

Вихри, спирали и другие пространственные структуры в магнетиках

А.Б.Борисов

**Институт физики металлов
УрО РАН**

План

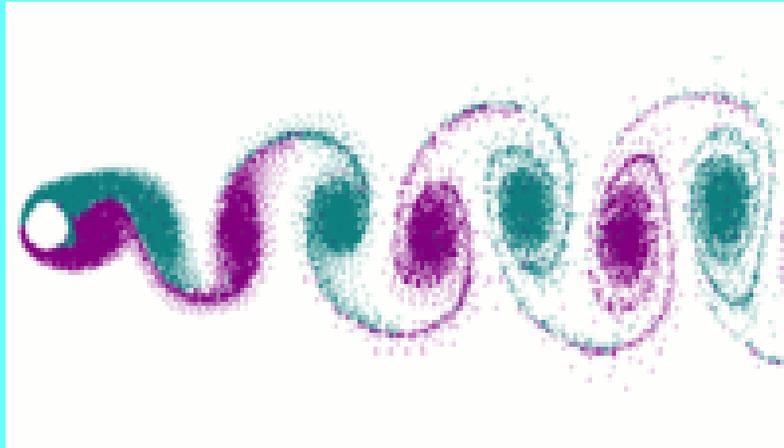
- **Научно-популярное Введение.**
- **1. Двумерные и трехмерные структуры в модели Гейзенберга.**
- **2. Текстуры (пространственные структуры) в многоподрешеточных антиферромагнетиках**
 - а) Теория Андреева-Марченко-Волкова-Желтухина
 - б). Подстановки (Ansatz)
 - с). Дифференциально-геометрический метод интегрирования
 - д). локализованные и нелокализованные спиральные структуры
- **3. Трехмерные топологические солитоны с ненулевым инвариантом Хопфа.**

Вихри и спиральные структуры

Вихри

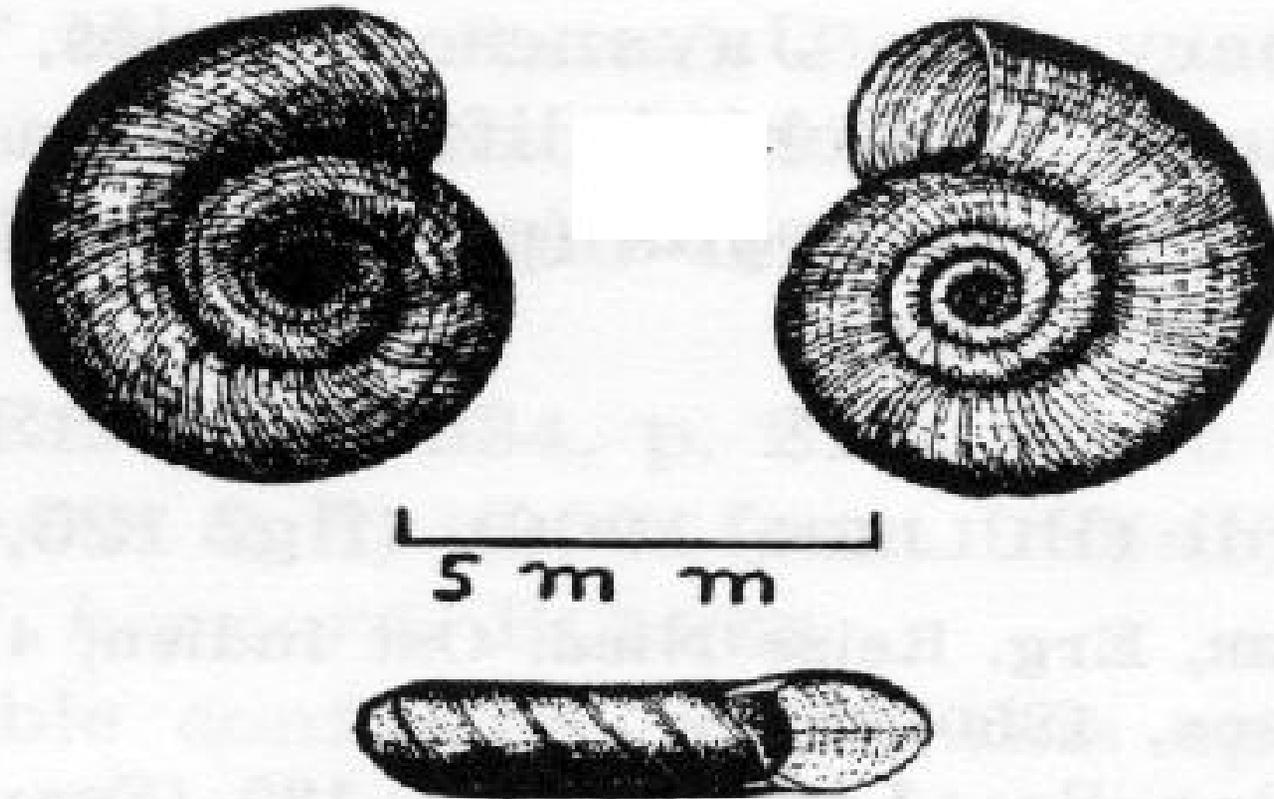
- Вихревое движение-движение жидкости или газа, при котором их малые элементы (частицы) перемещаются не только поступательно, но и вращаются около некоторой мгновенной оси(например, смерчи, воронки в воде и т. д.).

