Аналитическая асимптотика β-функции в теории φ^4 и КЭД (конец истории про «нуль заряда»)

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П.Л.Капицы РАН

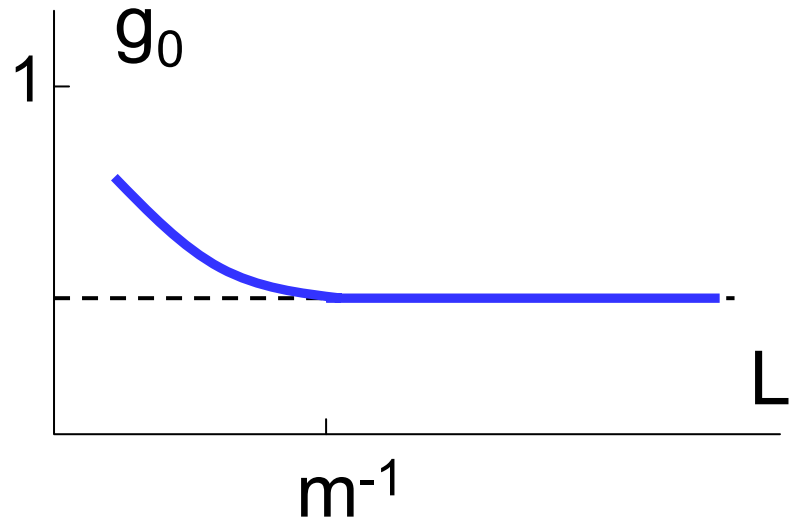
«Нуль заряда»

Ландау Л Д, Абрикосов А А, Халатников И М,
ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).

$$g = \frac{g_0}{1 + \beta_2 g_0 \ln \Lambda^2/m^2}$$

При $\Lambda \to \infty$ имеем $g \to 0$ («нуль заряда»)

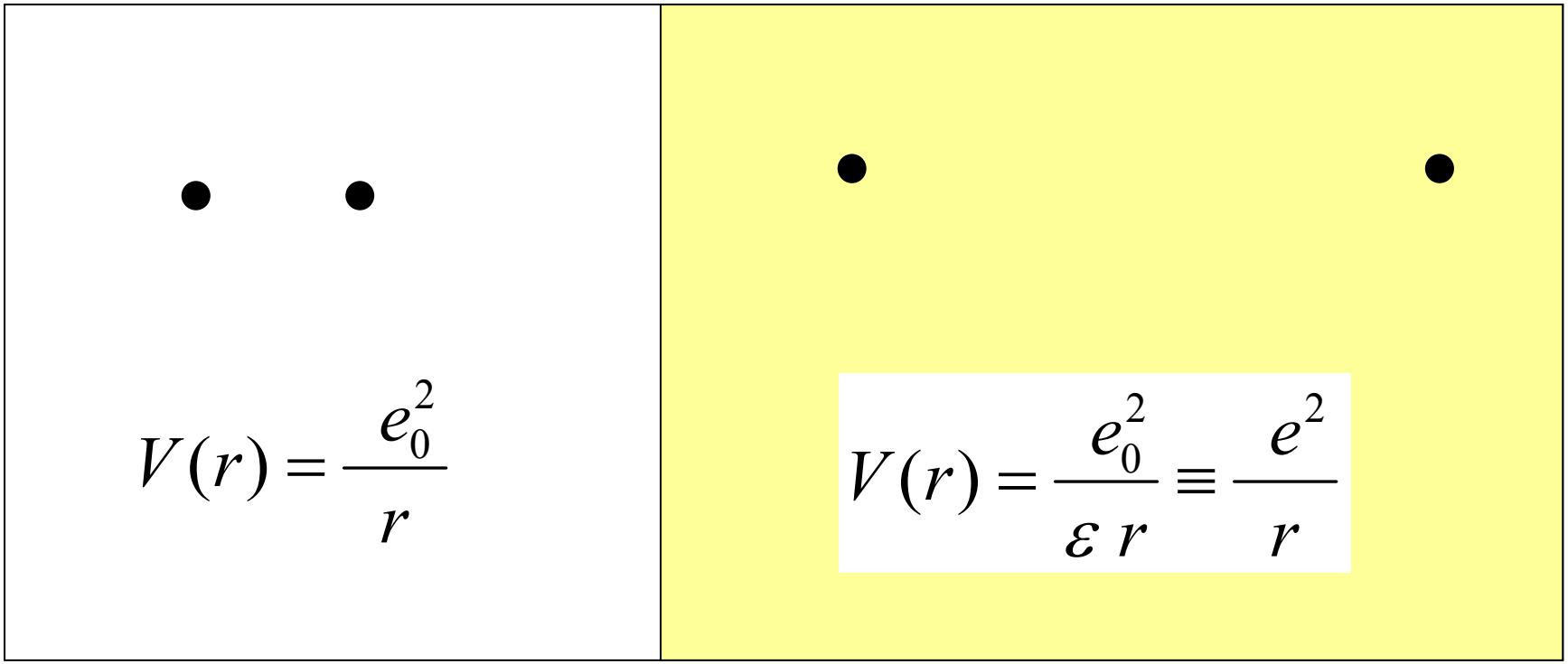
$$g_0 = \frac{g}{1 - \beta_2 g \ln \Lambda^2/m^2}$$



Вакуум	Диэлектрик
$V(r) = \dfrac{e_0^2}{r}$	$V(r) = \dfrac{e_0^2}{\varepsilon\, r} \equiv \dfrac{e^2}{r}$

Вакуум

Диэлектрик



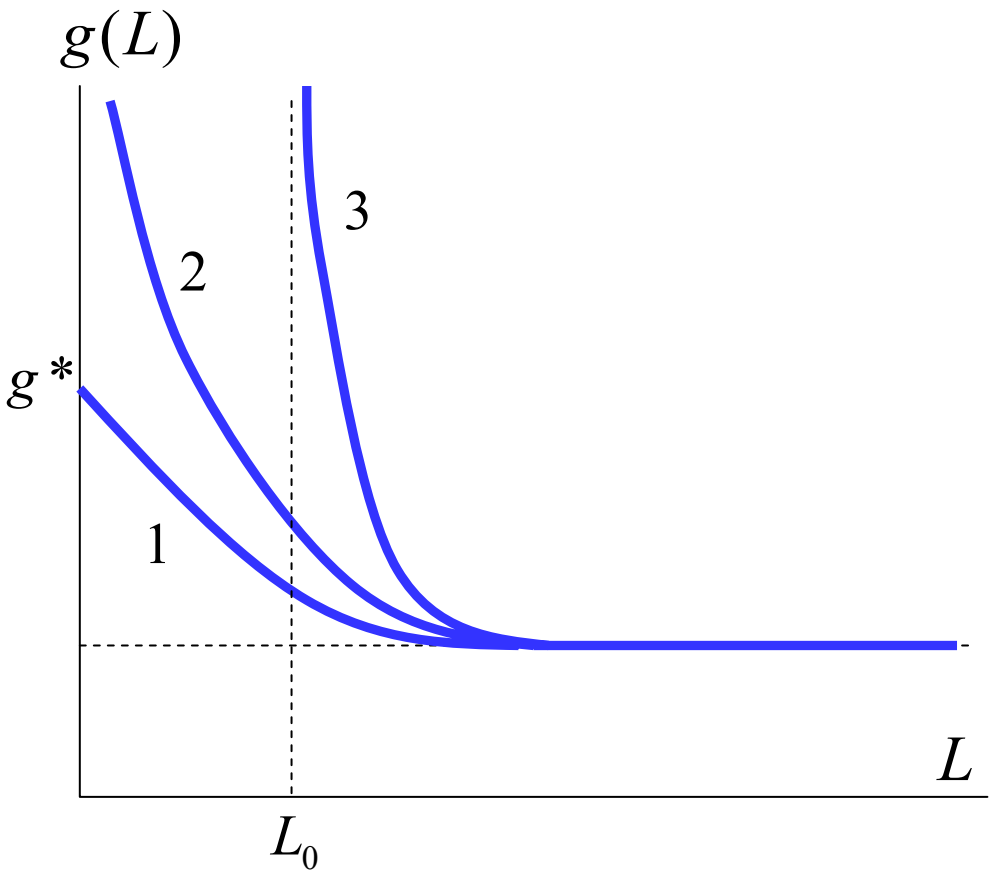
Идеальный вакуум

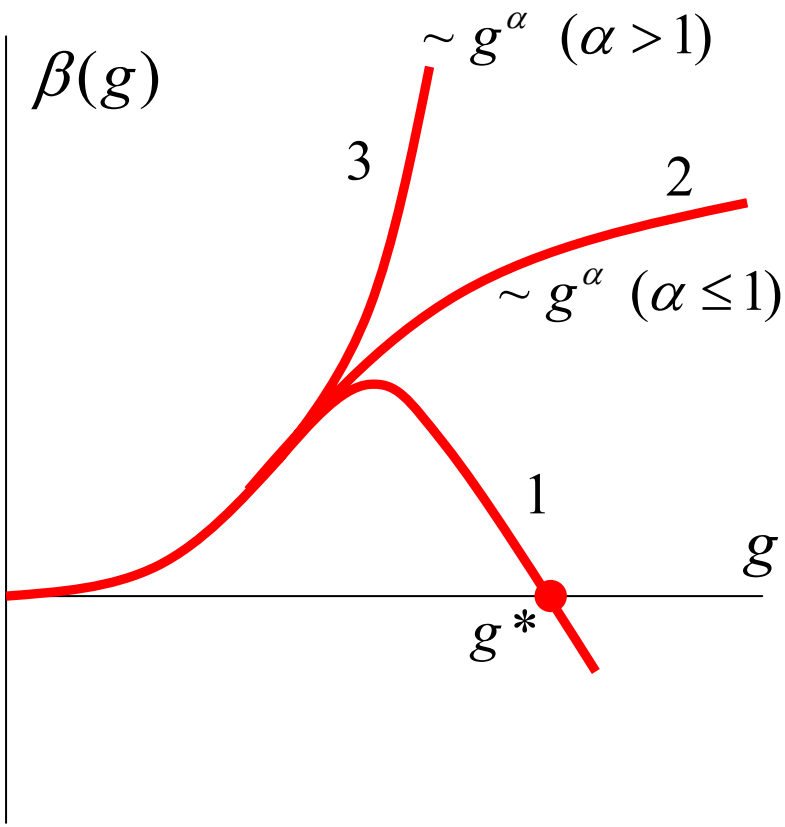
Физический вакуум

$$e^2 = \frac{e_0^2}{\varepsilon}$$

Классификация Боголюбова и Ширкова

$$-\frac{d\ g}{d\ln L^2} = \beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \ldots$$



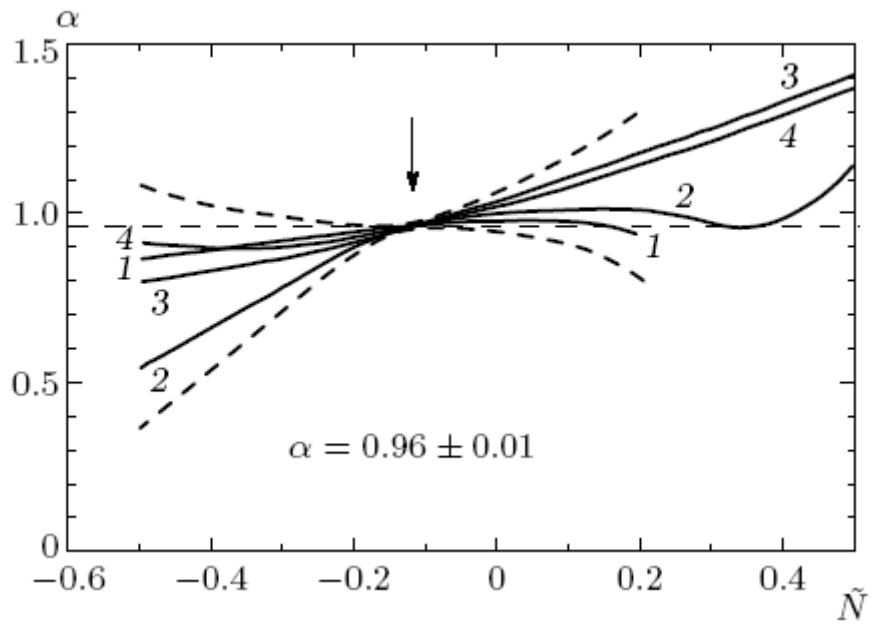


Попытки восстановления β-функции

$$\beta(g) = \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \ldots + \beta_L g^L + \ldots + c a^N \Gamma(N+b)\ g^N + \ldots$$

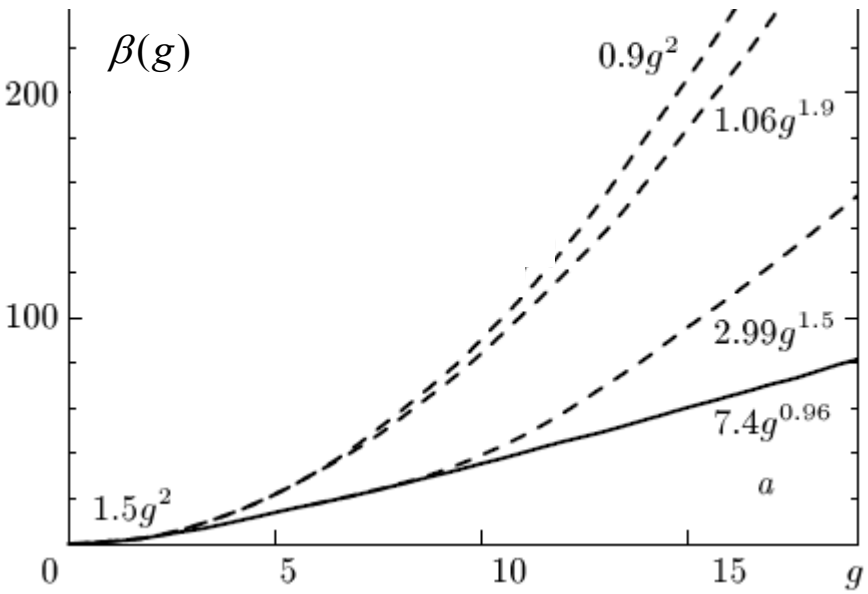
$$\beta_N = \beta_N^{as} \left(1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \frac{A_3}{N^3} + \ldots \right)$$

$$\beta_N = \beta_N^{as} \left(1 + \frac{A_1}{(N - \widetilde{N})} + \frac{A_2}{(N - \widetilde{N})^2} + \ldots \right)$$



d=4

И.М.Суслов,
ЖЭТФ 120, 5 (2001)

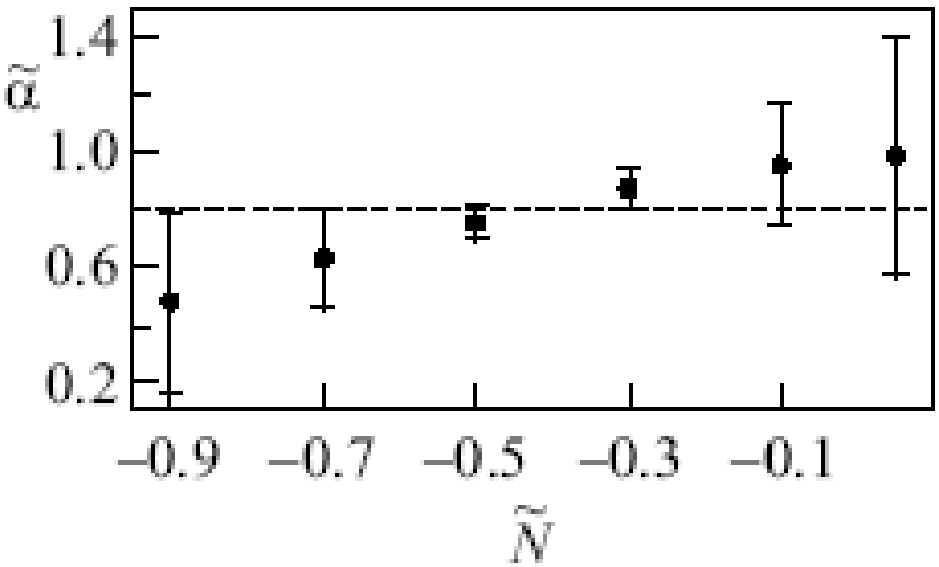


Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).

Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).

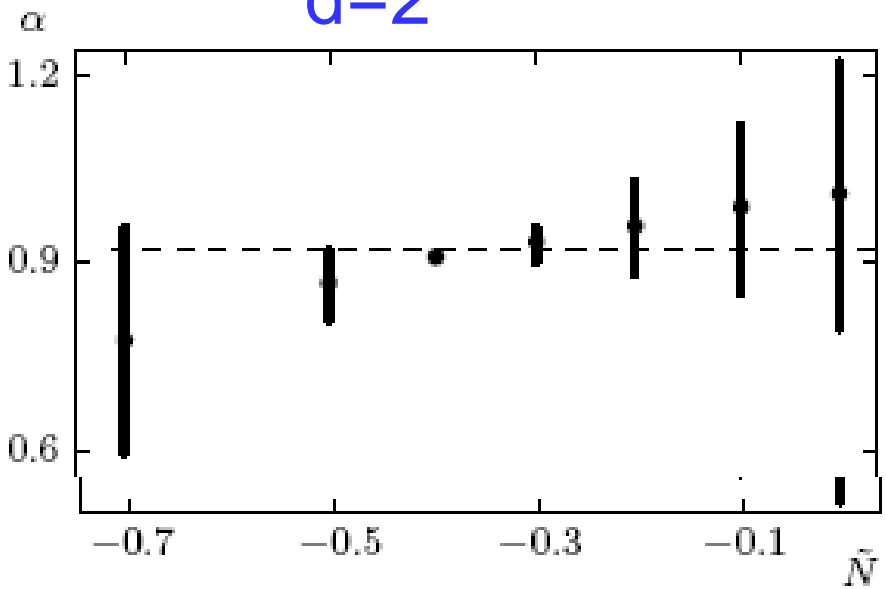
A. N. Sissakian et al., Phys. Lett. B **321**, 381 (1994).

d=3 (n=2)



Другие размерности

d=2



А.А.Погорелов,
И.М. Суслов,
ЖЭТФ 132, 406 (2007);
Письма в ЖЭТФ 86, 41 (2007)

Естественная гипотеза:

$$\beta(g) \sim g \qquad при \quad g \to \infty$$

для всех d.

