которое наблюдается для столь широкого круга металлов с весьма различной структурой электронного спектра и весьма различными поверхностями Ферми, наводит на мысль о том, что (8) играет роль

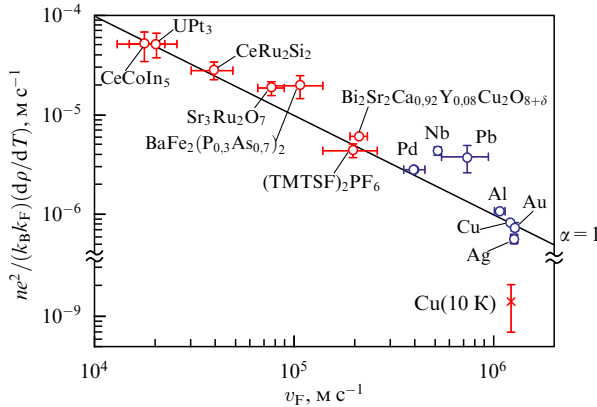


Рис. 5. (В цвете онлайн.) Сводная картина для различных металлов (различных значений скорости Ферми v_F), демонстрирующая линейное возрастание сопротивления с увеличением температуры. Эти металлы входят в состав систем с тяжёлыми фермионами, оксидов, пниктидов и органических металлов, в которых линейная по T зависимость сопротивления при низких температурах возникает за счёт включения магнитного поля, изменения химического состава или внешнего гидростатического давления. Аналогичные данные отражают ситуацию и для обычных металлов с линейным по температуре поведением сопротивления при достаточно высоких температурах (синие символы), тогда как при более низких температурах их сопротивление на несколько порядков меньше (соответствующие значения для Cu при $T = 10$ K приведены в правом нижнем углу рисунка). Прямая линия, отмеченная как $\alpha = 1$, соответствует $(\tau T)^{-1} = k_B/\hbar$ [4].

универсального квантового *верхнего* предела для частоты неупругой (температурно-зависящей) релаксации электронов в металлах.

Для объяснения такого температурного поведения сопротивления столь различных систем, в том числе начиная от самых низких температур, к настоящему времени предложен ряд достаточно сложных теоретических моделей [10–13], включая совсем экзотические, основанные на аналогиях, взятых из физики чёрных дыр, космологии и теории суперструн (см., например, [14–17]). Ниже мы ограничимся главным образом простым анализом на основе традиционных подходов квантовой теории твёрдого тела.

3. Квантовые оценки сопротивления металлов

Напомним некоторые элементарные теоретические соображения относительно проводимости (сопротивления) металлов. Запишем формулы Друде для упругого и неупругого рассеяния:

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m} \tau_0, \quad \rho_0 = \frac{m}{ne^2} \frac{1}{\tau_0}, \quad (11)$$

$$\sigma_1(T) = \frac{ne^2}{m} \tau(T), \quad \rho_1(T) = \frac{m}{ne^2} \frac{1}{\tau(T)}, \quad (12)$$

где τ_0 — время свободного пробега, обусловленное упругим рассеянием на примесях, определяющим остаточное сопротивление, $\tau(T)$ — время релаксации за счёт неупругих процессов рассеяния на фононах (или других коллективных возбуждениях) или из-за электрон-электронных столкновений. Масса m здесь везде понимается как масса свободного электрона (в твёрдом теле — зонная масса!), в которую *не включены* поправки от межэлектронного взаимодействия и взаимодействия с

фононами (подробнее см. ниже). Соответственно, при предположении аддитивности вкладов от разных механизмов рассеяния (правило Матиссена) для полного сопротивления имеем

$$\rho(T) = \frac{m}{ne^2} \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau(T)} \right) \equiv \frac{m}{ne^2} (\Gamma_0 + \Gamma(T)), \quad (13)$$

где введены соответствующие частоты релаксации (рассеяния):

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\tau_0}, \quad (14)$$

$$\Gamma(T) = \frac{1}{\tau(T)}. \quad (15)$$

В общей теории взаимодействующих фермионов (электронов) по порядку величины $\Gamma \sim \text{Im} \Sigma$, где Σ — собственно-энергетическая часть электрона, учитывающая все существенные взаимодействия. При последовательном подходе проводимость (сопротивление) надо, конечно, вычислять с помощью двухчастичной функции Грина [18].

3.1. Предел Иоффе–Регеля

Наиболее известным квантовым ограничением на проводимость (сопротивление) металлов является критерий Иоффе–Регеля [19], относящийся к области сильно неупорядоченных систем. При $T = 0$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{m} \tau_0 = \frac{ne^2}{p_F} l, \quad (16)$$

где $l = v_F \tau_0$ — соответствующая длина свободного пробега. Обычная кинетическая теория справедлива при $p_F l/\hbar \gg 1$ или $E_F \tau_0/\hbar \gg 1$. С учётом $n = p_F^3/(3\pi^2 \hbar^3)$ получаем оценку для проводимости, достигаемой в пределе Иоффе–Регеля $p_F l_{\text{el}}/\hbar \sim 1$ или $E_F \tau_0/\hbar \sim 1$:

$$\sigma_{\text{IR}} = \frac{e^2 p_F}{3\pi^2 \hbar^2} \sim \frac{e^2}{3\pi^2 \hbar a}, \quad (17)$$

где $a \sim n^{-3}$ — среднее расстояние между электронами. При типичных металлических плотностях величина a порядка межатомного расстояния (постоянной решётки). В этом случае (при $n \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$) соответствующее сопротивление $\rho_{\text{IR}} = \sigma_{\text{IR}}^{-1} \sim 150\text{--}300 \text{ мкОм см}$. Для большинства обычных ("хороших") металлов, например для Cu, $\rho(T = 300 \text{ K}) \sim 1 \text{ мкОм см}$, так что этот предел остаётся недостижимым даже при самых высоких температурах, не превышающих температуру плавления. Однако это не так в сильно неупорядоченных (высокорезистивных) сплавах, где сопротивление может приближаться к пределу Иоффе–Регеля.

Оценку, близкую к (17), в своё время предложил Мотт для "минимальной металлической проводимости" σ_c , при достижении которой (например, при возрастании беспорядка — уменьшении длины свободного пробега) должен происходить скачкообразный переход металл–диэлектрик при $T = 0$ (локализация Андерсона) [20]. Фактически, как показано в скейлинговой теории локализации [21, 22], этот переход является непрерывным, причём σ_c играет роль характерного масштаба проводимости в окрестности перехода Андерсона:

$$\sigma \sim \sigma_c \left(\frac{l - l_c}{l_c} \right)^{(d-2)\nu}, \quad (18)$$

где $\sigma_c \sim e^2/(\hbar a^{d-2})$, $2 < d < 4$ — размерность пространства, а критическая длина пробег в точке перехода может быть оценена как $\rho_F l_c/\hbar \sim 1$, т.е. $l_c \sim a$. Здесь введён критический индекс радиуса локализации, который в рамках самосогласованной теории локализации [18, 23] задаётся выражением

$$v = \frac{1}{d-2}, \quad (19)$$

так что $v = 1$ для $d = 3$. Современные численные расчёты перехода Андерсона дают значения v в интервале 1,5–1,8 [24]. Для нас важны не эти детали, а то обстоятельство, что переход фактически носит непрерывный характер и никакого критического уровня проводимости (сопротивления) не существует.

Строго говоря, эти оценки справедливы только при $T = 0$, когда переход Андерсона является хорошо определённым квантовым фазовым переходом в системе невзаимодействующих электронов. При конечных температурах и учёте межэлектронных взаимодействий ситуация существенно усложняется, и мы не будем её здесь обсуждать.

Во многих случаях возрастание электросопротивления с увеличением температуры замедляется и выходит на насыщение, когда величина сопротивления приближается к пределу Иоффе–Регеля [25]. В таких сильно неупорядоченных металлах (высокореистивных сплавах) выполняется эмпирическое правило Моойа (Mooyi): при достижении уровня сопротивления (при низких температурах!) порядка ρ_{IR} температурная зависимость сопротивления становится очень слабой в широком температурном интервале, от низких температур до комнатных и даже выше, нередко наблюдается даже отрицательный температурный коэффициент сопротивления [25, 26]. Этот факт до сих пор не имеет общепризнанного теоретического объяснения.

Существует распространённая точка зрения, что это не так в "странных" металлах типа ВТСП на основе оксидов меди [27, 28] (в окрестности оптимального допирования) и в ряде других систем [29], где линейное возрастание сопротивления с увеличением температуры продолжается и после превышения значений $\rho_{IR} = \sigma_{IR}^{-1} \sim 100 - 300$ мОм см, вплоть до самых высоких температур, $T \sim 1000$ К. Однако здесь всегда встаёт вопрос об оценке величины сопротивления в пределе Иоффе–Регеля. Из приведённых выше оценок ясно, что эта величина существенно зависит от концентрации носителей тока (которая в купратах заметно меньше, чем в обычных металлах): например, при $n \sim 10^{21}$ см⁻³ оценка $\rho_{IR} \sim 1 - 10$ мОм см. В недавних экспериментах на слаболегированных купратах [30] чётко показано, что их сопротивление выходит на насыщение при $\rho_{IR} \sim 3 - 5$ мОм см, в полном соответствии со значениями концентрации носителей, полученными из измерений эффекта Холла (при $T \sim 300$ К). Поэтому вполне возможно, что в цитированных выше экспериментах на оптимально допированных купратах истинный предел Иоффе–Регеля просто не был достигнут при увеличении температуры вплоть до самых высоких значений (до разрушения образцов).

Наш основной интерес в дальнейшем, однако, будет связан с сопротивлением достаточно "чистых" металлов в области его линейного возрастания по температуре.

