

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.311.33

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ: КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ*М. В. Садовский*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	223
1. Модель Андерсона и минимальная металлическая проводимость	224
2. Элементарная скэйлинговая теория локализации	226
3. Проводимость тонких проволок и пленок	234
4. Существует ли скэйлинг на пороге подвижности?	242
Заключение	253
Цитированная литература	254

ВВЕДЕНИЕ

Представления о локализации электронов в неупорядоченных системах являются центральными для современной теории неупорядоченных систем, на них базируются основные представления об энергетическом спектре, кинетических и других электронных свойствах этих систем^{1, 2}. Впервые сформулированные в основополагающей работе Андерсона³, они, после некоторого периода невнимания к ним, были развиты на качественном уровне Моттом, который и применил их для формулировки основных закономерностей электронной теории неупорядоченных систем^{1, 2}. Явлению локализации в последние годы был посвящен ряд хороших обзоров⁴⁻⁷, и ее основные положения сейчас являются общеизвестными. Вместе с тем задача о локализации, несмотря на ее важность, еще далека от вполне удовлетворительного решения. Это касается прежде всего наших представлений о поведении электронных состояний вблизи так называемого порога подвижности и связанного с этим вопроса о физических свойствах системы, уровень Ферми электронов в которой попадает в окрестность порога подвижности. Трудности в понимании этих свойств связаны как с чрезвычайной математической сложностью рассматриваемой задачи, так и с тем обстоятельством, что экспериментальные свидетельства о локализации электронов носят обычно довольно косвенный характер^{1, 2, 5}.

Настоящий обзор посвящен краткому изложению того прогресса, который был достигнут в данной проблеме за последние несколько лет, как при теоретическом рассмотрении, так и в постановке новых экспериментов. При этом мы в основном имеем в виду рассмотреть те теоретические результаты, которые были получены для «критического» поведения системы в окрестности порога подвижности, исходя из определенной аналогии, которая, по-видимому, существует между таким поведением

и обычным критическим поведением в окрестности точки фазовых переходов второго рода, а также новые эксперименты, связанные с изучением проводимости тонких металлических проволок и пленок, в которых явление локализации (а также соответствующее критическое поведение) должно, по-видимому, проявляться наиболее ярко. Особое внимание, уделяемое сейчас рассмотрению двумерных неупорядоченных систем, естественно связано с тем обстоятельством, что практически все устройства современной микроэлектроники являются примерами таких систем. Мы, однако, совершенно не касаемся важных вопросов и экспериментов, связанных с явлением локализации в квазидномерных системах (см. по этому поводу ⁸⁻¹¹).

План нашего изложения следующий. Сначала мы напомним основные представления теории локализации и соответствующую терминологию. Затем рассмотрим элементарную скэйлинговую теорию локализации, основанную главным образом на идеях Таулеса ⁴, включая новейшее развитие этих результатов и их применение к описанию проводимости тонких металлических проволок и двумерных металлических систем. Далее мы перейдем к рассмотрению основных экспериментов, связанных с попытками проверки этих представлений. В заключение мы кратко рассмотрим попытки строгого построения скэйлинговой теории локализации, исходящие из упомянутой выше аналогии с обычными критическими явлениями.

1. МОДЕЛЬ АНДЕРСОНА И МИНИМАЛЬНАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Напомним основные результаты теории локализации. В основу рассмотрения обычно кладется модель Андерсона ³, в которой рассматривается один электрон, распространяющийся в регулярной решетке узлов в d -мерном пространстве; на каждом из узлов имеется случайный уровень энергии E_j (j — номер узла в решетке). Принимается также, что существует определенная амплитуда вероятности перехода V_{ij} с j -го узла на узел i . Обычно считается ^{3,12,13}, что эта амплитуда перехода отлична от нуля и равна некоторой константе V для переходов между ближайшими соседями. Мы не будем рассматривать роль «недиагонального» беспорядка матричных элементов V_{ij} (см. по этому поводу ¹⁴).

Таким образом, гамильтониан модели имеет вид

$$H = \sum_j E_j a_j^\dagger a_j + \sum_{ij} V_{ij} a_i^\dagger a_j, \quad (1.1)$$

где a_j и a_j^\dagger — соответственно обычные операторы уничтожения и рождения электрона на узле j . Уровни энергии E_j считаются распределенными независимо на разных узлах. Распределение на данном узле принимается обычно в виде ³

$$P(E_j) = \begin{cases} \frac{1}{W} & \text{при } |E_j| < \frac{1}{2} W, \\ 0 & \text{при } |E_j| > \frac{1}{2} W, \end{cases} \quad (1.2)$$

т. е. считается однородным в некотором интервале энергий шириной W . Качественные результаты, по-видимому, не зависят от вида распределения $P(E_j)$, вместо (1.2) может фигурировать любое распределение с эффективной шириной W .

Если беспорядок в системе отсутствует ($W = 0$), решение задачи об электронном спектре гамильтониана (1.1) элементарно. Электронные

состояния образуют зону с шириной $B = 2 ZV$ (для простой кубической решетки, Z — число ближайших соседей), а волновая функция каждого из состояний в зоне представляется блоховской волной, т. е. в равной степени принадлежит всем узлам решетки. При $W \neq 0$ ситуация изменяется, причем возникает существенная зависимость от размерности пространства d . Так, для $d = 1$ (одномерная неупорядоченная цепочка) сколь угодно малого значения W достаточно для того, чтобы полностью изменить характер электронных состояний — все они становятся локализованными, т. е. их волновые функции становятся экспоненциально спадающими в координатном пространстве, а статическая проводимость системы при температуре $T = 0$ обращается в нуль⁸⁻¹¹. Двумерные системы ($d = 2$) представляют собой, по-видимому, особый случай и подробно обсуждаются ниже. Для $d > 2$ достаточно надежно установлено^{3-7,12-13}, что при больших отношениях $W/V > (W/V)_c$ (т. е. при достаточно сильном беспорядке) также происходит полная локализация всех электронных состояний в зоне. Типичные значения $(W/V)_c \approx 8 - 15$ (для трехмерных решеток)³⁻⁶.

Физический смысл явления локализации довольно прост. Квантовое туннелирование с узла на узел может осуществляться только между узлами с совпадающими (вырожденными) энергетическими уровнями. В случайной системе вероятность такого вырождения для достаточно близких в координатном пространстве узлов, вообще говоря, мала, а при достаточно большом беспорядке W она и вовсе обращается в нуль^{3, 15, 16}.

При $W/V < (W/V)_c$ происходит локализация электронных состояний по краям зоны, тогда как в центре зоны состояния остаются делокализованными. При этом возникают критические значения энергии E_c и E'_c , разделяющие области локализованных и делокализованных состояний, которые обычно именуется порогами подвижности. Эта ситуация иллюстрируется рис. 1. Название «порог подвижности» связано с тем, что локализованные состояния не дают вклада в статическую проводимость при нулевой температуре ($T = 0$). Если уровень Ферми E_F многоэлектронной системы при $T = 0$ попадает в область энергий, соответствующую локализованным состояниям, то система является диэлектриком — проводимость возможна лишь при $T \neq 0$ или при возбуждении электронов переменным электромагнитным полем. Проводимость при этом осуществляется с помощью прыжкового механизма^{1, 7, 17}. Если же уровень Ферми попадает в область делокализованных состояний, проводимость имеет металлический характер. Такой переход металл-диэлектрик, происходящий при пересечении уровнем Ферми порога подвижности, принято называть переходом Андерсона.

Одним из центральных вопросов теории является характер изменения металлической (статической, $T = 0$) проводимости при прохождении уровня Ферми E_F через порог подвижности. Возможные альтернативы изображены на рис. 2. Проводимость может скачком обращаться в нуль после достижения некоторой минимальной величины $\sigma_{m,m}$ — минимальной металлической проводимости (максимального металлического удельного сопротивления). Такое поведение было предложено^{1, 2} Моттом на основа-

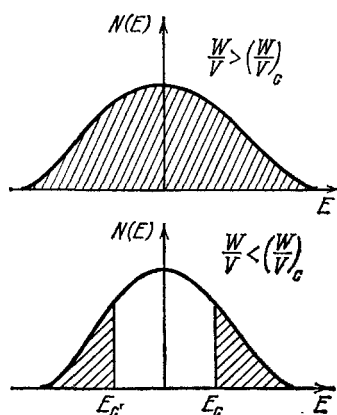


Рис. 1. Плотность состояний в решетке Андерсона. Заштрихованы области локализованных состояний. E_c и E'_c — пороги подвижности.

нии качественного анализа проводимости в модели Андерсона, а также на основании анализа ряда экспериментальных данных. Логически также вполне возможно и непрерывное обращение проводимости в нуль, при этом $\sigma_{m.m}$ сохраняет определенный смысл характерного масштаба проводимости, начиная с которого происходит достаточно резкое обращение

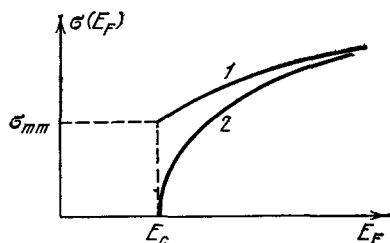


Рис. 2. Изменение металлической проводимости при прохождении уровня Ферми через порог подвижности.

1 — по Мотту^{1,2}, 2 — по Коэну¹⁸.

ее в нуль. Эта альтернатива была предложена Коэном¹⁸, в основном исходя из аналогии локализации с явлением протекания (перколяции)^{7, 17}. Ясно, что обе возможности могут привести примерно к одним и тем же экспериментальным следствиям (при $T \neq 0$), однако соответствующий теоретический вопрос этим не снимается.

Оценка величины $\sigma_{m.m}$ может быть проделана очень просто^{1, 2, 5}. Фактически она основывается на представлениях, введенных еще Иоффе и Регелем¹⁹, согласно которым длина свободного пробега электрона l в металлической

системе не может быть меньше длины порядка межатома расстояния a . Тогда из обычной формулы Друде $\sigma = (ne^2/m)\tau$ (n — плотность электронов, τ — время свободного пробега, m — масса электрона), используя связь плотности электронов и импульса Ферми с межатомным расстоянием: $n \sim a^{-d}$, $p_F \sim \hbar/a$, $\tau \sim lm/p_F \sim am/p_F \sim ma^2/\hbar$, получаем оценку

$$\sigma_{m.m} \approx \text{const} \cdot \frac{e^2}{\hbar} a^{2-d}. \quad (1.3)$$

Согласно Мотту^{1, 2, 5} const в (1.3) определяется безразмерным отношением $(W/V)_c$ и лежит для $d = 3$ в интервале 0,025—0,06, что дает $\sigma_{m.m} \sim (1-5) \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$, для типичных $a \sim 2-3 \text{ \AA}$.

Уже из формулы (1.3) видно, что $d = 2$ играет выделенную роль — минимальная металлическая проводимость определяется только фундаментальными физическими постоянными, а характеристики самой системы входят только через достаточно универсальное безразмерное отношение $(W/V)_c$. Так ли это? Важным является также детальное понимание изменений, происходящих вблизи порога подвижности с волновыми функциями: как меняется (расходится при $E \rightarrow E_c$ со стороны локализованных состояний) радиус локализации волновой функции? Являются ли волновые функции локализованных состояний обязательно экспоненциальными или же возможно достаточно быстрое (обеспечивающее нормируемость на единицу) степенное спадание в координатном пространстве? Нельзя ли рассмотреть эти вопросы по аналогии с задачей о фазовых переходах и не является ли поведение вблизи порога подвижности своеобразным «критическим» явлением? Наконец, какова роль межэлектронного взаимодействия (корреляции) в явлении локализации? Последующее изложение будет в той или иной мере вытекать из поставленных выше вопросов; мы рассмотрим современный уровень понимания этих проблем и ряд экспериментов, стимулированных их постановкой.

2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СКЭЙЛИНГОВАЯ ТЕОРИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Поведение системы в окрестности порога подвижности можно попытаться понять с помощью скэйлингового рассмотрения, аналогичного тому, которое впервые было использовано в теории критических явле-

ний^{20, 21}, или, на современном языке, — с помощью построения того или иного варианта преобразований группы перенормировки (ренормгруппы)^{22–24}. Основная физическая идея такого рассмотрения основана на последовательном переходе от небольших ячеек (масштабов) системы в координатном пространстве, для которых задача может быть решена (хотя бы грубо!), ко все более крупным ячейкам (масштабам), которые пытаются описать в терминах тех же физических переменных, что и мелко-масштабные ячейки. Последовательности формул, осуществляющих такой переход от мелких масштабов к крупным, называются преобразованиями группы перенормировки (ренормгруппы) в реальном пространстве^{23, 24}, являющимися современным вариантом масштабных преобразований Каданова²⁰. В теории критических явлений построение таких преобразований обычно мотивируется^{20–24} возрастанием корреляционной длины флуктуаций параметра порядка в окрестности критической точки. Аналогом этого явления в теории локализации является рост радиуса локализации при подходе к порогу подвижности со стороны локализованных состояний. Следует, однако, подчеркнуть, что в области дelokализованных состояний аналог такой расходящейся длины неизвестен*) (так же, как неизвестен «параметр порядка», связанный с переходом Андерсона), что существенно ограничивает рассматриваемую аналогию и затрудняет простой качественный анализ.

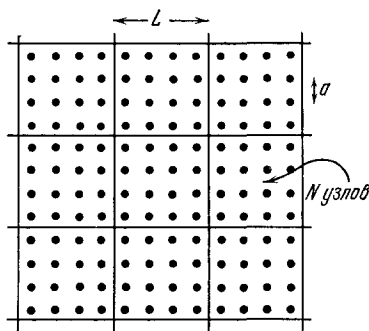


Рис. 3. Аналог построения Каданова в задаче Андерсона по Личарделло — Таулесу.

Перейдем к изложению некоторого варианта масштабных преобразований для задачи Андерсона, предложенного в работах Таулеса с сотрудниками^{4, 25–29}. Рассмотрим решетку Андерсона с постоянной решетки, равной a . Перейдем от ячейки со стороной a к новой ячейке со стороной L , содержащей N узлов исходной решетки. Тогда исходную решетку можно описать как построенную из новых ячеек, в каждой из которых имеется набор N случайных уровней (рис. 3). Рассмотрим решетку, построенную периодическим повторением одной из таких ячеек. Тогда любой из N уровней этой ячейки «расплывается» в зону шириной $2\Delta E$. Величина ΔE определялась в работах^{25–29} численно через величину сдвига уровней при переходе от периодических к антипериодическим граничным условиям для волновых функций на границе ячейки L . Хотя полученная таким продолжением решетка и не тождественна масштабно-преобразованной решетке Андерсона, можно при качественном рассмотрении считать, что эффективная связь**) электронов на двух уровнях в соседних ячейках в решетке Андерсона (т. е. аналог интеграла перекрытия V для системы, состоящей из новых ячеек) порядка

$$V_L \approx \frac{1}{Z} \Delta E, \tag{2.1}$$

*) См., однако, обсуждение этого вопроса в недавней работе¹³⁵.

**) Величина $V_L \sim \Delta E$ представляет собой меру взаимного влияния волновых функций в соседних ячейках. Если состояния локализованы, то они практически нечувствительны к изменению граничных условий в большой ячейке (см. (2.3)). Делo-кализованные состояния, напротив, чувствуют изменение граничных условий, что и приводит к заметному сдвигу уровней $\Delta E'$ ^{25–29} (см. (2.4)).