Естественная стратегия:

(а) Проверить для d=0
(б) Выяснить механизм
(в) Обобщить на произвольные d

Формализм теоретико-полевой РГ

Для наблюдаемых величин

$$A_{obs} = F(g_0, \Lambda) = F_R(g)$$

Мультипликативная перенормируемость

$$F(g_0, \Lambda) = Z(g_0, \Lambda)\ F_R(g)$$

Ренормировочная инвариантность

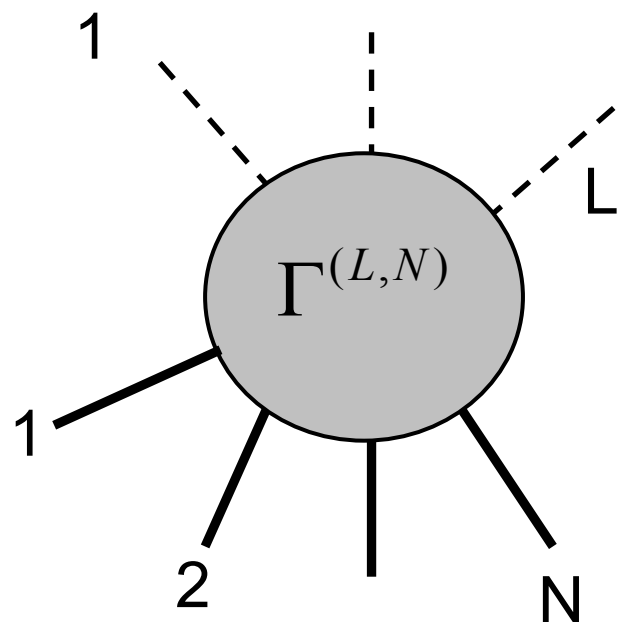
$$\frac{d}{d\ln\Lambda}\ F_R = 0$$

Уравнение Каллана-Симанчика

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \ln\Lambda} + \beta(g_0)\frac{\partial}{\partial g_0} + \gamma(g_0) \right\} F(g_0, \Lambda) = 0$$

Определение РГ функций

$$\Gamma^{(L,N)}(p_i; g_0, m_0, \Lambda) = Z^{-N/2} \left(\frac{Z_2}{Z}\right)^{-L} \Gamma_R^{(L,N)}(p_i; g, m)$$



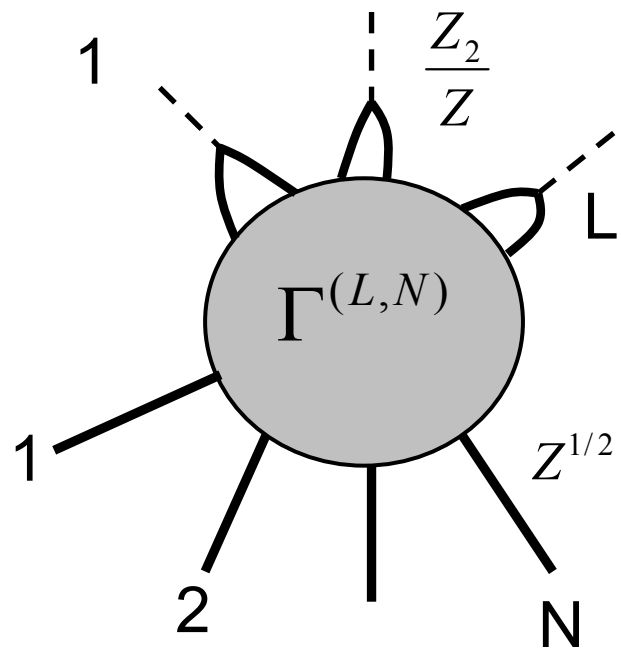
$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln m} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + (L - N/2)\,\eta(g) - L\eta_2(g)\right]\Gamma_R^{(L,N)} \approx 0$$

$$\beta(g) = \left.\frac{dg}{d\ln m}\right|_{g_0,\Lambda=const}, \qquad \eta(g) = \left.\frac{d\ln Z}{d\ln m}\right|_{g_0,\Lambda=const}, \qquad \eta_2(g) = \left.\frac{d\ln Z_2}{d\ln m}\right|_{g_0,\Lambda=const}$$

$$\nu^{-1} = 2 + \eta_2 - \eta$$

Определение РГ функций

$$\Gamma^{(L,N)}(p_i; g_0, m_0, \Lambda) = Z^{-N/2}\left(\frac{Z_2}{Z}\right)^{-L}\Gamma_R^{(L,N)}(p_i; g, m)$$

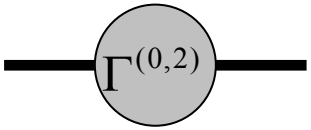


$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln m} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + (L - N/2)\,\eta(g) - L\eta_2(g)\right]\Gamma_R^{(L,N)} \approx 0$$

$$\beta(g) = \left.\frac{dg}{d\ln m}\right|_{g_0,\Lambda=const}, \qquad \eta(g) = \left.\frac{d\ln Z}{d\ln m}\right|_{g_0,\Lambda=const}, \qquad \eta_2(g) = \left.\frac{d\ln Z_2}{d\ln m}\right|_{g_0,\Lambda=const}$$

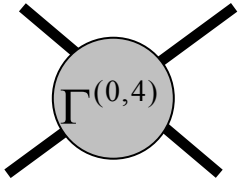
$$\nu^{-1} = 2 + \eta_2 - \eta$$

Определение g, m и Z -факторов



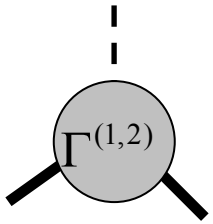
$$\Gamma_R^{(0,2)}(p;g,m)\Big|_{p\to 0} = m^2 + p^2 + O(p^4)$$

$$m_0^2 + p^2$$



$$\Gamma_R^{(0,4)}(p_i;g,m)\Big|_{p_i=0} = gm^{\epsilon} \quad , \qquad \epsilon = 4-d$$

$$g_0\Lambda^{\varepsilon}$$



$$\Gamma_R^{(1,2)}(p_i;g,m)\Big|_{p_i=0} = 1$$

$$1$$

$$Z(g_0,m_0,\Lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial p^2}\,\Gamma^{(0,2)}(p;g_0,m_0,\Lambda)\Big|_{p=0}\right)^{-1}$$

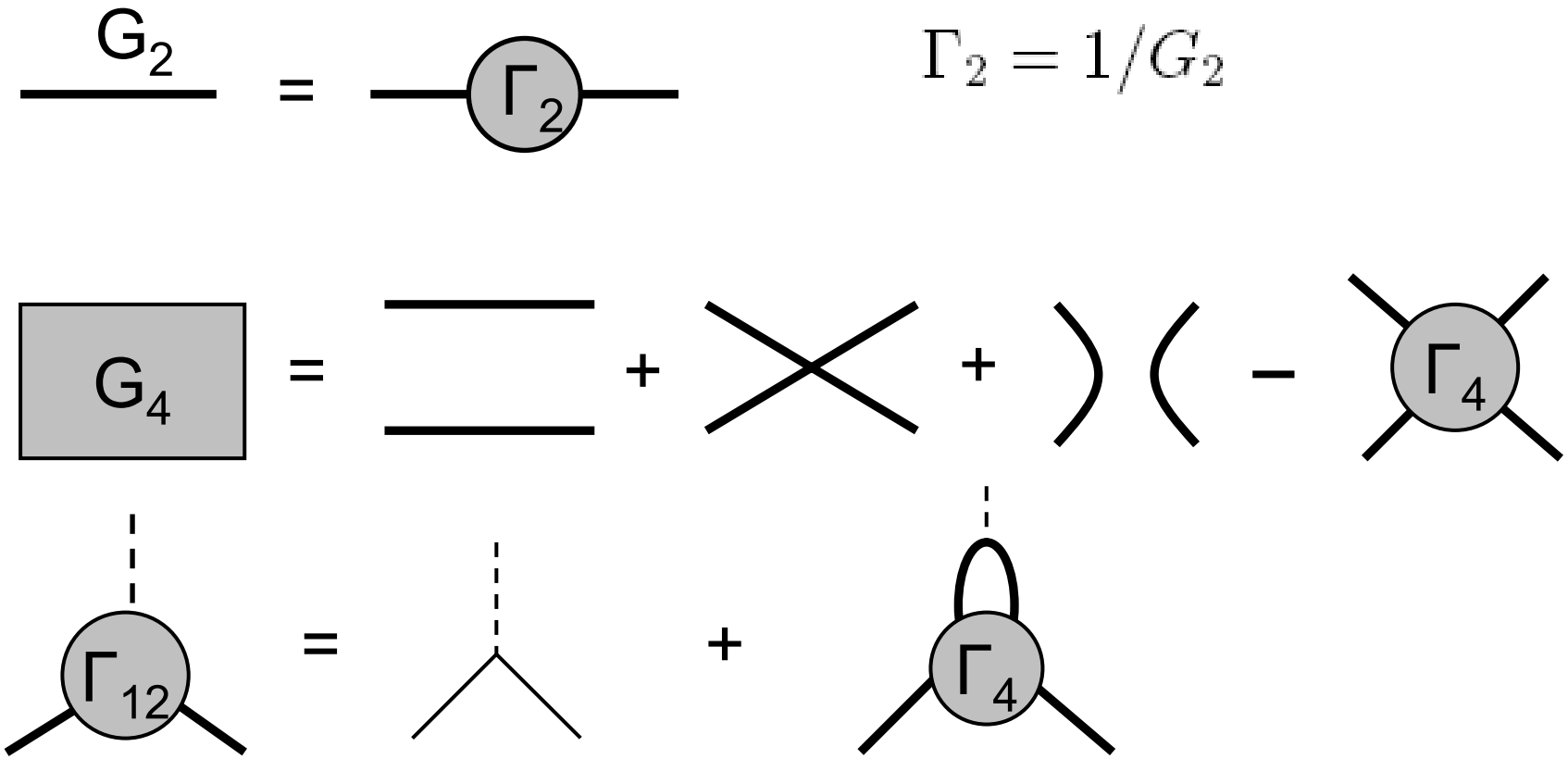
$$Z_2(g_0,m_0,\Lambda) = \left(\Gamma^{(1,2)}(p_i;g_0,m_0,\Lambda)\Big|_{p_i=0}\right)^{-1}$$

$$m^2 = Z(g_0,m_0,\Lambda)\,\Gamma^{(0,2)}(p;g_0,m_0,\Lambda)\Big|_{p=0}$$

$$gm^{\epsilon} = Z^2(g_0,m_0,\Lambda)\,\Gamma^{(0,4)}(p_i;g_0,m_0,\Lambda)\Big|_{p_i=0}$$

$$Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}(x_1,\ldots,x_M) = \int D\varphi\, \varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_2}(x_2)\ldots\varphi_{\alpha_M}(x_M)\exp\left(-S\{\varphi\}\right)$$

$$G^{(M)} = Z^{(M)} / Z^{(0)}$$



$$\Gamma_2 = 1/G_2$$

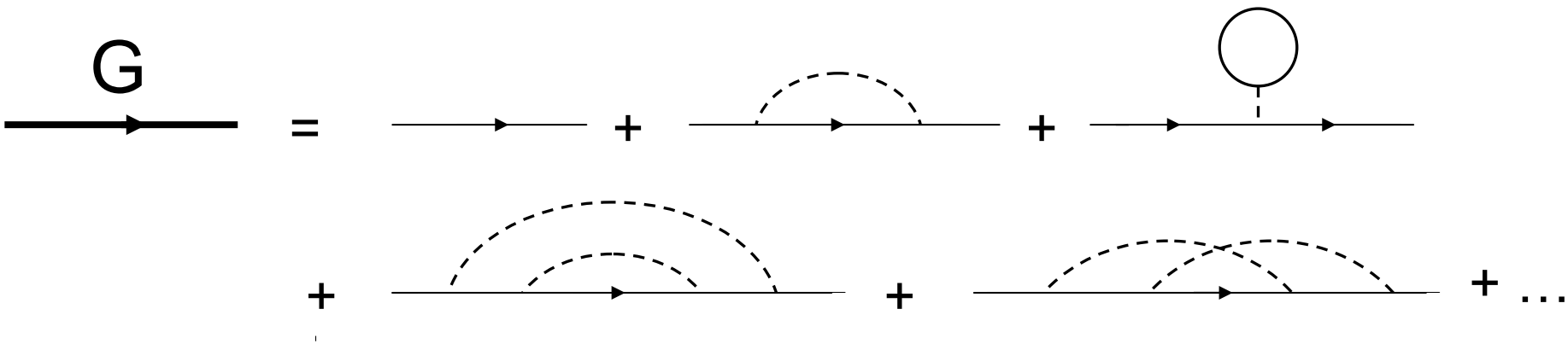
«Наивный» нуль-мерный предел

$$Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}(x_1,\ldots,x_M) = \int D\varphi\, \varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_2}(x_2)\ldots\varphi_{\alpha_M}(x_M)\exp\left(-S\{\varphi\}\right)$$

$$S\{\varphi\} = \int d^d x \left\{ \tfrac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \tfrac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + \tfrac{1}{8}u\varphi^4 \right\}$$

$$u = g_0\Lambda^{\varepsilon}\ , \qquad \varepsilon = 4-d$$

$$Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M} = \frac{m_0^n}{(2\pi)^{n/2}}\int d^n\varphi\, \varphi_{\alpha_1}\ldots\varphi_{\alpha_M}\exp\left(-\tfrac{1}{2}m_0^2\varphi^2 - \tfrac{1}{8}u\varphi^4\right)$$



$$\int d^d p \;\; f(|\,p\,|) = f(0) \qquad\qquad (d=0)$$

$$\varphi(x) = \int d^d p \;\; \varphi_p \exp\{ipx\} = \varphi_0$$

Определение Z–фактора:

$$G_2^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2}$$

$$G_2(r) = \langle \varphi(x) \;\; \varphi(x+r) \rangle$$

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2 + \Sigma(p, m_0)} =$$

$$= \frac{1}{p^2 + m_0^2 + a_0(m_0) + a_2(m_0)p^2 + a_4(m_0)p^4 + \ldots} =$$

$$= \frac{Z}{p^2 + m^2 + O(p^4)}$$

В «наивном» нуль-мерном пределе полагаем

Z=1

Параметрическое представление для β-функции

$$g = 1 - \frac{n}{n+2}\frac{K_4 K_0}{K_2^2}$$

$$\beta(g) = -\frac{2n}{n+2}\frac{K_4 K_0}{K_2^2}\left[2 + \frac{\frac{K_6 K_0}{K_4 K_2} - 1}{1 - \frac{K_4 K_0}{K_2^2}}\right]$$

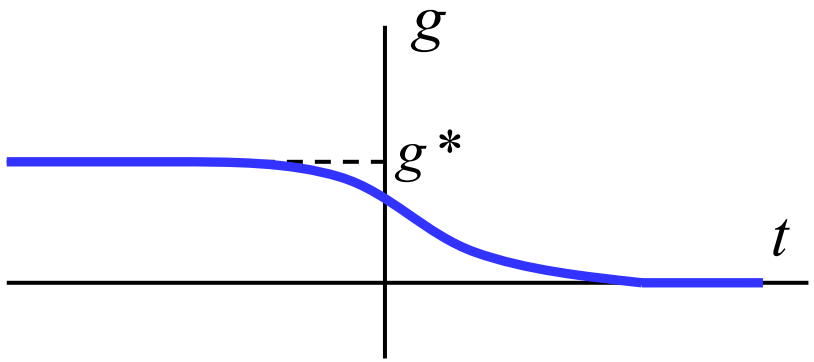
$$K_M(m_0, u) = \int_0^\infty \varphi^{M+n-1} d\varphi \, \exp\left(-\tfrac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 - \tfrac{1}{8} u \varphi^4\right)$$

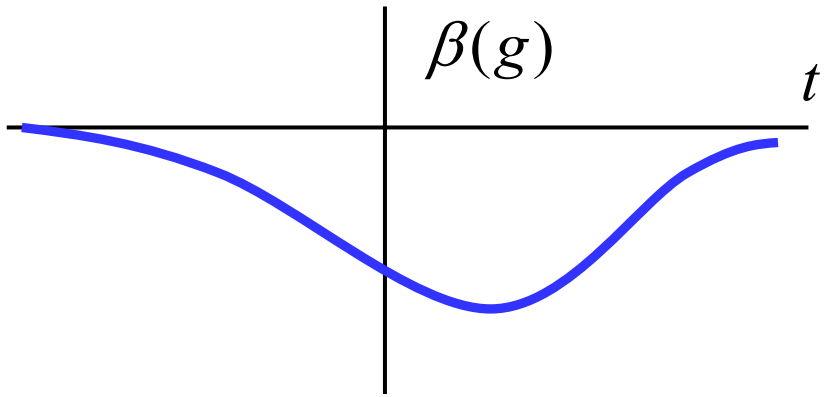
$$t = \left(\frac{2}{u}\right)^{1/2} m_0^2$$

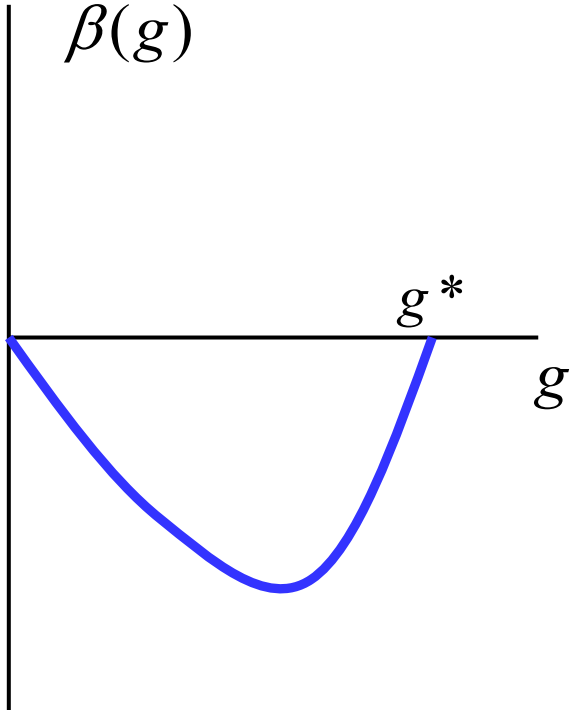
$$K_M(t) = \int_0^\infty \varphi^{M+n-1} d\varphi \, \exp\left(-t\varphi^2 - \varphi^4\right)$$

$$K_M(t) = \int_0^\infty \varphi^{M+n-1} d\varphi \, \exp\left(-t\varphi^2 - \varphi^4\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} t^{-(M+n)/2} \Gamma\left(\frac{M+n}{2}\right) \left[1 - \frac{(M+n)(M+n+2)}{4t^2} + \ldots\right], & t \to \infty \\ \frac{1}{4}\left[\Gamma\left(\frac{M+n}{4}\right) - t\Gamma\left(\frac{M+n+2}{4}\right) + \ldots\right], & t \to 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{t^2/4} \left(\frac{|t|}{2}\right)^{(M+n-2)/2} \left[1 + \frac{(M+n-2)(M+n-4)}{4t^2} + \ldots\right], & t \to -\infty \end{cases}$$







В перевальном приближении комплексная плоскость t делится на две части

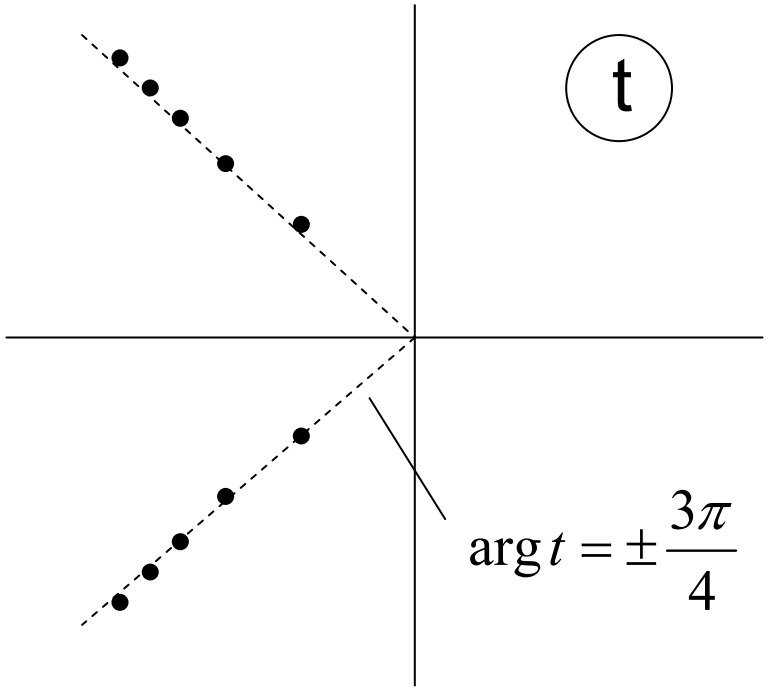
$$\varphi_{c1} = 0 \qquad\qquad \varphi_{c2} = \sqrt{-t/2}$$

$$g = 0, \quad \beta(g) = 0 \qquad\qquad g = g^*, \quad \beta(g) = 0$$

На их границе

$$K_M(t) = A\mathrm{e}^{i\psi} + A_1\mathrm{e}^{i\psi_1} = A\mathrm{e}^{i\psi}\left(1 + a\mathrm{e}^{i\Delta}\right)$$

интеграл может обратиться в нуль



$$g = 1 - \frac{n}{n+2}\frac{K_4 K_0}{K_2^2}$$

$$\beta(g) = -\frac{2n}{n+2}\frac{K_4 K_0}{K_2^2}\left[2 + \frac{\frac{K_6 K_0}{K_4 K_2} - 1}{1 - \frac{K_4 K_0}{K_2^2}}\right]$$

При $K_2 \to 0$ имеем

$$g \approx -\frac{n}{n+2}\frac{K_4 K_0}{K_2^2}\,, \qquad \beta(g) \approx -\frac{4n}{n+2}\frac{K_4 K_0}{K_2^2}$$

и параметрическое представление разрешается:

$$\boxed{\beta(g) = 4g\,, \qquad g \to \infty}$$

Нули интегралов $K_M(t)$

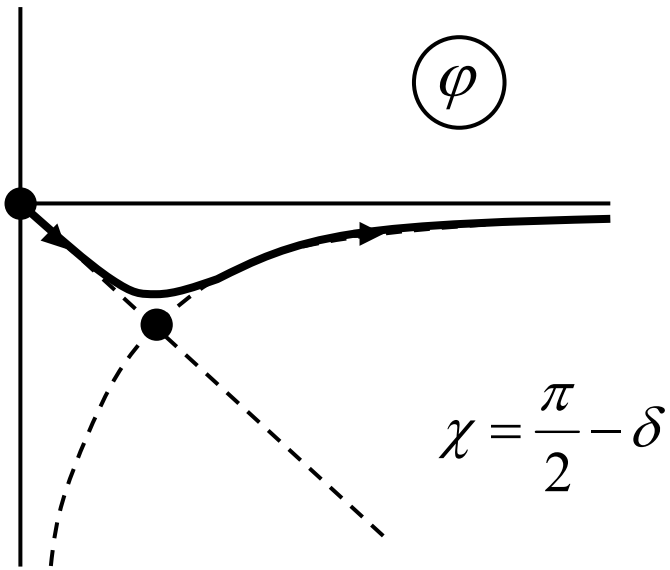
Значение действия в перевальных точках

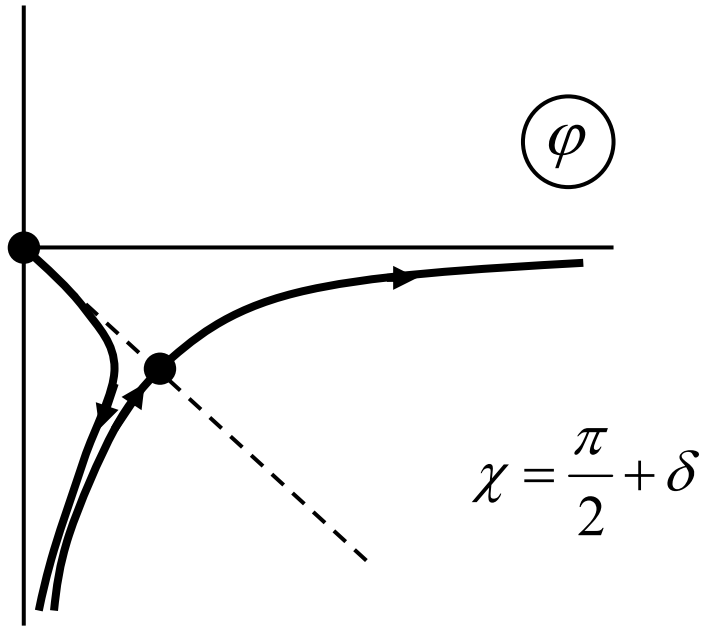
$$\varphi_{c1} = 0 \qquad S\{\varphi_{c1}\} = 0$$

$$\varphi_{c2} = \sqrt{-t/2} \qquad S\{\varphi_{c2}\} = t^2/4$$

Вклады двух перевалов сравнимы при

$$\mathrm{Re}\ t^2 = 0 \qquad m.e. \qquad \chi = \arg t = \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\pi}{4}$$