3.2. Планковская релаксация

Идея универсального планковского механизма релаксации в металлах при достаточно высоких температурах является весьма привлекательной. Приведём элементарные соображения, которые, казалось бы, подтверждают её справедливость исходя из весьма общих квантово-механических оценок, основанных на принципе неопределённости [15]. При конечных температурах $T > 0$ имеют место процессы неупругого рассеяния за счёт различных механизмов взаимодействия (электрон-фононный, взаимодействие со спиновыми флуктуациями и т.п.). В частности, именно такие процессы ответственны за установление термодинамического равновесия в системе электронов — распределения Ферми. В системе взаимодействующих частиц при конечной температуре распределение частиц (электронов) качественно имеет аналогичный вид [18]. Проводимость металла (вырожденный случай) определяется распределением электронов в слое шириной $\sim k_B T$ вокруг уровня Ферми (химического потенциала). Проведём элементарную оценку, воспользовавшись соотношением неопределённости энергия–время:

$$\Delta E \tau > \hbar, \quad (20)$$

где τ — время жизни квантового состояния, ΔE — неопределённость его энергии. В рассматриваемой ситуации $\tau = \tau(T)$ и представляется естественным принять $\Delta E \sim k_B T$, откуда немедленно следует оценка

$$\Gamma(T) = \frac{1}{\tau(T)} < \alpha \frac{k_B T}{\hbar} \equiv \Gamma_P = \frac{1}{\tau_P}, \quad (21)$$

где $\alpha \sim 1$. Видим, что, согласно такой элементарной оценке, планковская релаксация определяет верхнюю границу сопротивления за счёт неупругих процессов рассеяния:

$$\rho(T) - \rho_0 = \frac{m}{ne^2} \Gamma(T) < \frac{m}{ne^2} \alpha \frac{k_B T}{\hbar} \equiv \rho_P(T). \quad (22)$$

Очевидно, что эта оценка является достаточно спекулятивной в системе многих, вообще говоря, сильно взаимодействующих частиц, но она довольно хорошо коррелирует с описанными выше результатами экспериментов.

Если действительно существует такой универсальный верхний предел для частоты релаксации, то можно предложить качественную картину температурной зависимости электросопротивления металлов, показанную на рис. 6 [31]. Идея здесь состоит в том, что в "обычных" металлах вся температурная зависимость сопротивления развивается в области ниже предела Иоффе–Регеля, а "планковский" предел достигается в необычных системах типа ВТСП-купратов, например, находящихся в окрестности квантовой критической точки, в которых, по мнению многих, предел Иоффе–Регеля может быть превышен с возрастанием температуры (см., однако, [30]).

Из приведённых выше оценок нетрудно установить, что отношение "планковского" сопротивления к сопротивлению Иоффе–Регеля [15]:

$$\frac{\rho_P(T)}{\rho_{IR}} \sim \frac{k_B T}{E_F}, \quad (23)$$

следовательно, этот предел может быть превышен при $k_B T > E_F$. Однако в эксперименте последнее соотноше-

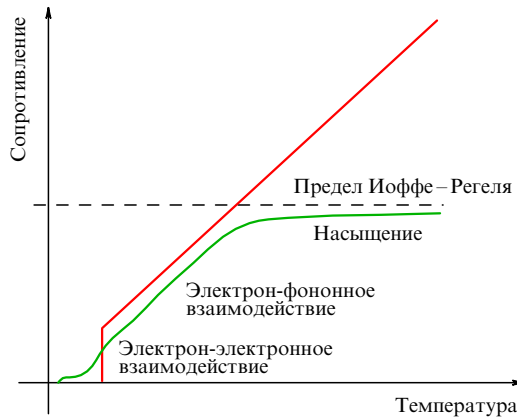


Рис. 6. (В цвете онлайн.) "Планковский" предел электросопротивления [31]. Красная прямая — планковский предел, зелёная кривая — обычная температурная зависимость сопротивления в металлах.

ние может иметь место только в системах с достаточно малыми значениями E_F (малой концентрацией носителей), что в принципе может реализоваться в системах типа оксидов меди с сильными корреляциями или в многозонных системах (с несколькими карманами поверхности Ферми). В любом случае, согласно этой картине, сопротивление не превышает верхнего предела, устанавливаемого "планковским" временем релаксации, который достигается в "странных" металлах. Удивительным образом приведённые выше экспериментальные данные, на первый взгляд, полностью подтверждают выход на этот предел для многих (!) металлов, включая вполне "обычные".

3.3. Электрон-фононное взаимодействие

Рассмотрим наиболее важный в теории металлов случай электрон-фононного взаимодействия, которое будем описывать в рамках теории Элиашберга–Макмиллана как современного обобщения теории Блоха–Грюнаузена [32]. В рамках этой теории для высокотемпературного предела ($T > \Theta_D/5$) фононного вклада в электросопротивление имеем [33, 34]

$$\rho_{ph}(T) = \frac{4\pi m T}{ne^2 \hbar} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha_{tr}^2(\omega) F(\omega) = \frac{2\pi m T}{ne^2 \hbar} \lambda_{tr}, \quad (24)$$

где $\alpha_{tr}^2(\omega)F(\omega)$ — транспортная функция Элиашберга–Макмиллана [33, 34] ($F(\omega)$ — плотность состояний фононов), определяющая транспортную константу электрон-фононной связи:

$$\lambda_{tr} = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha_{tr}^2(\omega) F(\omega), \quad (25)$$

для большинства металлов $\alpha^2 \approx \alpha_{tr}^2$, при этом [34] константа связи Элиашберга–Макмиллана [32]

$$\lambda = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega) \quad (26)$$

определяет температуру сверхпроводящего перехода. Соответственно, получаем простую оценку:

$$\rho_{ph}(T) \approx \frac{2\pi m T}{ne^2 \hbar} \lambda \equiv 2\pi \lambda \rho_P(T), \quad (27)$$

где в последнем равенстве в определении $\rho_P(T)$ из (22) положили $\alpha = 1$. Поскольку значения $\lambda > 1$ в металлах не столь уж редки [32], становится ясным, что даже за счёт обычного электрон-фононного взаимодействия планковский предел может быть легко *нарушен*, в связи с чем соотношение $\rho_{ph}(T) > \rho_P(T)$ не представляется какой-то экзотикой. Этот простой пример сразу вызывает определённые сомнения в универсальности "планковской" релаксации — казалось бы, изложенная выше аргументация, основанная на принципе неопределённости, применима для любых систем и взаимодействий, но приведённый здесь простейший пример этому противоречит.

4. Элементарная модель рассеяния на квантовых флуктуациях в металлах

4.1. Рассеяние электронов на квантовых флуктуациях

В этом разделе, следуя в основном работе [35], рассмотрим элементарную, но достаточно общую модель рассеяния электронов на квантовых флуктуациях, которая позволит проанализировать ситуацию в целом. Рассмотрим обычный гамильтониан взаимодействия электронов металла с произвольными квантовыми флуктуациями бозевского типа (N — полное число атомов в кристалле)²:

$$H_{int} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{q}}, \quad (28)$$

где использованы стандартные обозначения операторов рождения и уничтожения электронов, $\rho_{\mathbf{q}}$ — оператор квантовой флуктуации "чего угодно" (например, плотности ионов в твёрдом теле или коллективных возбуждений электронной подсистемы, в том числе спиновых — спиновые индексы для краткости опускаем). Введём соответствующую (мацубаровскую) функцию Грина [36] как

$$F(\mathbf{q}, \tau) = -\langle T_{\tau} \rho_{\mathbf{q}}(\tau) \rho_{\mathbf{q}}^+(0) \rangle. \quad (29)$$

Для неё можно выписать обычное спектральное бозевское представление [37]:

$$F(\mathbf{q}, \omega_m) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{A(\mathbf{q}, \omega)}{i\omega_m - \omega}, \quad (30)$$

где $\omega_m = 2\pi m T$, а спектральная плотность определяется как

$$A(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{mn} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right) |(\rho_{\mathbf{q}})_{nm}|^2 \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_{mn}}{T}\right)\right] \delta(\omega - \omega_{mn}), \quad (31)$$

где $\omega_{mn} = E_m - E_n$, $(\rho_{\mathbf{q}})_{nm} = \langle n | \rho_{\mathbf{q}} | m \rangle = (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{mn}$, а m и n нумеруют точные многочастичные состояния системы.

Динамический структурный фактор флуктуаций определяется [36, 38] как

$$S(\mathbf{q}, \omega) = Z^{-1} \sum_{mn} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right) |(\rho_{\mathbf{q}})_{nm}|^2 \delta(\omega - \omega_{mn}). \quad (32)$$

² Далее мы принимаем систему единиц $\hbar = k_B = 1$.

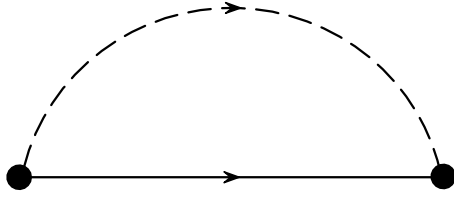


Рис. 7. Диаграмма второго порядка для собственно-энергетической части электрона. Штриховая линия — функция Грина квантовой флуктуации F , сплошная линия — функция Грина электрона G .

Сравнивая (31), (32), получаем

$$A(\mathbf{q}, \omega) = S(\mathbf{q}, \omega) \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega}{T}\right) \right]. \quad (33)$$

Электронная функция Грина в мацубаровском представлении стандартно записывается как

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}} - \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p})}, \quad (34)$$

где $\varepsilon_n = (2n + 1)\pi T$, $\xi_{\mathbf{p}}$ — спектр свободных электронов, отсчитанный от уровня Ферми (химического потенциала), а собственно-энергетическую часть можно взять в простейшем приближении, показанном на диаграмме рис. 7:

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) &= -\frac{T}{N} \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}}^2 \sum_m F(\mathbf{q}, i\omega_m) G(\varepsilon_n + \omega_m, \mathbf{p} + \mathbf{q}) = \\ &= -\frac{T}{N} \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}}^2 \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{S(\mathbf{q}, \omega)}{i\omega_m - \omega} \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega}{T}\right) \right] \times \\ &\times \frac{1}{i\varepsilon_n + i\omega_m - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $g_{\mathbf{q}}$ — соответствующая константа связи (матричный элемент потенциала взаимодействия).