так как такая связь приводит к зоне шириной $2\Delta E$ при периодическом продолжении ячейки. Средний разброс уровней в соседних ячейках определяется обратной плотностью состояний, рассчитанной на единичный объем в исходной решетке, и размером ячейки L :

$$W_L \approx L^{-d} N^{-1} (E). \quad (2.2)$$

Если фиксировать рассмотрение на одной из N зон в новой решетке, то W_L можно считать аналогом параметра W исходной решетки. Таким образом строится переход от исходной задачи Андерсона с отношением W/V к новой (масштабно-преобразованной) задаче того же типа с «эффективным» гамильтонианом, характеризуемым новым отношением W_L/V_L . Процесс таких скейлинговых преобразований можно продолжить по цепочке $L \rightarrow 2L \rightarrow 4L \rightarrow \dots$ или, в общем случае, $L \rightarrow bL$, переходя ко все более крупным ячейкам, содержащим все больше и больше узлов исходной решетки.

Если данное состояние с энергией E локализовано, то

$$V_L \sim e^{-\alpha(E)L}, \quad (2.3)$$

где $\alpha(E) = R_{\text{loc}}^{-1}(E)$ — обратный радиус локализации рассматриваемого состояния. Соответственно в этом случае и отношение V_L/W_L также экспоненциально убывает с ростом L . Если предположить существование порогов подвижности, то для любого E из исходной зоны существует максимальное отношение $(V_L/W_L)_{\text{max}}$, для которого еще осуществляется такое экспоненциальное убывание. С помощью такого критерия локализации в работах ²⁵⁻²⁹ численно определялось положение порогов подвижности в исходной зоне.

Делокализованный электрон в системе ячеек размера $L \gg l$, где l — длина свободного пробега, в течение времени $\tau_L \sim \hbar/V_L$ может равновероятно сместиться (продиффундировать) из данной ячейки в соседнюю *). Из элементарной кинетической теории ясно, что коэффициент такой диффузии $D_L \sim L^2/\tau_L$, так что получаем

$$V_L \approx \hbar D_L (E) L^{-2}, \quad (2.4)$$

где $D_L(E)$ — коэффициент диффузии электрона с энергией E . Тогда для делокализованных состояний имеем

$$g(L) \equiv \frac{V_L}{W_L} \approx \hbar D_L(E) N(E) L^{d-2} \approx \frac{\hbar}{2e^2} \sigma_L(E) L^{d-2}, \quad (2.5)$$

где $\sigma(E) = 2e^2 D(E) N(E)$ — удельная электропроводность системы, выраженная через коэффициент диффузии и плотность состояний, что следует из общего соотношения Эйнштейна ³⁰ $\sigma = e^2 D dn/d\mu$ (μ — химический потенциал) при $T = 0$. Более строгий вывод соотношения (2.5) приведен в оригинальных работах ^{4, 25-28}.

Из (2.5) видно, что для $d = 2$ универсальная минимальная металлическая проводимость существует, если при масштабных преобразованиях $(V_L/W_L)_{\text{max}}$ выходит на некоторую универсальную константу. Численный анализ, проведенный Личарделло и Таулесом ^{27, 28}, показал, что такая универсальная (не зависящая от типа исходной решетки) константа существует (в работе ²⁷ рассматривались шестиугольная (honeycomb — *англ.*) решетка, треугольная и квадратная при $N = 64, 100, 144, 196$).

*) Величина V_L определяет, как отмечалось выше, эффективную связь электронов на случайных уровнях в соседних ячейках. Это взаимодействие приводит к уширению этих уровней, т. е. к конечному, порядка τ_L , времени жизни электрона в данной ячейке.

Для минимальной металлической проводимости при $d = 2$ они получили

$$\sigma_{m.m} = \frac{2e^2}{\hbar} \left(\frac{V_L}{W_L} \right)_{\max} = (0,12 \pm 0,03) \frac{e^2}{\hbar} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}^{-1}. \quad (2.6)$$

Однако более поздние численные расчеты тех же авторов ²⁹ привели к несколько неопределенным результатам. Грубо говоря, ими было замечено, что по мере роста размеров системы L $\sigma_{m.m}$ уменьшается. Это поставило под сомнение существование $\sigma_{m.m}$ для $d = 2$ и привело авторов работы ²⁹ к гипотезе о том, что в двумерных системах может осуществляться полная локализация при сколь угодно малом беспорядке (аналогично одномерному случаю). В то же время результаты работы ³¹ подтверждают основные выводы работы ²⁷. Результаты, получающиеся при численном обсчете трехмерных систем, слишком неопределенны ²⁵⁻²⁹; наиболее полное рассмотрение трехмерного случая проводилось в работе ³² (для решетки типа алмаза).

Существенное продвижение в нашем понимании явления локализации связано с работой Абрахамса, Андерсона, Личчарделло и Рамакришна-на ^{33 *}). Оказывается, что можно провести простой качественный анализ поведения функции $g(L)$, определенной в (2.5), предположив для нее простейшее ренормгрупповое уравнение (определяющее изменение $g(L)$ при переходе $L \rightarrow bL$) ^{**})

$$\frac{d \ln g(L)}{d \ln L} = \beta_d(g(L)). \quad (2.7)$$

Наиболее существенным предположением здесь является зависимость функции $\beta_d(g)$ в правой части только от переменной $g(L)$ (однопараметрический скейлинг). Уравнение (2.7) является аналогом известного уравнения Гелл-Манна и Лоу (функция $\beta_d(g)$ — аналог функции Гелл-Манна и Лоу) в ренормгруппе квантовой теории поля ³⁴⁻³⁶. Поведение функции $\beta_d(g)$ нетрудно понять из простых физических соображений. Из определения (2.5) ясно, что величина $g(L) \propto \sigma_L L^{d-2}$, т. е. пропорциональна полной (не удельной!) электропроводности системы (кубика со стороной L). Для больших g (малый беспорядок, $V_L/W_L \gg 1$) мы должны получить постоянную металлическую проводимость $\sigma_{L \rightarrow \infty} = \sigma$, т. е. должно выполняться условие

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \beta_d(g) \rightarrow d - 2, \quad (2.8)$$

так как из уравнения $d \ln g(L)/d \ln L = d - 2$ следует $g(L) = \text{const} \cdot L^{d-2}$, а постоянная интегрирования, очевидно, есть просто $(\hbar/2e^2) \sigma$. При малых g ($V_L/W_L \ll 1$) мы должны получить экспоненциальную локализацию, т. е. $g(L) = g_c(d) \exp(-\alpha L)$ (ср. (2.3)). Тогда

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \beta_d(g) \rightarrow \ln \frac{g}{g_c(d)}, \quad (2.9)$$

так как из $\ln g = \ln g_c - \alpha L$ следует $d \ln g(L)/d \ln L = -\alpha dL/d \ln L = -\alpha L = \ln(g/g_c)$.

^{*}) Эта работа известна как работа «банды четырех».

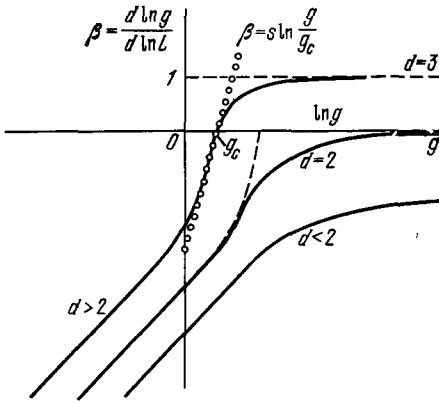
^{**}) Уравнение (2.7) есть дифференциальный вариант постулируемого общего масштабного преобразования переменных рассматриваемой задачи: $g(bL) = f(b, g(L))$. Дифференциальная запись в виде (2.7) наиболее удобна для качественного анализа и подразумевает переход от ячеек со стороной L к ячейкам со стороной $bL = L + dL = (1 + \lambda)L$, где $dL/L = \lambda \rightarrow 0$.

Предположим далее существование двух разложений «теории возмущений»:

$$\beta_d(g \rightarrow 0) = \ln \left[-\frac{g}{g_c(d)} \right] (1 + ag + \dots), \quad (2.10)$$

$$\beta_d(g \rightarrow \infty) = d - 2 - \frac{b}{g} + \dots \quad (2.11)$$

В работе ³³ приводятся аргументы в пользу того, что $a > 0, b > 0$. Используя асимптотики (2.8), (2.9), а также разложения (2.10) и (2.11), легко изобразить поведение $\beta_d(g)$ во всем интервале изменения g (в предположении ее монотонности и непрерывности!). Оно показано на рис. 4. Видно, что функция $\beta_d(g)$ заведомо не имеет нулей для $d < 2$. Если справедливо



разложение (2.11), то нет нуля и для $d = 2$. При $d > 2$ функция $\beta_d(g)$ заведомо имеет нуль $\beta_d(g_c) = 0$, хотя его положение g_c не может быть найдено из столь простого рассмотрения (очевидно, $g_c \sim 1$). Наличие такого нуля означает существование неустойчивой фиксированной точки для уравнения (2.7). Отметим в связи с этим, что скейлинговое поведение в теории критических явлений обычно определяется устойчивыми фиксированными точками ренормгрупповых уравнений ²²⁻²⁴. Вблизи g_c можно использовать аппроксимацию (показано кружками на рис. 4)

Рис. 4. Качественный вид «функции Гелл-Манна и Лоу» для различных d . Штриховой линией показано поведение, необходимое для получения скачка проводимости на пороге подвижности при $d = 2$.

$$\beta_d(g) \approx \frac{1-\nu}{\nu} \ln \frac{g}{g_c}, \quad (2.12)$$

где $\nu < 1$, поскольку в (2.10) $a > 0$.

Тогда если при интегрировании уравнения (2.7) мы стартуем с начальной точки $g_0 \geq g_c$ ($g(L = a) = g_0$, где a — некоторая длина порядка межатомного расстояния), то σ_L выйдет на следующую асимптотику при $L \rightarrow \infty$ *):

$$\sigma \approx A \frac{e^2}{h} \frac{g_c}{a^{d-2}} \left(\ln \frac{g_0}{g_c} \right)^{(d-2)\nu} \approx A \frac{e^2}{h} \frac{g_c}{a^{d-2}} \left(\frac{g_0 - g_c}{g_c} \right)^{(d-2)\nu} \text{ при } g_0 \geq g_c, \quad (2.13)$$

где $A = \text{const} \sim 1$. Видно, что наличие фиксированной точки означает существование порога подвижности, а поведение $\beta_d(g)$ вблизи нуля определяет критическое поведение на пороге подвижности. При сделанных приближениях проводимость непрерывно обращается в нуль при $g_0 \rightarrow g_c$, а величина $e^2/\hbar a^{d-2}$ ($\sigma_{m.m}$ по Мотту) играет просто роль характерного

*) Строго говоря, интегрирование (2.7) с указанными начальными условиями и выражением (2.12) в правой части дает

$$\sigma(L) = \frac{2e^2}{h} \frac{g_c}{a^{d-2}} \left(\ln \frac{g_0}{g_c} \right)^{(d-2)\nu} \left\{ \frac{g(L)}{g_c} \left(\ln \frac{g(L)}{g_c} \right)^{(2-d)\nu} \right\}.$$

Поскольку в силу неустойчивости фиксированной точки при $L \rightarrow \infty$ мы попадаем в область $g \gg 1$, где истинная $\beta_d(g)$ выходит на константу $d - 2$, множитель в фигурных скобках при $L \rightarrow \infty$ переходит в константу A из (2.13). Зависимость же от начальных условий в (2.13) определяется функцией $\beta_d(g)$, линеаризованной вблизи фиксированной точки.

масштаба проводимости. В этом смысле результат работы ³³ в некотором роде подтверждает вариант Коэна. Для того чтобы получить на пороге подвижности моттовский скачок проводимости, функция $\beta_d(g)$ должна вести себя как показано на рис. 4 штриховой линией (для $d = 2$). Такое поведение, по мнению авторов работы ³³, маловероятно, так как противоречит разложению (2.11). Подчеркнем, однако, что существование этого разложения является предположением теории *).

Аналогичным образом можно убедиться, что интегрирование (2.7) с начальной точкой $g_0 \ll g_c$ дает (при больших L)

$$g \approx g_c \exp \left(-A' \left| \ln \frac{g}{g_c} \right|^v \frac{L}{a} \right). \quad (2.14)$$

Отсюда (ср. (2.3)) следует, что

$$R_{\text{loc}} \sim a \left| \frac{g - g_c}{g_c} \right|^{-v}, \quad (2.15)$$

т. е. v играет роль критического индекса радиуса локализации **).

Для $d \leq 2$ согласно ³³ $\beta_d(g) < 0$ во всем интервале изменения g . Тогда $\sigma \propto g (L \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ для любых начальных условий, порога подвижности нет, все состояния локализованы (статическая проводимость бесконечной системы равна нулю!). Для $d = 1$ это совпадает с известными точными результатами ⁸⁻¹¹. Для $d = 2$ это совершенно новый результат (хотя и подозревавшийся ранее в ²⁹). Из уравнения (2.7) с начальным $g_0 (L = a)$ из области достаточно больших g (где применимо разложение (2.11) (для $d = 2$ первый член этого разложения равен нулю) получаем

$$g(L) \approx g_0 - b \ln \frac{L}{a} \approx \frac{\hbar}{2e^2} \sigma_L, \quad (2.16)$$

т. е. проводимость σ_L уменьшается с ростом L за счет *логарифмической* поправки до тех пор, пока поправочный член не станет порядка основного, после чего уменьшение проводимости происходит уже по экспоненциальному закону. Наличие слабой логарифмической зависимости в (2.16) приводит к тому, что поведение проводимости может в действительности быть близким к тому, которое следовало бы ожидать в случае существования резкого порога подвижности. В эксперименте может наблюдаться логарифмическая тенденция к диэлектризации в «металлической» фазе (высокие температуры), а затем достаточно резкий срыв проводимости в окрестности $\sigma_{\text{м.м}}$ (2.6). Процессы, определяющие эффективные длины L , которые в свою очередь определяют экспериментально наблюдаемую проводимость, обсуждаются ниже (гл. 3).

Результат (2.16) может быть согласно ³³ оправдан прямыми расчетами по теории возмущений. При этом следует рассмотреть (для $d = 2$) после-

*) Существование такого разложения может быть оправдано при рассмотрении области слабого беспорядка с помощью обычной теории возмущений ³⁸⁻⁴⁰, которая становится неприменимой при $g \sim g_c$.

***) В работе ¹³⁵ делается попытка придать физический смысл эффективной длине $\xi \sim a [(g - g_c)/g_c]^{-v}$ и в области $g \gtrsim g_c$. Легко видеть, что (2.13) может быть записано в виде $\sigma \approx Ae^2/\hbar \xi^{d-2}$, так что длина ξ определяет поведение проводимости достаточно близко к порогу подвижности в ситуации, когда ξ становится гораздо больше межатомного расстояния и длины свободного пробега, обусловленной неупругими процессами рассеяния. Эта длина согласно ¹³⁵ определяет масштаб, на котором проводимость становится «омической», в том смысле, что сопротивление куба ($d = 3$) со стороны L уменьшается пропорционально L^{-1} . Вблизи порога подвижности только образцы возрастающих размеров ($\xi \rightarrow \infty$) могут рассматриваться как макроскопические, при $L < \xi \sigma_L$ зависит от L . Возможно, что эти соображения позволяют придать определенный физический смысл расходящейся длине в области делокализованных состояний, имеющейся в скейлинговой картине. В ¹³⁶ на этой основе предложено оригинальное объяснение отрицательного температурного коэффициента сопротивления, наблюдающегося во многих плохо проводящих металлических системах.