Полагая $t = \rho\ e^{i\chi}, \qquad \rho >> 1, \qquad \chi = \frac{3\pi}{4} + \delta, \qquad \delta << 1$

имеем для вклада двух перевалов

$$K_0(t) = \rho^{-n/2} \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}n} \left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}n-i\frac{1}{4}\rho^2}\ \rho^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\rho^2\delta} \right]$$

Выбирая δ(ρ) из условия

$$\rho^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\rho^2\delta} = \frac{2^{n/2-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \qquad \text{i.e.} \qquad \delta \sim \ln\rho/\rho^2$$

Получим

$$K_0(t) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \rho^{-n/2} \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}n} \left[1 + \mathrm{e}^{\frac{i}{4}(\pi+\pi n-\rho^2)}\right]$$

так что корни $K_0(t)$

$$\rho_s^2 = \pi(n+5) + 8\pi s\,, \qquad s-\text{integer}$$

Результаты для $K_M(t)$ получаются заменой $n \to n+M$

Использование специальных функций

$$F(g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \mathrm{e}^{-\phi^2 - g\phi^4} = \tfrac{1}{2}\, g^{-1/2}\, \mathrm{e}^{1/8g}\, \mathcal{K}_{1/4}\left(\tfrac{1}{8g}\right)$$

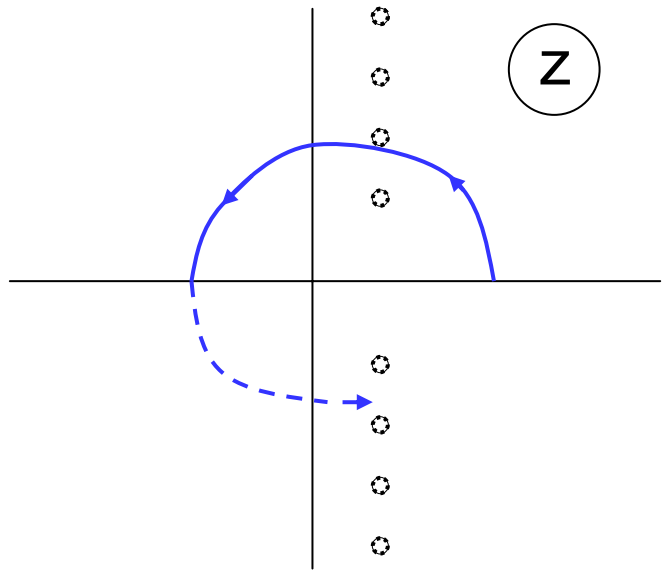
Д.И.Казаков,
ТМФ **46**, 426 (1981)

$$4g^2 F'' + (8g+1)F' + \tfrac{3}{4}F = 0$$

$$K_0(t) = \int\limits_{0}^{\infty} d\phi\, \mathrm{e}^{-t\phi^2 - \phi^4} = \tfrac{1}{4}\, t^{1/2}\, \mathrm{e}^{t^2/8}\, \mathcal{K}_{1/4}\left(\tfrac{t^2}{8}\right)$$

Нули функции Мак-Дональда $\mathcal{K}_\nu(z)$
при больших z

$$z_s = -\tfrac{1}{2}\ln(2\cos\pi\nu) + \mathrm{e}^{\pm 3\pi i/2}\left(\tfrac{3\pi}{4} + \pi s\right)\ ,$$



Связь с функцией Эйри

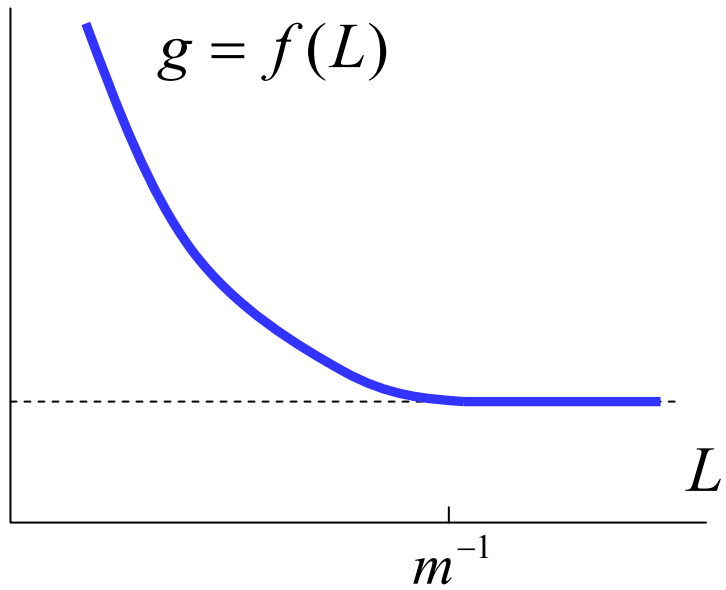
$$Ai(x) \sim \mathcal{K}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{2/3}\right) \text{ или } \mathcal{K}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}t\mathrm{e}^{\pm 3\pi i/2}\right) \sim Ai(-t^{2/3})$$

Выводы:

Области $|t| >>1$ соответствует область $|g_0|<<1$

$$t = m_0^2 \left(\frac{2}{g_0 \Lambda^{-\varepsilon}} \right)^{1/2}$$

Пределу $g \to \infty$ для перенормированного взаимодействия соответствуют не большие, а комплексные g_0 , причем можно считать $|g_0|<<1$



$$g_{obs} = f(m^{-1})$$

$$g_0 = f(\Lambda^{-1})$$

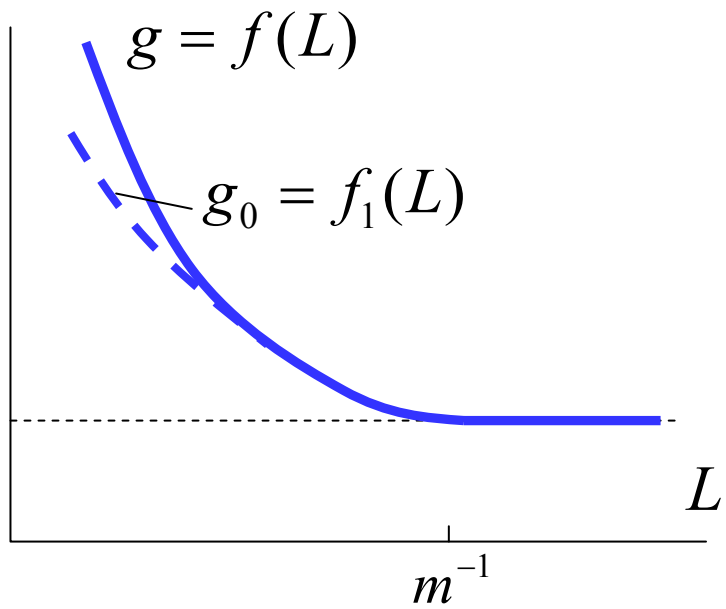
$$g(\mu) = f(\mu^{-1})$$

Выводы:

Области $|t| >>1$ соответствует область $|g_0|<<1$

$$t = m_0^2 \left(\frac{2}{g_0 \Lambda^{-\varepsilon}} \right)^{1/2}$$

Пределу $g \to \infty$ для перенормированного взаимодействия соответствуют не большие, а комплексные g_0 , причем можно считать $|g_0|<<1$



$$g_{obs} \approx f(m^{-1})$$

$$g_0 \approx f(\Lambda^{-1})$$

$$g(\mu) \approx f(\mu^{-1})$$

Общий d-мерный случай

$$Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}(x_1,\ldots,x_M) = \int D\varphi\, \varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_2}(x_2)\ldots\varphi_{\alpha_M}(x_M)\exp\left(-S\{\varphi\}\right)$$

$$Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}(p_1,\ldots,p_M) = \sum_{x_1,\ldots,x_M} Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}(x_1,\ldots,x_M)\mathrm{e}^{ip_1x_1+\ldots+ip_Mx_M}$$

$$Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}\{p_i\} = K_M\{p_i\}\ I_{\alpha_1\ldots\alpha_M}\ N\delta_{p_1+\ldots+p_M}$$

где $I_{\alpha_1\ldots\alpha_M}$ есть сумма членов вида $\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}\ldots$ со всевозможными спариваниями

$$K_2(p) = K_2 - \tilde{K}_2 p^2 + \ldots$$

Параметрическое представление

$$g = -\left(\frac{K_2}{\tilde{K}_2}\right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2}$$

$$\beta(g) = \left(\frac{K_2}{\tilde{K}_2}\right)^{d/2} \left\{ -d\frac{K_4 K_0}{K_2^2} + 2\frac{(K_4' K_0 + K_4 K_0')K_2 - 2K_4 K_0 K_2'}{K_2^2} \frac{\tilde{K}_2}{K_2\tilde{K}_2' - K_2'\tilde{K}_2} \right\}$$

$$\eta(g) = -\frac{2K_2\tilde{K}_2}{K_2\tilde{K}_2' - K_2'\tilde{K}_2} \left[2\frac{K_2'}{K_2} - \frac{K_0'}{K_0} - \frac{\tilde{K}_2'}{\tilde{K}_2} \right]$$

$$\eta_2(g) = \frac{2K_2\tilde{K}_2}{K_2\tilde{K}_2' - K_2'\tilde{K}_2} \left\{ \frac{K_2'\tilde{K}_2' + K_2\tilde{K}_2'' - K_2''\tilde{K}_2 - K_2'\tilde{K}_2'}{K_2\tilde{K}_2' - K_2'\tilde{K}_2} - 2\frac{\tilde{K}_2'}{\tilde{K}_2} \right\}$$

При $\tilde{K}_2 \to 0$ имеем

$$g = -\left(\frac{K_2}{\tilde{K}_2}\right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2} \qquad \beta(g) = -d\left(\frac{K_2}{\tilde{K}_2}\right)^{d/2} \frac{K_4 K_0}{K_2^2}$$

$$\eta(g) \to 2\,, \qquad \eta_2(g) \to -4$$

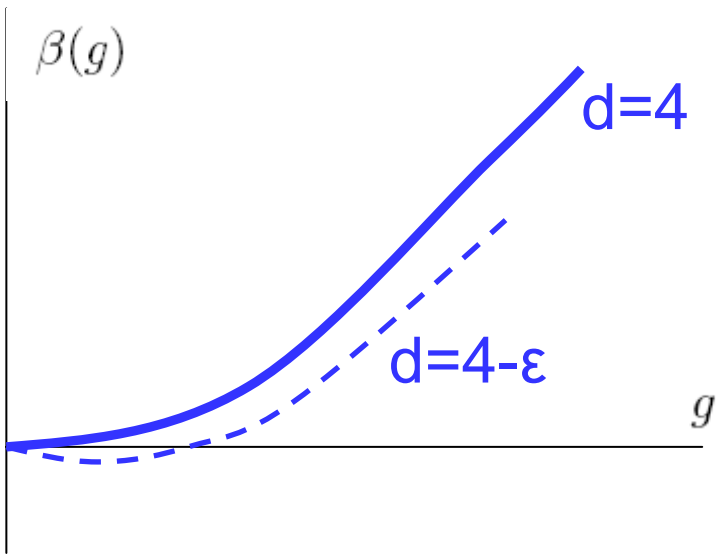
и параметрическое представление разрешается в виде

$$\boxed{\beta(g) = dg\,, \qquad \eta(g) = 2\,, \qquad \eta_2(g) = -4 \qquad (g \to \infty)}$$

При $K_2 \to 0$ предел $g \to \infty$ достигается только для $d < 4$:

$$\beta(g) = (d-4)g\,,$$

$$\eta(g) = 4\,, \qquad \eta_2(g) \to 0 \qquad (g \to \infty)$$



Точный результат для 2D модели Изинга

β(g)=2g

G. Jug, B.N. Shalaev, J.Phys. A **32**, 7249 (1999)

Нули функциональных интегралов

Инстантонный вклад

$$\left[Z^{(M)}_{\alpha_1\ldots\alpha_M}(p_1,\ldots,p_M)\right]^{inst} = ic_M(-g_0)^{-(M+r)/2}\mathrm{e}^{-S_0/g_0}\langle\phi_c\rangle_{p_1}\ldots\langle\phi_c\rangle_{p_M}\, I_{\alpha_1\ldots\alpha_M}$$

Вклад двух перевалов при M=0,2,…

$$Z_0 = 1 + ic_0(-g_0)^{-r/2}\mathrm{e}^{-S_0/g_0}\,,$$

$$Z^{(2)}_{\alpha\beta}(p,p') = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{p^2+m_0^2} + ic_2(-g_0)^{-(r+2)/2}\mathrm{e}^{-S_0/g_0}\langle\phi_c\rangle^2_p\,\delta_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{etc.}$$

Полагая

$$t^2 = -S_0/g_0$$

получим выражения, аналогичные d=0

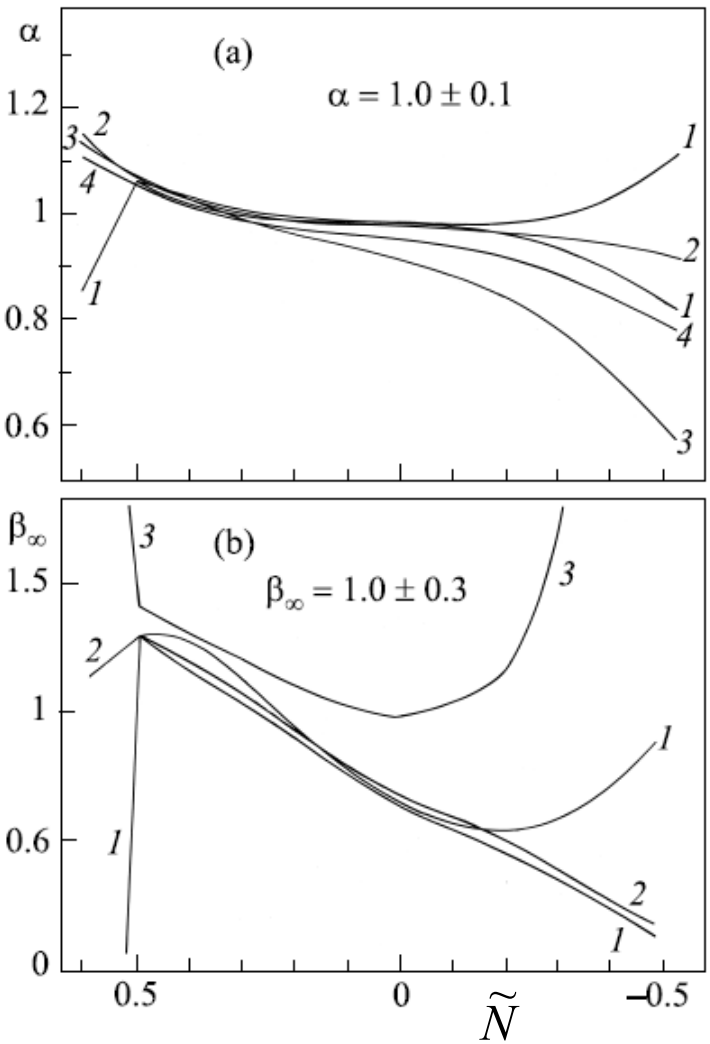
Точная асимптотика

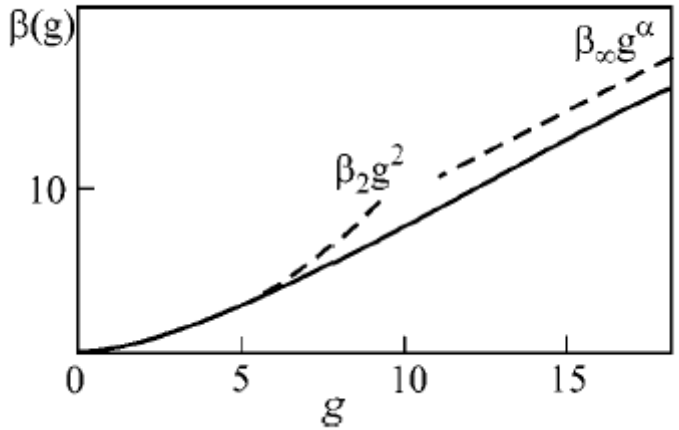
для β-функции в КЭД

Попытка восстановления β-функции

Суслов И М, Письма в ЖЭТФ **74**, 211 (2001).

$$\beta(g) = \beta_\infty \, g^\alpha \qquad (g \to \infty)$$





Из спектральных представлений:

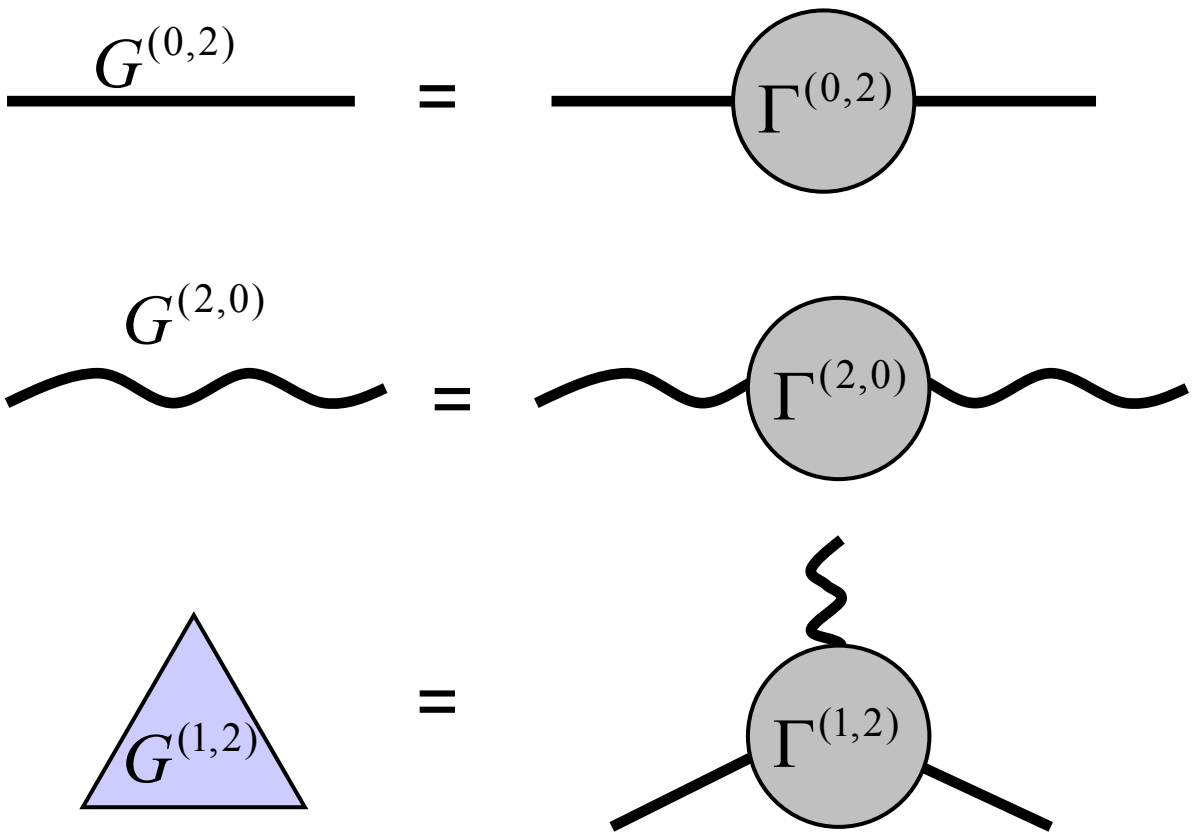
$$0 \le \beta(g) < g$$

N. V. Krasnikov, Nucl. Phys. **B192**, 497 (1981);
H. Yamagishi, Phys. Rev. **D25**, 464 (1982).

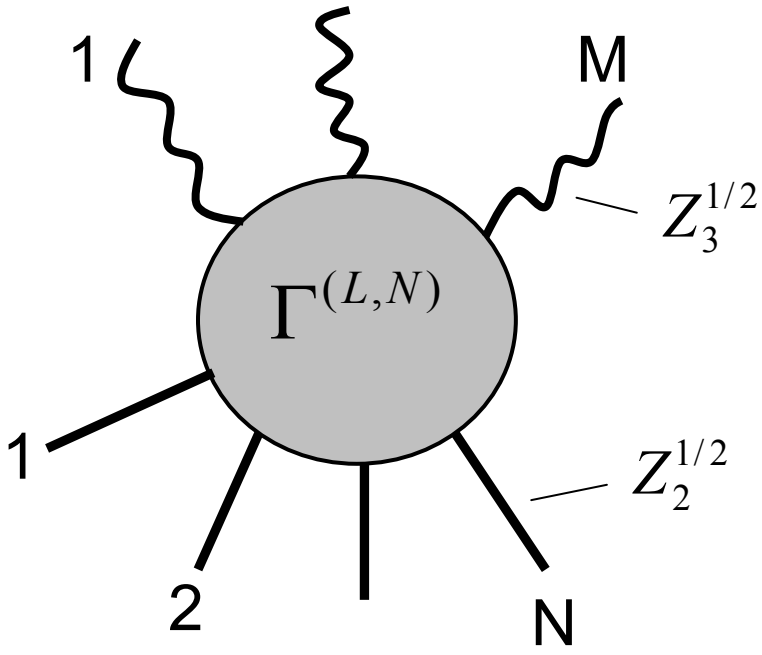
$$K_{M,2N} = \int DAD\bar{\psi}D\psi\, A_{\mu_1}(x_1)\ldots A_{\mu_M}(x_M)\,\psi(y_1)\bar{\psi}(z_1)\ldots\psi(y_N)\bar{\psi}(z_N)\exp\left(-S\{A,\psi,\bar{\psi}\}\right)$$

$$G^{(M,N)} = \frac{K_{MN}}{K_{00}}$$

$$S\{A,\psi,\bar{\psi}\} = \int d^4x\left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0 + e_0 A\!\!\!/)\psi\right]$$