$$\oint \vec{v}(r) d\vec{r} \neq 0$$



- *Спиральные структуры* составляют важнейший и наиболее богатый класс *пространственных структур* в активных средах.
- Активные среды характеризуются непрерывным *притоком энергии* от источника к каждому физически малому элементу и её выводом (диссипацией).
- *Пространственные структуры* образуются в непрерывной среде, когда ее элементы локально связываются между собой.
- *Пространственные структуры* лежат в основе самоорганизации в активных средах.

Gyraulus convexiusculus (HUTTON, 1849)



Commonly found attached to Hydrilla waterweeds in Singapore



Photo by Chan Sow Yan



Photo by Chan

Costula

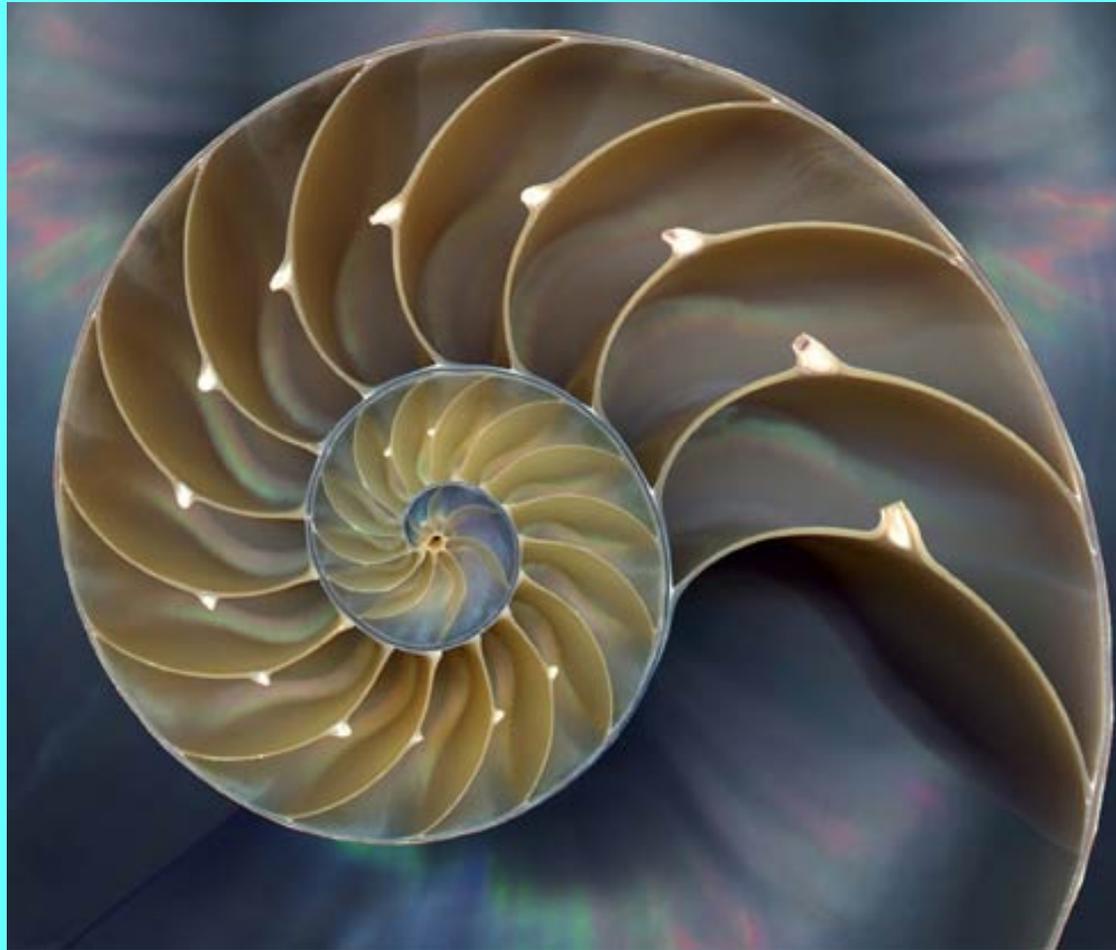


Photo by Chan Sow Yan

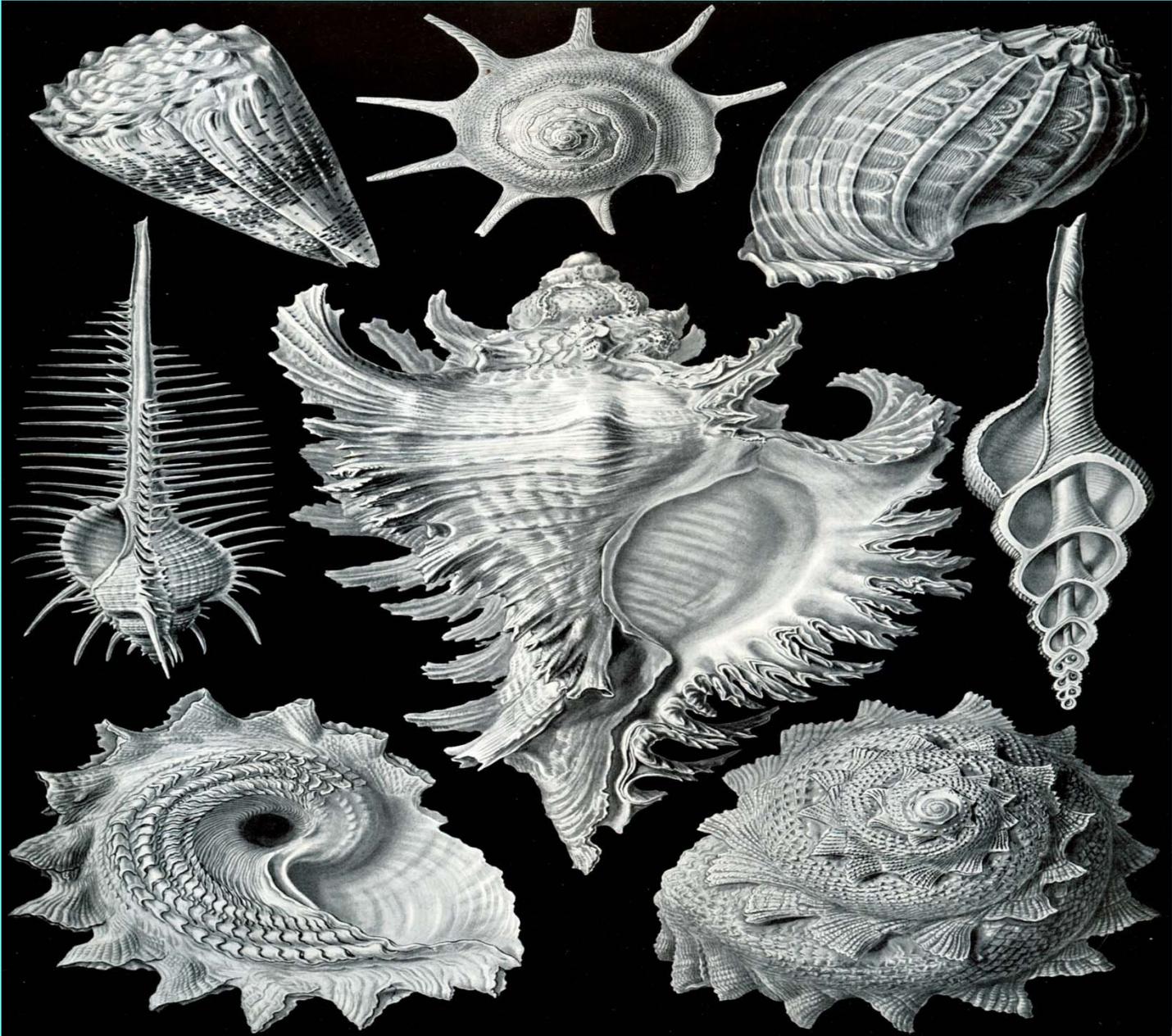
Nautilus Cutaway Log Spiral