Рассмотрим теперь случай, в котором средняя частота флуктуаций $\langle \Omega \rangle$ существенно ниже температуры T , т.е. классический предел для флуктуаций. Тогда в (35) достаточно ограничиться лишь слагаемым с $m = 0$ и перейти, таким образом, к картине *квазиупругого* рассеяния на флуктуациях:

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{S(\mathbf{q}, \omega)}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} = \\ &= \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}}^2 S(\mathbf{q}) \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}, \end{aligned} \quad (36)$$

где введён структурный фактор флуктуаций [38]

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S(\mathbf{q}, \omega). \quad (37)$$

Фактически это прямой аналог известного приближения Займана–Эдвардса в теории жидких металлов [39–41]. Случай $S(\mathbf{q}) = \text{const}$ соответствует полностью хаотическому распределению статических рассеивающих центров [18].

4.2. Фононы

В случае рассеяния на фононах оператор флуктуаций $\rho_{\mathbf{q}}$ может быть выражен через операторы (бозевские) унич-

тожения и рождения фононов как [38]

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{\mathbf{q}}^+ + b_{-\mathbf{q}}). \quad (38)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \omega) &= Z^{-1} \sum_m \exp\left(-\frac{E_m}{T}\right) \left[\langle m | b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^+ | m \rangle \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}) + \right. \\ &\left. + \langle m | b_{-\mathbf{q}}^+ b_{-\mathbf{q}} | m \rangle \delta(\omega + \omega_{\mathbf{q}}) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

где $\omega_{\mathbf{q}}$ — спектр фононов. Вводя обычное бозевское распределение:

$$n_{\mathbf{q}} = Z^{-1} \sum_m \exp\left(-\frac{E_m}{T}\right) \langle m | b_{\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{q}} | m \rangle = \frac{1}{\exp(\omega_{\mathbf{q}}/T) - 1}, \quad (40)$$

получаем [38]

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}, \omega) &= [(n_{\mathbf{q}} + 1)\delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}) + n_{\mathbf{q}}\delta(\omega + \omega_{\mathbf{q}})] + \\ &+ \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}) + n_{\mathbf{q}}[\delta(\omega - \omega_{\mathbf{q}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{q}})]. \end{aligned} \quad (41)$$

В условиях, когда $T \gg \omega_{\mathbf{q}}$, переходим к классическому пределу (закон равнораспределения):

$$n_{\mathbf{q}} = \frac{T}{\omega_{\mathbf{q}}}, \quad (42)$$

соответственно,

$$S(\mathbf{q}) = \frac{2T}{\omega_{\mathbf{q}}}. \quad (43)$$

Таким образом, получаем линейно возрастающий с увеличением температуры структурный фактор, импульсная зависимость которого определяется спектром фононов. Тогда

$$\Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = T \sum_{\mathbf{q}} \frac{2g_{\mathbf{q}}^2}{\omega_{\mathbf{q}}} \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}. \quad (44)$$

Для дальнейшего упрощения модели предположим, что спектр фононов является бездисперсионным (эйнштейновский фонон или оптический фонон с очень слабой дисперсией), полагая $\omega_{\mathbf{q}} = \Omega_0$. Тогда, проводя все вычисления аналогично таковым в задаче об электроном в поле случайных примесей [18], получаем

$$\Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = -i\pi \text{sign } \varepsilon_n \frac{2g_0^2}{\Omega_0} N(0)T, \quad (45)$$

где $N(0)$ — плотность состояний на уровне Ферми. Соответственно, затухание выражается как

$$\frac{\Gamma(T)}{2} = \pi \frac{2g_0^2}{\Omega_0} N(0)T = \pi\lambda_0 T, \quad (46)$$

где λ_0 — обычная безразмерная константа связи электрон-фононного взаимодействия,

$$\lambda_0 = \frac{2g_0^2 N(0)}{\Omega_0}. \quad (47)$$

Проводя стандартные вычисления [18], получим сопротивление в виде

$$\rho(T) = \frac{m}{ne^2} \Gamma(T) = 2\pi\lambda_0 \rho_P(T), \quad (48)$$

что, по существу, просто совпадает с высокотемпературным пределом теории Элиашберга – Макмиллана (27). При этом константа α , обычно используемая при записи "планковского" времени релаксации в виде (21), выражается через параметры теории как

$$\alpha = 2\pi\lambda_0. \quad (49)$$

Естественно, она не универсальна и просто пропорциональна константе взаимодействия.

Точно такие же результаты легко получить и в рамках приближения Элиашберга – Макмиллана [18], где выражение для мацубаровской собственно-энергетической части электрона имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n) &= \int d\varepsilon' \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \\ &\times \left(\frac{f(\varepsilon') + n(\omega)}{i\varepsilon_n - \varepsilon' + \omega} + \frac{1 - f(\varepsilon') + n(\omega)}{i\varepsilon_n - \varepsilon' - \omega} \right), \end{aligned} \quad (50)$$

где $f(\varepsilon)$ и $n(\omega)$ — стандартные функции распределения Ферми и Бозе. В высокотемпературном пределе, $T \gg \omega$, (50) сводится просто к

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n) &= \int d\varepsilon' \int_0^\infty d\omega \alpha^2(\omega) F(\omega) \times \\ &\times \frac{T}{\omega} \left(\frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon' + \omega} + \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon' - \omega} \right) = \\ &= T \int_{-\infty}^\infty d\varepsilon' 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega) \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon'} = \\ &= -i\pi\lambda T \operatorname{sign} \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (51)$$

где введено стандартное определение константы связи в теории Элиашберга – Макмиллана (26), что воспроизводит результат типа (46). Для сопротивления снова получаем (48) с очевидной заменой $\lambda_0 \rightarrow \lambda$, где λ определена³ в (26).

4.3. Более общая модель

Попробуем теперь обойтись без явного введения фоонов (или других квазичастиц, связанных с флуктуациями). Из уравнения (33) при $\omega \ll T$ следует

$$A(\mathbf{q}, \omega) \approx \frac{\omega}{T} S(\mathbf{q}, \omega), \quad (52)$$

или

$$S(\mathbf{q}, \omega) \approx \frac{T}{\omega} A(\mathbf{q}, \omega). \quad (53)$$

Подставляя это выражение в (36), получаем следующее выражение для собственно-энергетической части:

$$\Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{T}{N} \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{A(\mathbf{q}, \omega)}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}, \quad (54)$$

где определяющую роль имеет спектральная плотность флуктуаций $A(\mathbf{q}, \omega)$, которая не обязательно имеет квазичастичный вид. Естественно, для простейшей модели с $A(\mathbf{q}, \omega) = \delta(\omega - \Omega_0)$ (эйнштейновская модель флуктуаций) из (54) немедленно следуют результаты (45)–(47).

В случае, когда \mathbf{q} -зависимость отсутствует, из (54) сразу получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) &= \frac{T}{N} \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}}^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{A(\omega)}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} = \\ &= -i\pi \operatorname{sign} \varepsilon_n N(0) \frac{T}{N} g_0^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega} A(\omega) = \\ &= -i\pi \operatorname{sign} \varepsilon_n \frac{2g_0^2}{\langle \Omega \rangle} N(0) T, \end{aligned} \quad (55)$$

где введена некоторая усреднённая частота флуктуаций:

$$\langle \Omega \rangle^{-1} = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} A(\omega). \quad (56)$$

Полученный результат, по сути, эквивалентен (45).

В общем случае, когда импульсной зависимостью спектральной плотности флуктуаций пренебречь нельзя, можно воспользоваться подходом в духе Элиашберга – Макмиллана, предполагая, что флуктуации рассеивают электроны в некотором достаточно узком ($\sim T$) слое вокруг поверхности Ферми. Тогда можно ввести собственно-энергетическую часть, усреднённую по импульсам на поверхности Ферми:

$$\Sigma(\varepsilon_n) = \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}} \delta(\xi_{\mathbf{p}}) \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}), \quad (57)$$

а также эффективное (усреднённое по начальным и конечным импульсам на поверхности Ферми) взаимодействие:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^2 A(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{N(0)} \sum_{\mathbf{p}'} g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^2 A(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \omega) \delta(\xi_{\mathbf{p}}) \delta(\xi_{\mathbf{p}'}) &\equiv \\ \equiv \frac{1}{N(0)} \alpha^2(\omega) F(\omega), \end{aligned} \quad (58)$$

где $F(\omega)$ — плотность состояний флуктуаций,

$$F(\omega) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}, \omega). \quad (59)$$

Тогда для (57) из (54) получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n) &= \frac{T}{N(0)} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega) N(0) \int_{-\infty}^\infty d\xi \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi} = \\ &= -i\pi \operatorname{sign} \varepsilon_n T \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha^2(\omega) F(\omega) = \\ &= -i\pi \operatorname{sign} \varepsilon_n \lambda T \equiv -i \frac{\Gamma(T)}{2} \operatorname{sign} \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (60)$$

где снова ввели безразмерную константу связи, как в теории Элиашберга – Макмиллана, определяемую выражением (26), величина которой фактически определяется (усреднённой согласно (58)) спектральной плотностью флуктуаций $A(\mathbf{q}, \omega)$, не обязательно имеющей квазичастичный вид.

В итоге мы получаем выражение

$$\Gamma(T) = 2\pi\lambda T, \quad (61)$$

которое имеет тот же вид, что и (46), и сразу приводит к (48). Строго говоря, всё это не совсем так, если вспомнить о возможной температурной зависимости спек-

³ Здесь и далее для краткости пренебрегаем несущественным для нас различием λ и $\lambda_{\text{т}}$.