Мультипликативная перенормируемость



$$\Gamma^{(M,N)}(q_i, p_i; e_0, m_0, \Lambda) = Z_3^{-M/2} Z_2^{-N/2} \Gamma_R^{(M,N)}(q_i, p_i; e, m)$$

Условия ренормировки:

$$\Gamma_R^{(0,2)}(p)\Big|_{p\to 0} = \not{p} - m\,,$$

$$\Gamma_R^{(2,0)}(q)\Big|_{q\to 0} = q^2\,,$$

$$\Gamma_R^{(1,2)}(q,p,p')\Big|_{q,p,p'\to 0} = e$$

Связь с затравочными величинами:

$$Z_2 = \left(\frac{\partial}{\partial \not{p}}\,\Gamma^{(0,2)}(p;e_0,m_0,\Lambda)\Big|_{p=0}\right)^{-1}$$

$$Z_3 = \left(\frac{\partial}{\partial q^2}\,\Gamma^{(2,0)}(q;e_0,m_0,\Lambda)\Big|_{q=0}\right)^{-1}$$

$$m = -Z_2\,\Gamma^{(0,2)}(p;g_0,m_0,\Lambda)\Big|_{p=0}$$

$$e = Z_2 Z_3^{1/2}\,\Gamma^{(1,2)}(q,p,p';e_0,m_0,\Lambda)\Big|_{q,p,p'=0}$$

Определение β-функции:

$$\beta(g) = \left.\frac{dg}{d\ln m^2}\right|_{e_0,\Lambda=const}$$

$$\Gamma^{(0,2)}(p) = \frac{K_{00}}{K_{02}(p)}\,, \qquad \Gamma^{(2,0)}(q) = \frac{K_{00}}{K_{20}(q)}\,, \qquad \Gamma^{(1,2)} = \frac{K_{12}K_{00}^2}{K_{02}^2 K_{20}}$$

$$K_{02}(p) = K_{02} + \tilde{K}_{02}\not{p}\,, \qquad K_{20}(q) = K_{20} + \tilde{K}_{20}q^2$$

$$Z_2 = -\frac{K_{02}^2}{K_{00}\tilde{K}_{02}}\,, \qquad Z_3 = -\frac{K_{20}^2}{K_{00}\tilde{K}_{20}}\,, \qquad m = \frac{K_{02}}{\tilde{K}_{02}}\,, \qquad g = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde{K}_{02}^2\tilde{K}_{20}}$$

$$\beta(g) = \frac{m}{2}\left(-\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde{K}_{02}^2\tilde{K}_{20}}\right)'_{m_0}\frac{dm_0}{dm}$$

$$\frac{dm}{dm_0} = \left(\frac{K_{02}}{\tilde{K}_{02}}\right)' = \frac{K'_{02}\tilde{K}_{02} - K_{02}\tilde{K}'_{02}}{\tilde{K}_{02}^2}$$

Параметрическое представление для β-функции:

$$g = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde{K}_{02}^2 \tilde{K}_{20}}\,,$$

(m_0, e_0, Λ)

$$\beta(g) = \frac{1}{2}\frac{K_{02}\tilde{K}_{02}}{K_{02}\tilde{K}'_{02} - K'_{02}\tilde{K}_{02}}\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde{K}_{02}^2 \tilde{K}_{20}}\left\{\frac{2\,K'_{12}}{K_{12}} + \frac{K'_{00}}{K_{00}} - \frac{2\,\tilde{K}'_{02}}{\tilde{K}_{02}} - \frac{\tilde{K}'_{20}}{\tilde{K}_{20}}\right\}$$

При $\tilde{K}_{02} \to 0$ имеем

$$g = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde{K}_{02}^2 \tilde{K}_{20}}\,, \qquad \beta(g) = -\frac{K_{12}^2 K_{00}}{\tilde{K}_{02}^2 \tilde{K}_{20}}$$

и параметрическое представление разрешается

$$\boxed{\beta(g) = g\,, \qquad g \to \infty}$$

При $\tilde{K}_{20} \to 0$ имеем

$$g \propto \frac{1}{\tilde{K}_{20}}\,, \qquad \beta(g) \propto \frac{1}{\tilde{K}_{20}^2}\,,$$

откуда

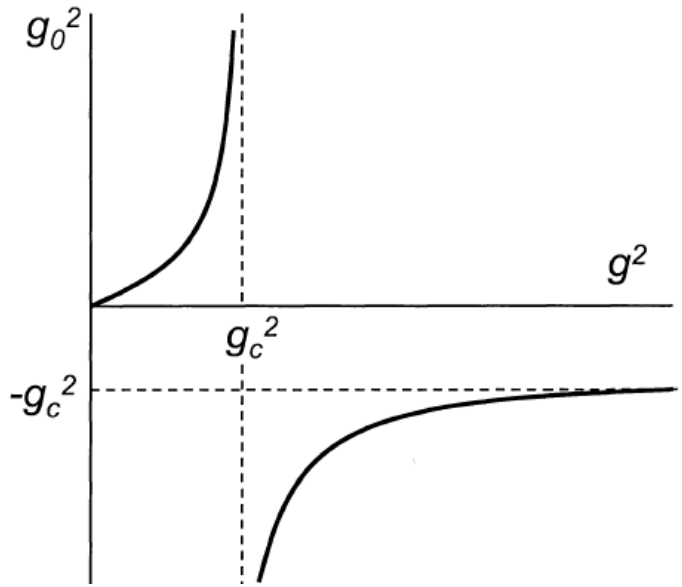
$$\beta(g) \propto g^2\,, \qquad g \to \infty\,.$$

Комплексные g_0: история

T. D. Lee, Phys. Rev. **95**, 1329 (1954).

Для модели Ли

$$g^2 = \frac{g_0^2}{1 + g_0^2/g_c^2}$$



Ср. с формулой ЛАХ для КЭД

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \beta_2 e_0^2 \ln \Lambda^2/m^2}$$

Согласно работе

G. Källen, W. Pauli, Mat.-Fyz. Medd. **30**, No.7 (1955).

модель Ли физически неудовлетворительна из-за наличия состояний с отрицательной нормой (“ghost states”)

S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory

G. Barton, Introduction to Advanced Field Theory

Современная ситуация

C. M. Bender, S. F. Brandt, J.-H. Chen, Q. Wang, Phys. Rev. D **71**, 025014 (2005).

Основная идея:

Аналитическое продолжение параметров гамильтониана в комплексную плоскость должно сопровождаться модификацией скалярного произведения

$$(f,g) = \int f^*(x) g(x) dx \longrightarrow (f,g)_G = (f, \hat{G} g)$$

так что $\hat{H}_B$ эрмитов относительно $(f,g)_G$.

При надлежащем выборе $\hat{G}$ модель Ли становится удовлетворительной

Аксиоматическая S-матрица Боголюбова

По формуле Дайсона

$$\hat{S} = T\exp\left\{-i\int H(t)\ dt\right\} = T\exp\{iA_B\}$$

и эрмитовость затравочного гамильтониана H выглядит принципиальной для унитарности теории.

Согласно Боголюбову, наиболее общий вид S-матрицы,

$$\hat{S} = T\exp\{iA\}\ , \qquad A = A_B + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$

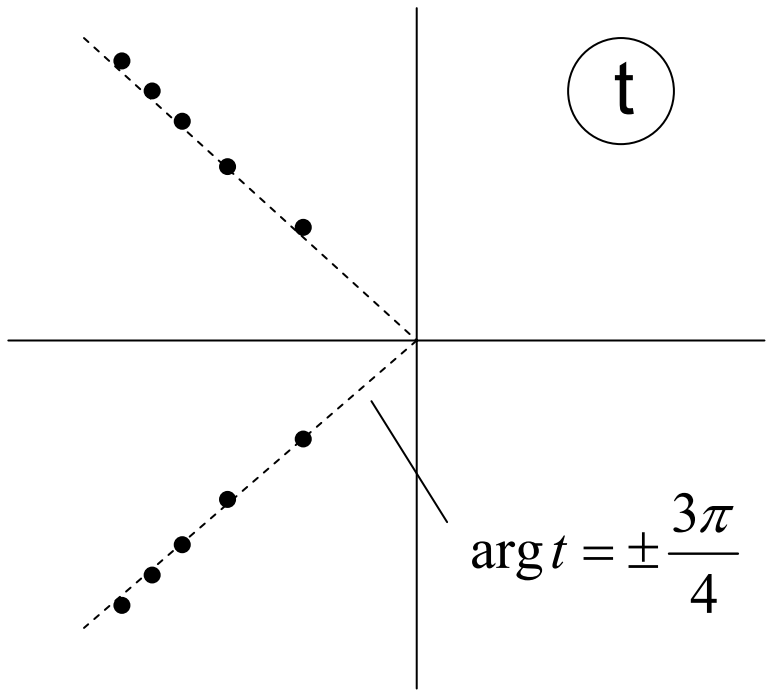
где C_i – «постоянные интегрирования».

Асимптотика β-функции в теории φ^4 : схема без комплексных параметров

Параметрическое представление для β-функции

$$g = f(t)\,, \qquad \beta(g) = f_1(t)$$

где $t=(1/g_0)^{1/2}$, g_0 – затравочный заряд

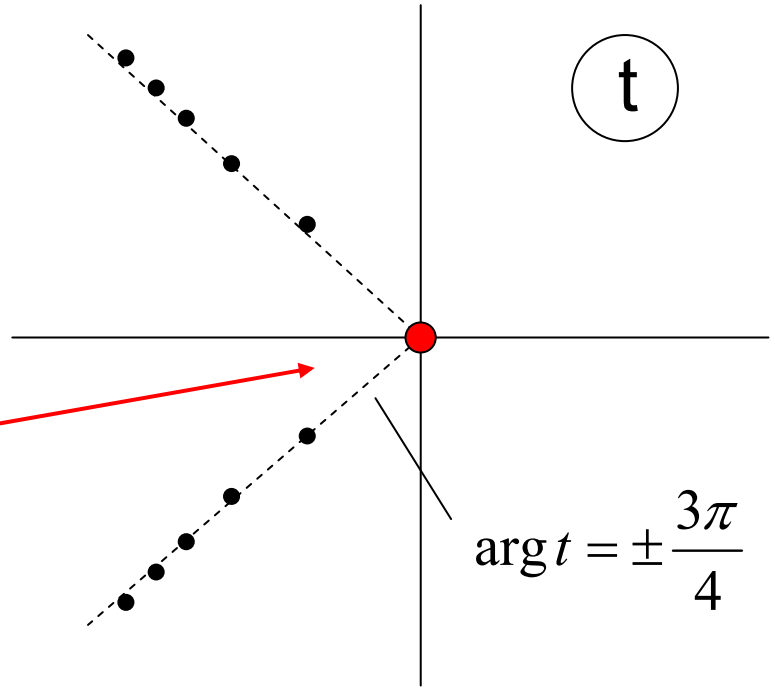


Параметрическое представление для β-функции

$$g = f(t)\,, \qquad \beta(g) = f_1(t)$$

где $t=(1/g_0)^{1/2}$, g_0 – затравочный заряд

Имеется сингулярность при t=0 !



Решеточное представление

$$S\{\varphi\} = \frac{1}{2}a^d \sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'} + \frac{1}{2}m_0^2 a^d \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{4}g_0 a^{2d-4} \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi \left(g_0 a^{2d-4}/4\right)^{-1/4} \qquad t = (1/g_0)^{1/2}$$

$$Z_M\{\mathbf{x}_i\} = (2t)^{\frac{N+M}{2}} \int \left(\prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}}\right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \ldots \varphi_{\mathbf{x}_M} \exp\left\{-t\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'} - tm_0^2 \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4\right\}$$

$$[\nabla\varphi(x)]^2 = \varphi(x)\hat{p}^2\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x)\epsilon(\hat{p})\varphi(x) = \sum_{\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'}$$

где $\hat{p}$ — оператор импульса, $\epsilon(p)$ — затравочный спектр

$$\epsilon(p) = \sum_{\mathbf{x}} J_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \epsilon(0) + p^2 + O(p^4)$$

Сингулярности при $\mathcal{N} \to \infty$ возникают в точках фазовых переходов, когда

$$m^2 = 0 \ , \qquad \xi = \infty$$

и реально требуется термодинамический предел $\mathcal{L} \to \infty$

При $m^2 \neq 0$ достаточно обеспечить условие

$$\mathcal{L} \gg \xi \gg a$$

чтобы функциональный интеграл хорошо аппроксимировался своим конечномерным аналогом

Сингулярность при t=0

$$Z_2\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\} = (2t)^{\frac{N+2}{2}} \int \left(\prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}}\right) \varphi_{\mathbf{x}_1}\varphi_{\mathbf{x}_2} \exp\left\{-t\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'} - tm_0^2\sum_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}}^4\right\}$$

В нулевом по t приближении имеем

$$Z_2(\mathbf{x},\mathbf{x}') \sim \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$$

и фурье-образ не имеет импульсной зависимости. Ввиду определения

$$K_2(p) = K_2 - \tilde{K}_2 p^2 + \ldots$$

имеем

$$\frac{K_2}{\tilde{K}_2} \sim \frac{1}{t}$$

Решеточные разложения

При разложении интеграла по градиентному члену

$$Z_M\{\mathbf{x}_i\} = (2t)^{\frac{N+M}{2}} \int \left(\prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}}\right) \varphi_{\mathbf{x}_1} \ldots \varphi_{\mathbf{x}_M} \exp\left\{-t \sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} - t m_0^2 \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^4\right\}$$

возникают средние от произведения $\varphi_{\mathbf{x}_1}\varphi_{\mathbf{x}_2}\ldots$ по распределению

$$P\{\varphi\} \sim \prod_{\mathbf{x}} \exp\left\{-t m_0^2 \varphi_{\mathbf{x}}^2 - \varphi_{\mathbf{x}}^4\right\}$$

которые расписываются по схеме

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{\mathbf{x}_1}\varphi_{\mathbf{x}_2}\varphi_{\mathbf{x}_3}\varphi_{\mathbf{x}_4}\rangle &= \langle\varphi_{\mathbf{x}_1}^2\rangle\langle\varphi_{\mathbf{x}_3}^2\rangle\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}\delta_{\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4}(1-\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}) + \langle\varphi_{\mathbf{x}_1}^2\rangle\langle\varphi_{\mathbf{x}_2}^2\rangle\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}\delta_{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4}(1-\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}) + \\
&+ \langle\varphi_{\mathbf{x}_1}^2\rangle\langle\varphi_{\mathbf{x}_2}^2\rangle\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4}\delta_{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3}(1-\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}) + \langle\varphi_{\mathbf{x}_1}^4\rangle\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4} = \\
&= \langle\varphi^2\rangle\langle\varphi^2\rangle\left(\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}\delta_{\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4} + \delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}\delta_{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4} + \delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4}\delta_{\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3}\right) + \left[\langle\varphi^4\rangle - 3\langle\varphi^2\rangle\langle\varphi^2\rangle\right]\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3}\delta_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4}\,,
\end{aligned}$$

где

$$\langle\varphi^{2k}\rangle = \frac{I_{2k}}{I_0}\,, \qquad I_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi\, \varphi^{2k} \exp\left\{-t m_0^2 \varphi^2 - \varphi^4\right\}$$

Параметрическое представление принимает вид

$$g = \left(\frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2}\right)^{d/2}\left(1 - \frac{n}{n+2}\frac{I_4 I_0}{I_2^2}\right),$$

$$\beta(g) = \left(\frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2}\right)^{d/2}\left\{d + 2\,\frac{\dfrac{I_6 I_2}{I_0^2} - \dfrac{2I_4^2}{I_0^2} + \dfrac{I_2^2 I_4}{I_0^3}}{\left(\dfrac{I_4}{I_0} - \dfrac{n+2}{n}\dfrac{I_2^2}{I_0^2}\right)\left(\dfrac{I_2^2}{I_0^2} - \dfrac{I_4}{I_0}\right)}\right\},$$

$$\eta_2(g) = 2\,\frac{\dfrac{I_6 I_2}{I_0^2} - \dfrac{2I_4^2}{I_0^2} + \dfrac{I_2^2 I_4}{I_0^3}}{\left(\dfrac{I_2^2}{I_0^2} - \dfrac{I_4}{I_0}\right)^2}, \qquad \eta(g) = 0\,.$$

где в n–компонентном случае

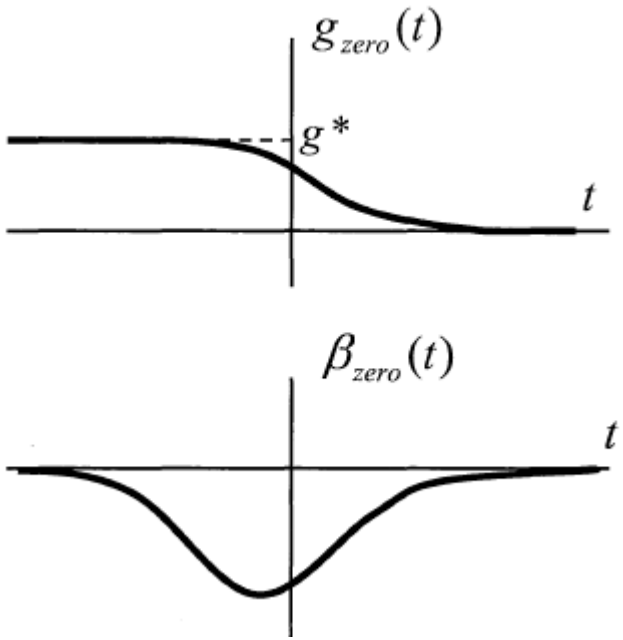
$$I_{2k} = \int_0^\infty d\varphi\,\varphi^{n-1+2k}\exp\left\{-tm_0^2\varphi^2 - \varphi^4\right\}$$

В компактной форме

$$g = \left(\frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2}\right)^{d/2} g_{zero}(tm_0^2)\,,$$

$$\beta(g) = \left(\frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2}\right)^{d/2} \left[d g_{zero}(tm_0^2) + \beta_{zero}(tm_0^2)\right]\,,$$

$$\eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(tm_0^2)}{g^* - g_{zero}(tm_0^2)}\,, \qquad \eta(g) = 0$$



Разрешая в пределе $t \to 0$

$$\beta(g) = \left[d + \frac{\beta_{zero}(0)}{g_{zero}(0)}\right] g\,, \qquad \eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(0)}{g^* - g_{zero}(0)}\,, \qquad \eta(g) = 0 \qquad (g \to \infty)$$

Проблема правильного предельного перехода

Связь затравочной и перенормированной массы дается рядом теории возмущений

$$m^2 = m_0^2 + u\,\frac{n+2}{2}\int \frac{d^d k}{k^2+m^2} + \ldots$$

структура которого

$$m^2 = m_0^2 + \Lambda^2\left(A_1 g_0 + A_2 g_0^2 + \ldots\right)$$

Обычно полагают

$$m_0^2 = m_c^2 + \tau\,, \qquad m_c^2 = -A_1 g_0 \Lambda^2$$

Поэтому предел $\Lambda \to \infty$ берется при условии

$$m^2 = const\,, \qquad -m_0^2 \sim g_0 \Lambda^2 \to \infty$$

По аналогии такое же условие стали принимать для предела $g_0 \to \infty$ (т.н. «изинговский предел»)

Очевидные дефекты:

(1) Производится незаконная экстраполяция зависимости $m_c^2 \propto g_0$ в область сильной связи;

(2) Уравнение $m^2 = 0$ в области сильной связи может вообще не иметь решений

(3) Условие постоянства перенормированной массы не является физически мотивированным

Интерпретация функциональных интегралов

В общих теоремах предполагается взятым предел $\Lambda \to \infty$, что физически означает

$$m^2 \ll \Lambda^2$$

т.к. в силу

$$\frac{m}{\Lambda} \sim \frac{a}{\xi}$$

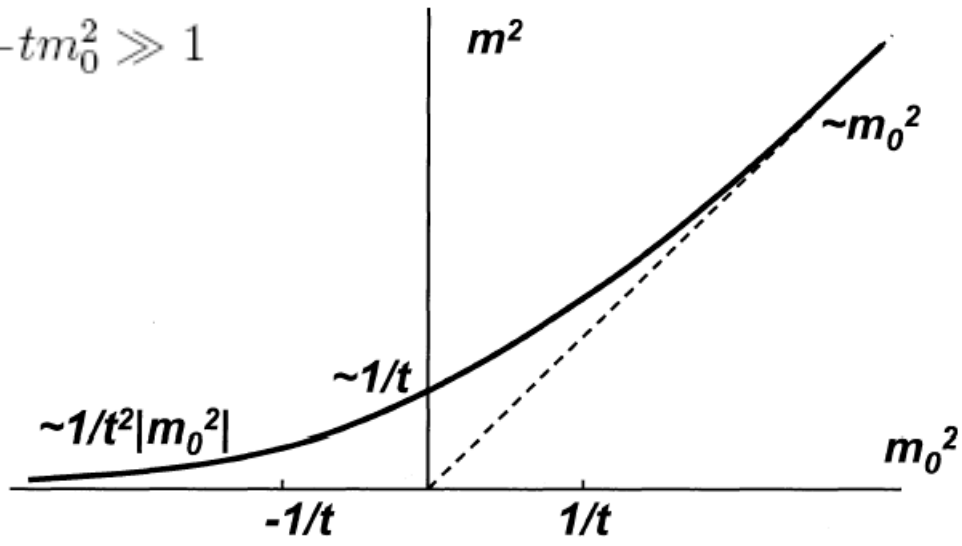
это эквивалентно условию

$$\xi \gg a$$

для корреляционного радиуса ξ.