довательность фейнмановских графиков для двухчастичной функции Грина, введенную в давней работе Лангера и Нила³⁷. Эта последовательность графиков оказывается для $d = 2$ доминирующей и приводит к логарифмической поправке в (2.16). Аналогичный результат получен в работе³⁸, где суммирование графиков Лангера — Нила привело к следующему выражению для коэффициента двумерной диффузии во внешнем поле частоты ω :

$$D \approx D_0 \left(1 - \frac{\hbar}{2E\tau} \ln \frac{1}{\omega\tau} \right), \quad (2.17)$$

где $D_0 = v^2\tau/2$ — обычная формула кинетической теории для двумерного коэффициента диффузии (v — скорость электрона, E — его энергия, τ — время свободного пробега; предполагается, что $E\tau \gg 1$). Видно, что при $\omega \rightarrow 0$ поправка приводит к уменьшению коэффициента диффузии, что может указывать на полную локализацию в двумерной системе. Подчеркнем, что выражение (2.17) справедливо, пока поправка мала по сравнению с основным членом. Для конечного образца в области частот $D_0L^{-2} \gg \omega \gg \hbar/mL^2$ (2.17) переходит в результат типа (2.16)³⁸. Обобщение рассуждения, проведенного в³⁸, на случай учета процессов рассеяния с переворотом спина, а также действия слабого внешнего магнитного поля^{39, 40}, показало, что эти процессы приводят к подавлению логарифмической поправки в (2.17), т. е. к разрушению двумерной локализации. Учет эффектов спин-орбитального взаимодействия электрона с примесями привел к смене знака логарифмической поправки к проводимости⁴¹, т. е. к проводимости, обращаемой при $\omega \rightarrow 0$ в бесконечность. В настоящее время трудно дать качественную интерпретацию этих неожиданных результатов *).

Описанная выше простая картина явлений вблизи порога подвижности остается недоказанной. Более того, уже после появления работы³³ Ли⁴² провел численное рассмотрение проводимости в модели Андерсона, аналогичное в некотором смысле рассмотрению проблемы Кундо, сделанному в свое время Вильсоном²³. Не вдаваясь в детали, укажем только, что благодаря особой схеме масштабных преобразований (ренормгруппы) в реальном пространстве, ему удалось провести расчет проводимости для «машинных» образцов значительно больших размеров, чем в работах²⁵⁻²⁹. В его расчетах эффективное число узлов равнялось $N = 256^2$! Тем не менее, эти расчеты практически точно воспроизводят результаты ранних работ^{27, 28}. Согласно⁴² для $d = 2$ минимальная металлическая проводимость существует, причем константа в (2.6) оказывается равной 0,13. Более того, Ли удалось, в определенном смысле, рассчитать и «функцию Гелл-Манна и Лоу» $\beta_{d=2}(g)$. Его результаты приведены на рис. 5. Видно, что имеется явная тенденция к излому и пересечению оси абсцисс, после чего $\beta_{d=2}(g) = 0$, т. е. получается «нефизическое» поведение, показанное на рис. 4 штриховой линией и обеспечивающее существование минимальной металлической проводимости **).

Вопрос о том, правильна ли схема однопараметрического скэйлинга работы³³, остается, таким образом, открытым. Аналогичным образом неясно, способна ли ренормгрупповая схема Ли, связанная с численным счетом, «уловить» тонкие логарифмические эффекты, ведущие к полной локализации в двумерном пространстве. Отметим в связи с этим также более раннюю работу⁴³, где с помощью другой схемы численных расчетов

*) Влияние этих процессов рассматривалось также в недавней работе¹⁴², где были получены аналогичные результаты.

***) Работа Ли⁴² известна под лозунгом «Долой банду четырех!».

получен непрерывный переход металл — диэлектрик для $d = 2$, противоречащий существованию минимальной металлической проводимости. Однако в этой работе не получено и никаких указаний на полную локализацию в двумерном пространстве. В работе ³² также обнаружены пороги подвижности в двумерных решетках, но авторы ее отмечают, что точность их вычислений, по-видимому, недостаточна для того, чтобы заметить слабые логарифмические эффекты. В работе ¹³⁶ этими же авторами были приняты детальные численные расчеты для проводимости двумерных решеток и трехмерной решетки типа алмаза. Расчеты проводились непосредственно путем использования формулы Кубо для проводимости,

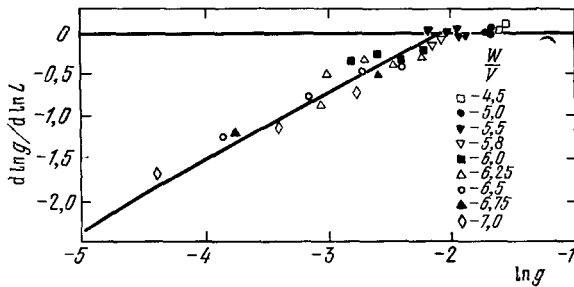


Рис. 5. «Функция Гелл-Манна и Лоу» $\beta_{d=2}(g)$, численно найденная в работе Ли ⁴².

записанной через точные волновые функции электрона в решетке Андерсона, с использованием рекуррентного алгоритма, предложенного в работе ¹³⁷. Полученные результаты свидетельствуют в пользу существования минимальной металлической проводимости как при $d = 2$, так и при $d = 3$. Для $d = 2$ в ¹³⁶ получено универсальное значение $\sigma_{m.m} = (0,11 \pm 0,02) e^2/h$, а для $d = 3$ $\sigma_{m.m} = (0,07 \pm 0,01) e^2/h a$, где a — постоянная решетки. При этом в работе ¹³⁶ была предпринята попытка обнаружить логарифмическую зависимость проводимости от размеров системы в квазиметаллической области при $d = 2$, предлагавшуюся в работе ³³. Такая зависимость не была обнаружена в пределах точности численного метода, при переходе от системы размером 50×50 к системе с размерами 100×100 . Однако это не исключает полностью возможность того, что логарифмическая зависимость будет наблюдаться для систем большего размера *).

В работе ¹³⁸ рекуррентный метод ¹³⁷ использовался для аналитического рассмотрения поведения волновых функций в системах со слабым беспорядком. При этом для $d = 2$ был сделан вывод о полной локализации при сколь угодно слабом беспорядке. В этой работе высказаны интересные соображения о возможном физическом смысле порогов подвижности, получающихся в большинстве численных и аналитических расчетов для $d = 2$. Возможно, что эти пороги подвижности отделяют, при $d = 2$, области экспоненциально локализованных состояний, расположенных, например, по краям зоны, от области локализованных состояний со степенным спаданием волновых функций с расстоянием ²⁶. При этом полная локализация при $d = 2$ сохраняется, но переход в квазиметаллическую область приобретает ясный смысл, что может способствовать устранению некоторых из обсуждавшихся выше противоречий.

*) В работе ¹⁴³ были высказаны (для одномерного случая) определенные соображения об опасности рассмотрения усредненной формулы Кубо для проводимости; дальнейшее обсуждение этой проблемы см. в ^{144, 145}.

3. ПРОВОДИМОСТЬ ТОНКИХ ПРОВОЛОЧЕК И ПЛЕНОК

Перейдем теперь к вопросу об экспериментальных проявлениях локализации. Прогресс последних лет здесь связан с предсказанием ряда ярких эффектов, в которых явление локализации играет определяющую роль, чем эти эффекты отличаются от достаточно косвенных свидетельств в пользу локализации, рассматривавшихся ранее ^{1, 2, 5}. Одним из таких ярких эффектов, допускающих прямую экспериментальную проверку, явилось предсказание универсального минимума металлической проводимости для двумерных систем (2.6) в работе ²⁷.

Другой замечательный результат был получен Таулесом при рассмотрении проводимости тонких металлических проволочек ⁴⁴ (близкие соображения были высказаны в работе Адкинса ⁴⁵). Этот результат чрезвычайно прост — в любой металлической проволоке, поперечные размеры которой много меньше длины и примесное сопротивление которой превышает примерно 10—20 кОм, все электронные состояния локализованы. Таким образом, любая достаточно длинная металлическая проволока является, «на самом деле», диэлектриком (в смысле основного состояния, т. е. для $T = 0$)! В самом деле, вернемся к соотношению (2.5). Выше уже отмечалось, что правая часть (2.5) пропорциональна полной электропроводности (обратному сопротивлению) конечной системы, т. е. для ее сопротивления имеем

$$R_L \approx \frac{\hbar}{2e^2} \frac{W_L}{V_L}. \quad (3.1)$$

Для обычной металлической проволоки $R_L = (1/\sigma) L/A$ (L — длина проволоки, A — сечение) пропорционально ее длине. Тогда $(1/\hbar) V_L \propto D/L^2$ имеет смысл обратного времени диффундирования электрона вдоль всей длины проволоки. Отсюда имеем ($N(E)$ — плотность состояний единицы объема)

$$V_L \sim \hbar \frac{D}{L^2} \sim \frac{\hbar}{2e^2} \frac{\sigma}{L^2} \frac{1}{N(E)} \sim \frac{\hbar}{2e^2} \frac{\sigma}{L} A \frac{1}{LA} \frac{1}{N(E)} \sim \frac{\hbar}{2e^2} \frac{W_L}{R_L},$$

что и дает (3.1). Поэтому, выбрав достаточно длинную проволоку, мы легко можем удовлетворить условию $W_L/V_L > (V_L/W_L)_{\max}^{-1}$, т. е. получить полную локализацию. Начиная с соответствующей длины сопротивление растет экспоненциально с длиной проволоки. Нужная длина определяется условием $R_L > \text{const} \cdot \hbar/e^2$, где согласно ⁴⁴ $\text{const} \sim 2-4$, т. е. $R_L > > 8-16$ кОм. Этот удивительный результат, конечно, требует пояснений. Нужно указать условия, при которых эффект может оказаться наблюдаемым. Естественно, при достаточно высоких температурах локализация электронных состояний не существенна, поскольку рассеяние на фононах (и другие виды неупругого рассеяния) будут вызывать переходы между локализованными состояниями задолго до того, как электрон продиффундирует на длину порядка длины локализации и «узнает» о том, что он локализован. Однако при понижении температуры процессы неупругого рассеяния «вымораживаются». Длина локализации в нашем случае порядка длины проволоки, сопротивление которой превышает $2\hbar/e^2$. Если воспользоваться формулой Друде $\sigma = (ne^2/m) \tau = (e^2/\hbar) p_F^2 l / 3\pi^2$ (p_F — фермиевский импульс электрона), из этого условия сразу получаем

$$R_{\text{loc}} \sim \frac{1}{\pi^2} A p_F^2 l. \quad (3.2)$$

Электрон продиффундирует это расстояние за время

$$\tau_{\text{diff}} \sim \frac{R_{\text{loc}}^2}{D} \sim \frac{1}{\pi^4} A^2 p_F^2 \tau, \quad (3.3)$$

где коэффициент диффузии $D \approx (p_F^2/3m^2) \tau$. Локализация электронных состояний может проявиться при условии

$$\tau_{inel} > \tau_{diff}, \tag{3.4}$$

где $1/\tau_{inel}$ — частота процессов неупругого рассеяния. Частота таких процессов, как правило, пропорциональна степенной функции температуры: T^p (p — целое). Так, для частоты электрон-фононного рассеяния в грязных образцах имеем $\sim T^4$, а для электрон-электронного рассеяния $\sim T^2$ ⁴⁴. Тогда из (3.3) и (3.4) получаем, что температура, при которой локализация начинает проявляться, обратно пропорциональна \sqrt{A} в случае доминирующей роли рассеяния на фононах и обратно пропорциональна A при преобладании процессов электрон-электронного рассеяния. Ниже соответствующей температуры электроны могут диффундировать на длину порядка R_{loc} , но не дальше, до тех пор, пока фонон (или другой электрон) не вызовет переход в другое состояние. Соответственно в рассматриваемой области температур сопротивление будет возрастать при понижении температуры как обратная степень температуры: $T^{-p/2}$ ⁴⁴. При понижении температуры до значений, соответствующих расстояниям между случайными электронными уровнями, произойдет переход к экспоненциальной проводимости. Оценки Таулеса для проволочки с сечением $A \approx 2,5 \cdot 10^{-11}$ см², примесной длиной свободного пробега $l \approx 5 \cdot 10^{-8}$ см и $p_F/\hbar \approx 1,2 \cdot 10^8$ см⁻¹ дают $R_{loc} \approx 0,012$ мм, а условие (3.4) выполняется уже при температурах порядка 1 К, при разумных оценках частот неупругого рассеяния *).

Перейдем к обсуждению двумерного случая, когда согласно ³³ также имеется полная локализация, т. е. при $T = 0$ статическая проводимость равна нулю. Проводимость при $T \neq 0$ была рассмотрена в работе ⁴⁶. Воспользуемся снова качественным анализом в духе Таулеса ⁴⁴. При $T \neq 0$ электрон за счет процессов неупругого рассеяния, может продиффундировать на длину **)

$$L_1^2 \sim D\tau_{inel} = \frac{1}{2} ll_{inel}, \tag{3.5}$$

где l_{inel} — длина свободного пробега за счет неупругих процессов. На длине порядка (3.5) нарушается когерентность электронных состояний (электрон теряет информацию о состоянии, в котором он находился). Эту длину и можно использовать в качестве эффективной длины, определяющей проводимость по двумерной формуле (2.16) при конечных температурах. Возможно, что «работает» несколько иная длина ⁴⁶. В самом деле, процессы неупругого рассеяния приводят к уширению электронных уровней порядка \hbar/τ_{inel} . Тогда дискретность уровней $W_L \sim L^{-2}N^{-1}(E)$ (см. (2.2) для $d = 2$) несущественна при $W_L \sim \hbar/\tau_{inel}$, что и определяет длину:

$$L_2^2 \sim \frac{1}{\hbar} \tau_{inel} N^{-1}(E). \tag{3.6}$$

Длины L_1 и L_2 пропорциональны, но не равны: $(L_1/L_2)^2 \sim \sigma\hbar/e^2$. Учитывая, что $\tau_{inel} \sim T^{-p}$, из обеих оценок имеем $L_{eff}^2 \sim T^{-p}$, а из (2.16) получаем для температурной зависимости проводимости двумерной пленки ⁴⁶

$$\Delta\sigma(T) \sim \text{const} \cdot \frac{e^2}{\hbar} \ln \frac{T}{T_0}, \tag{3.7}$$

*) Эти оценки оказались, впрочем, слишком оптимистичными ¹⁴⁶, в реальных системах τ_{inel} оказывается существенно меньше.

**) Именно длина $L_1 \sim \tau_{inel}^{1/2} \sim T^{-p/2}$ определяет согласно Таулесу ⁴⁴ отмеченную выше зависимость сопротивления одномерной проволочки $\sim T^{-p/2}$.

т. е. проводимость логарифмически убывает с уменьшением температуры. Аналогичное поведение следует из обобщения рассмотрения работы ³⁸ на случай конечных температур. При дальнейшем понижении температуры должен произойти переход от логарифмической зависимости (3.7) в «металлической» области к экспоненциальной зависимости проводимости от температуры в «диэлектрической» области.

Перейдем теперь к обзору экспериментов, поставленных специально для проверки этих предсказаний теории. Прежде всего мы рассмотрим свидетельства в пользу того, что $30\,000\text{ Ом}/\square$ являются максимальным сопротивлением металлической пленки ²⁷. По-видимому, первое указание на существование такого предела фактически было получено еще в 1914 г. ⁴⁷. В этой работе изучалось сопротивление пленок платины

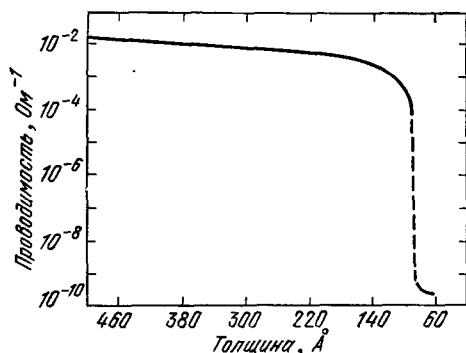


Рис. 6. Зависимость проводимости пленки Вi от ее толщины ⁴⁹.