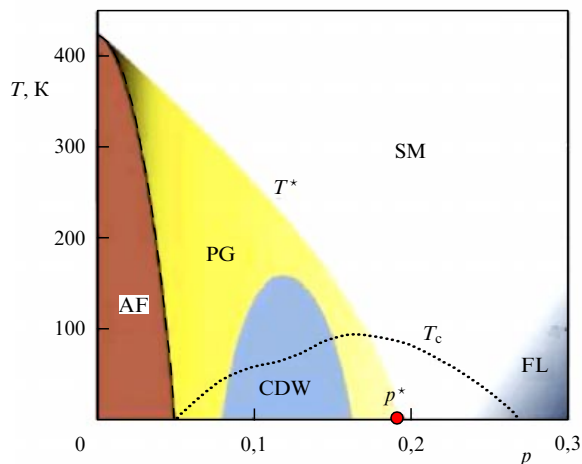


Рис. 8. (В цвете онлайн.) Типичная фазовая диаграмма дырочно-легированных купратов. Сверхпроводящее состояние наблюдается внутри области температур ниже T_c , показанной пунктирной кривой. Область антиферромагнетизма (AF) показана коричневым цветом. Псевдощелевая фаза (PG) (жёлтый цвет) существует при температурах ниже T^* и заканчивается при $T = 0$ в критической точке p^* (красный кружок). Внутри псевдощелевой области существует фаза с волной зарядовой плотности (CDW) (синий цвет). Область странного металла (SM) (белая) постепенно переходит в область ферми-жидкости (FL) при более высоких уровнях легирования [42].

ральной плотности $A(\mathbf{q}, \omega)$. Планковское поведение реализуется только при отсутствии или слабости такой зависимости. Очевидно, что конкретное выражение (46) сразу следует из (26) и (60) при $F(\omega) = \delta(\omega - \Omega_0)$, которая соответствует эйнштейновскому спектру флуктуаций.

4.4. Окрестность квантовой критической точки

Рассмотренная выше простейшая модель, конечно, не объясняет линейного по температуре возрастания сопротивления в купратах и аналогичных системах, начинающегося при очень низких температурах в нормальном состоянии. В связи с этим заметим, что такое поведение часто связывается с близостью указанных систем к квантовой критической точке.

Действительно, рассмотрим схематическую фазовую диаграмму дырочно-легированных купратов, показанную на рис. 8 [42].

Эта диаграмма давно хорошо известна, но для нас сейчас важным является возможное существование на ней квантовой критической точки [43, 44] при концентрации носителей (дырок) $p = p^*$ в точке окончания области так называемой псевдощелевой фазы [45–47]. Экспериментальные свидетельства в пользу существования такой критической точки довольно многочисленны [42]. В качестве примера приведём одно из наиболее ярких — показанную на рис. 9 характерную особенность коэффициента электронной теплоёмкости $\gamma = C_{el}/T$ при $p = p^*$ в нормальной фазе купратов, полученной в сильном магнитном поле, подавляющем сверхпроводимость [42].

Природа псевдощелевого состояния в купратах остаётся не до конца выясненной. В частности, неясно, соответствует ли области PG на фазовой диаграмме рис. 8 какая-то новая фаза, в которую на линии T^* происходит истинный фазовый переход, или это есть некая область кроссовера в антиферромагнитную (AF) фазу, где имеются развитые флуктуации ближнего AF-порядка [45–47]. Антиферромагнитный сценарий формирования псев-

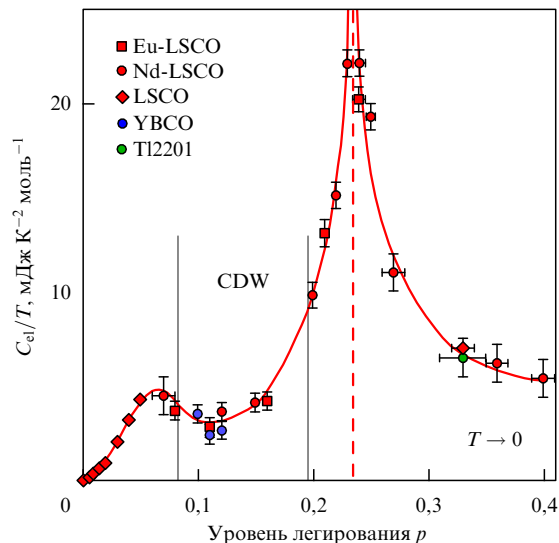


Рис. 9. (В цвете онлайн.) Коэффициент электронной теплоёмкости $\gamma = C_{el}/T$ в нормальном состоянии ($T = 5$ К) в окрестности квантовой критической точки (сверхпроводимость подавлена внешним магнитным полем) как функция степени легирования p для $\text{La}_{1.8-x}\text{Eu}_{0.2}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (Eu-LSCO, красные квадраты), $\text{La}_{1.6-x}\text{Nd}_{0.4}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (Nd-LSCO, красные кружки), $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ (LSCO, красные ромбы), $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ (YBCO, синие кружки) и $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{6-\delta}$ (Tl2201, зелёные кружки) [42].

дошли также имеет серьёзную экспериментальную поддержку [42], однако некоторые авторы считают, что при переходе в псевдощелевое состояние мы имеем дело с истинным фазовым переходом, хотя природа параметра порядка в PG-фазе остаётся неясной. Предложен ряд конкретных моделей (см., например, [48]) такого фазового перехода, которые позволяют говорить о существовании истинной квантовой критической точки при $p = p^*$. Остаётся неясным, можно ли говорить о квантовой критической точке в сценарии кроссовера. В любом случае линейное по температуре поведение сопротивления наблюдается в купратах вблизи оптимального уровня легирования, который почти совпадает с $p = p^*$. При меньших p в сопротивлении проявляются диэлектрические (локализационные) эффекты (сильный отрицательный температурный коэффициент сопротивления) [49, 50], а при больших — происходит кроссовер к более или менее обычному ферми-жидкостному поведению с квадратичным возрастанием сопротивления при увеличении температуры.

Близостью к квантовой критической точке может быть в принципе объяснено линейное возрастание сопротивления с увеличением температуры даже в рамках рассмотренной выше элементарной модели. Для того чтобы такое возрастание наблюдалось при низких температурах, достаточно выполнения неравенства $\Omega_0 \ll T$, где Ω_0 — характерная частота флуктуаций, рассеивающих электроны. В окрестности квантовой критической точки (любой природы) можно ожидать типичного "смягчения" соответствующей флуктуационной моды в духе соотношения [43, 44]

$$\Omega_0 \sim |p - p^*|^{zv}, \quad (62)$$

где p — концентрация носителей (дырок или электронов), v и z — стандартные критические индексы теории квантовых фазовых переходов, определяющие критиче-



Рис. 10. (В цвете онлайн.) Фазовая диаграмма вблизи квантовой критической точки. Неферми-жидкостное поведение времени релаксации и сопротивления может наблюдаться в квантовой критической области, где $\xi_\tau > L_T = \hbar/(k_B T)$, что соответствует $\hbar\Omega_0 < k_B T$.

ское поведение характерных длин:

$$\xi \sim |p - p^*|^{-\nu}, \quad \xi_\tau \sim |p - p^*|^{-z\nu}. \quad (63)$$

Здесь τ обозначает мнимое (мацубаровское) время, так что выше мы просто положили $\Omega_0 \sim \xi_\tau^{-1}$.

Как показано на рис. 10, квантовая критическая область определяется неравенством [43, 44]

$$\xi_\tau > \frac{1}{T} \quad \text{или} \quad \Omega_0 < T, \quad (64)$$

что может обеспечить линейное поведение сопротивления по температуре в этой области в купратах или аналогичных системах. При этом, однако, остаётся открытым вопрос о природе квантовых флуктуаций, играющих здесь значимую роль, и механизме взаимодействия электронов с этими флуктуациями.

5. Общие соотношения для функции Грина и проводимости

5.1. Функция Грина в системе взаимодействующих частиц

Приведём некоторые общие формулы для произвольной системы взаимодействующих электронов. Общее выражение для мацубаровской функции Грина [37]:

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}} - \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p})}. \quad (65)$$

Имея в виду электрон-фононное взаимодействие или его аналоги (квантовые флуктуации общего типа) и опуская импульсную зависимость собственно-энергетической части, в обозначениях теории Элиашберга – Макмиллана запишем

$$\Sigma(\varepsilon_n) = [1 - z(\varepsilon_n)] i\varepsilon_n + \chi(\varepsilon_n). \quad (66)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) &= \frac{1}{z(\varepsilon_n) i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}} - \chi(\varepsilon_n)} = \\ &= \frac{Z(\varepsilon_n)}{i\varepsilon_n - Z(\varepsilon_n)\xi_{\mathbf{p}} - Z(\varepsilon_n)\chi(\varepsilon_n)}, \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$Z(\varepsilon_n) = z^{-1}(\varepsilon_n). \quad (68)$$

Определим теперь ещё

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \varepsilon_n) = Z(\varepsilon_n)\xi_{\mathbf{p}} + \text{Re } \chi(\varepsilon_n), \quad (69)$$

$$\Gamma(T) \text{sign } \varepsilon_n = -2Z(\varepsilon_n) \text{Im } \chi(\varepsilon_n). \quad (70)$$

Тогда функция Грина запишется в следующем достаточно общем виде:

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{Z(\varepsilon_n)}{i\varepsilon_n - \varepsilon(\mathbf{p}, \varepsilon_n) + (i/2)\Gamma(T) \text{sign } \varepsilon_n}. \quad (71)$$

Если в (69) нет зависимости от ε_n , то можем записать функцию Грина в обычном виде:

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{Z}{i\varepsilon_n - \varepsilon(\mathbf{p}) + (i/2)\Gamma(T) \text{sign } \varepsilon_n}, \quad (72)$$

который достаточен для наших целей.

Эти выражения более или менее соответствуют обычной картине электрон-фононного взаимодействия, когда $\lambda \ll 1$, хотя можно попытаться "протянуть" их и в область $\lambda > 1$, основываясь на теореме Мигдала [18], которая позволяет пренебречь вершинными поправками. В частности, в этом подходе фактор перенормировки [18]

$$Z = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (73)$$

не зависит явно от ε_n . Выражение (73) справедливо внутри энергетического слоя шириной порядка удвоенной дебаевской частоты вокруг уровня Ферми (для случая взаимодействия с фононами) или удвоенной средней частоты флуктуаций (Ω); вне этого слоя очевидно, что $Z = 1$, — флуктуации практически несущественны для электронов с достаточно большой энергией.