Связь перенормированной массы с затравочной в области сильной связи

$$m^2 = \frac{K_2}{\tilde{K}_2} = \frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2} = \begin{cases} m_0^2\,, & tm_0^2 \gg 1 \\ \sim 1/t\,, & |tm_0^2| \lesssim 1 \\ \sim 1/t^2|m_0^2|\,, & -tm_0^2 \gg 1 \end{cases}$$



Для выполнения условия $m^2 << 1$ необходимо принять

$$tm_0^2 = -\kappa\,, \qquad \kappa \gg 1$$

Экспонента в функциональном интеграле

$$\exp\left\{-t\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'} - tm_0^2\sum_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}}^2 - \sum_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}}^4\right\}.$$

после замен

$$tm_0^2 = -\kappa\,, \qquad\qquad \varphi_{\mathbf{x}}^2 \to \kappa\varphi_{\mathbf{x}}^2/2$$

преобразуется к виду

$$\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\kappa\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'}\right\}\prod_{\mathbf{x}}\exp\left\{\tfrac{1}{4}\kappa^2\left(2\varphi_{\mathbf{x}}^2-\varphi_{\mathbf{x}}^4\right)\right\}$$

и ввиду локализации при $\varphi^2_x \approx 1$ может быть записана в виде

$$\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\kappa\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}\varphi_{\mathbf{x}}\varphi_{\mathbf{x}'}\right\}\prod_{\mathbf{x}} A\;\delta(\varphi_{\mathbf{x}}^2-1)$$

Функциональный интеграл принимает вид

$$Z_M\{\mathrm{x}_i\} = (t\kappa)^{\frac{N+M}{2}} \int \left(\prod_{\mathrm{x}} d\varphi_{\mathrm{x}}\right) \varphi_{\mathrm{x}_1} \ldots \varphi_{\mathrm{x}_M} \exp\left\{-\tfrac{1}{2} t\kappa \sum_{\mathrm{x},\mathrm{x}'} J_{\mathrm{x}-\mathrm{x}'} \varphi_{\mathrm{x}} \varphi_{\mathrm{x}'}\right\} \prod_{\mathrm{x}} \delta(\varphi_{\mathrm{x}}^2 - 1)$$

и зависит от одного параметра $t\kappa$, так что РГ функции зависят только от g.

При физической мотивации предельного перехода мы исходили из условий

$$t \ll 1\,, \qquad \kappa \gg 1\,, \qquad t\kappa \gg 1$$

но фактически преобразование верно при

$$t \ll 1\,, \qquad \kappa \gg 1\,, \qquad t\kappa \ - \ \text{произвольно}$$

Большие значения g достигаются в области $t\kappa \ll 1$
и предел сильной связи соответствует условиям

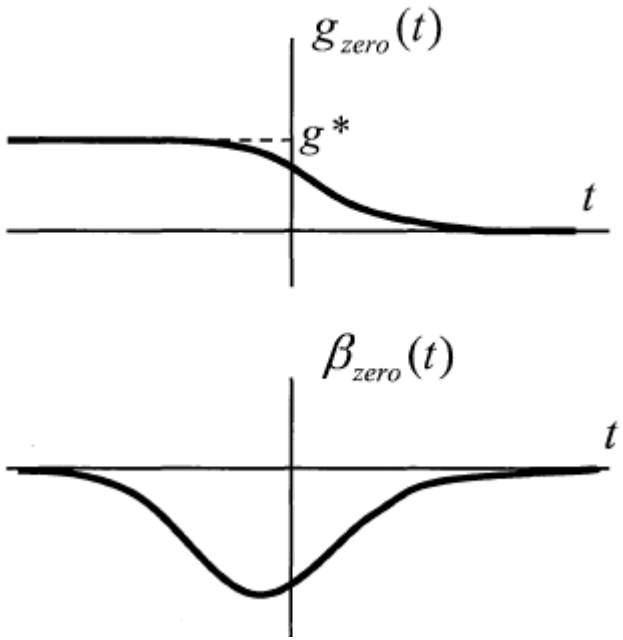
$$t \to 0\,, \qquad t m_0^2 \to -\infty\,, \qquad t m^2 \to 0\,, \qquad m^2 \to \infty$$

Параметрическое представление

$$g = \left(\frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2}\right)^{d/2} g_{zero}(tm_0^2)\,,$$

$$\beta(g) = \left(\frac{n}{2t}\frac{I_0}{I_2}\right)^{d/2} \left[d g_{zero}(tm_0^2) + \beta_{zero}(tm_0^2)\right]\,,$$

$$\eta_2(g) = \frac{\beta_{zero}(tm_0^2)}{g^* - g_{zero}(tm_0^2)}\,, \qquad \eta(g) = 0$$



при $tm_0^2=-\kappa$, $\kappa >> 1$ имеет вид

$$g = \left(\frac{n}{t\kappa}\right)^{d/2} g^*\,, \qquad \beta(g) = \left(\frac{n}{t\kappa}\right)^{d/2} d g^*\,, \qquad \eta_2(g) = \left.\frac{\beta_{zero}(-\kappa)}{g^* - g_{zero}(-\kappa)}\right|_{\kappa\to\infty} = -4$$

что дает результаты для асимптотик

$$\beta(g) = dg\,, \qquad \eta(g) = 0\,, \qquad \eta_2(g) = -4 \qquad (g \to \infty)\,.$$

Наблюдаемые величины

Наблюдаемые величины получаются в виде

$$A_{obs} = \Lambda^{d_A} f_A(t\kappa)$$

где d_A – физическая размерность величины A_{obs}.
С учетом аналогичных результатов для g и m

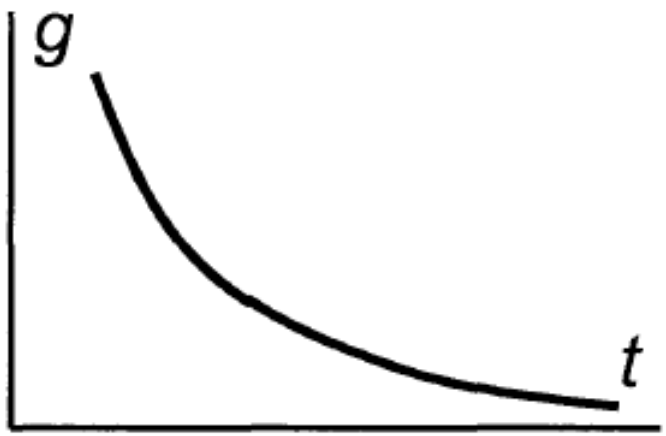
$$g = f_g(t\kappa)\,, \qquad m^2 = \Lambda^2 f_m(t\kappa)\,,$$

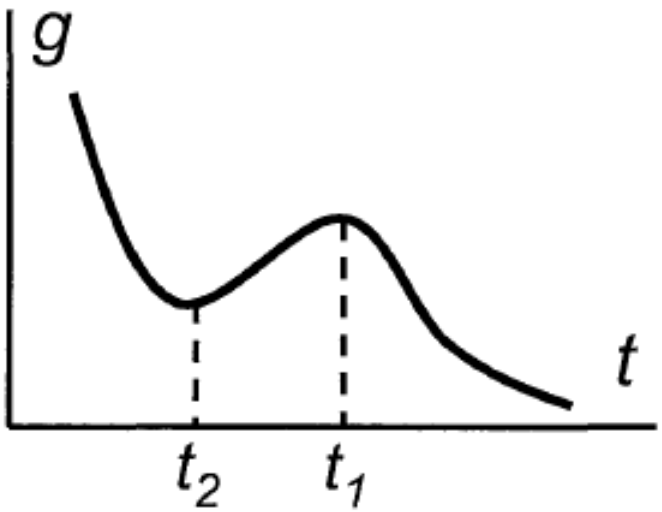
можно записать в виде, не содержащем затравочных параметров g_0, m_0, Λ

$$A_{obs} = m^{d_A} F(g)$$

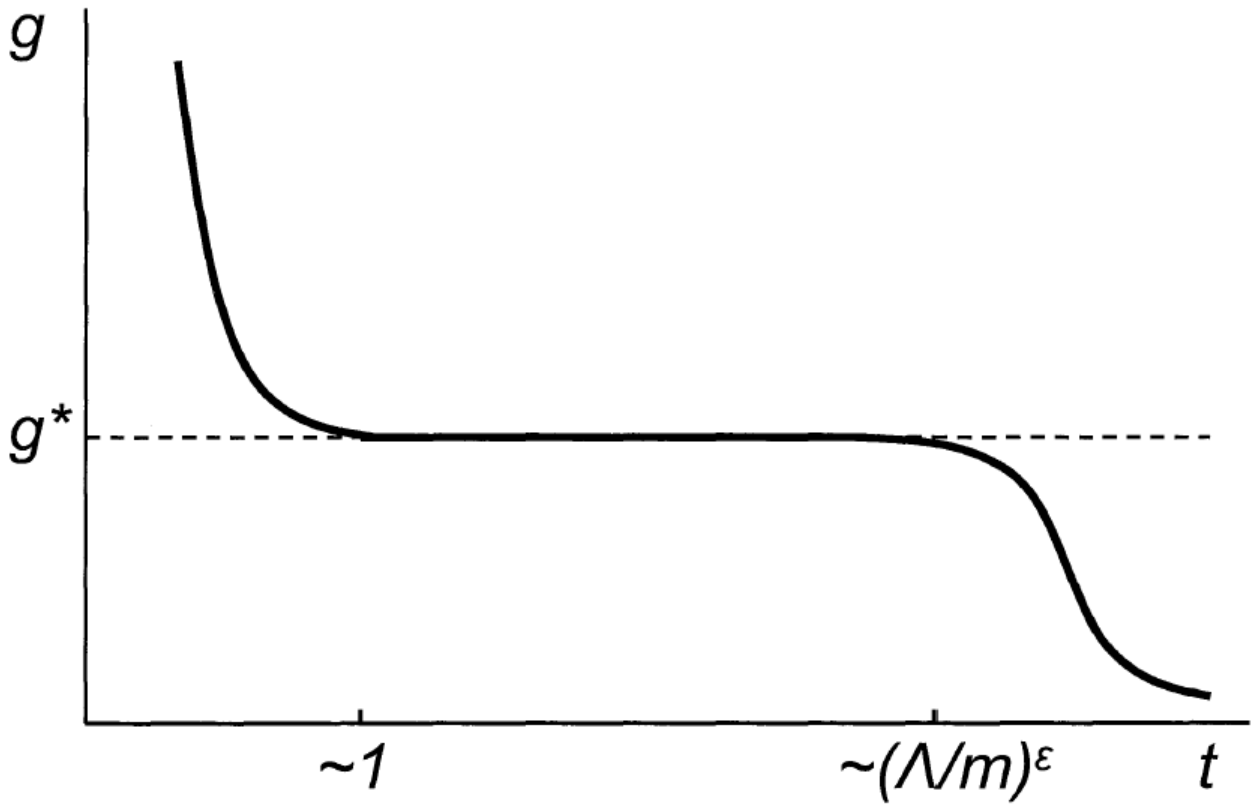
--- «теорема о перенормируемости» для области сильной связи

Имеется 2 основных сценария





Реальная ситуация близка к маргинальной



Ренормгрупповые функции теории φ^4 из высокотемпературных разложений

Параметрическое представление для β-функции

$$g = F(g_0, m_0, \Lambda)\,, \qquad \beta(g) = F_1(g_0, m_0, \Lambda)\,,$$

(g_0 и m_0 – затравочный заряд и масса, Λ – параметр обрезания по импульсу) при наложении условия

$$m \ll \Lambda \qquad \text{или} \qquad \xi \gg a$$

сводится к

$$g = F(\kappa)\,, \qquad \beta(g) = F_1(\kappa)$$

(κ – обратная температура) и сохраняется при более слабом условии

$$g_0 \gg 1\,, \qquad -g_0^{-1/2} m_0^2/\Lambda^2 \gg 1\,, \qquad -g_0^{-1} m_0^2/\Lambda^2 = \kappa$$

При усилении условия на затравочные параметры

$$g_0 \to \infty\,, \qquad -g_0^{-1/2} m_0^2/\Lambda^2 \to \infty\,, \qquad -g_0^{-1} m_0^2/\Lambda^2 = \kappa$$

представление

$$g = F(\kappa)\,, \qquad \beta(g) = F_1(\kappa)$$

можно считать определением β – функции при произвольных g.

Но даст ли это правильные результаты в области слабой связи ?

Высокотемпературные разложения строятся для величин

$$\chi_2 = \sum_{\mathbf{x}} \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{0}} \rangle^c, \qquad \mu_2 = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^2 \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{0}} \rangle^c, \qquad \chi_4 = \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{y}} \varphi_{\mathbf{z}} \varphi_{\mathbf{0}} \rangle^c,$$

связанных с введенными функциональными интегралами

$$\chi_2 \sim \frac{K_2}{K_0}$$

$$\mu_2 \sim \frac{\widetilde{K}_2}{K_0}$$

$$\chi_4 \sim \frac{K_4}{K_0}$$

Первые члены разложения при d=4, n=1

$$\chi_2 = 1 + 16\kappa + 224\kappa^2 + \ldots$$

$$\mu_2 = 16\kappa + 512\kappa^2 + 33920/3\kappa^3 + \ldots$$

$$\chi_4 = -2 - 128\kappa - 4672\kappa^2 - \ldots$$

Разложения до 14-го члена приведены в работе

M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B **300** 325 (1988).

$$\chi = \sum_{L=0}^{\infty} \chi^{(L)} \frac{(2\kappa)^L}{L\,!}$$

где $\chi^{(L)}$ – целые числа.

TABLE 5
Coefficients $\chi_1^{(L)}$ for $d = 4$, $\lambda = \infty$ and $1 \leqslant n \leqslant 4$

L	$n = 1$
0	1
1	8
2	112
3	2336
4	63808
5	2177408
6	88532992
7	4198893056
8	226756461568
9	13774782507008
10	927722457014272
11	68724458864869376
12	5545864378385072128
13	484804579241630302208
14	45594217495265300119552

TABLE 8
Coefficients $\mu_1^{(L)}$ for $d = 4$, $\lambda = \infty$ and $1 \leqslant n \leqslant 4$

L	$n = 1$
0	0
1	8
2	256
3	8480
4	323584
5	14219648
6	712769536
7	40231339520
8	2529742618624
9	175465112250368
10	13316649656713216
11	1097902932846018560
12	97741786751619825664
13	9345711964094187634688
14	955350654371934426628096

TABLE 11
Coefficients $\chi_4^{(L)}$ for $d = 4$, $\lambda = \infty$ and $1 \leqslant n \leqslant 4$

L	$n = 1$
0	−2
1	−64
2	−2336
3	−99328
4	−4840832
5	−267080704
6	−16467255296
7	−1123220758528
8	−83995566282752
9	−6835730843582464
10	−601493660302278656
11	−56912420061511548928
12	−5762378580637148905472
13	−621705383408527748890624
14	−71206666963479522492809216

Вводя функции $f_i(\kappa)$

$$\frac{K_2}{\tilde{K}_2} = 2d\,\frac{\chi_2}{\mu_2} \equiv \frac{1}{\kappa} f_0(\kappa)$$

$$\frac{K_2}{K_0} = 2\kappa\,\chi_2 \equiv \kappa f_2(\kappa)$$

$$\frac{K_4 K_0}{K_2^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\chi_4}{\chi_2^2} \equiv -f_4(\kappa)$$

получим

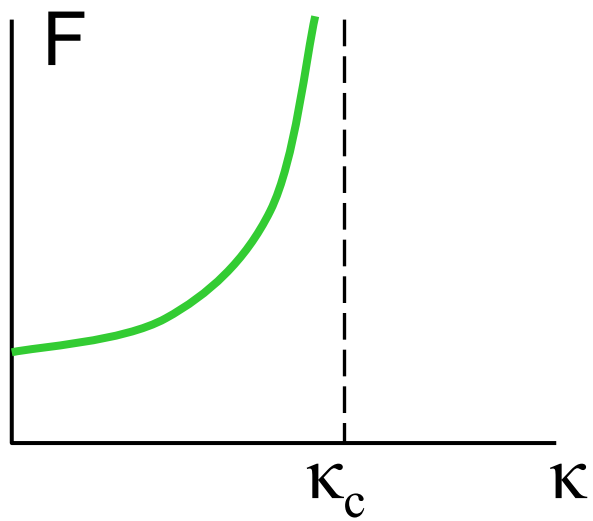
$$g = \left(\frac{f_0(\kappa)}{\kappa}\right)^{d/2} f_4(\kappa)\,,$$

$$\frac{\beta(g)}{g} = d - 2\kappa\,\frac{[\ln f_4(\kappa)]'}{1-\kappa\,[\ln f_0(\kappa)]'}\,,$$

$$\eta(g) = -2\kappa\,\frac{[\ln f_0(\kappa)\,f_2(\kappa)]'}{1-\kappa\,[\ln f_0(\kappa)]'}\,,$$

$$\eta_2(g) = -2\,\frac{(1+\kappa\,[\ln f_2(\kappa)]')^2 + 1 - \kappa^2\,[\ln f_2(\kappa)]''}{(1-\kappa\,[\ln f_0(\kappa)]')\;(1+\kappa\,[\ln f_2(\kappa)]')}$$

Общая стратегия



Пусть некоторая величина F имеет критическое поведение

$$F \propto (T - T_c)^{-\lambda} \propto (\kappa_c - \kappa)^{-\lambda}$$

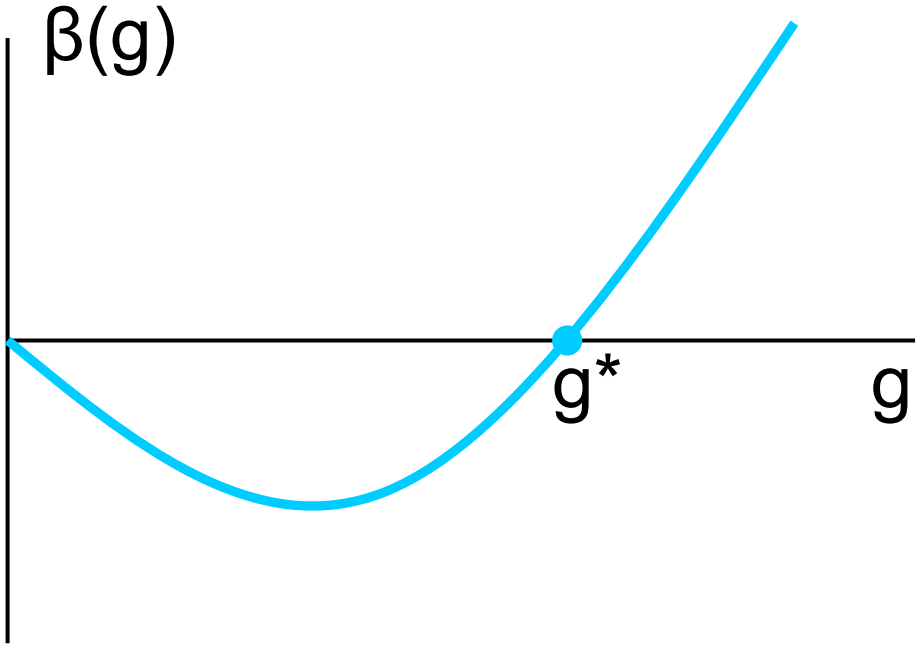
Тогда для логарифмической производной

$$(\ln F)' = \frac{F'}{F} \sim \frac{-\lambda}{\kappa - \kappa_c}$$

Положение полюса и вычет в нем определяется путем построения Паде-аппроксимант [M/N]

$$(\ln F)' = \frac{P_M(\kappa)}{Q_N(\kappa)} = \frac{p_0 + p_1\kappa + \ldots + p_M\kappa^M}{1 + q_1\kappa + \ldots + q_N\kappa^N}$$

Зная характер сингулярности при $\kappa=\kappa_c$, можно получить описание всей области $0 < \kappa < \kappa_c$,
что определяет РГ функции для $g^* < g < \infty$,
где g^* - неподвижная точка ренормгруппы.
При d=4 имеем $g^*=0$ и РГ функции определяются для всех g.