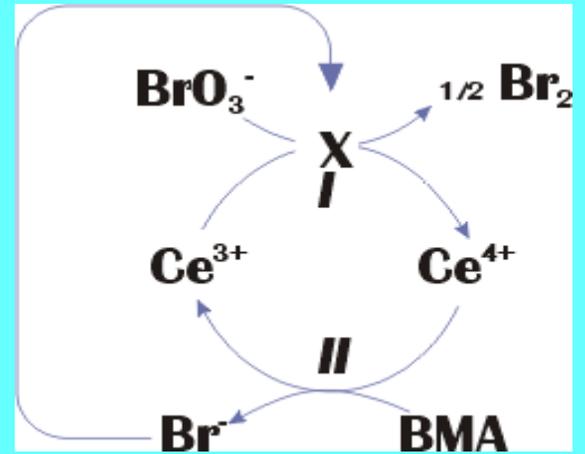


Nautilus-Shell

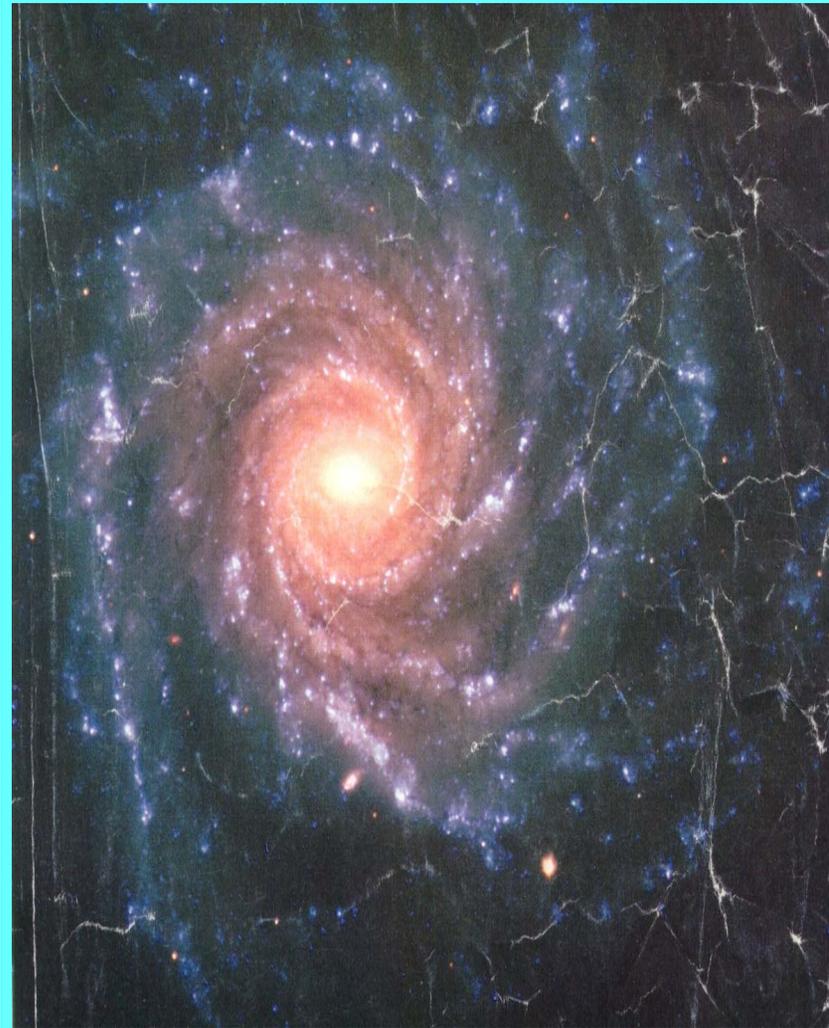
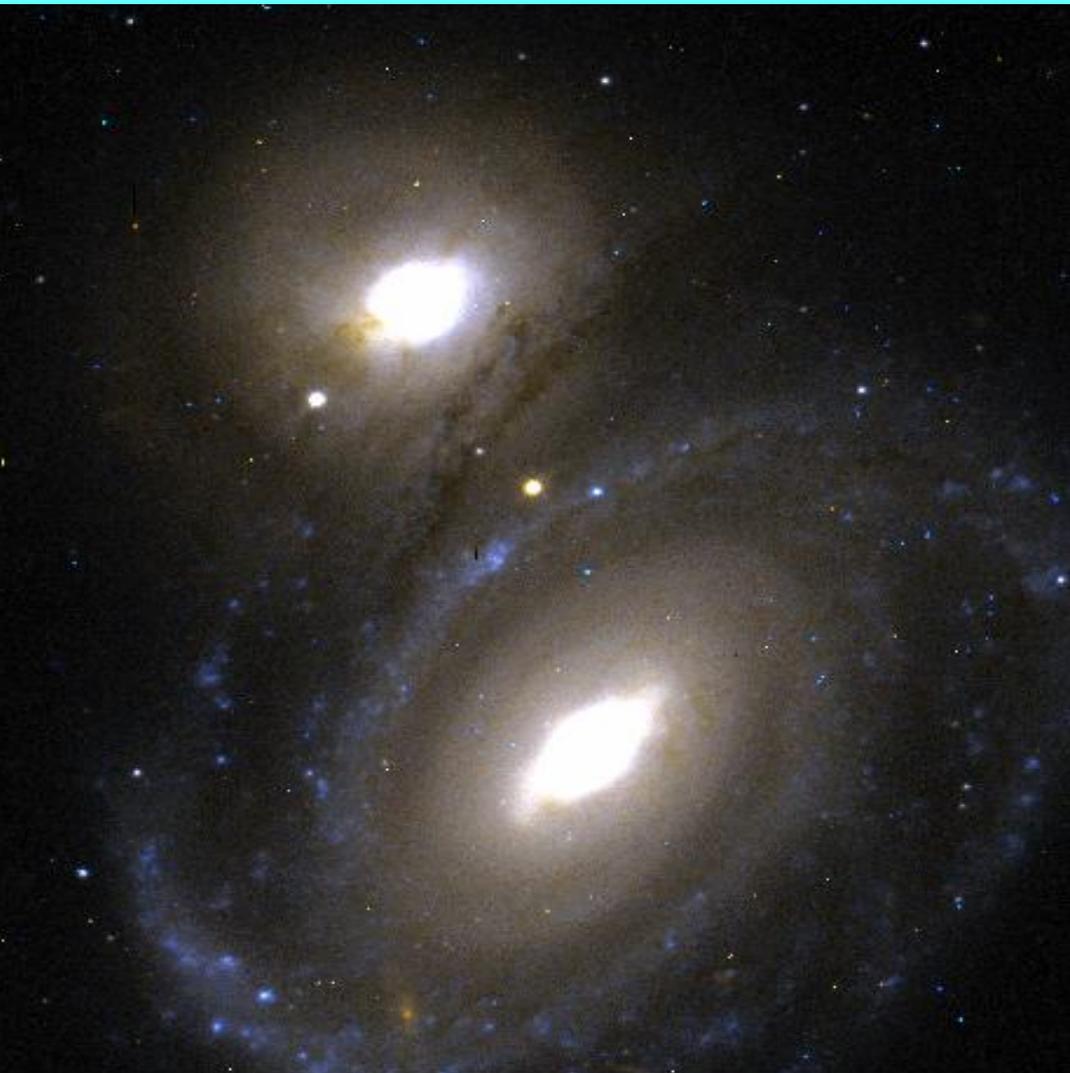


The 53rd plate from [Ernst Haeckel's](#) *Kunstformen der Natur* (1904), depicting organisms classified