в зависимости от толщины пленки, определявшейся временем напыления. Сопротивление возрастало с уменьшением толщины (уменьшением времени напыления) и во всех случаях не превышало примерно $28\,000\text{ Ом}/\square$, после чего скачком возрастало до более чем $10^9\text{ Ом}/\square$. Эти результаты были обнаружены Личарделло ⁴⁸ и интерпретированы им в пользу результата (2.6). Аналогичные результаты были получены в современных работах ⁴⁹, ⁵⁰. В ⁴⁹, в частности, изучалась проводимость пленки Вi; ее зависимость от толщины пленки показана на рис. 6. Виден скачок проводимости в области 10^4 Ом^{-1} . Аналогичные результаты ⁵⁰ были получены на пленках Au.

Одной из первых работ, поставленных специально для проверки предсказаний ²⁷, была работа ⁵¹, в которой изучалась проводимость тонких высокопроводящих слоев, образующихся на границах зерен бикристаллов германия*). На этих границах образуется двумерная сетка краевых дислокаций, представляющая собой (в германии) отрицательно заряженную поверхность частично заполненных связей, с примыкающими к ней слоями дырочной проводимости, толщиной в несколько десятков ангстрем. Электропроводность таких слоев изучалась в ⁵¹ в зависимости от угла разориентировки зерен. Был обнаружен переход от металлической проводимости к активационной при проводимости $\sigma_{m,m} \sim 4 \cdot 10^{-5}\text{ Ом}^{-1}$, что согласуется с оценками работы ²⁷.

Наиболее обстоятельное исследование проводимости металлических пленок, направленное на проверку предсказаний ²⁷, было проведено Дайнсом, Гарно и Роуэллом ⁵². Они изучали пленки, получавшиеся напылением Pb, Sn, Au, Al и Cu на подложку, температура которой поддерживалась вблизи 4,2 К. При этом проводимость измерялась прямо в установке для напыления пленок, что позволяло постепенно увеличивать толщину пленки до тех пор, пока она не приобретала металлическую проводимость. Переход от активационной к металлической проводимости происходил вблизи сопротивления, равного $30\,000\text{ Ом}/\square$. Пример данных, полученных в работе ⁵², приведен на рис. 7. В области активационной проводимости сопротивление пленок Sn изменялось как $\exp(1/T)$, тогда

*) См. также более позднюю работу ¹⁴⁷.

как для пленок Au и Cu зависимость была $\exp(1/\sqrt{T})$. В работе ⁵² отмечалось, что пленки с таким большим сопротивлением вряд ли могут быть однородными, т. е. они, вероятно, состоят из металлических «островков», связанных узкими каналами или разделенных туннельными барьерами. Предсказания работы ²⁷, вообще говоря, были сделаны для однородной системы, но согласно соображениям, высказанным в ⁴⁸, они применимы и для неоднородных систем.

Еще одной системой, которая, казалось бы, является идеально приспособленной для изучения двумерной проводимости, является полевой транзистор (MOSFET), в котором создан инверсионный слой носителей тока (рис. 8). Этот слой создается приложением внешнего потенциала к затвору транзистора, а проводимость слоя измеряется непосредственно между истоком и стоком. Изменение напряжения на затворе позволяет в широких пределах изменять свойства инверсионного слоя, в частности концентрацию носителей тока в нем. Важным свойством такой системы является также то, что концентрация носителей тока может быть найдена из электростатических расчетов и ее не нужно определять, скажем, по эффекту Холла. Подробный обзор экспериментов и физических явлений в инверсионных слоях был сделан Адкинсом ⁵³, и мы не будем подробно на них останавливаться. Отметим только, что результаты таких экспериментов,

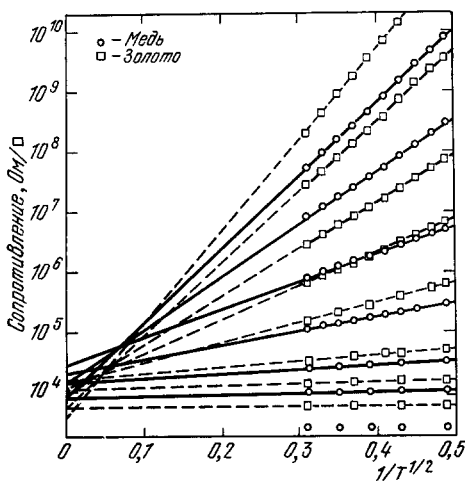


Рис. 7. Температурная зависимость сопротивления тонких пленок из меди и золота. Виден переход от активационной к металлической проводимости вблизи $30\,000\ \text{Ом}^2$.

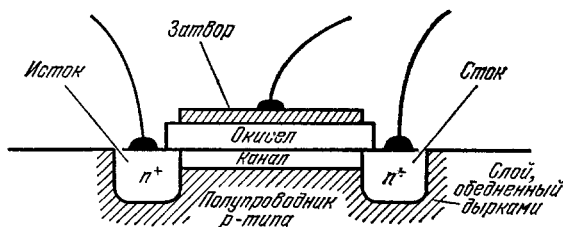


Рис. 8. Полевой транзистор с каналом p-типа. Инверсионный слой создается внешним потенциалом на затворе.

вообще говоря, не согласуются с предсказаниями теории локализации вообще и работы ²⁷ в частности. Переход от активационной проводимости к металлической может происходить при значениях проводимости, существенно превышающих $3 \cdot 10^{-5}\ \text{Ом}^{-1}$ (рис. 9). Однако иногда получаются результаты, согласующиеся с ²⁷ (рис. 10). По-видимому такое разнообразие результатов связано с тем, что в инверсионных слоях существенна роль межэлектронных корреляций ⁴⁸, ⁵³, которые, в частности, приводят к явлениям типа вигнеровской кристаллизации ⁵³. Поэтому возможно, что инверсионные слои оказываются не очень удобным объектом для

проверки теории локализации, которая, к сожалению, не учитывает роль межэлектронного взаимодействия.

Недавно появились первые экспериментальные работы, специально поставленные для проверки предсказаний Таулеса ⁴⁴ относительно проводимости тонких металлических проволочек. Самые первые работы ^{54, 55} дали отрицательный результат — эффект не был обнаружен. Наиболее убедительные свидетельства в пользу локализации в проволочках были

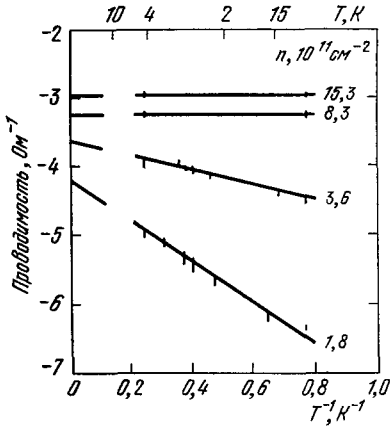


Рис. 9. Типичное температурное поведение проводимости инверсионного слоя ⁵³.

Различные кривые соответствуют различным концентрациям электронов в инверсионном слое.

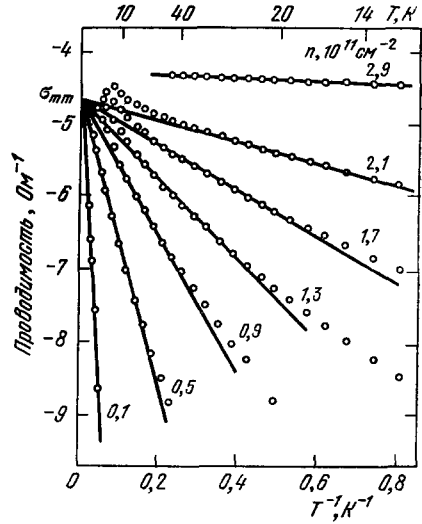


Рис. 10. Поведение проводимости инверсионного слоя с малыми концентрациями электронов ⁵³.

получены в работе ⁵⁶. В этой работе образцы изготавливались оригинальным литографическим методом (рис. 11). Стеклая подложка, наполовину закрытая металлической пленкой (см. рис. 11, а), бомбардировалась ионами Ag^+ , что приводило к образованию на стекле «ступеньки» (рис. 11, б), затем слой металла снимался химическими средствами (рис. 11, в). Далее напылялся новый слой металла (рис. 11, г), после чего образец снова подвергался бомбардировке ионами Ag^+ , причем угол падения их на образец подбирался таким образом, чтобы металл за «ступенькой» оставался «в тени» (см. рис. 11, е). В результате получалась тонкая «проволочка» (рис. 11, д). Изучение таких проволочек с помощью

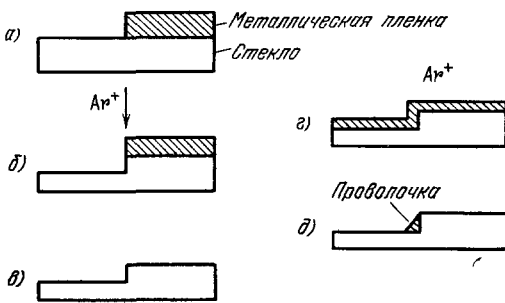


Рис. 11. Схема приготовления «тонких проволочек» из работы ⁵⁶.

сканирующего электронного микроскопа показало, что они представляют собой непрерывные полоски однородного сечения. Проволочки, использовавшиеся в этой работе, готовились из пленок $Au_{60}Pd_{40}$, изготовлявшихся двумя разными методиками напыления, дававшими пленки с удельным сопротивлением $3,7 \cdot 10^{-4}$ Ом·см (с отношением сопротивлений

при комнатной температуре и при 12 К, равным 1,03) — «грязные» пленки, а также пленки с удельным сопротивлением $1,0 \cdot 10^{-4}$ Ом·см (отношение сопротивлений 1,06) — «чистые» пленки. Сечение проволочек изменялось в пределах от $1 \cdot 10^{-11}$ см² до $3 \cdot 10^{-10}$ см². Значения сечения A определялись из известных длин и сопротивлений проволочек, причем полученные таким образом A хорошо согласовывались с ожидавшимися, исходя из известных высот ступенек и толщин пленок. Пленки Au₆₀Rd₄₀ до бомбардировки Ag⁺ были толщиной от 200 до 1000 Å. Проволочки обладали сопротивлением от 15 до 500 кОм и длиной от 90 до 450 мкм.

На рис. 12 показаны данные о зависимости сопротивления от температуры для «грязных» проволочек различного сечения. На рис. 13 показано возрастание сопротивления (при фиксированной $T = 1,5$ К), как

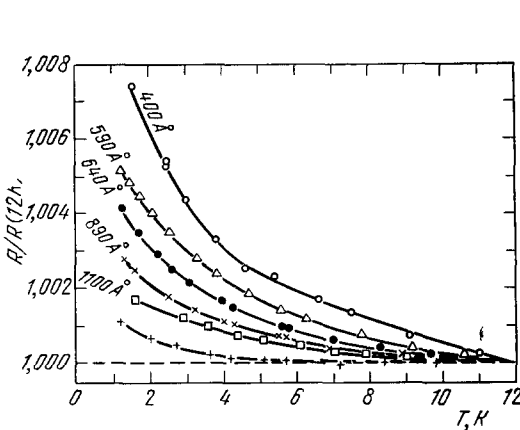


Рис. 12. Температурная зависимость сопротивления «проволочек» различных сечений. Данные для каждого образца нормированы на значение сопротивления при 12 К. Числа над кривыми — \sqrt{A} . Нижняя кривая — поведение сплошной пленки⁵⁶.

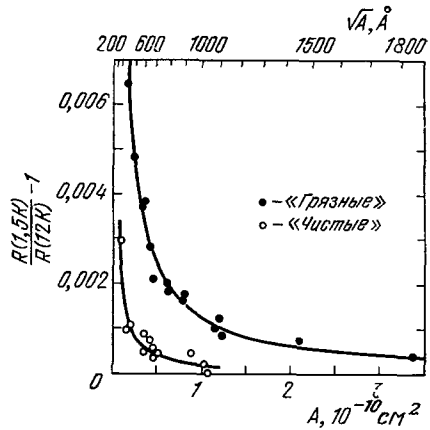


Рис. 13. Сопротивление как функция сечения для «грязных» (черные кружки) и «чистых» (светлые кружки) образцов.

Кривые пропорциональны A^{-1} ⁵⁶.

функции сечения A , для «грязных» и «чистых» проволочек. Здесь вычтено возрастание сопротивления сплошной пленки (причины его неясны; возможно даже, что оно отражает эффекты двумерной локализации^{*}). Видно, что возрастание сопротивления происходит по закону A^{-1} , оно больше для «грязных» проволочек. Таким образом, полученные результаты находятся в качественном соответствии с предсказаниями теории⁴⁴.

Температурный ход сопротивления типичной проволочки показан на рис. 14. Здесь также вычтен эффект сплошной пленки. Видно, что температурная зависимость приблизительно логарифмическая, хотя согласно⁵⁶ нельзя исключить зависимость типа $T^{-1/2}$. Такое поведение не согласуется со степенным ростом сопротивления (типа T^{-2} от рассеяния на фононах) с понижением температуры, предсказывавшимся в работе⁴⁴. Это несоответствие может отражать недостаточное понимание процессов неупругого рассеяния, а не недостатка теории локализации, тем более, что зависимость эффекта от геометрических размеров (сечения A) явно свидетельствует в пользу теории. Подчеркнем, что соображения Таулеса о степенном росте сопротивления носят сугубо качественный характер^{**}.

^{*}) Это подтверждается последними исследованиями¹⁴⁶.

^{**}) Как уже отмечалось выше, простые оценки⁴⁴, по-видимому, переоценивают величину τ_{inel} , что и объясняет относительную трудность наблюдения эффектов локализации и их малую величину¹⁴⁶.

Перейдем к рассмотрению результатов, полученных в другой работе ⁵⁷, специально выполненной для проверки предсказаний ⁴⁴. «Проволочки», изучавшиеся в этой работе, в действительности представляли собой тонкие пленки длины L , ширины B и толщины C , причем $L \gg B \gg C$ *). В таких образцах можно было ожидать проявления либо «одномерного» поведения по Таулесу ⁴⁴, либо «двумерного» поведения в работе ³³. Изучались пленки с сопротивлением $R_{\square} < 30\,000$ Ом/□ (предел Личчарделло — Таулеса ²⁷). Поведение этих пленок должно быть двумерным, если сопротивление меньше этого предела («металлическая» область), но $L_1 \sim \sim \sqrt{D\tau_{inel}} < B$ или (и) $L_2 \sim \sqrt{\tau_{inel}/\hbar}/\sqrt{N}(E) < B$ (ср. (3.4), (3.5) и ⁴⁶), т. е. в условиях, когда электрон «не знает», что он находится в «одномерной» проволоке.

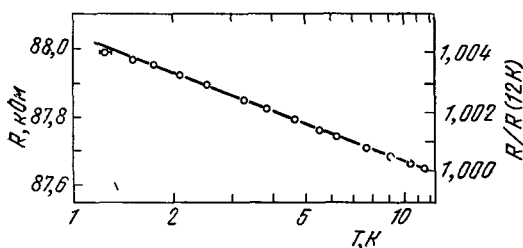


Рис. 14. Сопротивление как функция логарифма температуры «грязной проволочки» с $A = 3,6 \cdot 10^{-11}$ см² ($\sqrt{A} = 590$ Å) ⁵⁶.