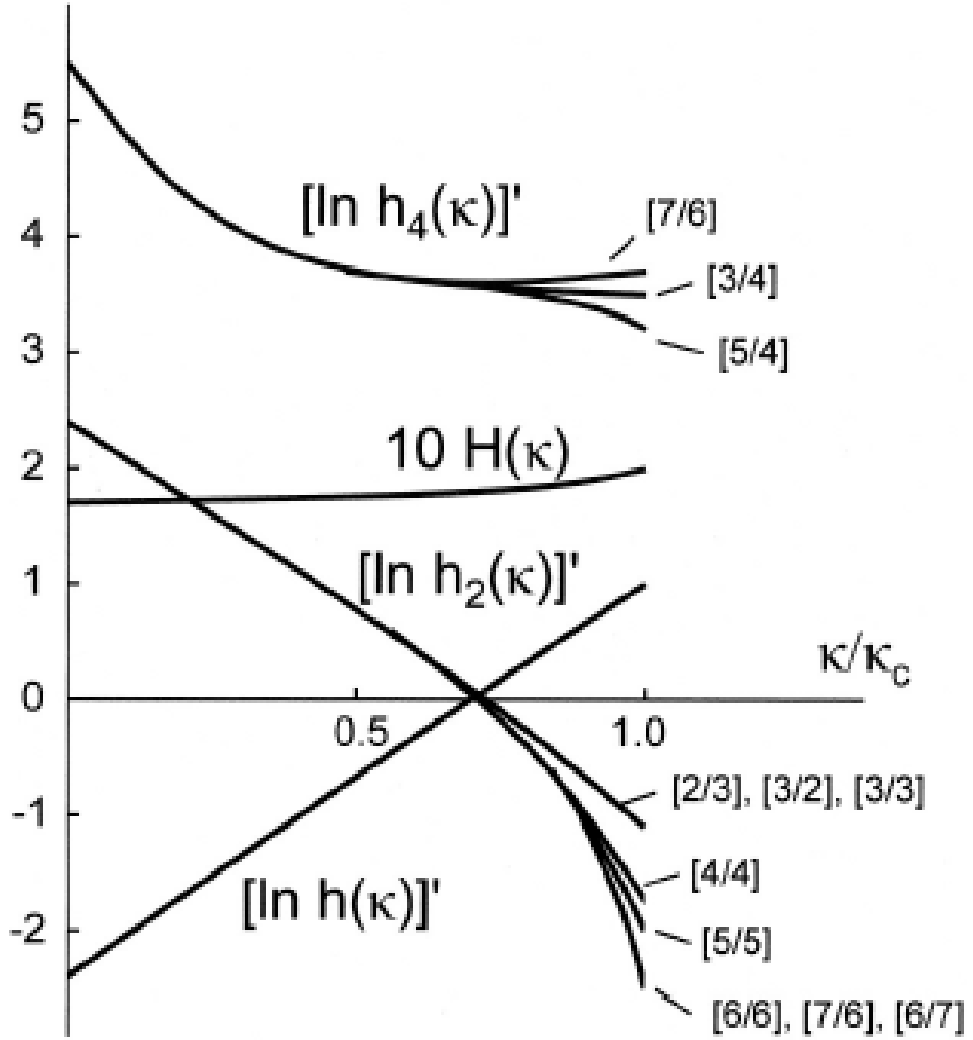
Регулярные функции

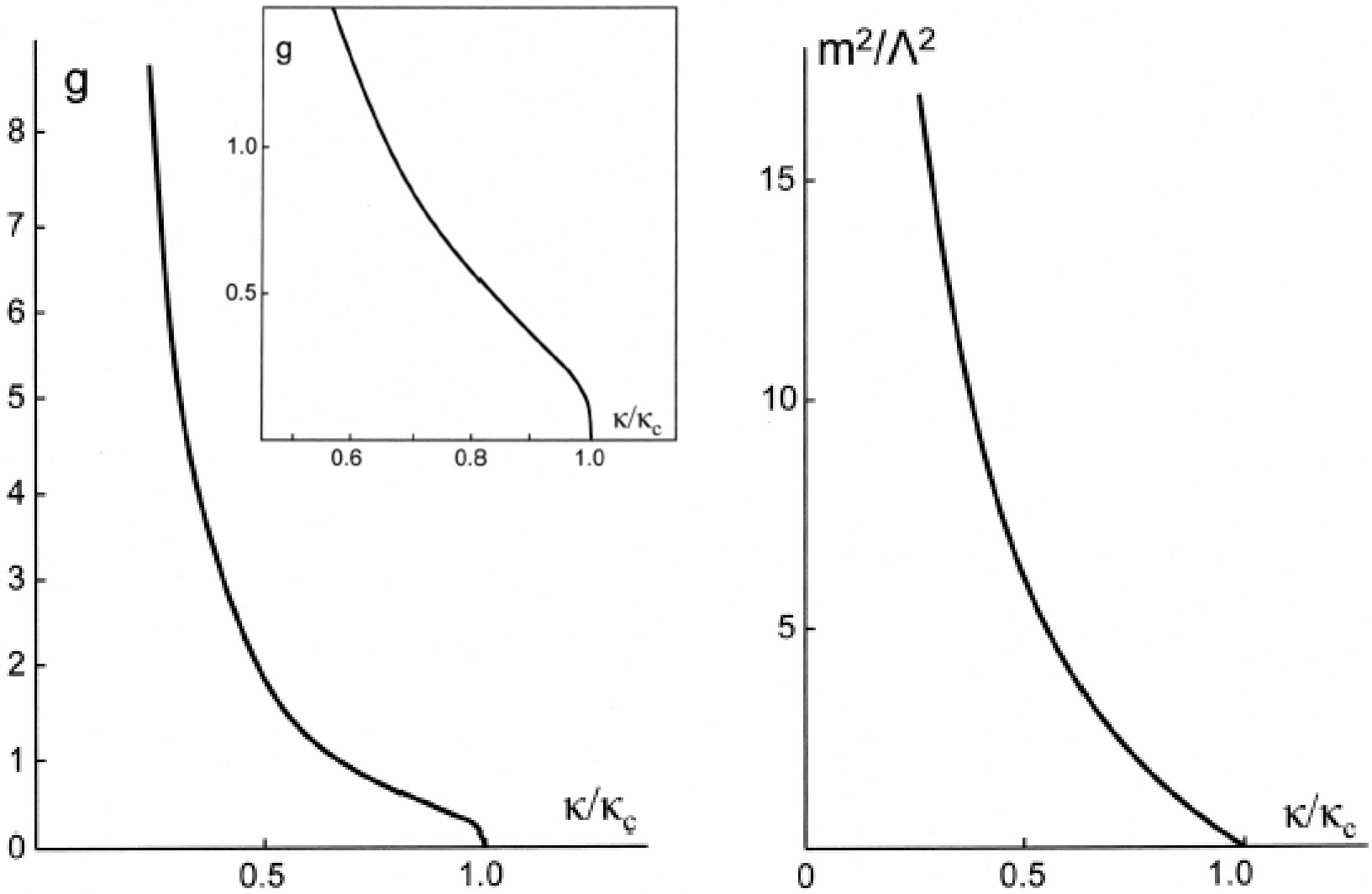
$$f_0 = h_0\,\tau\,(f_{sing})^{-p}$$

$$f_2 = h_2\,\tau^{-1}\,(f_{sing})^{p}\,h_{sing}$$

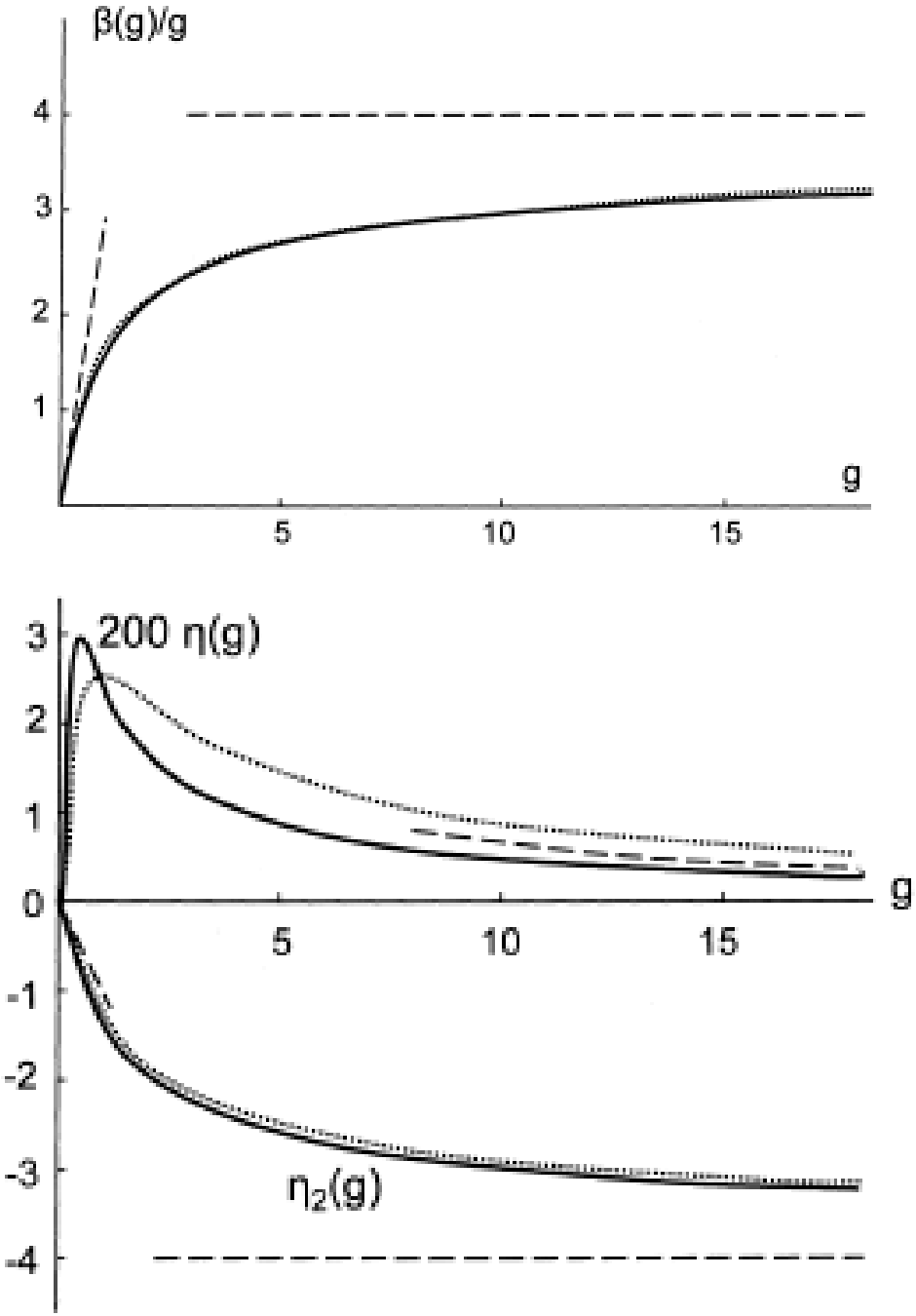
$$f_4 = h_4\,\tau^{-2}\,(f_{sing})^{2p-1}$$

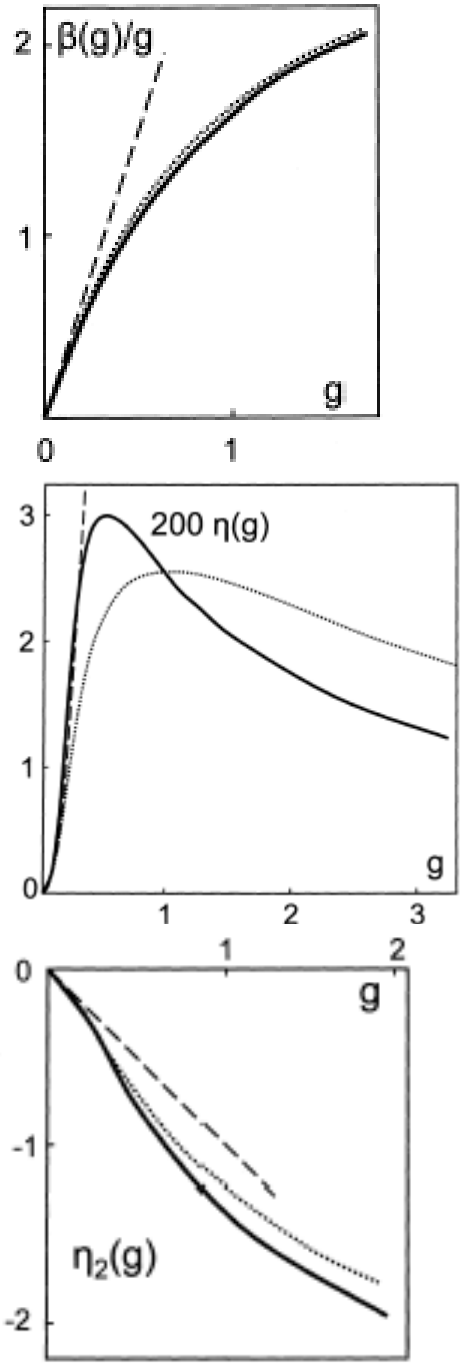
$$H(\kappa) = h_4 h_0^2$$





Перенормированные заряд и масса


β(g)/g
4
3
2
1
g
5
10
15
200 η(g)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
g
5
10
15
η2(g)


2
β(g)/g
1
g
0
1
3
200 η(g)
2
1
0
g
1
2
3
0
1
2
g
-1
η2(g)
-2

Разложения сильной связи

РГ функции раскладываются в ряды по $g^{-2/d}$:

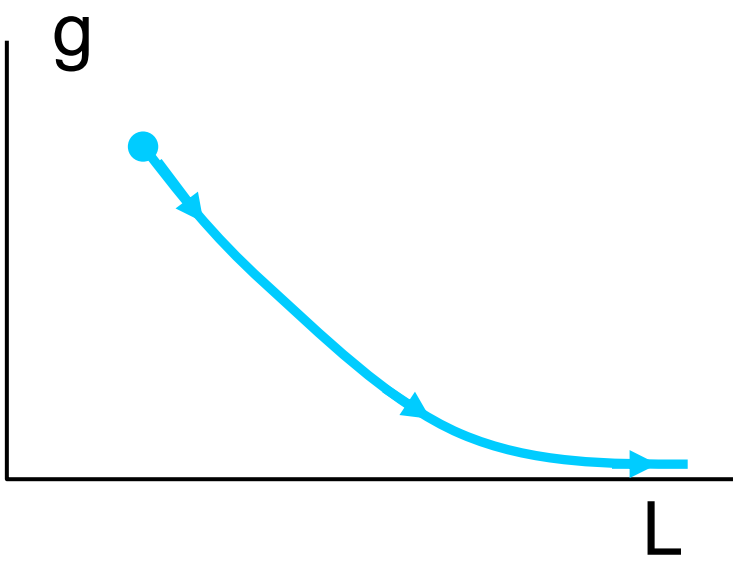
$$\frac{\beta(g)}{g} = \sum_{N=0}^{\infty} B_N \left(-g^{-2/d}\right)^N$$

и т.д.

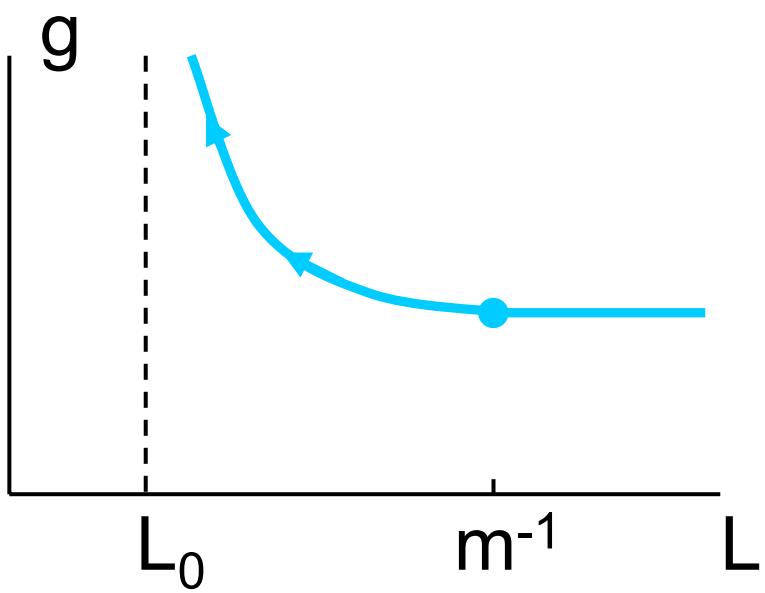
N	$\beta(g)/g$	$\eta(g)$	$\eta_2(g)$
0	4.0000000000000	0.0000000000000	−4.0000000000000
1	−26.127890589687	0.0000000000000	26.127890589687
2	106.66666666666	1.7777777777777	−60.444444444444
3	−557.39499924665	−11.612395817638	81.286770723472
4	3214.2222222221	29.708641975308	−44.879012345695
5	−16396.702894504	22.708685154477	−1208.7213779957
6	67356.444444432	−961.13125612398	9071.1992161454
7	−139720.34647768	7188.4949076856	−49662.878604241
8	−717634.37037244	−27680.892323840	197619.39191503
9	9878174.8209247	−7609.7703277375	−226822.08364126
10	−59767955.489704	938372.27840847	−3873286.8465521
11	186179701.36334	−7226487.6363735	41826925.334797
12	355069103.58896	27981910.625966	−249549251.38460
13	−8851453360.7421	7407298.5714308	794136522.54618

Окончательное решение вопроса о «тривиальности»

Перепутаны два определения тривиальности:



Тривиальность по Вильсону



Истинная тривиальность

Стандартные представления:

Решеточная теория φ^4 является разумным приближением для истинно континуальной теории поля. Отсюда

$$\xi \gg a \;\rightarrow\; \begin{cases} \xi \gtrsim a \;\longrightarrow\; g \lesssim 1 \\ \xi / a \to \infty \;\longrightarrow\; g = 0 \end{cases}$$

и это правильно. Неправильно же – представление о роли и месте решеточной теории.

Схема построения континуальной теории

Выражая величины g, m, A_i , относящиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы :

$$g = F_g(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$m = F_m(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$A_i = F_i(g_0, m_0, \Lambda)$$

Или с учетом размерности

$$g = F_g\left(g_0, m_0/\Lambda\right) \ ,$$

$$m = \Lambda F_g\left(g_0, m_0/\Lambda\right) \ ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i\left(g_0, m_0/\Lambda\right)$$

Исключая g_0 и m_0 :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i\left(g, m/\Lambda\right)$$

Предел $\Lambda \to \infty$ дает $g = 0$.

Схема построения континуальной теории

Выражая величины g, m, A_i , относящиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы :

$$g = F_g(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$m = F_m(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$A_i = F_i(g_0, m_0, \Lambda)$$

Или с учетом размерности

$$g = F_g\,(g_0, m_0/\Lambda)\ ,$$

$$m = \Lambda F_g\,(g_0, m_0/\Lambda)\ ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i\,(g_0, m_0/\Lambda)$$

Исключая g_0 и m_0 :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i\,(g, m/\Lambda)$$

Предел $\Lambda \to \infty$ дает $g = 0$.

После перехода к модели Изинга

$$g = F_g(\kappa)$$

$$m = \Lambda\ F_m(\kappa)$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\kappa)$$

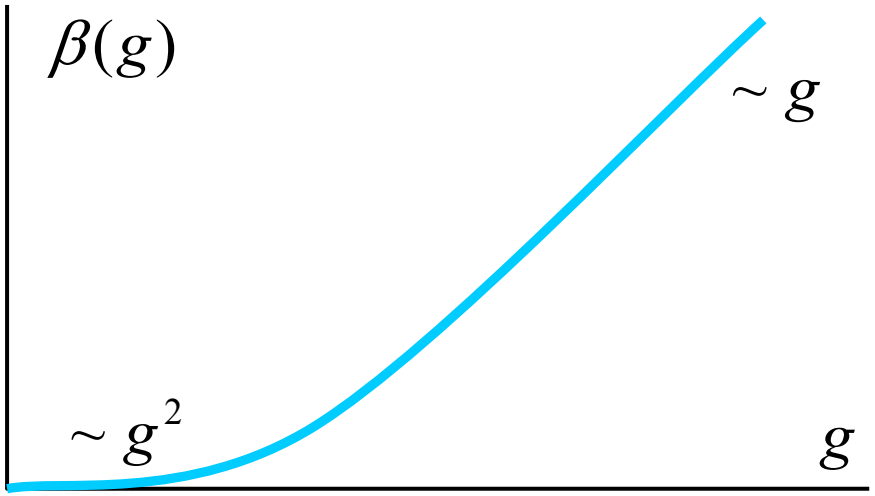
$$A_i = m^{d_i} F_i\,(g)$$

Приложение к теории конфайнмента

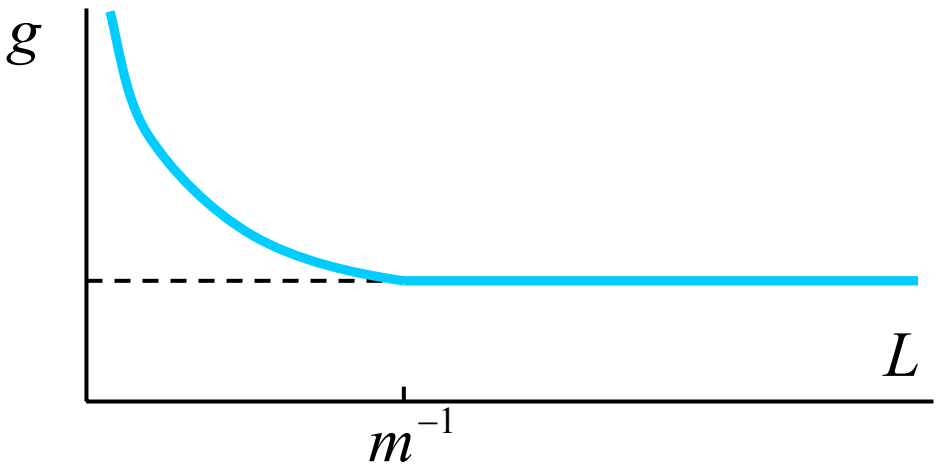
Тривиальна ли теории φ^4 ?