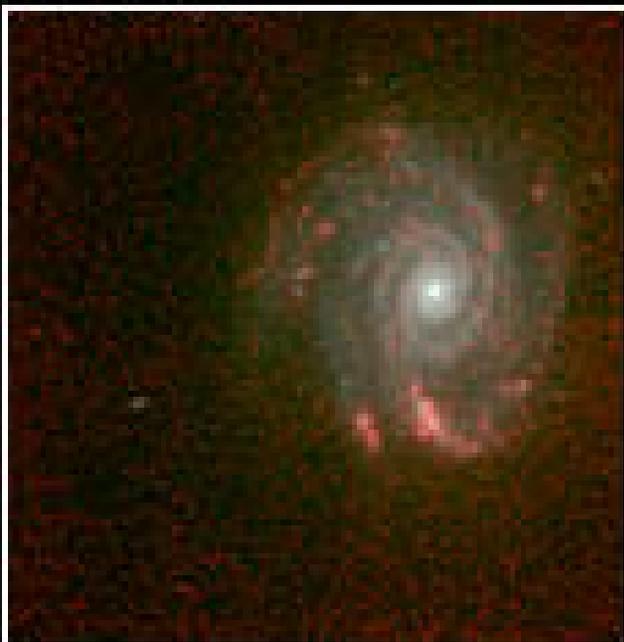




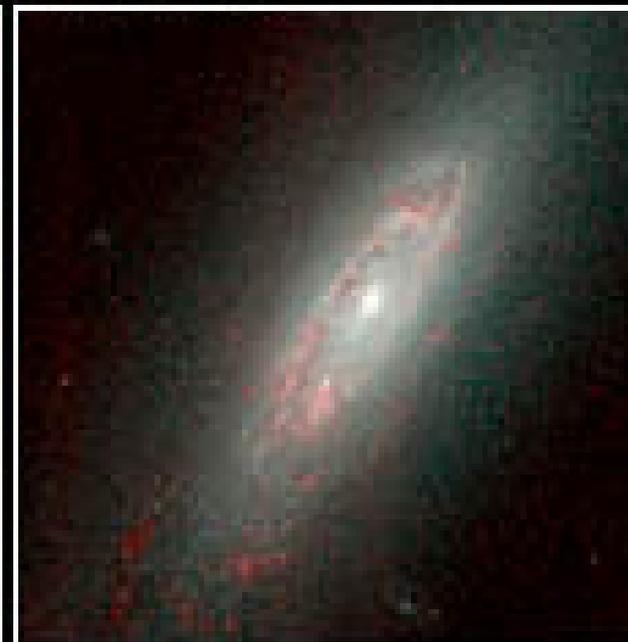
Спиральные галактики



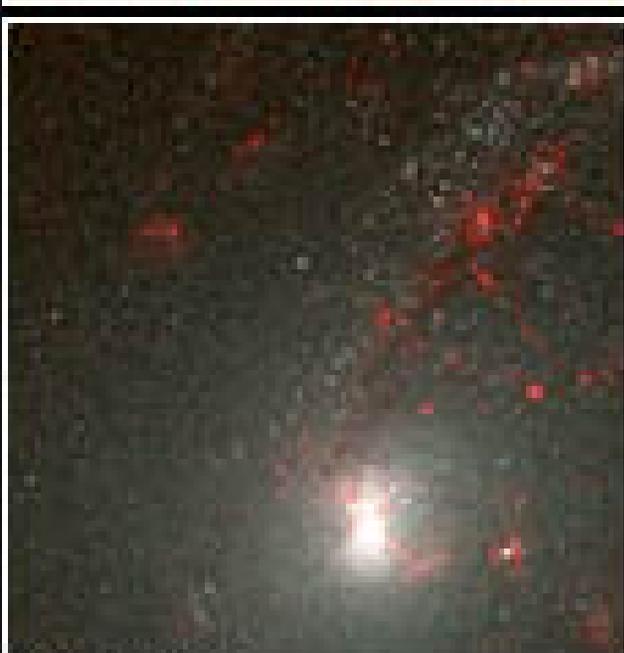