5.2. Общие выражения для проводимости

Диагональный элемент тензора проводимости при $\mathbf{q} = 0$ можно представить в виде [18, 51]

$$\sigma_{xx}(\omega) = \frac{1}{i\omega} [\Phi_{xx}(\omega + i\delta) - \Phi_{xx}(0 + i\delta)], \quad (74)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(i\omega_m) &= -2eT \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x}{m} J_x(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n + \omega_m) \times \\ &\times G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) G(\varepsilon_n + \omega_m, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (75)$$

что соответствует обычному петлевому графику рис. 11, где "гоковая" вершина может быть записана как

$$J_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n + \omega_m) \equiv \frac{e}{m} p_\mu \Xi(\mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n + \omega_m), \quad (76)$$

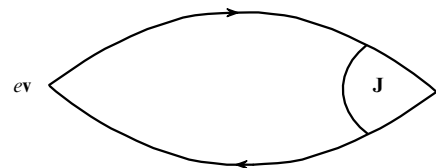


Рис. 11. Петлевой график, определяющий проводимость.

а "затравочной" токовой вершине соответствует множитель $(e/m) p_\mu$.

Следовательно, представив (75) в виде

$$\Phi_{xx}(i\omega_m) = -2e^2 T \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x^2}{m^2} \Xi(\mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n + \omega_m) \times \\ \times G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) G(\varepsilon_n + \omega_m, \mathbf{p}) \quad (77)$$

и выполнив стандартное суммирование по n и аналитическое продолжение $i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta$ [51], получим для статической проводимости ($\omega \rightarrow 0$):

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x^2}{m^2} \Xi(\mathbf{p}) G^R(\mathbf{p}, 0) G^A(\mathbf{p}, 0), \quad (78)$$

где введён статический предел $\Xi(\mathbf{p}) = \Xi(\mathbf{p}, 0 - i\delta, 0 + i\delta)$.

Здесь, конечно, главная трудность связана с явным вычислением вершинной части в системе взаимодействующих частиц. Простейшую оценку можно получить, воспользовавшись в (75) очевидным тождеством Уорда [51], справедливым для $\omega_m = 0$:

$$J_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n) = -e \frac{\partial}{\partial p_\mu} G^{-1}(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = -e \left[-v_{\mathbf{p}}^\mu - \frac{\partial \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p})}{\partial p_\mu} \right], \quad (79)$$

где скорость $v_{\mathbf{p}}^\mu = \partial \xi_{\mathbf{p}} / \partial p_\mu$. Если при этом считать собственнo-энергетическую часть не зависящей от импульсов, $\Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \Sigma(\varepsilon_n)$, как это обычно имеет место для электрон-фононного взаимодействия, то вершина (79) сведётся к "затравочной":

$$J_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n) = e v_{\mathbf{p}}^\mu = \frac{e}{m} p_\mu, \quad (80)$$

что соответствует $\Xi(\mathbf{p}, \varepsilon_n, \varepsilon_n) = 1$. Используя (79) в (75), получаем

$$\Phi_{xx}(i\omega_m) = -2e^2 T \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x}{m} \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu} G^{-1}(\varepsilon_n, \mathbf{p}) \right] \times \\ \times G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) G(\varepsilon_n + \omega_m, \mathbf{p}) = \\ = -2e^2 T \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x^2}{m^2} G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) G(\varepsilon_n + \omega_m, \mathbf{p}), \quad (81)$$

и далее, действуя, как при переходе от (75) к (78), находим для статической проводимости следующее приближённое выражение:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_x^2}{m^2} G^R(\mathbf{p}, 0) G^A(\mathbf{p}, 0), \quad (82)$$

что просто соответствует выбору $\Xi(\mathbf{p}) = 1$ в (78). В отличие от (78), это, конечно, есть некоторое приближение. Именно оно используется, например, в работе [48]. Что тут теряется, станет ясно немного ниже.

Дальнейшие вычисления проведём для общего случая (78). Имея в виду типичный металл, в котором вся физика проводимости определяется окрестностью поверхности Ферми (а рассеяние является достаточно слабым), можно перейти к обычному интегрированию по спектру, линеаризованному вблизи уровня Ферми, и записать (78) в виде ($\text{Re } \Sigma(0)$ включается в перенормировку химического

потенциала):

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{2\pi} N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_p \frac{1}{3} \frac{p_F^2}{m^2} \Xi(p_F) G^R(\mathbf{p}, 0) G^A(\mathbf{p}, 0) = \\ = \frac{e^2}{2\pi} \frac{1}{3} v_F^2 \Xi(p_F) N(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_p \frac{1}{\xi_p^2 + \text{Im}^2 \Sigma(0)} = \\ = e^2 \frac{1}{3} v_F^2 N(0) \frac{\Xi(p_F)}{2 \text{Im} \Sigma(0)} \equiv \frac{ne^2}{m} \tau_{\text{tr}}. \quad (83)$$

Отсюда, кстати, ясно, что приближение $\Xi(p_F) = 1$ соответствует пренебрежению различием τ и τ_{tr} , которое ввиду применялся выше. Для случая рассеяния на точечных примесях или на эйнштейновском фонеоне это просто всегда правильно — из (83) сразу получаем (48). Именно такая формула для проводимости используется, например, в работе [48]. Отсюда ясно, что перенормировка массы, которая возникает, например, в выражении для электронной теплоёмкости, *не входит* в выражение для σ_{xx} , где всё определяется "голой" (зонной) массой. Этот результат известен довольно давно [52–55].

Вклад от возможной импульсной зависимости $\Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})$ в статическую проводимость также может быть получен достаточно просто [51]. Для этого запишем

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = [Z^{-1} \varepsilon - b^{-1} \xi_p + \text{Im} \Sigma(\varepsilon, p_F)]^{-1}, \quad (84)$$

где, как обычно, ввели

$$Z^{-1} = 1 - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \text{Re} \Sigma(\varepsilon, p_F) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (85)$$

$$b^{-1} = 1 + \frac{\partial}{\partial \xi_p} \text{Re} \Sigma(0, \mathbf{p}) \Big|_{|\mathbf{p}|=p_F}. \quad (86)$$

Соответственно, с использованием (84) перенормируется плотность состояний на уровне Ферми и возникает

$$\tilde{N}(0) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} G^R(0, \mathbf{p}) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_p \frac{1}{b^{-2} \xi_p + \text{Im} \Sigma(0, \mathbf{p})} = b N(0). \quad (87)$$

Теперь можно повторить все вычисления для проводимости, проведённые выше, с использованием (84) и получить окончательный результат для статической проводимости [51]:

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2}{m} \frac{\Xi(p_F)}{2 \text{Im} \Sigma(0)} b = \frac{ne^2}{m} \tau_{\text{tr}} \frac{\tilde{N}(0)}{N(0)}. \quad (88)$$

5.3. Самосогласованный расчёт

Вернёмся к простейшей модели электрон-фононного взаимодействия и проведём теперь самосогласованный расчёт в случае, когда электронная линия на диаграмме рис. 7 является "одетой", т.е. учитываются все порядки по пересекющимся линиям взаимодействия. При этом снова предполагается выполнение условий теоремы Мигдала [18]. Действуя в духе соотношений (66)–(72), можем записать выражение для соответствующей функции Грина в следующем виде (упрощённый вариант (71)):

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{Z}{i\varepsilon_n - Z \xi_{\mathbf{p}} + (i/2) Z \Gamma(T) \text{sign } \varepsilon_n}, \quad (89)$$

что соответствует в (67) выбору $Z(\varepsilon_n) = Z$, $\text{Re } \chi(\varepsilon_n) = 0$, $\text{Im } \chi(\varepsilon_n) = -\Gamma(T)$. Перенормировочный фактор $Z < 1$ считаем для простоты константой. Тогда, казалось бы, с учётом $\Gamma(T) = 2\pi\lambda T$ можно ввести перенормированное затухание как

$$\tilde{\Gamma}(T) = Z\Gamma(T) = 2\pi\lambda ZT = 2\pi \frac{\lambda}{1+\lambda} T, \quad (90)$$

где учтено, что в модели с электрон-фононным взаимодействием в *низкотемпературном* пределе [18]

$$Z = \frac{1}{1+\lambda}. \quad (91)$$

Соответственно, при $\lambda \ll 1$ отсюда следует (46), а при $\lambda \gg 1$ получаем

$$\tilde{\Gamma}(T) = 2\pi T, \quad (92)$$

т.е. *универсальное* "планковское" поведение частоты релаксации (21) с $\alpha = 2\pi$, *не зависящее* от константы взаимодействия электронов с флуктуациями (фононами). В общем случае при произвольных значениях λ имеем $\alpha < 2\pi$, так что верхний предел α возникает естественным образом и определяется (92).

Однако, подставляя выражение (89) в (44), полученное в *высокотемпературном* пределе, в модели с эйнштейновским спектром флуктуаций (фононов) сразу находим

$$\begin{aligned} \Sigma(\varepsilon_n, \mathbf{p}) &= \Sigma(\varepsilon_n) = -i\pi \frac{2g_0^2}{\Omega_0} N(0)T \text{sign } \varepsilon_n = \\ &= -\frac{i}{2} \Gamma(T) \text{sign } \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (93)$$

так что перенормировочный фактор Z в затухании *сокращается* и мы просто воспроизводим полученный выше обычный результат без всяких перенормировок. Это, кстати, совершенно не удивительно — заранее ясно, что $Z \approx 1$ для температур (энергий), существенно превышающих характерные частоты фононов (или любых других квантов флуктуаций, на которых происходит рассеяние электронов). Аналогичные результаты справедливы не только в эйнштейновской модели, но и в общем случае, описываемом в приближении Элиашберга – Макмиллана (51), (60) [35].