Пленки готовились с составом 58 вес. % Au и 42 вес. % Pd на подложках, изготовлявшихся в большинстве случаев, из полированного сапфира (при комнатной температуре). Для получения длинных и узких полосок использовалась модификация литографической методики, предложенной в работах ^{58, 59}. Пленки были толщиной $2-4 \cdot 10^{-7}$ см, поэтому они

почти наверняка состояли из отдельных островков металла, а их сопротивление определялось туннелированием между этими островками ⁵². Эта неоднородность несущественна, если пленки однородны на масштабах порядка R_{loc} (3.2), L_1 , L_2 и B . Измерения проводились до температур ~ 10 мК. Было получено неметаллическое поведение как по температурному ходу, так и по нелинейной зависимости проводимости от внешнего электрического поля (напряжения). Соответствующие зависимости сопротивления могут быть описаны следующими формулами:

$$R(T, E) = R(T_0, E) \left(1 - S_T \ln \frac{T}{T_0}\right) \quad (3.8)$$

при малых полях E ,

$$R(T, E) = R(T, E_0) \left(1 - S_V \ln \frac{E}{E_0}\right) \quad (3.9)$$

при малых T , где T_0 , E_0 — произвольные точки нормировки, S_T и S_V — экспериментально определяемые параметры.

На рис. 15, 16 показаны экспериментальные данные для одного из образцов работы ⁵⁷.

Такое поведение было интерпретировано авторами работы ⁵⁷ в духе предсказаний работы ³³, т. е. как связанное с полной локализацией в двумерной системе (ср. (3.7)). Был сделан вывод, что изучавшиеся образцы, в которых проявлялось поведение типа (3.8) и (3.9), были двумерными. Для объяснения нелинейностей по полю (3.9) в работе ⁴⁶ был предложен механизм, основанный на разогреве электронов. Отметим, что в работе ⁵⁶ никаких нелинейностей по внешнему полю не наблюдалось; авторы ⁵⁶ считают, что это отличие связано с неоднородностью образцов работы ⁵⁷. Удивительным результатом работы ⁵⁷ является наблюдавшийся в ней

*) Исследовались образцы с $L = 2 - 7$ мм, $B = 0,1 - 1$ мкм и $C \approx 3 \cdot 10^{-7}$ см.

выход логарифмической зависимости $R(T, 0)$ на насыщение (прекращение роста сопротивления) при температурах ниже 70 мК. Это явление непонятно с теоретической точки зрения, если придерживаться интерпретации, основанной на работе ³³. Это может указывать на то, что весь эффект объясняется совсем другими причинами (например, ролью межэлектронных корреляций).

Обсуждавшиеся выше результаты были получены на пленках с сопротивлением 1000—5000 Ом/□ и шириной порядка микрона. Для двух образцов с сопротивлением, превышавшим 10 кОм/□, и для нескольких образцов с меньшим сопротивлением, но с шириной порядка 0,1 мкм сопротивление $R(T, 0)$ возрастало экспоненциально по $1/T$, однако в области 70 мК снова наблюдалось насыщение. Наблюдение экспоненциальной локализации при столь низких значениях сопротивления также непонятно с теоретической точки зрения.

Имеются предварительные сообщения о наблюдении логарифмической зависимости сопротивления от температуры, полученной в инверсионных слоях полевых транзисторов ^{60*}). Согласно ⁶⁰ дополнительный анализ данных работы ⁵², проведенный Дайнсом для «металлической» области, выявил аналогичную логарифмическую зависимость. Этот небольшой рост сопротивления с понижением температуры не был обнаружен ранее, поскольку данные изображались в логарифмическом масштабе (по проводимости; ср. рис. 7).

Таким образом, имеющийся в настоящее время экспериментальный материал указывает на определенное качественное согласие с предсказаниями теории локализации, однако, по нашему мнению, этих данных еще недостаточно для однозначного выбора между различными теоретическими моделями. Нельзя исключить и возможность другой интерпретации. Отметим в связи с этим работу Аронова и Альтшулера ⁶¹, в которой предложен оригинальный механизм роста сопротивления с понижением температуры, связанный с интерференцией кулоновского взаимодействия

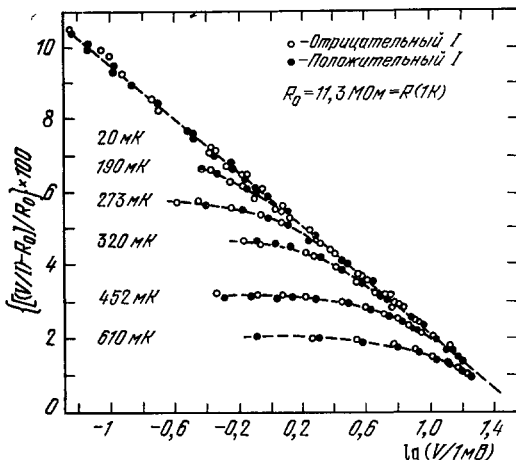


Рис. 15. $\Delta R = [(V/I) - R_0]/R_0$ в зависимости от логарифма внешнего напряжения $\lg V$ для разных температур.

I — ток, V — напряжение, R_0 — сопротивление образца при $T = 1$ К ⁵⁴.

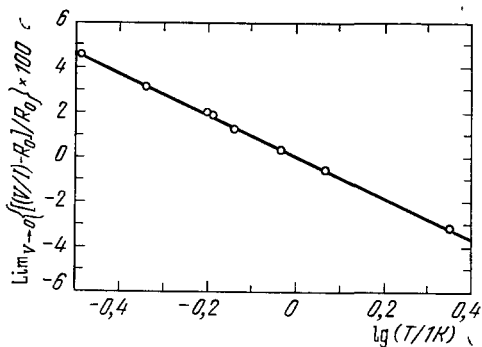


Рис. 16. Значения сопротивления при малых V , определенные из рис. 15, построенные в зависимости от $\lg T$ ⁵⁷.

*) Подробно результаты экспериментов с инверсионными слоями Si изложены в работе ¹⁴¹. Они очень близки к результатам работы ⁵⁷.

электронов с примесным рассеянием. Обобщение рассмотрения этой работы на случай $d = 2$ приводит к логарифмическим по температуре поправкам к проводимости *того же вида*, что и эффекты двумерной локализации^{62, 63}. Это указывает на необходимость дальнейшего теоретического анализа и требует проведения новых экспериментов. В частности, весьма полезными представляются измерения в магнитном поле, в том числе измерения эффекта Холла в «металлической» области двумерных пленок. Известно, что в инверсионных слоях именно измерения эффекта Холла стимулировали появление новой интерпретации явлений в этих системах⁵³. Отметим, что наблюдавшееся для этих систем в работе⁶⁴ эффект отрицательного магнитосопротивления был интерпретирован⁴¹ как связанный с подавлением двумерной локализации внешним магнитным полем и эффектами спин-орбитального рассеяния и рассеяния с переворотом спина³⁹⁻⁴¹. Отметим, однако, появившуюся недавно работу¹³⁹, в которой исследовалось сопротивление проволочек из аморфного сплава $W - Re$. Проволочки изготовлялись из аморфных пленок $W - Re$ толщиной 50 \AA с использованием литографии на электронных пучках¹⁴⁰. По ширине проволочки делились на две группы: шириной от 700 до 5000 \AA и шириной $2 \cdot 10^{-3}$ см. Детальное исследование, проведенное в этой работе, практически полностью подтвердило все результаты работы⁵⁸, продемонстрировав неметаллическое поведение проводимости с температурой и ее зависимость от сечения проволочки для образцов с сопротивлением, существенно превышающим 10 кОм *). Особенно интересными оказались измерения во внешнем магнитном поле. Включение магнитного поля $4 \cdot 10^4 \text{ Гс}$ (как параллельного, так и перпендикулярного к проволочке) привело при $T < 20 \text{ К}$ (т. е. в области температур, где проявлялись эффекты локализации) к довольно заметному *росту* сопротивления. При этом эффект перпендикулярного поля был больше. Эти результаты свидетельствуют в пользу того, что внешнее магнитное поле способствует проявлению эффектов локализации **).

4. СУЩЕСТВУЕТ ЛИ СКЭЙЛИНГ НА ПОРОГЕ ПОДВИЖНОСТИ?

Изложение теории в предыдущих разделах было достаточно элементарным. Чтобы у читателя не создалось ложного впечатления простоты теории локализации, в этом разделе мы сделаем краткий обзор попыток построения «последовательной» скэйлинговой теории локализации в окрестности порога подвижности и обсудим возникающие здесь проблемы. Под такой теорией мы подразумеваем последовательный вывод и оправдание (или опровержение) предположений элементарной теории, изложенной в гл. 2, расчет критического индекса радиуса локализации и других критических индексов, определяющих поведение корреляционных функций электронной системы (если такие индексы вообще можно ввести), расчет самих таких функций (функций Грина) и т. д. Иными словами, хотелось бы «поднять» скэйлинговую теорию локализации с качественного уровня «построений Каданова»²⁰ до уровня количественной теории и метода современной теории критических явлений²¹⁻²⁴. Мы увидим, что задача эта еще довольно далека от своего решения, что связано с тем, что в ней концентрируется ряд трудностей принципиального характера.

*) В дальнейшем исследование проволочек $W - Re$ в сверхпроводящем состоянии¹⁴⁸ позволило непосредственно определить величину τ_{inel} , которая оказалась хорошо согласующейся с величиной эффекта локализации.

**) Аналогичный результат получен в работе¹⁴⁶ для пленок, хотя для проволочек в этой работе влияние магнитного поля не было зарегистрировано.

Первоначальные идеи последовательного скейлингового описания порога подвижности возникли сразу же после появления современной теории критических явлений и были сформулированы, практически одновременно, целым рядом авторов^{65-72, 24}. В настоящее время имеется уже довольно обширная литература, посвященная различным аспектам этой проблемы⁷³⁻⁸⁶.

Имеются два альтернативных подхода к строгому обоснованию теории локализации. Один из них (в котором, до недавнего времени, и были получены все основные утверждения теории) восходит к пионерской работе Андерсона³ (подход Андерсона). Главной особенностью этого подхода является его известная нетрадиционность, связанная с рассмотрением неусредненных по ансамблю случайных конфигураций системы функции Грина электрона в модели (1.1). В определенном смысле в этом подходе рассматривается *наиболее вероятная* функция Грина^{15, 16}. Это связано с тем, что одночастичная *усредненная* функция Грина, как хорошо известно^{3-6, 12, 15, 18}, не дает, в принципе, никакой информации о возможной локализации электронов, но для изучения этого вопроса можно рассмотреть сходимость стохастического ряда теории возмущений для неусредненной одночастичной функции Грина^{3, 12}. Условие сходимости этого ряда определяет, в частности, положение порогов подвижности в зоне^{3-6, 12, 13}. До сих пор это условие является практически единственным способом аналитического определения порогов подвижности (несколько отличный метод, предложенный в^{87, 88}, генетически связан с тем же первоначальным подходом Андерсона).

Другой подход к теории локализации, восходящий к известной работе Эдвардса (подход Эдвардса)⁸⁹, использует функции Грина, усредненные по ансамблю случайных конфигураций системы. Преимуществом этого подхода является его известный автоматизм (наличие диаграммной техники). Усредненные функции Грина определяют, в принципе, все физические величины теории (чего нельзя сказать о наиболее вероятной функции Грина в подходе Андерсона), однако для изучения локализации (статистической проводимости при $T = 0$) необходимо найти усредненную *двухчастичную* функцию Грина электрона^{89, 90}. Это, конечно, сразу делает задачу весьма сложной. До сих пор ее удалось решить только для одномерного случая¹⁰⁻¹¹. Тем не менее, в силу своей традиционности и удобства именно такой подход используется большинством теоретиков*). В недавних работах^{91, 92} с помощью некоторого самосогласованного варианта традиционного метода был получен ряд интересных результатов (включая полную локализацию для $d = 2$). Однако некоторые выводы этих работ, такие, например, как наличие щели в спектре поглощения на малых частотах, вызывают сомнения.

В рамках подхода Андерсона можно довольно просто получить скейлинг на пороге подвижности⁶⁸ в смысле обычной теории критических явлений²¹⁻²⁴. Дело в том, что пространственное поведение андерсоновской наиболее вероятной функции Грина целиком определяется статистикой путей без пересечений на рассматриваемой решетке^{3, 12, 93, 94}, т. е. чисто геометрическим объектом. Это связано с определенным пересуммированием ряда теории возмущений по V для функции Грина гамильтониана (1.1), учитывающим процессы многократного рассеяния^{3, 12}. Основным приближением, которое делается после этого точного пересуммирования, является ограничение рассмотрением только одной исходной функции Грина, хотя по ходу такого пересуммирования возникает еще бесконечное

*) Эта двойственность в теории неупорядоченных систем отражена в диалоге «автора» и «теоретика» в обзоре⁶.

число аналогичных рядов для вспомогательных функций Грина ^{3, 12}. Это связано с предположением об одинаковых стохастических свойствах всех этих рядов. Последующие приближения ^{3, 12, 13}, касающиеся статистических свойств ряда и разные способы оценки его сходимости, влияют, по-видимому, только на положение порогов подвижности в зоне и несущественны для нашего рассмотрения. В итоге недиагональный по узлам решетки матричный элемент одноэлектронной функции Грина представляется в виде ^{93, 98}

$$G_{ij}(E) \sim \sum_{N=1}^{\infty} Z_N(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) K^{-N} F^N \left(E, \frac{W}{V} \right), \quad (4.1)$$

где $F(E, W/V)$ — так называемая функция локализации, определяющая положение порогов подвижности в зоне уравнением ^{12, 13}

$$F \left(E_c, \frac{W}{V} \right) = 1, \quad (4.2)$$

а $Z_N(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)$ — число путей без пересечений из N шагов, связывающих узел i с узлом j ; K — константа связности решетки: $\ln K = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \ln Z_N$, где Z_N — полное число путей без пересечений из N шагов. В работе ⁹³ использовались значения $Z_N(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)$, полученные в результате машинных расчетов. Основная идея работы ⁹⁸ состояла в использовании в (4.1) аналитической теории путей без пересечения, основанной на теории критических явлений, предложенной Де-Женном и Де-Клуазо ^{95, 96}. Согласно ^{95, 96}

$$Z_N(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \sim \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\tau}{2\pi i} e^{Na^{2\tau}} G(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j; \tau), \quad (4.3)$$

т. е. определяется обратным преобразованием Лапласа от $G(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j; \tau)$ — корреляционной функции (функции Грина) теории критических явлений, определяемой обычной флуктуационной свободной энергией Ландау с n -компонентным параметром порядка ²²⁻²⁴:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [(\nabla\Phi_j)^2 + \tau\Phi_j^2] + \frac{1}{8} g_0 \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j^2 \right)^2; \quad (4.4)$$

здесь $g_0 > 0$, что соответствует «отталкиванию» путей без пересечения, a — постоянная решетки. Статистика путей без пересечений получается из (4.3) — (4.4) предельным переходом $n \rightarrow 0$ ^{95, 96}. Этот переход исключает «петлевые» графики, отсутствующие в задаче о путях без пересечения. Используя (4.3), в (4.1) сразу же получим

$$\begin{aligned} G_{ij}(E=0) \Big|_{\frac{W}{V} \gtrsim (\frac{W}{V})_c} &\sim G \left(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j; \frac{W - W_c}{W_c} \right), \\ G_{ij}(E) \Big|_{E \sim E_c; \frac{W}{V} \lesssim (\frac{W}{V})_c} &\sim G \left(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j; \frac{E - E_c}{E_c} \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

т. е. пространственное поведение андерсоновской функции Грина теории локализации определяется корреляционной функцией стандартной теории критических явлений (4.4) ($n = 0$), причем порог подвижности соответствует точке фазового перехода. Вблизи порога подвижности (т. е. $W/V \gtrsim (W/V)_c$ или при $E \lesssim E_c$) функция Грина экспоненциально спадает

с расстоянием:

$$G_{ij} \sim \exp \left(-\frac{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}{R_{loc}} \right), \quad |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \gg R_{loc}, \quad (4.6)$$

где радиус локализации

$$R_{loc} \sim a \left[\frac{(W/V) - (W/V)_c}{(W/V)_c} \right]^{-\nu}, \quad (4.7)$$

для локализации в центре зоны, и

$$R_{loc} \sim a \left[F' \left(E_c, \frac{W}{V} \right) E_c \right]^{-\nu} \left(\frac{E_c - E}{E_c} \right)^{-\nu} \quad (4.8)$$

для локализации при $E \lesssim E_c$. Критический индекс радиуса локализации ν совпадает с критическим индексом корреляционной длины теории критических явлений. В рамках ε -разложения Вильсона²² ($d = 4 - \varepsilon$, $n = 0$) имеем

$$\nu \approx \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{15\varepsilon^2}{512} + \dots \approx 0,592 \text{ при } \varepsilon = 1 (d = 3). \quad (4.9)$$

Численный счет статистики путей без пересечений дает $\nu \approx 0,6$ ⁹³. При $W/V = (W/V)_c$ или $E = E_c$ имеем

$$G_{ij} \sim |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^{-(d-2+\eta)}, \quad (4.10)$$

где индекс η в рамках ε -разложения ($d = 4 - \varepsilon$, $n = 0$) равен²²

$$\eta \approx \frac{\varepsilon^2}{64} \left(1 + \frac{17}{16} \varepsilon + \dots \right) \approx 0,032 \text{ при } \varepsilon = 1 (d = 3). \quad (4.11)$$

Столь малые значения η означают, в частности, невозможность степенной локализации⁶⁸, предлагавшейся для модели Андерсона в работе²⁶. Значение индекса ν также может быть весьма важным. Согласно работе Мотта⁹⁷ для существования скачка проводимости на пороге подвижности (т. е. для существования минимальной металлической проводимости) необходимо выполнение неравенства $\nu > 2/d$. Из (4.10) следует, что $\nu < 2/d$; это может означать непрерывное обращение проводимости в нуль, аналогичное (2.13).