Функция Гелл-Манна – Лоу четырехмерной теории φ^4

$$-\frac{dg}{d\ln L} = \beta(g)$$

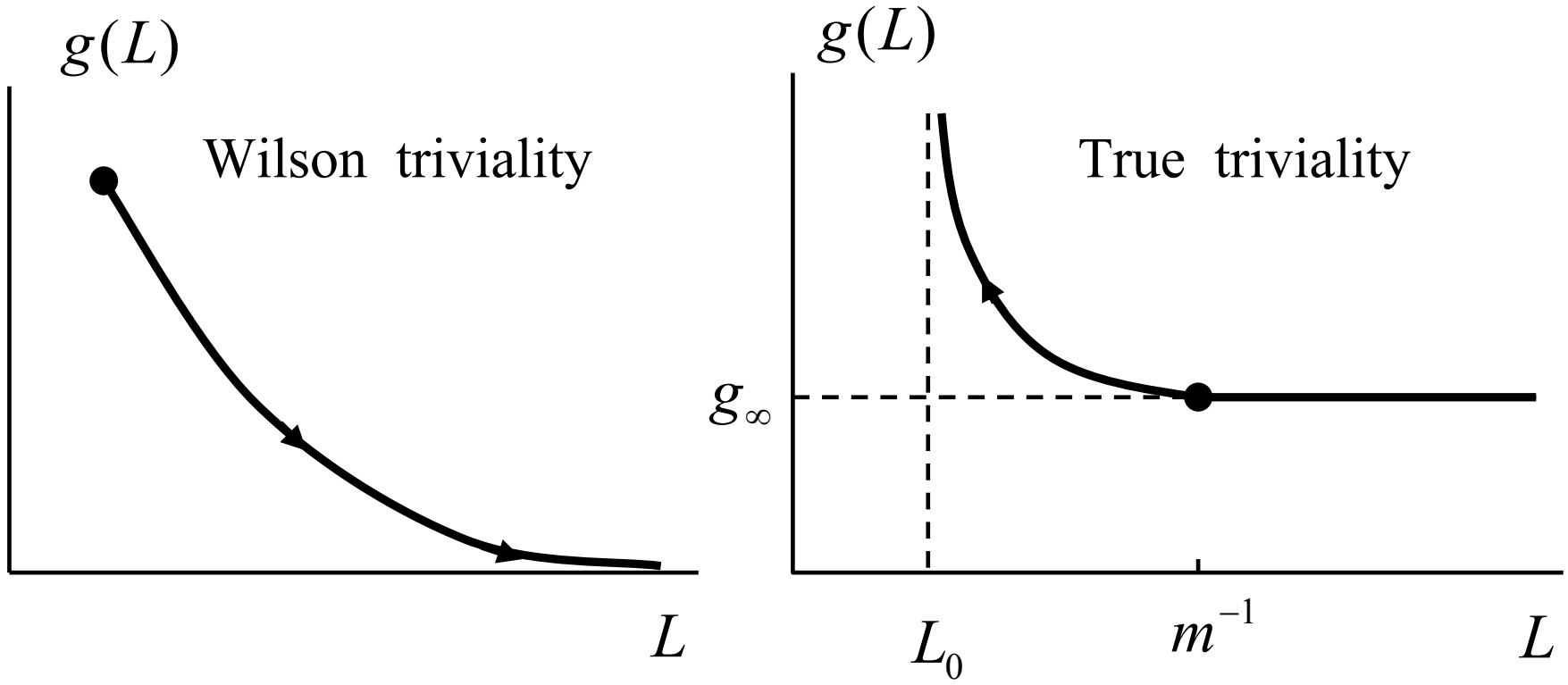


По классификации Боголюбова и Ширкова возможно построение континуальной теории с конечным взаимодействием на больших расстояниях.



Это противоречит решеточным результатам, указывающим на тривиальность теории

В литературе перепутаны два определения тривиальности:



Причины :

(а) На западе не читают Боголюбова и Ширкова;
(б) В решеточном подходе трудно проверить истинную тривиальность;
(в) Существуют аргументы, «доказывающие» эквивалентность двух определений.

Пример аргументации

Выражая величины g, m, A_i , относящиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы :

$$g = F_g(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$m = F_m(g_0, m_0, \Lambda)$$

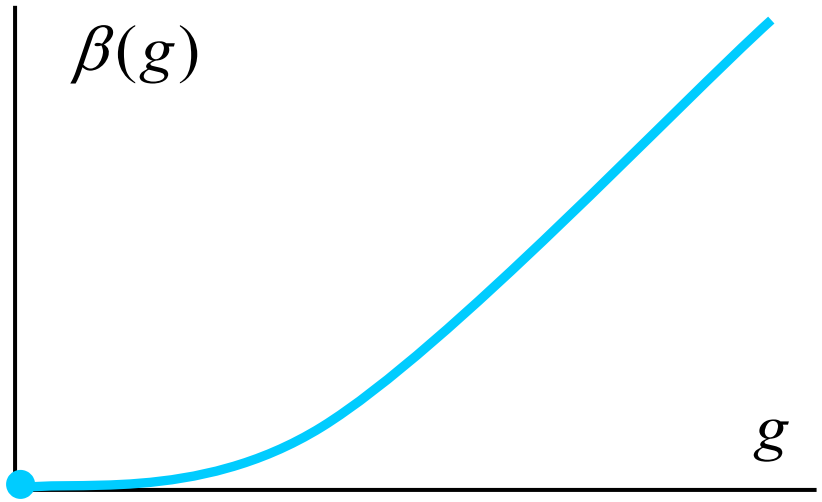
$$A_i = F_i(g_0, m_0, \Lambda)$$

Или с учетом размерности

$$g = F_g\,(g_0, m_0/\Lambda)\ ,$$

$$m = \Lambda F_g\,(g_0, m_0/\Lambda)\ ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i\,(g_0, m_0/\Lambda)$$



Исключая g_0 и m_0 :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i\,(g, m/\Lambda)$$

Предел $m/\Lambda \to 0$ в решеточной теории соответствует $\xi/a \to \infty$, что дает $g = 0$.

Пример аргументации

Выражая величины g, m, A_i , относя
щиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы :

$$g = F_g(g_0, m_0, \Lambda)$$

$$m = F_m(g_0, m_0, \Lambda)$$

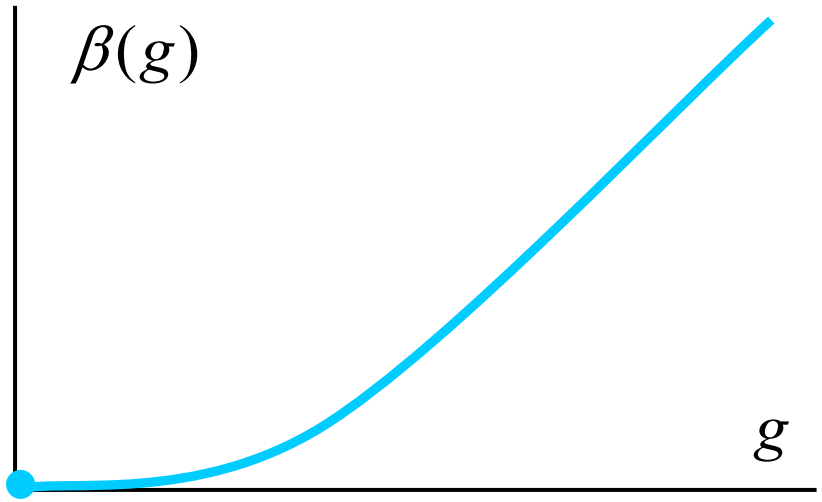
$$A_i = F_i(g_0, m_0, \Lambda)$$

Или с учетом размерности

$$g = F_g\,(g_0, m_0/\Lambda)\ ,$$

$$m = \Lambda F_g\,(g_0, m_0/\Lambda)\ ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i\,(g_0, m_0/\Lambda)$$



Исключая g_0 и m_0 :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i\,(g, m/\Lambda)$$

Предел $m/\Lambda \to 0$ соответствует $\xi/a \to \infty$, что дает $g = 0$.

Мы доказали эквивалентность двух определений !!!

Ситуация в теории φ^4

Выражая величины g, m, A_i , относящиеся к континуальной теории, через функциональные интегралы, имеем с учетом размерности

$$g = F_g\left(g_0, m_0/\Lambda\right) \ ,$$

$$m = \Lambda F_g\left(g_0, m_0/\Lambda\right) \ ,$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i\left(g_0, m_0/\Lambda\right)$$

Исключая g_0 и m_0 :

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i\left(g, m/\Lambda\right)$$

$m << \Lambda$

После перехода к модели Изинга

$$g = F_g(\kappa)$$

$$m = \Lambda \ F_m(\kappa)$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\kappa)$$

$$A_i = m^{d_i} F_i(g)$$

Зависимость от m/Λ отсутствует, так что:
(а) мы можем сохранить решетку в затравочной теории;
(б) соотношение между m и Λ (или a и ξ) произвольно.

Решеточная теория содержит больше параметров, чем континуальная. Так дискретизация градиентного члена в теории φ^4

$$\int d^d x \, [\nabla \phi(x)]^2 = -\int d^d x \phi(x) \nabla^2 \phi(x) \quad \longrightarrow \quad \sum_{x,x'} J_{x-x'} \phi_x \phi_{x'}$$

соответствует замене $-\nabla^2 = \hat{p}^2$ на $\epsilon(\hat{p})$, где

$$\epsilon(p) = \sum_x J_x e^{ip\cdot x} = p^2 + O(p^4)$$

($\hat{p}$ — оператор импульса, а $\exp\{i\hat{p}\cdot x\}$ — оператор сдвига на вектор x)

Если решетку можно сохранить, то о какой решетке идет речь ?

$$A_i = m^{d_i} \tilde{F}_i(g, m/\Lambda)$$

Ввиду независимости от m/Λ можно положить $m/\Lambda \to 0$, когда есть физические основания для независимости от способа обрезания.

Характер перенормируемости в теории φ^4 :

Правильные соотношения между физическими величинами

$$A_i = m^{d_i} F_i(g)$$

могут быть получены для произвольного значения параметра a/ξ . Для построения континуальной перенормированной теории необязательно устранять решетку из затравочной теории.

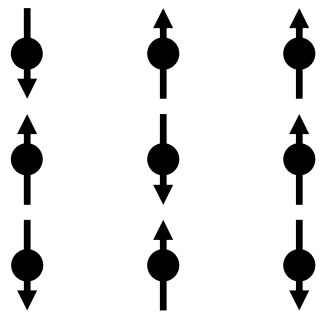
Вопрос :

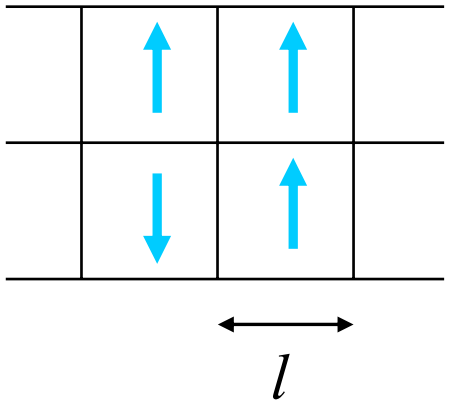
Связан ли такой характер перенормируемости со специфическими свойствами теории φ^4 или он обусловлен какими-то общими причинами ?

Вильсоновская многопараметрическая ренормгруппа.

Основная идея: параметры гамильтониана являются функциями масштаба расстояний

$$p_i = p_i(l)$$





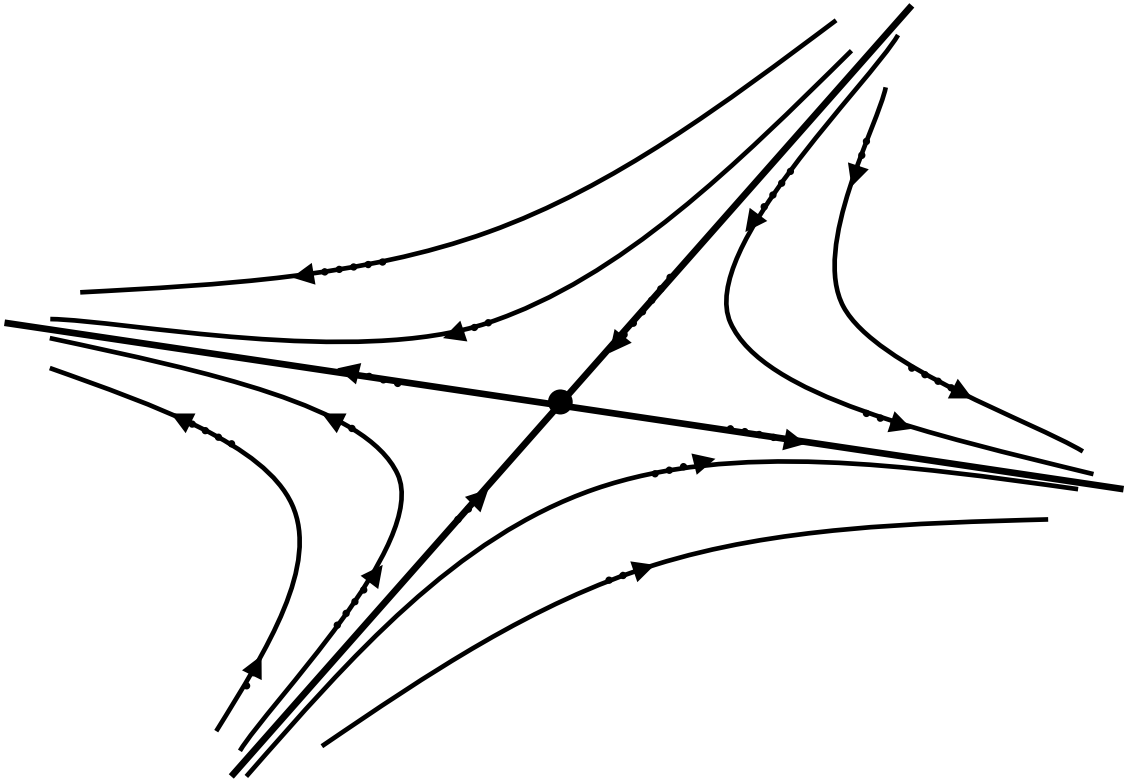
Уравнения ренормгруппы (возможность пересчета $p_i(l) \to p_i(nl)$)

$$-\frac{dp_i}{d\ln(l/a)} = F_i\{p_k\}$$

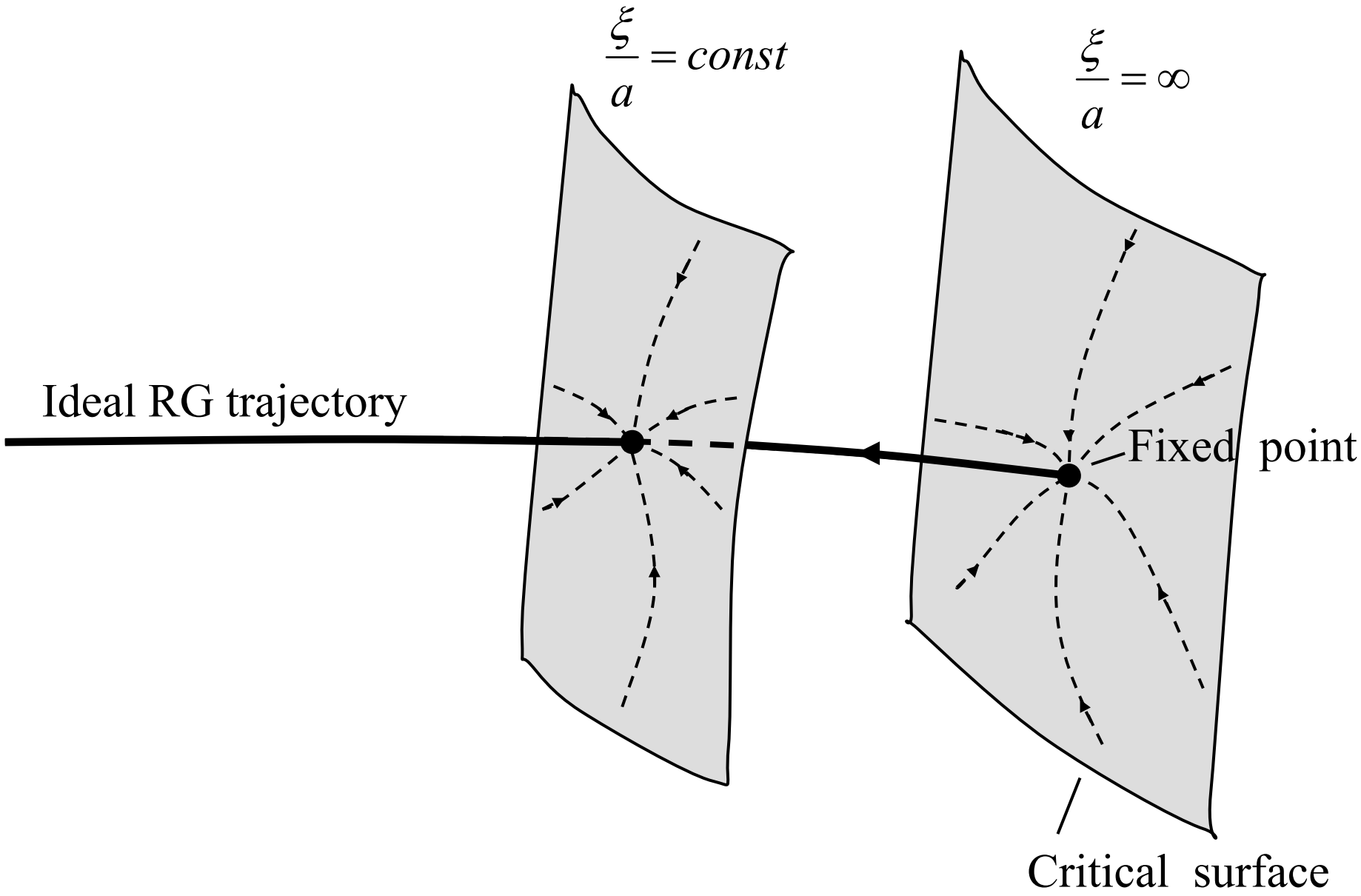
могут быть линеаризованы вблизи неподвижной точки

$$p_i(l) = p_i^* \qquad (\text{для всех } l)$$

Простейшая седловая точка

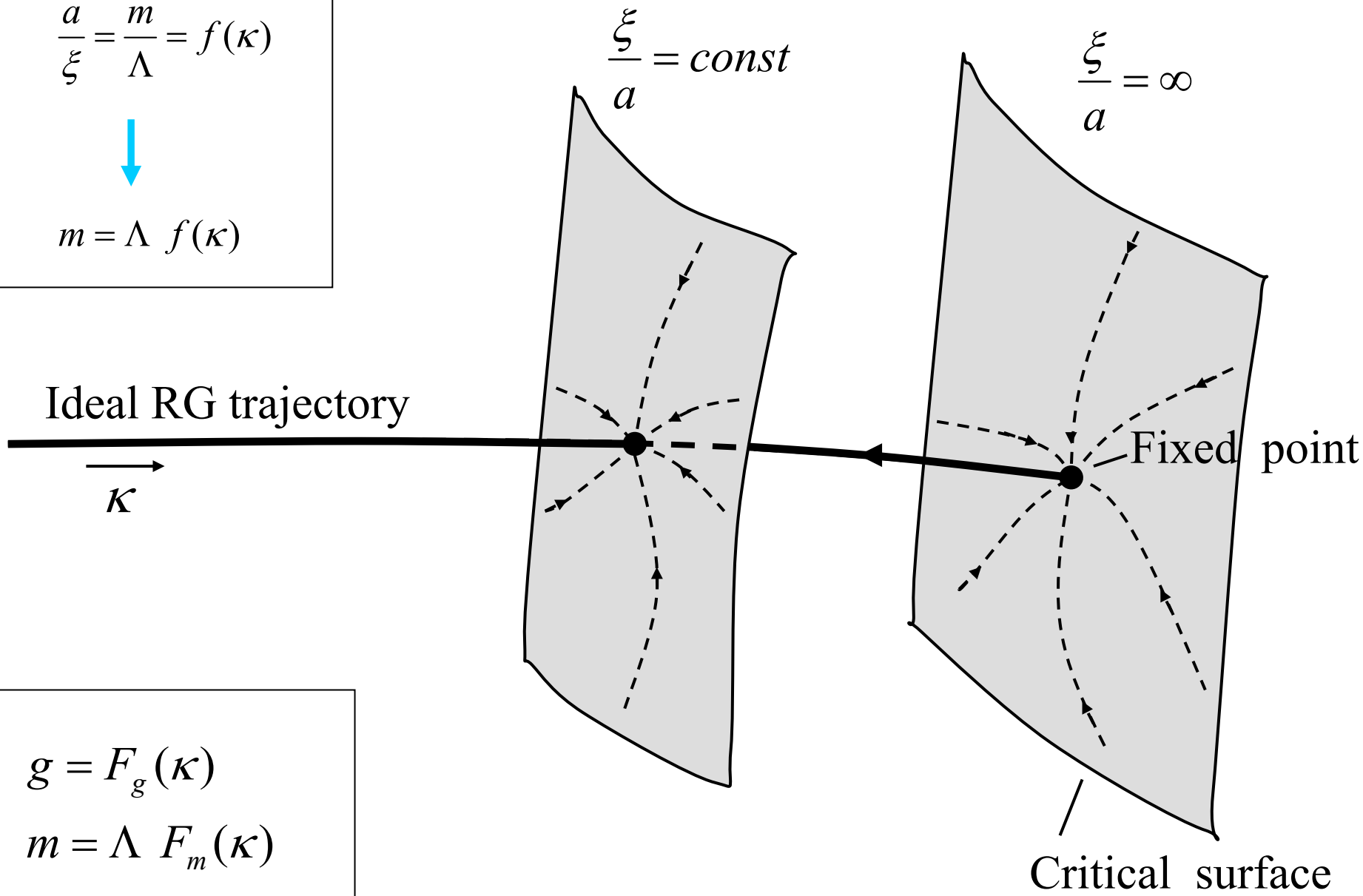


Вместо увеличения l при $a = const$
можно уменьшать a при $l = const$


$\frac{\xi}{a} = const$
$\frac{\xi}{a} = \infty$
Ideal RG trajectory
Fixed point
Critical surface