Может показаться, что обсуждаемые ограничения можно получить из других соображений. Для этого запишем достаточно общее выражение для мацубаровской функции Грина в высокотемпературном пределе как

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_{\mathbf{p}} + (i/2)\Gamma(T) \text{sign } \varepsilon_n}. \quad (94)$$

После подстановки в (94) граничного значения $\Gamma(T)$ из (21) получаем

$$G(\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_{\mathbf{p}} + (i/2)\alpha T \text{sign } \varepsilon_n}. \quad (95)$$

Отсюда сразу видно, что константа α , казалось бы, не может достигать значения $\alpha = 2\pi$, поскольку при этом мацубаровские частоты в (95) станут *чётными*, т.е. система фермионов "превратится" в систему бозонов, что невозможно в силу общей теоремы о связи спина и статистики — никакое взаимодействие (в том числе

приводящее просто к температурнозависящей релаксации) не может изменить статистику частиц. Тогда, казалось бы, снова возникает ограничение

$$\Gamma(T) = \frac{1}{\tau(T)} < 2\pi T, \quad (96)$$

которое, в частности, означает, что в нашей модели, согласно (61), всегда должно выполняться неравенство $\lambda < 1$. Такое ограничение на константу связи вполне согласуется с результатами недавних расчётов электрон-фононного взаимодействия квантовым методом Монте-Карло [56], но находится в явном противоречии с результатами многолетних исследований сверхпроводимости в рамках теории Мигдала – Элиашберга [33, 34]. Обсуждение возникающих здесь противоречий и пути их преодоления можно найти в недавней работе [57].

На самом деле проведённые выше рассуждения неверны, а величина α может принимать любые, в том числе целые, значения без всяких парадоксов типа смены статистики. Эти значения ничем не выделены, и система может непрерывным образом проходить через целые значения с возрастанием α (т.е. величины взаимодействия). Это нетрудно понять, проводя, например, прямые вычисления функции распределения (см. приложение).

Отметим, что линейное по температуре затухание в функции Грина во всех рассматриваемых нами случаях нарушает стандартные условия применимости теории ферми-жидкости [38], так что квазичастицы в системе являются плохо определёнными. Это же следует и из явного вида функции распределения, которая достаточно далека от обычной фермиевской ступеньки.

5.4. Иллюзия планковской релаксации

В работах [3, 4] экспериментальные данные по сопротивлению обрабатывались под формулу Друде (13), где эффективная масса m^* определялась из измерений теплоёмкости или эффекта де Гааза – ван Альфена. Эта масса в модели электрон-фононного взаимодействия или в более общей модели рассеяния на квантовых флуктуациях произвольной природы получается из зонной эффективной массы простой заменой: $m \rightarrow m^* = m(1 + \lambda)$, учитывающей перенормировку массы взаимодействием (при низких температурах!). Непоследовательность такого подхода уже отмечалась в работе [48]. Покажем, что именно такое представление экспериментальных данных и создаёт *иллюзию* универсальной планковской релаксации в металлах. В самом деле, выражение (48) для *высокотемпературного* предела сопротивления фактически тождественно может быть представлено следующим образом:

$$\rho(T) = \frac{m(1 + \lambda)}{ne^2} \frac{\Gamma(T)}{1 + \lambda} = \frac{m^*}{ne^2} \tilde{\Gamma}(T), \quad (97)$$

где

$$\tilde{\Gamma}(T) = 2\pi \frac{\lambda}{1 + \lambda} T, \quad (98)$$

что всегда даёт

$$\tilde{\Gamma}(T) < 2\pi T \quad (99)$$

и, таким образом, просто имитирует универсальное "планковское" поведение частоты релаксации (21) с $\alpha = 2\pi$ в качестве верхнего предела, не зависящего от константы взаимодействия электронов с флуктуациями (фононами). Замена $m \rightarrow m^* = m(1 + \lambda)$ в (97) сама по себе вполне корректна, несмотря на то что мы имеем дело с пределом высоких температур. Также формально вполне корректна и процедура обработки экспериментальных данных в [3, 4], где использовалась именно эффективная масса m^* , полученная из *низкотемпературных* измерений. Однако такой подход несколько затуманивает суть дела, создавая иллюзию универсального планковского поведения.

Легко оценить, что наблюдаемые в экспериментах [3, 4] значения $\alpha \sim 1$ соответствуют достаточно типичным значениям $\lambda \sim 0,2$, тогда как $\alpha \sim 2,8$ для свинца [3] соответствует $\lambda \sim 0,53$. В наших расчётах в рамках теории Элиашберга – Макмиллана для Pb получаются значения $\lambda \sim 1,5$ [34]. Для Nb в [3] получено значение $\alpha \sim 2,3$, что, согласно приведённым выше формулам, соответствует $\lambda \sim 0,43$, тогда как наши расчёты [34] дают $\lambda \sim 1,26$. Занижение наших значений λ почти в три раза частично можно списать на то, что в формулах для сопротивления должна фигурировать $\lambda_{tr} < \lambda$. Однако расчётные значения λ_{tr} [34] равны 1,19 для Pb и 1,17 для Nb, что не сильно улучшает дело.

Гораздо более существенным может оказаться учёт перенормировки массы за счёт межэлектронного взаимодействия, также дающего вклад в электронную теплоёмкость, который на практике трудно отделить от фононного вклада. Соответственно, выражение (98) надо представить как

$$\tilde{\Gamma}(T) = 2\pi \frac{\lambda}{1 + \lambda + \lambda_{ee}} T, \quad (100)$$

где λ_{ee} — безразмерный параметр, определяющий перенормировку массы за счёт межэлектронного взаимодействия. В теории ферми-жидкости Ландау – Силина $\lambda_{ee} = F_1^s/3$, где F_1^s — соответствующий коэффициент в разложении функции Ландау [38]. Для типичных металлов $\lambda_{ee} \sim 1$. Тогда

$$\alpha = \frac{2\pi\lambda}{1 + \lambda + \lambda_{ee}}, \quad (101)$$

так что, принимая как типичное значение $\lambda \sim 0,4$ и $\lambda_{ee} \sim 1$, немедленно получаем $\alpha \sim 1,04$, а для $\lambda \sim 0,5$ имеем $\alpha \sim 1,25$, в хорошем согласии с большинством данных из [3, 4]. Для Pb, принимая $\lambda = 1,68$ [34] и $\lambda_{ee} = 1$, получаем $\alpha \sim 2,86$, что находится в разумном согласии с "экспериментальным" $\alpha_{exp} = 2,8$ [3]. Аналогичным образом, для Nb имеем $\lambda = 1,26$ [34], так что опять, принимая $\lambda_{ee} \sim 1$, получаем $\alpha \sim 2,42$ в хорошем согласии с "экспериментальным" значением $\alpha = 2,3$ [3]. Интервалу значений $\alpha = 0,7 - 2,8$ [3, 4] при $\lambda_{ee} = 1$ соответствует интервал $\lambda = 0,25 - 1,5$, что представляется вполне разумным.

Более подробные результаты таких оценок (при выборе $\lambda_{ee} = 1$) приведены в табл. 2.

Из таблицы 2 видно, что для всех рассмотренных здесь металлов, кроме Cu, экспериментальные данные по коэффициенту α описываются вполне удовлетворительно и полное соответствие может быть достигнуто незначительным варьированием λ_{ee} вокруг значения $\lambda_{ee} = 1$. Это не так только для Cu, для которого согласия можно добиться, вводя $\lambda_{ee} < 0$. Отрицательные значения

Таблица 2. Оценки коэффициента α для ряда металлов

Металл	λ	$\frac{2\pi\lambda}{1 + \lambda}$	$\frac{2\pi}{1 + \lambda + \lambda_{ee}}$	α_{exp}
Pb	1,68	3,93	2,86	2,8
Nb	1,26	3,50	2,42	2,3
Cu	0,14	0,77	0,41	1,0
Al	0,44	1,91	1,13	1,1
Pd	0,35	1,63	0,93	1,1

λ_{ee} вполне возможны с учётом того, что из общих соображений имеется только ограничение [38] $F_1^s > -3$, т.е. $\lambda_{ee} > -1$.

Таким образом, мы приходим к основному выводу: "экспериментально" наблюдаемая универсальная планковская релаксация в металлах, не зависящая от величины взаимодействия, является не более чем *иллюзией*, связанной с принятой в работах [3, 4] процедурой представления экспериментальных данных (определения эффективной массы в выражении для сопротивления из низкотемпературных измерений). В равной мере это относится и к результатам недавней работы [58], в которой та же самая процедура использована для представления экспериментальных данных по двуслойному графену вблизи "магического" угла разориентации слоёв.

5.5. Ещё раз о соотношении неопределённостей

В чём же состоит проблема с приведённой выше оценкой времени релаксации, основанной на соотношении неопределённостей энергия – время? Дело тут обстоит довольно просто. В соотношении (20) в качестве ΔE надо взять не $k_B T$, а реальную "ширину уровня" (затухание спектра) в многочастичной (взаимодействующей!) системе:

$$\Gamma(T) = 2\pi\lambda T. \quad (102)$$

Тогда сразу имеем

$$\frac{\hbar}{\tau} \leq 2\pi\lambda T, \quad (103)$$

так что использование соотношения неопределённостей превращается в некую тавтологию. При этом "верхний предел" высокотемпературной частоты релаксации не универсален и пропорционален константе взаимодействия, что вполне естественно.

В то же время результат (99) формально действительно определяет некий универсальный верхний предел для частоты релаксации *квазичастиц*, к которым, возможно, и следует применять приведённые выше соображения, основанные на принципе неопределённости.

6. Заключение

Как отмечалось выше, в наши цели не входило объяснение линейного по температуре возрастания электросопротивления начиная с самых низких температур, которое наблюдается в высокотемпературных сверхпроводниках на основе оксидов меди и в ряде других систем. В рамках рассмотренных моделей рассеяния электронов на квантовых флуктуациях произвольной природы (например, на фононах) такое поведение возникает при температурах порядка или выше характерной частоты этих флуктуаций, т.е. в классическом пределе. В настоя-

щее время неясно, существуют ли такие низкочастотные флуктуации в окрестности квантовой критической точки на фазовой диаграмме купратов, что естественным образом объясняло бы их аномальное поведение. Но это есть простейшая расчётная модель, из которой можно сразу убедиться в том, что универсальное планковское поведение частоты релаксации просто отсутствует, как отсутствует и универсальный квантовый верхний предел для этой частоты рассеяния. Зависимость от параметров взаимодействия в частоте рассеяния не исчезает, и она в принципе может легко превысить границу $\alpha \sim 1$.