К сожалению, ввиду того, что андерсоновская функция Грина не определяет (как отмечалось выше) физических величин типа плотности состояний или проводимости, мы не можем продвинуться существенно дальше приведенных выше результатов. Кроме того, хотя радиус локализации и входит в ряд формул (для прыжковой проводимости, для высокочастотной проводимости по локализованным состояниям и т. п.)¹, не очень ясно, существуют ли прямые экспериментальные методы его измерения и определения индекса ν , а тем более η . Отметим только, что возрастание R_{loc} при подходе к порогу подвижности может сказаться на диамагнитной восприимчивости системы⁹⁸.

Для непосредственного нахождения наиболее важных физических величин следует обратиться к вычислению усредненных функций Грина (подход Эдвардса). В качестве примера возникающих здесь проблем можно рассмотреть известную модель электрона в гауссовом случайном поле (см., например,⁹⁹⁻¹⁰²), которая возникает из обычной задачи об электроне в системе хаотически расположенных в пространстве точечных рассеивателей в пределе $\rho \rightarrow \infty$, $V \rightarrow 0$, $\rho V^2 \rightarrow \text{const}$, где ρ — плотность рассеивателей, V — амплитуда рассеяния¹⁰¹. Нетрудно сформулировать эту модель на языке, аналогичном теории критических явлений^{24, 67, 68, 70-72, 75, 76}, или, точнее, неустойчивой теории поля определенного типа. Основные выводы этих работ в значительной мере перекрываются, и далее

мы следуем изложению ^{70, 76}. Оказывается, что усредненная функция Грина электрона в гауссовом случайном поле (с коррелятором типа «белого шума») может быть определена как функция Грина евклидовой скалярной теории поля с лагранжианом (ср. с (4.4))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2m} (\nabla \Phi_j)^2 - E' \Phi_j^2 \right] - \frac{1}{8} \rho V^2 \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j^2 \right)^2, \quad (4.12)$$

$$E' = E \pm i\delta,$$

где m — масса электрона, E — его энергия. Число компонент поля $n \rightarrow 0$, что опять исключает «петлевые» графики, отсутствующие в диаграммной технике Эдвардса ⁸⁹. Отметим, что в (4.12) отсутствуют случайные параметры. Это — «эффективный» лагранжиан, который сразу порождает диаграммную технику для усредненных функций Грина. Функция Грина определяется функциональным интегралом

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}' | g = -\rho V^2) &= -\frac{1}{Z} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int \{ \delta \Phi(\mathbf{r}) \} \Phi_j(\mathbf{r}) \Phi_j(\mathbf{r}') e^{-S[\Phi]} \equiv \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle \Phi_j(\mathbf{r}) \Phi_j(\mathbf{r}') \rangle, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$S[\Phi] = \int d^d r \mathcal{L}(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

— действие теории поля (4.13),

$$Z = \int \{ \delta \Phi(\mathbf{r}) \} e^{-S[\Phi]}. \quad (4.15)$$

Функциональный интеграл (4.13), соответствующий лагранжиану (4.12), при формальном вычислении расходится в силу «неправильного» знака константы связи $g = -\rho V^2 < 0$ (притяжение!). Это отражает известную неустойчивость основного состояния в теории поля (4.12) ¹⁰³. Поэтому функциональный интеграл следует понимать в смысле *аналитического продолжения* по константе связи от произвольных $g > 0$ на $g = -\rho V^2 < 0$. Аналитические свойства функций Грина теории поля $g\Phi^4$ в комплексной плоскости константы связи определяются следующим дисперсионным соотношением по константе связи ¹⁰⁴⁻¹⁰⁶:

$$G(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dz \frac{\Delta(z)}{z-g}, \quad (4.16)$$

где

$$\Delta(g) = \frac{1}{2i} [G(g+i\epsilon) - G(g-i\epsilon)] = \text{Im } G(g), \quad (4.17)$$

т. е. функции Грина рассматриваемой теории аналитичны по константе связи в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси, $\Delta(g)$ — скачок на разрезе (отличный от нуля при $g < 0$), который при таком подходе определяет все основные свойства функций Грина.

Функциональный интеграл (4.14) может быть рассмотрен методом перевала ¹⁰⁸⁻¹¹⁰. Для этого нужно сначала рассмотреть классические

полевые уравнения, соответствующие лагранжиану (4.13):

$$\frac{1}{2m} \Delta \Phi_j = -E \Phi_j - \frac{1}{2} \rho V^2 \Phi_j \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j^2 \right). \quad (4.18)$$

С точки зрения метода перевала нас будут интересовать решения (4.18) с конечным действием (4.14) (инстантоны)¹⁰⁶⁻¹¹⁰. В данной задаче существенны сферически-симметричные решения (4.18) вида

$$\Phi_j(r) = \Phi_0(r) \mathbf{u}, \quad (4.19)$$

где $\mathbf{u}^2 = 1$ — единичный вектор в пространстве «изотопического» спина рассматриваемой $O(n)$ -симметричной теории поля. В этой модели такие решения существуют для $d < 4$ при $E < 0$ ^{75, 76}. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(r) &= \sqrt{\frac{2|E|}{\rho V^2}} \chi(t), \\ r &= \frac{t}{\sqrt{2m|E|}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где χ и t — безразмерные переменные. Явный вид $\chi(t)$ известен только для $d = 1$, однако нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \Phi_0(r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2m|E|)^{-1/4}}{r^{(d-1)/2}} \exp[-(2m|E|)^{1/2} r], \\ \Phi_0(r) &\underset{r \rightarrow 0}{\rightarrow} \text{const}, \quad \left. \frac{d\Phi_0(r)}{dr} \right|_{r=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Для $E > 0$ существует только тривиальное решение (4.18) с конечным (равным нулю!) действием $\Phi_0(r) \equiv 0$. Поэтому перевальный метод расчета функционального интеграла (4.13) сводится в этом случае к обычной теории возмущений. В пространстве $d = 4 - \varepsilon$ существует доминирующая последовательность диаграмм — так называемый «паркет»^{111, 112}. Анализируя задачу в «паркетном» приближении⁷⁰, получаем, что из-за неправильного знака константы связи эффективная вершинная часть («четырёххвостка») в рассматриваемой теории имеет ложный полюс, соответствующий неприменимости теории возмущений в области энергий ($\hbar = 1$),

$$E \lesssim E_{sc} = \frac{1}{2ma^2} \left(\frac{u}{4-d} \right)^{2/(4-d)}, \quad (4.22)$$

где $u = (m^2/2\pi^2) \rho V^2 a^{4-d}$ — безразмерная константа взаимодействия, a — константа размерности длины (наименьшая длина в задаче, соответствующая радиусу корреляции случайного поля^{70, 76}). Величина E_{sc} является точным аналогом «гинзбургской» критической области в теории фазовых переходов^{24, 113}. Существование такой области для задачи об электроны в случайном поле впервые отмечалось в работе⁶⁵. Однако, в отличие от теории критических явлений, при переходе в эту область (энергий) происходит не ослабление²²⁻²⁴, а усиление эффективного взаимодействия⁷⁰ (переход в область «сильной» связи). Параметром теории возмущений является безразмерное отношение $(E/E_{sc})^{(d-4)/2}$, при $E \rightarrow 0$ теория возмущений неприменима, а ее формальное использование приводит к нефизическим результатам^{70, 71}. Этот результат, отмечавшийся еще в⁶⁸, был получен также в⁷² на языке рекурсионных формул Вильсона^{22, 23}, как отсутствие фиксированных точек этих уравнений для рассматриваемой задачи.

В области $E < 0$ существенную роль играют нелинейные решения (инстантоны) (4.20). Их присутствие приводит, при вычислении функционального интеграла методом перевала ^{75, 76}, к появлению вкладов, неаналитичных по константе связи, вида ($A_d = \text{const}$)

$$\exp(-S[\Phi_0]) = \exp\left(-A_d \frac{m^{-d/2}}{\rho V^2} |E|^{2-(d/2)}\right), \quad (4.23)$$

которые впервые были получены в известной работе Циттарца — Лангера ¹¹⁴. В частности (в импульсном представлении),

$$\text{Im } G(E\rho | -\rho V^2) = C(E\rho) \frac{1}{(\rho V^2)^{(d+1)/2}} \exp\left(-A_d \frac{m^{-d/2}}{\rho V^2} |E|^{2-(d/2)}\right), \quad (4.24)$$

где $C(E\rho)$ — некоторая функция E и ρ , не зависящая от константы связи, а степень константы связи в предэкспоненте определяется числом так называемых «нулевых мод» инстантонного решения ^{75, 76}. Зная $\text{Im } G(E\rho | -\rho V^2)$ — скачок на разрезе, можно восстановить действительную часть по (4.16). Метод вычисления $C(E\rho)$, основанный на использовании дисперсионного соотношения по константе связи (4.16) и на соответствии с теорией критических явлений, предложен в работе ⁷⁶. В ⁷⁵ вид этой функции определялся из размерных соображений. Для $d = 1$ оба метода дают результат для плотности состояний, совпадающий с точным решением Гальперина ¹¹⁵. Для $d > 1$ результаты для предэкспоненты из ⁷⁵ и ⁷⁶ различны *).

Критерием применимости результатов типа (4.24) является большая величина показателя экспоненты, что сводится опять к условию $|E| \gg \gg E_{sc}$ ^{70, 71, 75, 76} (ср. (4.22)). Таким образом, «гинзбургская» критическая область возникает и со стороны отрицательных энергий. Именно область $|E| \lesssim E_{sc}$ представляет интерес с точки зрения скэйлинговой теории локализации (здесь находится порог подвижности рассматриваемой задачи), но как раз анализ явлений в этой области сильной (или промежуточной) связи недоступен для современной теории. В работе ⁷⁶ была высказана гипотеза о возможности обычного скэйлингового поведения теории в этой области энергий (несмотря на «неправильный» знак константы связи), основанная на универсальности скачка на разрезе в дисперсионном соотношении (4.16) (одна и та же функция $\Delta(z, E\rho)$ определяет поведение коррелятора в задаче об электроны в случайном поле ($g < 0$ в (4.16)) при $|E| \lesssim E_{sc}$ и обычное скэйлинговое поведение коррелятора в теории критических явлений; $g > 0$ в (4.16). Это привело бы, в частности, к обычным значениям критических индексов (4.9) и (4.11). При этом в производной плотности состояний по энергии возникает особенность типа особенности теплоемкости ⁷⁶ в теории фазовых переходов. В работе Вегнера ⁸⁴, однако, были приведены соображения о том, что такие значения индексов противоречат неравенствам, вытекающим из аналитических свойств функции Грина **).

Задача о вычислении проводимости (двухчастичной усредненной функции Грина) требует рассмотрения вместо (4.12) иного эффективного лагранжиана двух взаимодействующих нуль-компонентных ($n \rightarrow 0$, $m \rightarrow$

*) См. также обсуждение вопроса о предэкспоненте в работе ¹⁴⁹.

***) Автор данного обзора не вполне согласен ¹⁵⁰ с аргументами работы ⁸⁴, однако предположения работы ⁷⁶ остаются, конечно, недоказанными и должны рассматриваться как гипотеза.

→ 0) полей ^{72, 75} ($E' = E + i\delta$, $E'' = E - i\delta$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2m} (\nabla\Phi_j)^2 - E'\Phi_j^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{2m} (\nabla\varphi_i)^2 - E''\varphi_i^2 \right] - \\ & - \frac{1}{4} \omega \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j^2 - \sum_{i=1}^m \varphi_i^2 \right) - \\ & - \frac{1}{8} \rho V^2 \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j^2 + \sum_{i=1}^m \varphi_i^2 \right)^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где ω — частота внешнего поля (речь идет о расчете проводимости $\sigma(\omega)$). Этот лагранжиан непосредственно порождает (при $n \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$) последовательность диаграмм, определяющих проводимость в задаче Эдвардса ^{89, 90}. Выражение (4.25) обладает $O(n) \times O(m)$ -симметрией в пространстве «изотопического спина». При $\omega \rightarrow 0$ эта симметрия переходит в $O(m+n)$ -симметрию ¹¹⁶. Значение этого обстоятельства для электрона в случайном поле подчеркивалась недавно Вегнером ^{81, 82} (см. ниже).

К сожалению, использование теории возмущений в задаче (4.25) приводит, как это видно из непосредственного обобщения результатов работы ¹¹⁶, в «паркетном» приближении при $n \rightarrow 0$ и $m \rightarrow 0$, к тем же нефизическим особенностям в вершинных частях, что и в более простой задаче (4.12) для одноэлектронной функции Грина, что указывает снова на неприменимость теории возмущений. На языке рекурсионных формул Вильсона этот результат был получен в работе ⁷².

Область $E < 0$, $|E| \gg E_{sc}$ для (4.25) рассматривалась в работе ⁷⁵, где была продемонстрирована локализация электронов в этой области, однако соответствующие выводы носят достаточно предварительный характер. Любопытно отметить, что локализация оказывается связанной с появлением «нулевых мод» инстантонного решения.

Может быть предложен и другой подход к задаче о вычислении двухчастичной усредненной функции Грина (проводимости), основанный на применении иного эффективного лагранжиана и использующий аналогию явления локализации с переходом в состояние спинового стекла ¹¹⁷⁻¹¹⁹. «Флуктуирующее поле» («параметр порядка») при этом имеет тензорный (матричный) характер. К сожалению, в известных вариантах такого рассмотрения теряется непосредственная связь с обычной диаграммной техникой Эдвардса ⁸⁹, сохраняющаяся при использовании эффективных лагранжианов (4.12) и (4.25). Ренормгрупповой анализ тензорного лагранжиана, предложенного в работе ⁷³, показал наличие устойчивой фиксированной точки рекурсионных формул, соответствующей обычным критическим индексам Вильсона ($n = 0$) (4.9), (4.14), однако эта точка оказалась недостижимой из физической области изменения параметров системы.