$$\frac{a}{\xi} = \frac{m}{\Lambda} = f(\kappa)$$

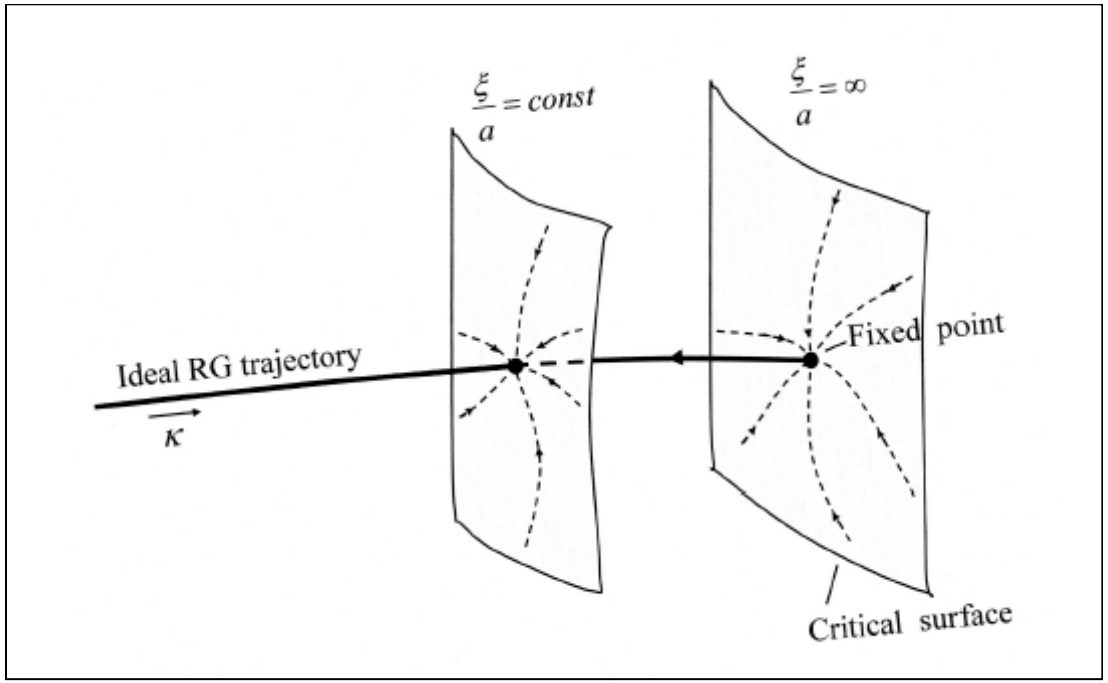
$$m = \Lambda \; f(\kappa)$$



$$g = F_g(\kappa)$$

$$m = \Lambda \; F_m(\kappa)$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\kappa)$$



Смысл построения

Если переходить к пределу $a \to 0$ произвольным образом, то система уйдет на бесконечность по неустойчивому направлению. Поэтому континуальный предел предлагается брать в два этапа:

(а) взять предел $a \to 0$ при $a/\xi = const$;
(б) взять предел $a/\xi \to 0$.

Зависимость от a в перенормированной теории исчезает уже на первом шаге. Второй шаг становится необязательным.

Эти идеи близки специалистам по КХД :

R.Gupta "Introduction to lattice QCD" arXiv: hep-lat/9807028.

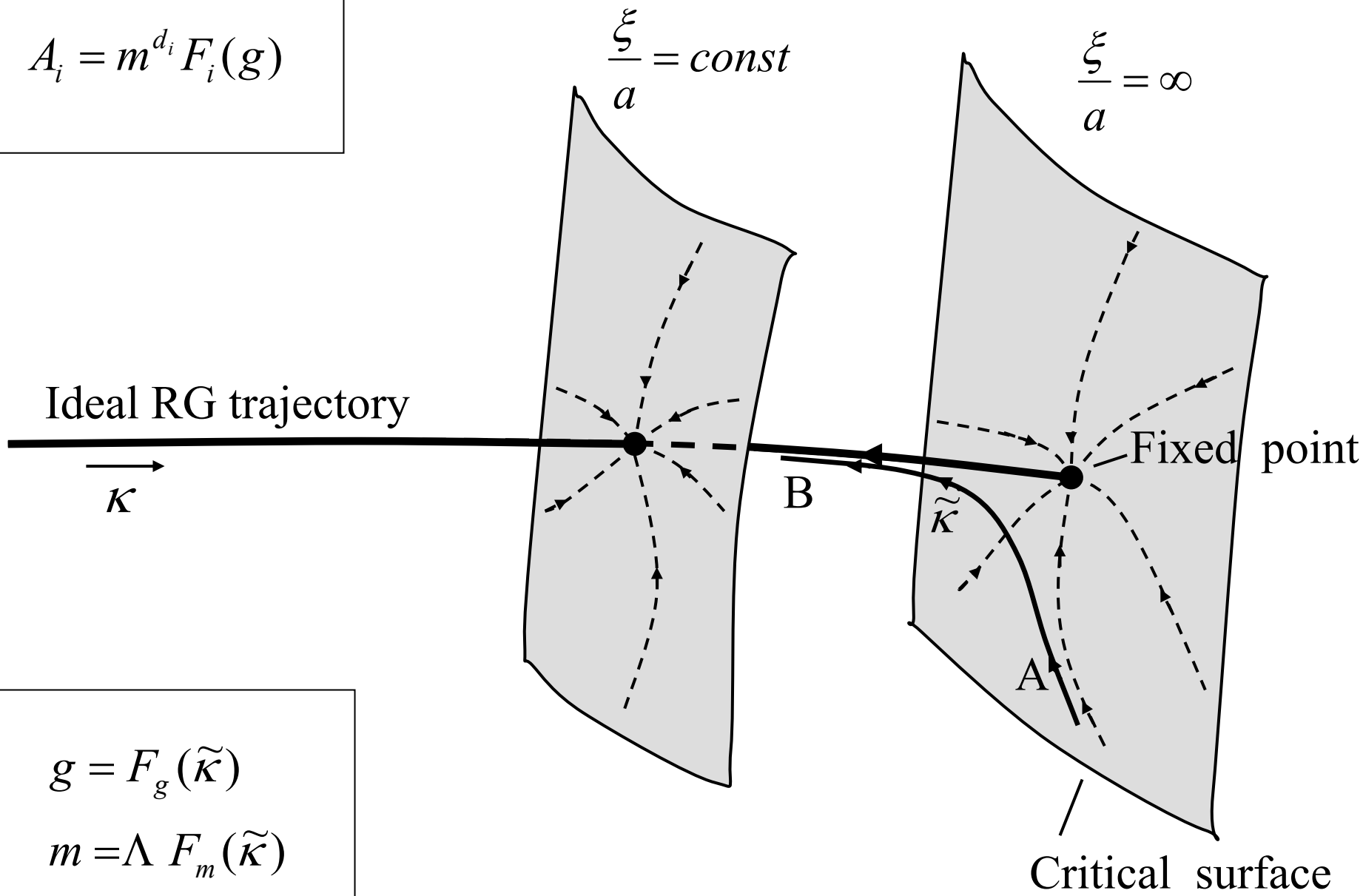
"simulations done along the ideal RG trajectory will reproduce the continuum physics without discretization errors".

Современные исследования проводятся в области

$$\xi / a = 5 \div 15$$

с аккуратной экстраполяцией $a/\xi \to 0$.

$$A_i = m^{d_i} F_i(g)$$

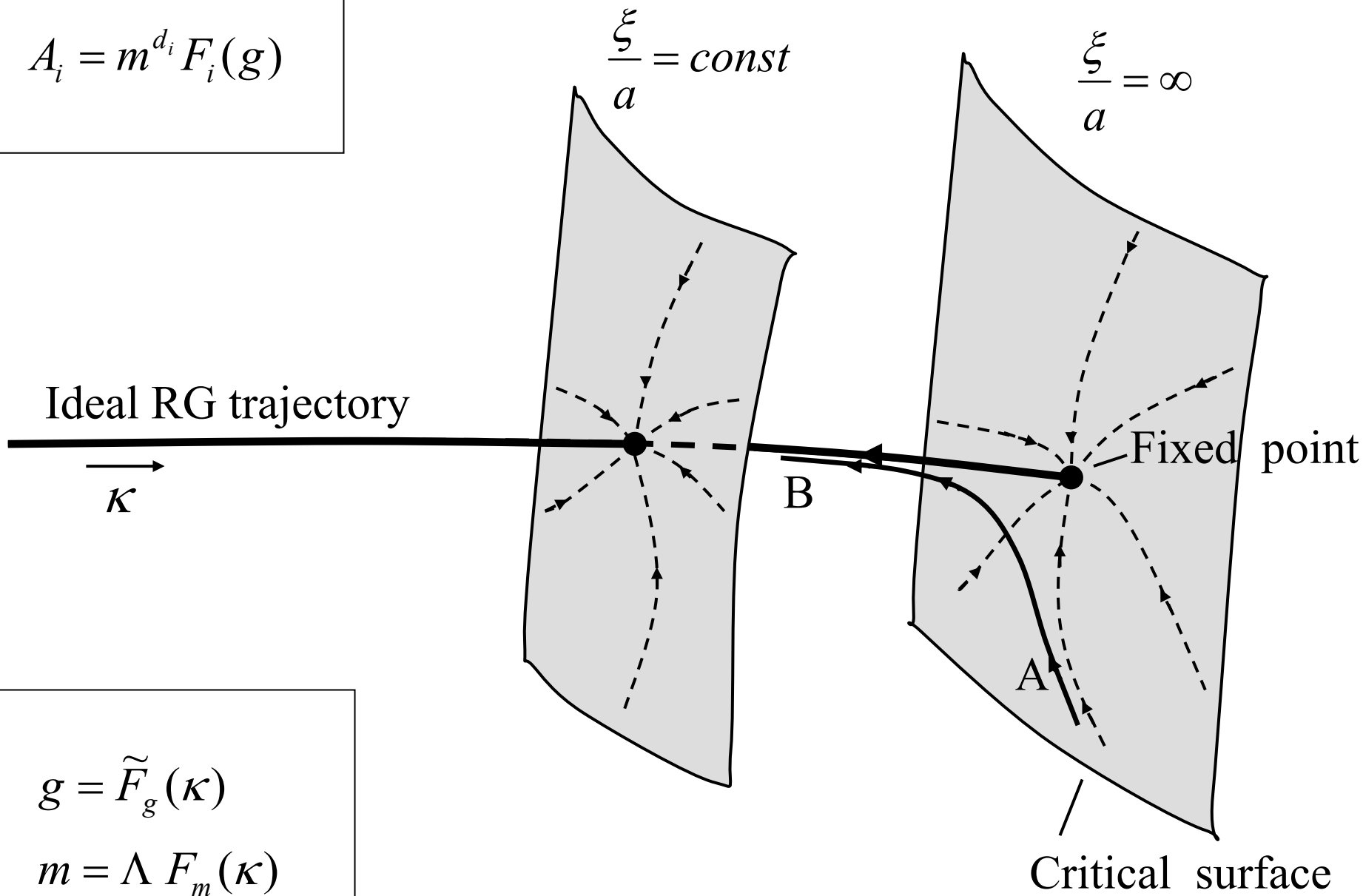


$$g = F_g(\tilde{\kappa})$$

$$m = \Lambda\, F_m(\tilde{\kappa})$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} F_i(\tilde{\kappa})$$

$$A_i = m^{d_i} F_i(g)$$



$$g = \widetilde{F}_g(\kappa)$$

$$m = \Lambda\, F_m(\kappa)$$

$$A_i = \Lambda^{d_i} \widetilde{F}_i(\kappa)$$

После отбрасывания соотношения $g = F_g(\kappa)$ перенормированный и затравочный сектор полностью расцепляются.

В перенормированном секторе:

$$A_i = m^{d_i} F_i(g)$$

где m и g - независимые переменные

В затравочном секторе:

$$m = \Lambda\, F_m(\kappa)$$

- соотношение, не имеющее отношения к физике.

Вывод:

Перенормируемая теория рассмотренного типа допускает представление в виде решеточной теории, которая обеспечивает правильные соотношения между физическими величинами и содержит свободный параметр a/ξ , не входящий в эти соотношения

Приложение к теории конфайнмента

Приложение к теории конфайнмента

КХД с одним сортом кварков:

$$g_0 \ , \quad m_0 \qquad \rightarrow \qquad g \ , \quad m$$

Чистая теория Янга-Миллса:

$$g_0 \qquad \rightarrow \qquad g$$

не содержит естественной шкалы масс.

«Расширенная версия» теории Янга-Миллса:

$$g_0 \ , \quad p \qquad \rightarrow \qquad g \ , \quad m$$

(p – решеточный параметр, m – масса глюболла)
Корреляционный радиус $\xi = m^{-1}$

Теория Вильсона

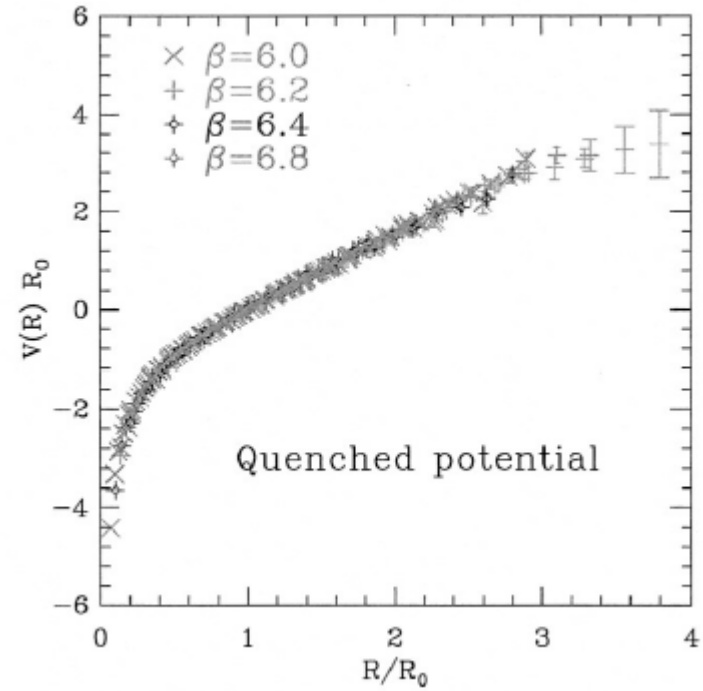
K. G. Wilson , Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).

В решеточной версии теории Янга-Миллса с $g_0 >> 1$

$$V(r) = \sigma R$$

причем

$$\sigma = \frac{\ln(3g_0)}{a^2}, \qquad m = \frac{4\ln(3g_0)}{a}$$



Нефизический режим:

$m >> \Lambda$ или $\xi << a$

$$V(R) = -\frac{\alpha}{R} + B + \sigma R$$

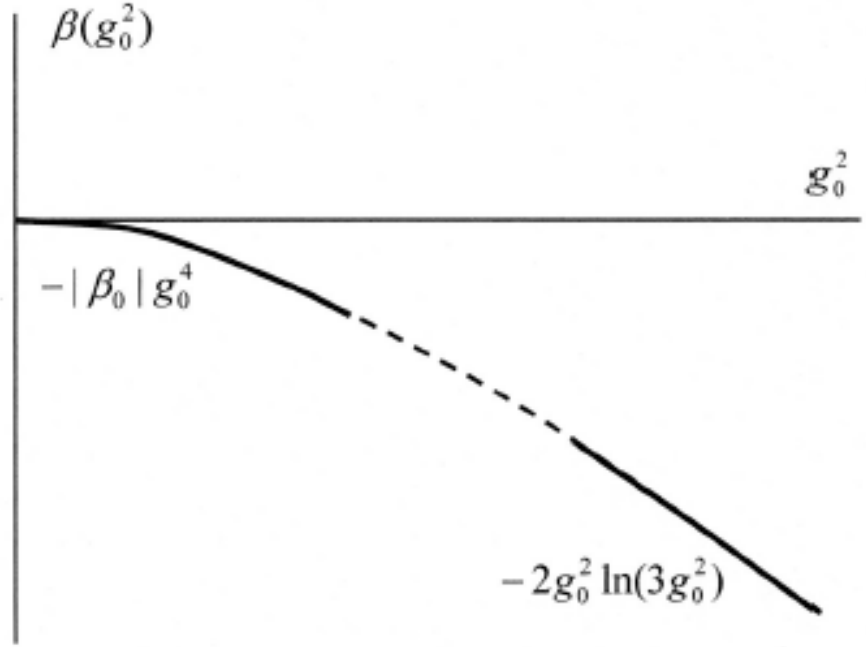
Континуальный предел

Подстановка

$$g_0^2(a) = (1/3)\exp(\sigma a^2)$$

в уравнение Гелл-Манна – Лоу

$$-\frac{d\,g_0^2}{d\,\ln a} = \beta(g_0^2) = \beta_0 g_0^4 + \beta_1 g_0^6 + \ldots$$



дает для больших g_0

$$\beta(g_0^2) = -2g_0^2\ln(3g_0^2)$$

так что $g_0 \to 0$ при $a \to 0$:

$$g_0^2 = \frac{g^2}{1+|\beta_0|g^2\ln\Lambda/m} \longrightarrow \frac{1}{|\beta_0|\ln\Lambda/m} \longrightarrow 0$$

Ситуация радикально меняется при использовании введенного выше представления:

(а) Не требуется брать предел $a \to 0$, поэтому g_0 остается конечным;

(б) Ввиду независимости результатов от параметра a/ξ его можно брать произвольным;

(в) Нет прямой связи между g и g_0 .

$$g_0^2 = \frac{1}{3} \exp\left(\frac{ma}{4}\right) = \frac{1}{3} \exp\left\{\frac{a}{4\xi}\right\}$$

Независимо от g свободный параметр a/ξ можно выбрать так, что $g_0 >> 1$. Тогда вильсоновская теория дает конечное σ , т.е. конфайнмент.

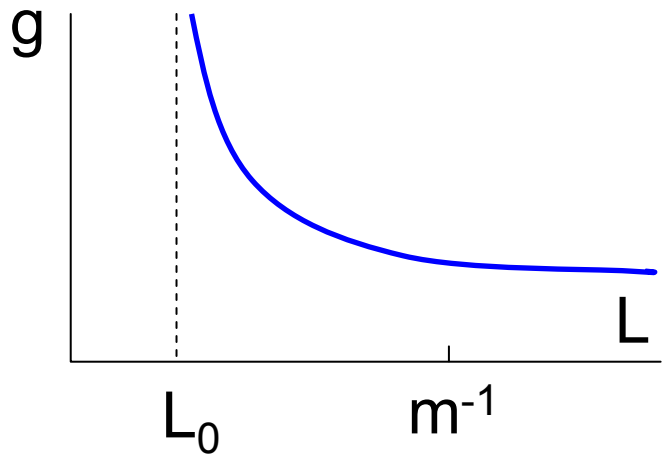
Окончательные выводы:

Каковы бы ни были свойства континуальной теории Янга-Миллса, существует решеточная теория, котора их воспроизводит. Затравочный заряд g_0 в этой решеточной теории может быть выбран произвольным, и в частности — бесконечно большим. Любая разумная решеточная верси теории Янга-Миллса дает конечные значения σ и m в пределе сильной связи. Обращение σ и m в нуль возможно лишь для исключительных конфигураций параметров, которые избегаются в общем случае. Таким образом, проблему аналитического доказательства конфайнмента и массовой щели можно считать решенной, по крайней мере на физическом уровне строгости.

Хиггсовский бозон – оценка массы

Из электрослабой теории

$$m_H \propto \sqrt{g}$$

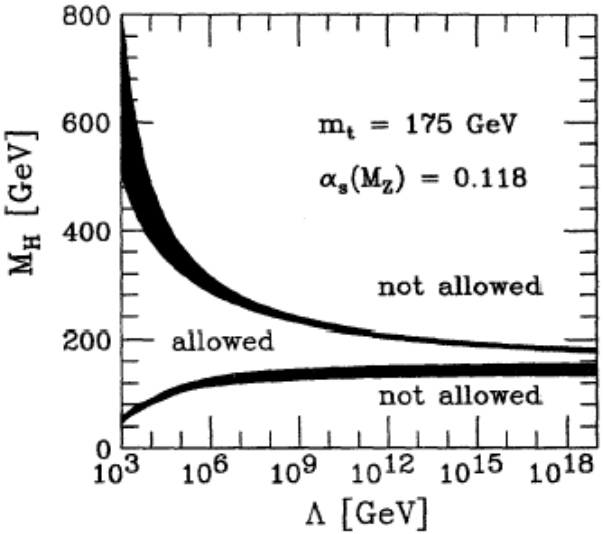


“Triviality bound” на константу g

$$g = \frac{g_0}{1+\beta_2\, g_0 \ln(\Lambda/m)} \quad < \quad \frac{1}{\beta_2\, \ln(\Lambda/m)}$$

откуда

$$m_H < \frac{900\ GeV}{(\ln \Lambda/m)^{1/2}}$$



где $m \sim m_Z \sim m_W$