В литературе предлагался целый ряд микроскопических моделей, в которых объяснялось линейное возрастание сопротивления (частоты неупругой релаксации) в металлах. Мы упоминали работы [10, 11, 13], в которых такое поведение возникало в модели "фермионной" конденсации и связывалось, в частности, с формированием "плоских" зон вблизи уровня Ферми и появлением низкочастотных возбуждений типа нулевого звука, рассеяние на которых и приводило к линейному возрастанию частоты рассеяния с увеличением температуры.

В работе [12] была предложена интересная модель со случайными взаимодействиями электронов, в которой также формируется "плоская" зона и в широкой области изменения параметров реализуется линейное возрастание сопротивления с увеличением температуры. Неясно, правда, какое отношение модель взаимодействия электронов, принятая в [12], имеет к реальным металлам.

Заметим, что во всех этих подходах никакой универсальной "планковской" зависимости от температуры, вообще говоря, не возникает, а зависимость от величины взаимодействия (хотя, возможно, и слабая) сохраняется. Аналогичная ситуация имеет место и в популярной феноменологической модели маргинальной ферми-жидкости [48], успешно объясняющей многие свойства купратов.

Недавно в работе [59] была предложена интересная модель для объяснения аномальной температурной зависимости сопротивления $\text{Sr}_2\text{Ru}_2\text{O}_7$ за счёт процессов электрон-электронного рассеяния с учётом довольно сложной реальной структуры электронного спектра в этом соединении, приводящей к многолистной поверхности Ферми с выделенными "горячими" карманами, в которых электроны не вырождены (классический предел). Именно рассеяние электронов с "холодных" (вырожденных) участков поверхности Ферми с переходом одного из них в "горячий" карман и приводит к линейному по температуре возрастанию сопротивления. Аналогия с рассмотренной выше моделью с рассеянием на невырожденных флуктуациях (классический предел) достаточно очевидна. При этом зависимость от величины соответствующей константы связи никуда не исчезает, а "универсальное" планковское поведение возникает только для перенормированной (в обсуждавшемся выше смысле) частоты рассеяния квазичастиц.

Особое место занимают работы [14–17], основанные на аналогиях, взятых из физики чёрных дыр, космологии и теории суперструн, и претендующие на объяснение универсального "планковского" поведения частоты релаксации. Являясь вполне интересными с теоретической точки зрения, эти работы, по нашему мнению, имеют малое отношение к физике твёрдого тела.

В настоящей статье мы ограничились элементарным анализом на основе стандартных подходов теории твёрдого тела и показали, что наблюдающееся универсальное "планковское" поведение частоты релаксации электронов во многих металлах [3, 4] имеет довольно простое объяснение, связанное не с какой-то глубокой физикой, а просто с избранным в этих работах способом представления экспериментальных данных. Использование в формуле Друде для проводимости (сопротивления) эффективной массы, определяющейся из низкотемпературных измерений и включающей в себя перенормировку за счёт многочастичных эффектов (взаимодействий), неизбежно ведёт к соответствующей перенормировке частоты (времени) релаксации, которая заменяется эффективной частотой $\tilde{\Gamma}$ (98) релаксации квазичастиц. Эта частота относительно слабо зависит от величины взаимодействия и в принципе даёт в пределе универсальное "планковское" поведение как верхний предел для частоты релаксации. Но такое поведение является вполне иллюзорным и не отражает никакой особой физики. В микроскопической теории в формулу Друде входит перенормированная (взаимодействием) зонная масса, а частота релаксации, естественно, пропорциональна силе взаимодействия, как это и было известно со времени возникновения квантовой теории твёрдого тела.

Величина эффективного времени релаксации $\hbar/\tau = k_B T$ (т.е. фактически обсуждавшаяся выше "планковская" частота) в стандартной теории, как известно, играет роль некоторого характерного масштаба, разделяющего области различного поведения электросопротивления металлов, как это показано на рис. 12, взятом из книги [25]. Там же приведены характерные температурные зависимости сопротивления металлов. "Планковская" частота рассеяния задаёт на этом рисунке диагональ, но не определяет какого-то нового квантового предела. В принципе всё это давно известно и не требует для своего объяснения каких-то "экзотических" подходов.

Автор признателен Э.З. Кучинскому и Д.И. Хомскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при

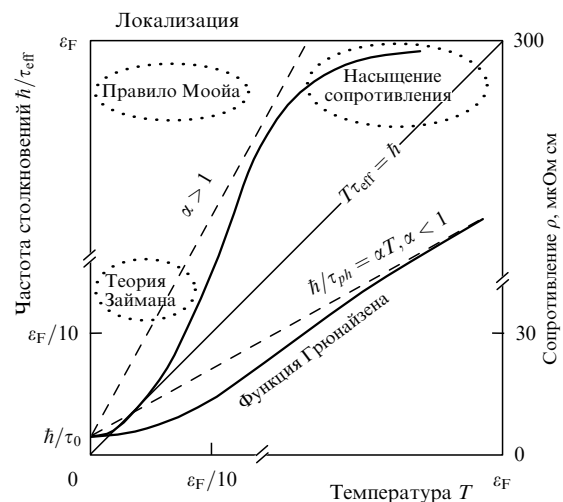


Рис. 12. Плоскость температура–беспорядок ($T, \hbar/\tau$), на которой показаны области применимости различных моделей электросопротивления металлов. Приведены также характерные температурные зависимости электросопротивления. "Планковская" частота релаксации определяет диагональ на этой плоскости [25].

частичной поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (грант 20-02-00011).

Приложение. Распределение по импульсам при планковской релаксации

Рассмотрим распределение по импульсам, соответствующее функции Грина (95):

$$N(\mathbf{p}) = T \sum_n G(i\varepsilon_n, \mathbf{p}). \quad (\text{П1})$$

Выполняя стандартное суммирование по фермионным мацубаровским частотам [18], получаем⁴

$$\begin{aligned} N(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_c d\varepsilon f(\varepsilon) G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) (G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) - G^A(\varepsilon, \mathbf{p})) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) A(\varepsilon, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

где $f(\varepsilon) = 1/[\exp(\varepsilon/T) + 1]$ — распределение Ферми, а спектральная плотность $A(\varepsilon, \mathbf{p}) = -(1/\pi) \text{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p})$ для функции Грина (95) имеет вид лоренциана:

$$A(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \frac{(\alpha/2)T}{(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}})^2 + [(\alpha/2)T]^2}. \quad (\text{П3})$$

На рисунке 13 приведены распределения $N(\mathbf{p})$, полученные численно непосредственно из (П2) со спектральной плотностью (П3) для разных значений α . Однако есть выделенные значения $\alpha = 2\pi n$, $n = 0, 1, \dots$, для которых распределение может быть получено в аналитическом виде. Действительно, при $\alpha = 0$ с очевидностью получаем распределение Ферми $N(\mathbf{p}) = f(\varepsilon_{\mathbf{p}})$. При $\alpha = 2\pi$

$$G(i\varepsilon_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i\pi T \text{sign} \varepsilon_n} = \frac{1}{i2\pi T m - \varepsilon_{\mathbf{p}}}, \quad (\text{П4})$$

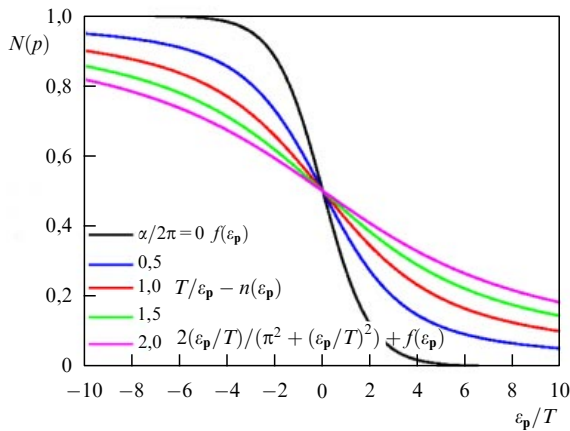


Рис. 13. (В цвете онлайн.) Функция распределения для случая планковской релаксации при разных α .

где m — целое, но за счёт $\text{sign} \varepsilon_n$ исключается $m = 0$. Тогда для распределения частиц находим

$$\begin{aligned} N(\mathbf{p}) &= T \sum_n G(i\varepsilon_n, \mathbf{p}) = T \sum_{m \neq 0} \frac{1}{i2\pi T m - \varepsilon_{\mathbf{p}}} = \\ &= T \sum_m \frac{1}{i2\pi T m - \varepsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{T}{\varepsilon_{\mathbf{p}}}. \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

Отметим, что знак перед суммой по как будто бы чётным мацубаровским частотам остался прежним (фермионным), поскольку изначально у нас было суммирование по нечётным мацубаровским частотам. Второе слагаемое в последнем выражении (П5) компенсирует вклад с частотой с $m = 0$, появившийся в сумме по m в первом слагаемом. Проводя стандартное суммирование по чётным частотам $\varepsilon_m = 2\pi T m$, получаем

$$\begin{aligned} T \sum_m \frac{1}{i\varepsilon_m - \varepsilon_{\mathbf{p}}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_c d\varepsilon \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} \pm i\delta} n(\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \text{Im} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i\delta} n(\varepsilon) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) n(\varepsilon) = -n(\varepsilon_{\mathbf{p}}), \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

где $n(\varepsilon) = 1/[\exp(\varepsilon/T) - 1]$ — распределение Бозе.