В работе ⁷⁴ было указано, что эффективный лагранжиан ⁷³ учитывает не все возможные инварианты соответствующего тензорного поля. В ⁷⁴ была предпринята попытка связать задачу о проводимости в двумерной модели Андерсона с критическим поведением планарной XY-модели ¹²⁰. В частности, в этой работе получен скачок проводимости на пороге подвижности, равный ($d = 2$)

$$\sigma_{mm} = \frac{e^2}{h} \frac{K(T_c)}{2\pi} = \frac{1}{\pi^2} \frac{e^2}{h} \approx 0,101 \frac{e^2}{h}, \quad (4.26)$$

что хорошо согласуется с результатом Личчарделло — Таулеса (2.6) ²⁷. Такой скачок в ⁷⁴ связывался с универсальным скачком коэффициента

спин-волновой жесткости $K(T_c) = 2/\pi$ в двумерной ХУ-модели, обнаруженном в работе Нельсона и Костерлица¹²¹. Однако следует отметить, что аргументация работы⁷⁴ довольно груба, а результат (4.26) получен из оценочных расчетов. Достижимость соответствующей фиксированной точки ХУ-модели в работе⁷⁴ не была продемонстрирована. Кроме того, существуют определенные сомнения в справедливости результата Нельсона — Костерлица (см. 122). В работе⁷⁴ приведены также качественные аргументы в пользу скейлингового закона (2.13) для проводимости при $d > 2$.

Оригинальный подход к рассматриваемой задаче, не использующий теорию возмущений, предложен в работах^{77,78}. Подробное изложение этого метода приведено в работе¹²³, где он был применен к статистике полимерных цепей. В этих работах также указывается на возникновение области «сильной» связи типа E_{sc} (4.22). Кроме того, в них получены определенные неравенства на критический индекс проводимости в законе (2.13). Эти неравенства допускают⁷⁷ существование минимальной металлической проводимости для $d = 2$, но не для $d = 3$.

Впервые скейлинговый закон для проводимости (2.13) был получен в работе Вегнера⁶⁹. В этой работе построена аналитическая схема преобразований ренормгруппы в реальном пространстве для модели Андерсона, аналогичная схеме Таулеса^{4,25-29}. В⁶⁹ предложены два альтернативных типа критического поведения, выбор между которыми не может быть осуществлен методами этой работы. Скейлинговый закон (2.13) получается в обоих вариантах, но в так называемом неоднородном случае производная плотности состояний имеет на пороге подвижности особенность типа теплоемкости в теории критических явлений (ср. 76). В однородном случае плотность состояний не имеет особенности на пороге подвижности; в последних работах⁸¹⁻⁸³ Вегнер поэтому предпочитает этот вариант критического поведения. Заметим, однако, что не существует строгих теорем (см. 4), запрещающих наличие слабой особенности плотности состояний на пороге подвижности, хотя большинство авторов считает ее наличие маловероятным. Метод вычисления критических индексов в работе⁶⁹ отсутствует, так же как и доказательство достижимости соответствующих фиксированных точек уравнений ренормгруппы.

В недавних работах^{79,80} Вегнер рассмотрел интересную модель электрона в случайной решетке с n уровнями на каждом узле. При этом каждому узлу соответствуют n собственных функций $|\alpha\rangle$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), причем n считается большим, а $1/n$ — малый параметр теории. Имеется в виду построить аналог $1/n$ -разложения теории критических явлений²⁴ для задачи о локализации.

Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ij \\ \alpha\beta}} f_{i\alpha, j\beta} |\alpha\rangle \langle \beta|, \quad (4.27)$$

где матричные элементы $f_{i\alpha, j\beta}$ считаются независимыми гауссовыми случайными переменными, удовлетворяющими условию симметрии и действительности: $f_{i\alpha, j\beta} = f_{j\beta, i\alpha}^*$. Средние значения их считаются равными нулю, а дисперсия задается выражением

$$\langle f_{i\alpha, j\beta} f_{k\gamma, l\delta} \rangle = (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{ik} \delta_{jl}) M_{i-j}. \quad (4.28)$$

Гамильтониан (4.27) представляет собой обобщение модели Андерсона, включающее, кроме n орбиталей на узле, еще и беспорядок в интегралах переноса.

Из-за независимости и симметричности распределения матричных элементов $f_{i\alpha, j\beta}$ вероятность найти систему с конкретным гамильтонианом (4.27) равна вероятности найти систему с

$$H = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ij \\ \alpha\beta}} S_{i\alpha} f_{i\alpha, j\beta} S_{j\beta} |i\alpha\rangle \langle j\beta|, \quad (4.29)$$

где $S_{i\alpha} = \pm 1$. Если $\Psi_\alpha(j)$ — собственная функция (4.27), то $S_{i\alpha}\Psi_\alpha(j)$ — собственная функция (4.29). Система инвариантна относительно локального изменения знака волновых функций на узле. Этот вариант модели, рассмотренной в ^{80, 81}, называется «локально калибровочно-инвариантной моделью». Локальная калибровочная инвариантность приводит для функций Грина к свойству

$$\langle G_{i\alpha, j\beta}(E) \rangle = S_{i\alpha} S_{j\beta} \langle G_{i\alpha, j\beta}(E) \rangle, \quad (4.30)$$

откуда следует, что

$$\langle G_{i\alpha, j\beta}(E) \rangle = G(E) \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}; \quad (4.31)$$

здесь угловые скобки означают усреднение по случайным переменным системы. Таким образом, в этой модели одночастичная функция Грина имеет «точечный» характер из-за случайных флуктуаций фаз волновых функций. Аналогично, двухчастичная функция Грина обращается в нуль, если определяющие ее четыре узла попарно не совпадают.

В пределе $n = \infty$ модель допускает точное решение ⁸⁰, результаты которого совпадают с результатами применения к этой модели приближения когерентного потенциала ¹²⁴. Пороги подвижности *отсутствуют*, плотность состояний равна

$$\frac{1}{n} N_\infty(E) = \begin{cases} \frac{2}{\pi E_0^2 v_0} \sqrt{E_0^2 - E^2}, & |E| \leq E_0, \\ 0, & |E| > E_0, \end{cases} \quad (4.32)$$

где $E_0^2 = 4 \sum_j M_{i-j}$, т. е. пропорциональна дисперсии матричных элементов гамильтониана (4.28), v_0 — объем элементарной ячейки. Статическая проводимость (при $T = 0$) равна

$$\sigma_\infty(E) = \frac{ne^2}{\pi dv_0} \left(1 - \frac{E^2}{E_0^2}\right) R^2 \sim \frac{ne^2}{a^{d-2}} \left(1 - \frac{E^2}{E_0^2}\right), \quad (4.33)$$

где $R^2 = \sum_j R_{ij}^2 M_{i-j} / \sum_j M_{i-j}$ характеризует радиус действия случайных корреляций, a — постоянная решетки. Последнее равенство в (4.33) написано для случая «короткодействующей» дисперсии матричных элементов $R \sim a$. Таким образом, проводимость обращается в нуль на краю зоны.

Стартуя с точного решения для $n = \infty$, можно построить систематическую (хотя и очень громоздкую) процедуру вычисления поправок по степеням $1/n$ ⁸⁰. При этом возникает интересная, хотя и непонятная до конца аналогия поведения *двухчастичных* функций Грина рассматриваемой модели с поведением продольной и поперечной восприимчивости изотропного ферромагнетика ниже точки фазового перехода ^{80, 82}.

Проводимость может быть представлена в виде следующего ряда по степеням $1/n$:

$$\frac{1}{n} \sigma = \sigma_\infty + \frac{1}{n} \sigma_1 + \dots + \frac{1}{n_t} \sigma_t + \dots, \quad (4.34)$$

причем коэффициенты σ_t конечны для $d > 2$ и расходятся не быстрее чем $(d - 2)^{-t}$ при $d \rightarrow 2$. Если оставить в (4.34) только наиболее расходящиеся члены порядка $n^{-t} (d - 2)^{-t}$, пренебрегая членами порядка $n^{-t} (d - 2)^{-t\epsilon}$ с $t' < t$, то

$$\sigma = n\sigma_\infty (1 - 2\gamma + O(\gamma^3)), \quad (4.35)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2\pi n [1 - (E^2/E_0^2)] (d-2) R^2/a^2}. \quad (4.36)$$

Это разложение «работает» в области делокализованных состояний (такое «нулевое» приближение (4.33)). Порог подвижности должен возникнуть при некотором $\gamma = \gamma_c$, когда статическая проводимость обратится в нуль; «металлической» области соответствует $\gamma < \gamma_c$. Очевидно, что в силу расходимости (4.36) при $d \rightarrow 2$ последнее неравенство никогда не выполняется для двумерного случая. Это согласуется с результатом работы ³³. Если предположить, что

$$\sigma = n\sigma_\infty \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^s, \quad (4.37)$$

то сравнение с (4.35) дает $\gamma_c = 1/2$, а для критического индекса проводимости получаем

$$s = 1. \quad (4.38)$$

Если, согласно ^{33, 69}, $s = (d - 2)\nu$, то критический индекс

$$\nu = \frac{1}{d-2}, \quad (4.39)$$

что совпадает с первым членом разложения ($d = 2 + \epsilon$) для изотропного ферромагнетика ^{125, 126}. Однако, как отмечено выше, эта аналогия остается непонятной.

В работах ⁸¹⁻⁸³ Вегнер обращает внимание на отмеченное выше, в связи с эффективным лагранжианом (4.25), обстоятельство, что частота внешнего поля ω в задаче о проводимости играет роль источника («поля»), нарушающего $O(n + m)$ -симметрию задачи, а

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle \Phi_j^2 \rangle - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle \varphi_i^2 \rangle \right) = \\ = \frac{1}{4} [G(rr, E + i\delta) - G(rr, E - i\delta)] = \frac{i\pi}{2} \nu_0 N(E), \quad \text{[(4.40)} \end{aligned}$$

т. е. плотность состояний, играет роль «параметра порядка», нарушающего эту симметрию. Эта аналогия необычна, так как принято считать, что плотность состояний $N(E)$ остается конечной на пороге подвижности ^{81, 82}, в отличие от параметра порядка в точке фазового перехода. Тогда, требуя, чтобы критический индекс β «параметра порядка» равнялся нулю, и используя обычное скэйлинговое соотношение $\beta = (\nu/2)(d - 2 + \eta) = 0$, при $\nu \neq 0$, Вегнер получает

$$\eta = 2 - d. \quad (4.41)$$

Он приходит к этой аналогии в рамках несколько иного формализма, основанного на матричной модели ^{81, 82}, типа использованного в работах ^{73, 74}. Вегнер предложил матричный эффективный лагранжиан для описания порога подвижности, учитывающий рассмотренное выше нарушение симметрии и являющийся обобщением так называемой нелинейной σ -модели. В этой модели для $d = 2$ порог подвижности отсутствует в согласии с работой ³³. Ренормгрупповые расчеты для таких моделей были про-

ведены в работе ¹²⁷. Из этих расчетов вытекают ε -разложения для критических индексов ($d = 2 + \varepsilon$), нулевые члены которых совпадают с (4.38) и (4.39), в случае, когда рассматривается задача, симметричная относительно ортогональных преобразований флуктуирующего матричного поля. В другом варианте этой же модели (инвариантном относительно унитарных преобразований) получаются иные значения индексов. В настоящее время неясно, каким физическим ситуациям соответствуют эти два варианта критического поведения (см., однако, ^{40, 41} *). Это, по-видимому, связано с тем, что в модели Вегнера ⁸¹⁻⁸³, так же как и в более ранних матричных моделях ^{73, 74}, отсутствует прямое соответствие со стандартным аппаратом вычисления усредненных функций Грина электрона в случайной системе ^{89, 90}, что затрудняет получение конкретных физических результатов и сравнение с известными простыми приближениями теории. В этом смысле формализм, основанный на эффективных лагранжианах типа (4.12) и (4.25), кажется нам предпочтительнее. В настоящее время также неясно, каким образом в матричном формализме удается обойти рассмотренные выше трудности, связанные с неприменимостью теории возмущений. Возможно, что это действительно удается при рассмотрении задачи вблизи «нижней» критической размерности $d = 2$, тогда как выше, в связи с работами ^{68-73, 75-78}, рассматривалась окрестность «верхней» критической размерности $d = 4$. Отметим в связи с этим, что недавно появились работы, в которых приводятся аргументы в пользу того, что «верхняя» критическая размерность для задачи локализации $d = 8$ ^{85, 86}. Нам представляется, однако, что выводы этих работ являются преждевременными.

Из этого обзора различных работ, посвященных скэйлингу на пороге подвижности, складывается довольно пестрая картина, в которой трудно выделить окончательные и надежные результаты. Несомненным, по-видимому, является только то обстоятельство, что проблема обоснования скэйлинга на пороге подвижности оказывается существенно более сложной задачей, чем такая же проблема в обычной теории критических явлений. Здесь мы сталкиваемся с такими проблемами, как необходимость работать с неустойчивой теорией поля, неприменимость теории возмущений и т. д. Отсутствие универсальных методов решения подобных задач хорошо известно. Поэтому рассматриваемая проблема может потребовать разработки принципиально новых подходов и методов.

В заключение этого раздела вспомним еще об одной чрезвычайно важной проблеме теории, для обсуждения которой у нас просто нет места. Речь идет об учете кулоновских корреляций в связи с задачей локализации, или о так называемой теории «ферми-стекол» ^{15, 128-130}. Эта задача является фундаментально важной, однако здесь получены лишь только самые первые и зачастую взаимно противоречивые результаты ^{61, 128-134}. Несомненно, что следующий существенный этап развития теории будет связан с этим направлением. Однако обзор этих результатов, а тем более высказывание определенной точки зрения на эту проблему является, по нашему мнению, еще более преждевременным, чем в рассмотренной выше теории критического поведения на пороге подвижности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом обзоре мы рассмотрели новые результаты, полученные в последнее время в теории локализации электронов в неупорядоченных системах, а также ряд экспериментов, стимулированных этими результатами. В основном развитие рассмотренных представлений в физике неупорядоченных

*) Дальнейшее развитие этого направления см. в недавних интересных работах ^{142, 151-153}.

систем было связано с применением идей и методов, заимствованных из теории критических явлений. Такой подход оказался достаточно успешным и привел к получению целого ряда новых и неожиданных результатов, таких, например, как диэлектризация длинных металлических проволочек и представления о полной локализации в двумерных системах. С этой точки зрения любая достаточно длинная металлическая проволочка оказывается, строго говоря, неметаллом. Аналогичным образом существуют серьезные основания ожидать проявления неметаллических свойств и у двумерных пленок, получаемых напылением металлических элементов, хотя в этом случае теоретическая и экспериментальная ситуации остаются еще достаточно противоречивыми. В этом смысле можно говорить о макроскопическом проявлении квантового явления локализации электронов в неупорядоченных системах. Экспериментальное наблюдение этих эффектов возможно, однако, только при весьма низких температурах и на чрезвычайно миниатюрных образцах. Сама возможность исследования таких систем возникла в связи с появлением микроэлектроники и технологии больших интегральных схем, что потребовало развития соответствующих литографических методик. Поэтому нет нужды специально подчеркивать значение обсуждавшихся выше новых результатов для задач той же самой микроэлектроники.

С другой стороны, мы стремились продемонстрировать незавершенность данной области исследований и подчеркнуть стоящие здесь нерешенные проблемы. Положение дел в теории остается еще весьма далеким от полной ясности, причем это касается таких, например, фундаментальных вопросов, как сам факт наличия или отсутствия минимальной металлической проводимости. Такое положение обусловлено прежде всего тем, что задача локализации и описания поведения электронных состояний вблизи порога подвижности оказывается существенно более сложной, чем аналогичные проблемы в теории фазовых переходов. Полное решение этих проблем может потребовать разработки новых теоретических методов и постановки тонких экспериментов, значение которых может выйти за пределы рассматриваемой задачи. Хотя в настоящее время трудно делать определенные прогнозы, представляется несомненным, что более глубокое понимание явления локализации электронов в неупорядоченных системах будет способствовать дальнейшему прогрессу теории и эксперимента, так же как и практическому использованию неупорядоченных систем.

Институт физики металлов УНЦ АН СССР,
Свердловск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Mott N. F., Davis E. A. *Electronic Processes in Non-Crystalline Materials*.— Oxford: Clarendon Press, 1971; перевод: Мотт Н., Дэвис Э. *Электронные процессы в некристаллических твердых телах*.— М.: Мир, 1974.
2. Mott N. F. *Metal-Insulator Transitions*.— Lnd.: Taylor and Francis, 1974; перевод: Мотт Н. *Переходы металл-изолятор*.— М.: Наука, 1979.
3. Anderson P. W.— *Phys. Rev.*, 1958, v. 109, p. 1492.
4. Thouless D. J.— *Phys. Rept.*, 1974, v. 13, p. 93.
5. Mott N. F., Pepper M., Pollit S., Wallis R. H., Adkins C. J.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1975, v. 345, p. 169.
6. Эфрос А. Л.— *УФН*, 1978, т. 126, с. 41.
7. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. *Электронные свойства легированных полупроводников*.— М.: Наука, 1979.
8. Mott N. F., Twose W. D.— *Adv. Phys.*, 1960, v. 10, p. 107.
9. Halperin B. I.— *Adv. Chem. Phys.*, 1967, v. 13, p. 123.
10. Березинский В. Л.— *ЖЭТФ*, 1973, т. 65, с. 1251.
11. Aбрикосов А. А., Рyzкин I. A.— *Adv. Phys.*, 1978, v. 27, p. 147.
12. Esomoto E. N., Cohen M. H.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1972, v. 5, p. 2932

13. Licciardello D. C., Economou E. N.— Ibid., 1975, v. 11, p. 3697.
14. Antoniou P. D., Economou E. N.— Ibid., 1977, v. 16, p. 3768.
15. Anderson P. W.— Comm. Sol. State Phys., 1970, v. 2, p. 193.
16. Anderson P. W.— Rev. Mod. Phys., 1978, v. 50, p. 191.
17. Эфрос А. Л., Шкловский Б. И.— УФН, 1975, v. 117, с. 401.
18. Cohen M. H.— J. Non-Cryst. Sol., 1970, v. 4, p. 391.
19. Ioffe A. F., Regel A. R.— Progr. Semicond., 1960, v. 4, p. 237.
20. Kadanoff L. P. et al.— Rev. Mod. Phys., 1967, v. 39, p. 2.
21. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1975.
22. Wilson K. G., Kogut J.— Phys. Rept., 1974, v. 12, p. 75.
23. Wilson K. G.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 773.
24. Ma Shiang-keng. Modern Theory of Critical Phenomena.— Reading, Mass. Mass. W. A. Benjamin, 1976; перевод: Ма Ш. Современная теория критических явлений.— М.: Мир, 1980.
25. Edwards J. T., Thouless D. J.— J. Phys. Ser. C, 1972, v. 5, p. 807.
26. Last B. J., Thouless D. J.— Ibid., 1974, v. 7, p. 699.
27. Licciardello D. C., Thouless D. J.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1475.
28. Licciardello D. C., Thouless D. J.— J. Phys. Ser. C, 1975, v. 8, p. 4157.
29. Licciardello D. C., Thouless D. J.— Ibid., 1978, v. 11, p. 925.
30. Kubo R.— J. Phys. Soc. Japan, 1957, v. 12, p. 570.
31. Yoshino S., Okazaki M.— Ibid., 1977, v. 43, p. 415.
32. Stein J., Krei U.— Zs. Phys. Ser. B, 1979, Bd. 34, S. 287.
33. Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 673.
34. Wilson K. G.— Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 3, p. 1818.
35. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976.
36. Владимиров А. А., Ширков Д. В.— УФН, 1979, т. 129, с. 407.
37. Langer J. S., Neal T.— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 984.
38. Горьков Л. П., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 248.
39. Altshuler B. L., Khmel'nitzkii D. E., Larkin A. I., Lee P. A. (в печати).
40. Khmel'nitzkii D. E.— NORDITA Preprint 79/47—1979.
41. Hikami S., Larkin A. I., Nagaoka Y.— Prog. Theor. Phys., 1980, v. 63, p. 707.
42. Lee P. A.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1492.
43. Prelovšek P.— Phys. Rev. Ser. B, 1978, v. 18, p. 3657.
44. Thouless D. J.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1167.
45. Adkins C. J.— Phil. Mag., 1977, v. 36, p. 1285.
46. Anderson P. W., Abrahams E., Ramakrishnan T. V.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 718.
47. Swann W. F. G.— Phil. Mag., 1914, v. 28, p. 467.
48. Licciardello D. C.— Comm. Sol. State Phys., 1977, v. 8, p. 61.
49. Liang N. T., Yueh Shan, Shou-Yih Wang.— Phys. Rev. Lett. 1976, v. 37, p. 526.
50. Andersson T.— J. Phys. Ser. D., 1976, v. 9, p. 973.
51. Вул Б. М., Заварицкая Э. И., Башкиров Ю. А., Виноградова В. М.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 204.
52. Dynes R. C., Garno J. P., Rowell J. M.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 479.
53. Adkins C. J.— J. Phys. Ser. C, 1978, v. 11, p. 851.
54. Garland J. C., Gully W. J., Tanner D. B.— Bull. Amer. Phys. Soc., 1979, v. 24, p. 280.
55. Dolan G. J., Osheroff D. D., Tsui D. C.— Ibid., p. 233.
56. Giordano N., Gilson W., Prober D. E.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 725.
57. Dolan G. J., Osheroff D. D.— Ibid., p. 721.
58. Dunkleberger L. N.— J. Vac. Sci. and Technol., 1978, v. 15, p. 88.
59. Dolan G. J.— Appl. Phys. Lett., 1977, v. 31, p. 337.
60. BGL.— Phys. Today, 1979, v. 32, No. 10, p. 17.
61. Аронов А. Г., Альтшулер Б. Л.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 2028.
62. Altshuler B. L., Aroнов A. G., Lee P. A.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 1288.
63. Эдельштейн В. М.— Письма ЖЭТФ. 1980, т. 31, с. 60.

64. Kawaguchi Y., Kitahara H., Kawaji S.—Sol. State Comm., 1978, v. 26, p. 701.
65. Toulouse G., Pfeuty P.—C.R. Ac. Sci. Ser. B, 1975, t. 280, p. 33.
66. Edwards S. F.—J. Phys. Ser. C, 1975, v. 8, p. 1660.
67. Thouless D. J.—Ibid., p. 1803.
68. Садовский М. В.—ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 1936.
69. Wegner F. J.—Zs. Phys. Ser. B, 1976, Bd. 25, S. 327.
70. Садовский М. В.—ФТТ, 1977, т. 19, с. 2334.
71. Edwards S. F., Green M. B., Srinivasen G.—Phil. Mag., 1977, v. 35, p. 1421.
72. Nitzan A., Freed K. F., Cohen M. H.—Phys. Rev. Ser. B, 1977, v. 15, p. 4476.
73. Aharony A., Ymry Y.—J. Phys. Ser. C, 1977, v. 10, p. L487.
74. Shuster H. G.—Zs. Phys. Ser. B, 1978, Bd. 31, S. 99.
75. Cardy J. L.—J. Phys. Ser. C, 1978, v. 11, p. L321.
76. Садовский М. В.—ФТТ, 1979, т. 21, с. 743.
77. Freed K. F.—J. Phys. Ser. C, 1979, v. 12, p. L17.
78. Freed K. F.—Phys. Rev. Ser. B, 1979, v. 20, p. 215.
79. Wegner F. J.—Ibid., 1979, v. 19, p. 783.
80. Oppermann R., Wegner F. J.—Zs. Phys. Ser. B, 1979, Bd. 34, S. 327.
81. Wegner F. J.—Ibid., 1979, v. 35, p. 207.
82. Wegner F. J. Renormalization Group and the Anderson Model of Disordered Systems: Lectures at the Brasov Int. School «Recent Advances in Statistical Mechanics».—Univ. Heidelberg, Preprint No. 30.—1979.
83. Wegner F. J.—Zs. Phys. Ser. B, 1980, Bd. 36, S. 209.
84. Wegner F. J.—J. Phys. Ser. C, 1980, v. 13, p. L45.
85. Harris A. B., Lubensky T. C.—Comm. Sol. State Phys., 1980, v. 34, p. 343.
86. Lukes T.—J. Phys. Ser. C, 1979, v. 12, p. L797.
87. Abou-Chacra R., Anderson P. W., Thouless D. J.—Ibid., 1973, v. 6, p. 1734.
88. Abou-Chacra R., Thouless D. J.—Ibid., 1974, v. 7, p. 65.
89. Edwards S. F.—Phil. Mag., 1958, v. 3, p. 1020.
90. Малеев С. В., Топерверг Б. П.—ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1440.
91. Gotze W.—J. Phys. Ser. C, 1979, v. 12, p. 1279.
92. Gotze W., Prelovšek P., Wolfle P.—Sol. Stat. Comm., 1979, v. 30, p. 369.
93. Anderson P. W.—Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1972, v. 69, p. 109, p. 1097.
94. Lukes T.—J. Non-Cryst. Sol., 1972, v. 8—10, p. 470.
95. De Gennes P. G.—Phys. Lett. Ser. A, 1972, v. 38, p. 339.
96. Des Cloizeaux J.—Phys. Rev. Ser. A, 1974, v. 10, p. 1665.
97. Mott N. F.—Comm. Phys., 1976, v. 1, p. 203.
98. White R. M., Anderson P. W.—Phil. Mag., 1972, v. 25, p. 737.
99. Edwards S. F.—J. Non-Cryst. Sol., 1970, v. 4, p. 417.
100. Edwards S. F., Abram R.—J. Phys. Ser. C, 1972, v. 5, p. 1183, 1196.
101. Freed K. F.—Phys. Rev. Ser. B, 1972, v. 5, p. 4802.
102. Edwards S. F.—J. Non-Cryst. Sol., 1979, v. 32, p. 113.
103. Illiopoulos J., Itzykson C., Martin A.—Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 165.
104. Bender C., Wu T.—Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 7, p. 1620.
105. Богомолю Е. В.—Phys. Lett. Ser. B, 1977, v. 67, p. 193.
106. Dorfel B., Kazakov D., Shirkov D.—JINR Preprint E2-10720.—Dubna, 1977.
107. Langer J. S.—Ann. Phys., 1967, v. 41, p. 108.
108. Линатов Л. Н.—ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 411.
109. Brezin E., Le Guillou J., Zinn-Justin J.—Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 1544.
110. Callan C., Coleman S.—Ibid., 1977, v. 16, p. 1762.
111. Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.—ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 2087.
112. Гинзбург С. Л.—ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 647.
113. Amit J.—J. Phys. Ser. C, 1974, v. 7, p. 3369.
114. Zittartz J., Langer J. S.—Phys. Rev., 1967, v. 148, p. 741.
115. Halperin B. I.—Ibid., 1965, v. 139, p. A104.
116. Люксютов И. Ф., Покровский В. Л., Хмельницкий Д. Е.—ЖЭТФ, 1974, т. 69, с. 1817.
117. Edwards S. F., Anderson P. W.—J. Phys. Ser. F, 1975, v. 5, p. 965.
118. Harris A. B., Lubensky T. C., Chen J. H.—Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 415.

119. Blandin A. J.— J. de Phys., 1978, v. 39, Colloq. Nr. 6, p. C6-1449.
120. Jose J. V., Kadanoff L. P., Kirkpatrick S., Nelson D. R.— Phys. Rev. Ser. B, 1977, v. 16, p. 1216.
121. Nelson D. R., Kosterlitz J. M.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 1201.
122. Zittartz J.— Zs. Phys. Ser. B, 1978, v. 31, p. 63, p. 79, 89.
123. Kosmas M. K., Freed K. F.— J. Chem. Phys., 1978, v. 69, p. 3647.
124. Elliott R., Krumhansl J. A., Leath P. L.— Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 465.
125. Polyakov A. M.— Phys. Lett., Ser. B, 1975, v. 59, p. 79.
126. Brezin E., Zinn-Justin J.— Phys. Rev. Ser. B, 1976, v. 14, p. 3110.
127. Brezin E., Hikami S., Zinn-Justin J.— Saclay Preprint DPh-T/79-135.—1979.
128. Freedman R., Hertz J. A.— Phys. Rev. Ser. B, 1977, v. 15, p. 2384.
129. Fleishman L., Licciardello D. C., Anderson P. W.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 1340.
130. Fleishman L., Anderson P. W.— Phys. Rev. Ser. B, 1980, v. 21, p. 2366.
131. Efros A. L., Shklovskii B. I.— J. Phys. Ser. C, 1975, v. 8, p. L49.
132. Efros A. L.— Ibid., 1976, v. 9, p. 2021.
133. Барановский С. Л., Ефрос А. Л., Гелмонт В. Л., Шкловский В. И.— J. Phys. Ser. C, 1979, v. 12, p. 1023.
134. Барановский С. Л., Шкловский В. И., Эфрос А. Л.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 395.
135. Imry Y.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 469.
136. Stein J., Krei U.— Zs. Phys. Ser. B, 1980, Bd. 37, S. 13.
137. Haydock R., Heine V., Kelly M. J.— P. Phys. Ser. C, 1975, v. 8, p. 2591.
138. Haydock R. Preprint — 1980.
139. Chaudhari P., Habermeier H. U.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 40.
140. Molzen W. W., Broers A. N., Cuomo J. J., Harper J. M. E., Laibowitz R. B.— J. Vac. Sci. and Technol., 1979, v. 16, p. 269.
141. Bishop D. J., Tsui D. C., Dynes R. C.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 1153.
142. Jüngling K., Oppermann R.— Zs. Phys. Ser. B, 1980, v. 38, p. 93.
143. Anderson P. W., Thouless D. J., Abrahams E., Fisher D. S.— Phys. Rev. Ser. B, 1980, v. 22, p. 3519.
144. Andereck B. S., Abrahams E.— J. Phys. Ser. C, 1980, v. 13, p. L383.
145. Thouless D. J., Kirkpatrick S.— J. Phys. Ser. C. (в печати).
146. Giordano N.— Phys. Rev. Ser. B (в печати)
147. Вул Б. М., Заварицкая Э. И.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1089.
148. Chaudhari P., Broers A. N., Chi C. C., Laibowitz R. B., Spiller E., Viggiano J. M.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 930.
149. Brezin E., Parisi G.— J. Phys. Ser. C., 1980, v. 13, p. L307.
150. Садовский М. В.— Труды ИФМ УНЦ АН СССР, Свердловск (в печати).
151. Schafer L., Wegner F. J.— Zs. Phys. Ser. B, 1980, v. 38, p. 113.
152. Houghton A., Jevicky A., Kenway R. D., Pruiskén A. M.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, p. 394.
153. Ефетов К. Б., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 1120.