Итак, при $\alpha = 2\pi$

$$N(\mathbf{p}) = \frac{T}{\varepsilon_{\mathbf{p}}} - n(\varepsilon_{\mathbf{p}}). \quad (\text{П7})$$

Ещё раз отметим, что знак минус перед распределением Бозе в (П7) связан с тем, что изначально суммирование проводилось по фермионным частотам.

При $\alpha = 4\pi$ снова имеем суммирование по нечётным частотам, но с исключением двух ближайших к нулю фермионных мацубаровских частот:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{p}) &= T \sum_n \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i2\pi T \text{sign} \varepsilon_n} = \\ &= T \sum_{n \neq 0, -1} \frac{1}{i2\pi T(n+1/2) - \varepsilon_{\mathbf{p}}} = \\ &= T \sum_n \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_{\mathbf{p}}} - T \left(\frac{1}{i\pi T - \varepsilon_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-i\pi T - \varepsilon_{\mathbf{p}}} \right) = \\ &= f(\varepsilon_{\mathbf{p}}) + \frac{2T\varepsilon_{\mathbf{p}}}{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + (\pi T)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П8})$$

На рисунке 13 для случаев $\alpha = 2\pi$ и $\alpha = 4\pi$ приведены распределения, полученные как численно из (П2) со спектральной плотностью (П3), так и непосредственно из (П7) и (П8) (эти распределения, естественно, совпадают).

В целом видно, что функция распределения в рассматриваемой модели достаточно далека от обычной ферми-жидкостной ступеньки.

Дополнение при корректуре. После того как данная статья была принята к публикации, нам стала известна работа [60], авторы которой пришли к аналогичным выводам в контексте электрон-фононного взаимодействия.

⁴ Приведённые ниже расчёты выполнены Э.З. Кучинским.

Список литературы

1. Batlogg B *Phys. Today* **44** (6) 44 (1991)
2. Iye Y, in *Physical Properties of High Temperature Superconductors III* (Ed. D M Ginsberg) (Singapore: World Scientific, 1992) p. 285
3. Bruin J A N et al. *Science* **339** 804 (2013)
4. Legros A et al. *Nat. Phys.* **15** 142 (2019)
5. Zaanen J *Nature* **430** 512 (2004)
6. Ziman J M *Electrons and Phonons; the Theory of Transport Phenomena in Solid* (Oxford: Clarendon Press, 1960); Пер. на русск. яз.: Займан Дж *Электроны и фононы: Теория явлений переноса в твердых телах* (М.: ИЛ, 1962)
7. Meißner W, in *Handbuch der Experimentalphysik* Vol. 11, Pt. 2 (Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1935) p. 338
8. Максимов Е Г *УФН* **170** 1033 (2000); Maksimov E G *Phys. Usp.* **43** 965 (2000)
9. Martin S et al. *Phys. Rev. B* **41** 846(R) (1990)
10. Shaginyan V R, Popov K G, Khodel V A *Phys. Rev. B* **88** 115103 (2013)
11. Shaginyan V R et al. *Письма в ЖЭТФ* **110** 266 (2019); *JETP Lett.* **110** 290 (2019)
12. Patel A A, Sachdev S *Phys. Rev. Lett.* **123** 066601 (2019)
13. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **110** 335 (2019); *JETP Lett.* **110** 352 (2019)
14. Zaanen J *Nature* **448** 1000 (2007)
15. Hartnoll S A *Nat. Phys.* **11** 54 (2015)
16. Herzog C P et al. *Phys. Rev. D* **75** 085020 (2007)
17. Hartnoll S A et al. *Phys. Rev. B* **76** 144502 (2007)
18. Садовский М В *Диagramматика: лекции по избранным задачам теории конденсированного состояния* (М. – Ижевск: Ин-т компютер. исслед. – РХД, 2019); Пер. на англ. яз.: Sadovskii M V *Diagrammatics: Lectures on Selected Problems in Condensed Matter Theory* (Singapore: World Scientific, 2019)
19. Ioffe A F, Regel A R, in *Progress in Semiconductors* Vol. 4 (London: Heywood, 1960) p. 237
20. Mott N F *Metal–Insulator Transitions* (London: Taylor and Francis, 1974); Пер. на русск. яз.: Мотт Н Ф *Переходы металл–изолятор* (М.: Наука, 1979)
21. Abrahams E et al. *Phys. Rev. Lett.* **42** 673 (1979)
22. Садовский М В *УФН* **133** 223 (1981); Sadovskii M V *Sov. Phys. Usp.* **24** 96 (1981)
23. Vollhardt D, Wölfle P, in *Electronic Phase Transitions* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 32, Eds W Hanke, Yu V Korovin) (Amsterdam: North-Holland, 1992) p. 1
24. Markoš P *Acta Phys. Slovaca* **56** 561 (2006)
25. Гантмахер В Ф *Электроны в неупорядоченных средах* (М.: Физматлит, 2013); Пер. на англ. яз.: Gantmakher V F *Electrons and Disorder in Solids* (Oxford: Clarendon Press, 2005)
26. Mooij J H *Phys. Status Solidi A* **17** 521 (1973)
27. Gurvitch M, Fiory A T *Phys. Rev. Lett.* **59** 1337 (1987)
28. Takagi H et al. *Phys. Rev. Lett.* **69** 2975 (1992)
29. Hussey N E (II), Takenaka K, Takagi H *Philos. Mag.* **84** 2847 (2004)
30. Poniatowski N R et al. *Phys. Rev. B* **103** L020501 (2021); arXiv:2007.03685
31. Zaanen J, unpublished talks
32. Allen P B, Mitrović B, in *Solid State Physics* Vol. 37 (Eds H Ehrenreich, F Seitz, D Turnbull) (New York: Academic Press, 1983) p. 1
33. Allen P B *Phys. Rev. B* **3** 305 (1971)
34. Savrasov S Y, Savrasov D Y *Phys. Rev. B* **54** 16487 (1996)
35. Садовский М В *Письма в ЖЭТФ* **111** 203 (2020); Sadovskii M V *JETP Lett.* **111** 188 (2020)
36. Pines D *The Many–Body Problem* (New York: W.A. Benjamin, 1961); Пер. на русск. яз.: Пайнс Д *Проблема многих тел* (М.: ИЛ, 1963)
37. Абрикосов А А, Горьков Л П, Дзялошинский И Е *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М.: Физматгиз, 1962); *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М.: Добросвет, 1998); Пер. на англ. яз.: Abrikosov A A, Gorkov L P, Dzyaloshinski I E *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963)
38. Pines D, Nozières P *The Theory of Quantum Liquids* Vol. 1 (New York: W.A. Benjamin, 1966); Пер. на русск. яз.: Пайнс Д, Нозьер Ф *Теория квантовых жидкостей* (М.: Мир, 1967)
39. Ziman J M *Models of Disorder: the Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979); Пер. на русск. яз.: Займан Дж *Модели беспорядка: теоретическая физика однородно неупорядоченных систем* (М.: Мир, 1982)
40. Edwards S F *Philos. Mag.* **6** 617 (1961)
41. Edwards S F *Proc. R. Soc. Lond. A* **267** 518 (1962)
42. Proust C, Taillefer L *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **10** 409 (2019)
43. Sachdev S *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
44. Стишов С М *УФН* **174** 853 (2004); Stishov S M *Phys. Usp.* **47** 789 (2004)
45. Садовский М В *УФН* **171** 539 (2001); Sadovskii M V *Phys. Usp.* **44** 515 (2001)
46. Садовский М В, в сб. *Струны, браны, решетки, сетки, псевдо-цели и пылинки: Труды семинара им. И.Е. Тамма* (Науч. ред.: М А Васильев, Л В Келдыш, А М Семихатов) (М.: Научный мир, 2007) с. 357; cond-mat/0408489
47. Кучинский Э З, Некрасов И А, Садовский М В *УФН* **182** 345 (2012); Kuchinskii E Z, Nekrasov I A, Sadovskii M V *Phys. Usp.* **55** 325 (2012)
48. Varma C M *Rev. Mod. Phys.* **92** 031001 (2020)
49. Sadovskii M V *Phys. Rep.* **282** 225 (1997)
50. Sadovskii M V *Superconductivity and Localization* (Singapore: World Scientific, 2000)
51. Fukuyama H, Ebisawa H, Wada Y *Prog. Theor. Phys.* **42** 494 (1969)
52. Nakajima S, Watabe M *Prog. Theor. Phys.* **29** 341 (1963)
53. Prange R E, Kadanoff L P *Phys. Rev.* **134** A566 (1964)
54. Heine V, Nozières P, Wilkins J W *Philos. Mag.* **13** 741 (1966)
55. Grimvall G *Phys. Scripta* **14** 63 (1976)
56. Esterlis I et al. *Phys. Rev. B* **97** 140501(R) (2018)
57. Chubukov A V et al. *Ann. Physics* **417** 168190 (2020)
58. Cao Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **124** 076801 (2020)
59. Mousatov C H, Berg E, Hartnoll S A *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **117** 2852 (2020)
60. Hwang E H, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **99** 085105 (2019)

Planckian relaxation delusion in metals

M.V. Sadovskii

*Institute of Electrophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
ul. Amundsena 106, 620016 Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: sadovski@iep.uran.ru*

We present a critical review of recent attempts to introduce a new quantum ('Planckian') limit for the temperature dependence of the inelastic scattering rate of electrons in metals. We briefly discuss the main experimental facts and some simple theoretical models explaining the linear-in-temperature growth of resistivity (starting from very low temperatures) in superconducting cuprates and some similar systems. There is no commonly accepted theoretical explanation for such behavior up to now. We also discuss the known quantum limits for electrical conductivity (resistance). It is shown that the universal Planckian limit for the inelastic relaxation rate proposed in some papers is a kind of delusion related to a certain procedure to represent the experimental data.

Keywords: resistivity of metals, relaxation time, effective mass, quantum fluctuations, high-temperature superconductors

PACS numbers: 72.10.Di, 72.15.Cz, 72.15.Lh

Bibliography — 60 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **191** (2) 182–198 (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2020.08.038821>

Received 5 August 2020

Physics – Uspekhi **64** (2) (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2020.08.038821>