NGC 5653



NGC 3593



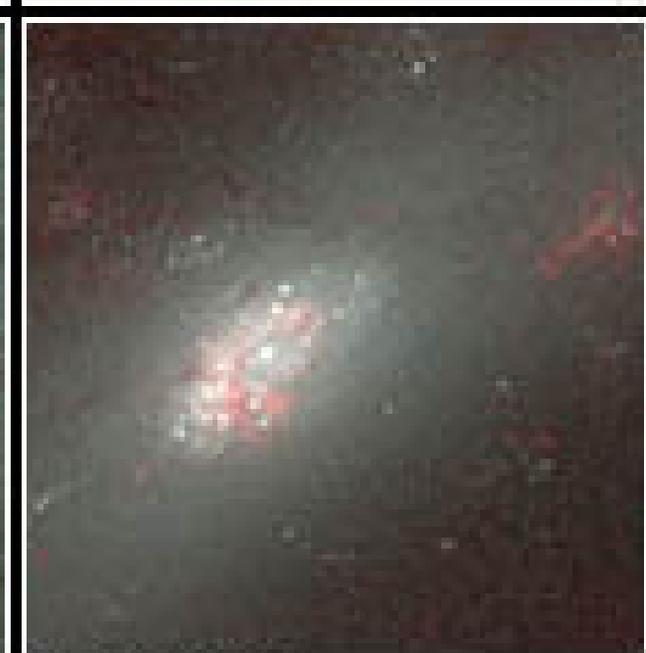
NGC 891



NGC 6946



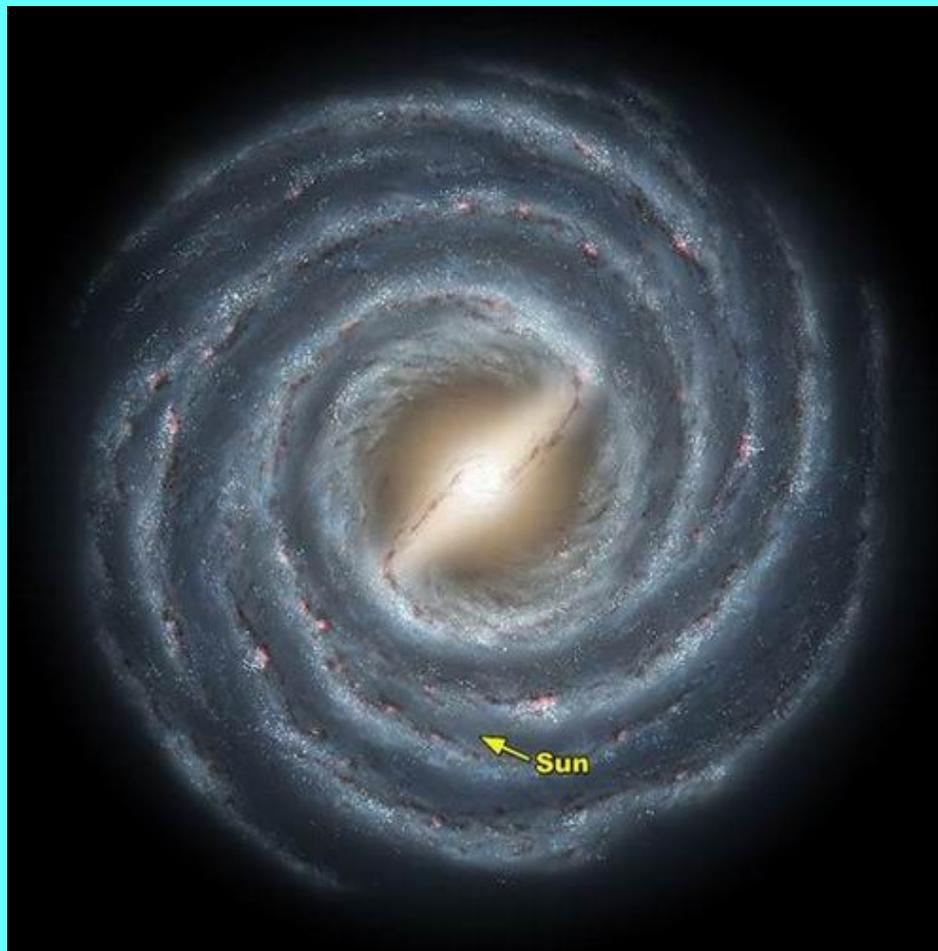
NGC 4826



NGC 2903



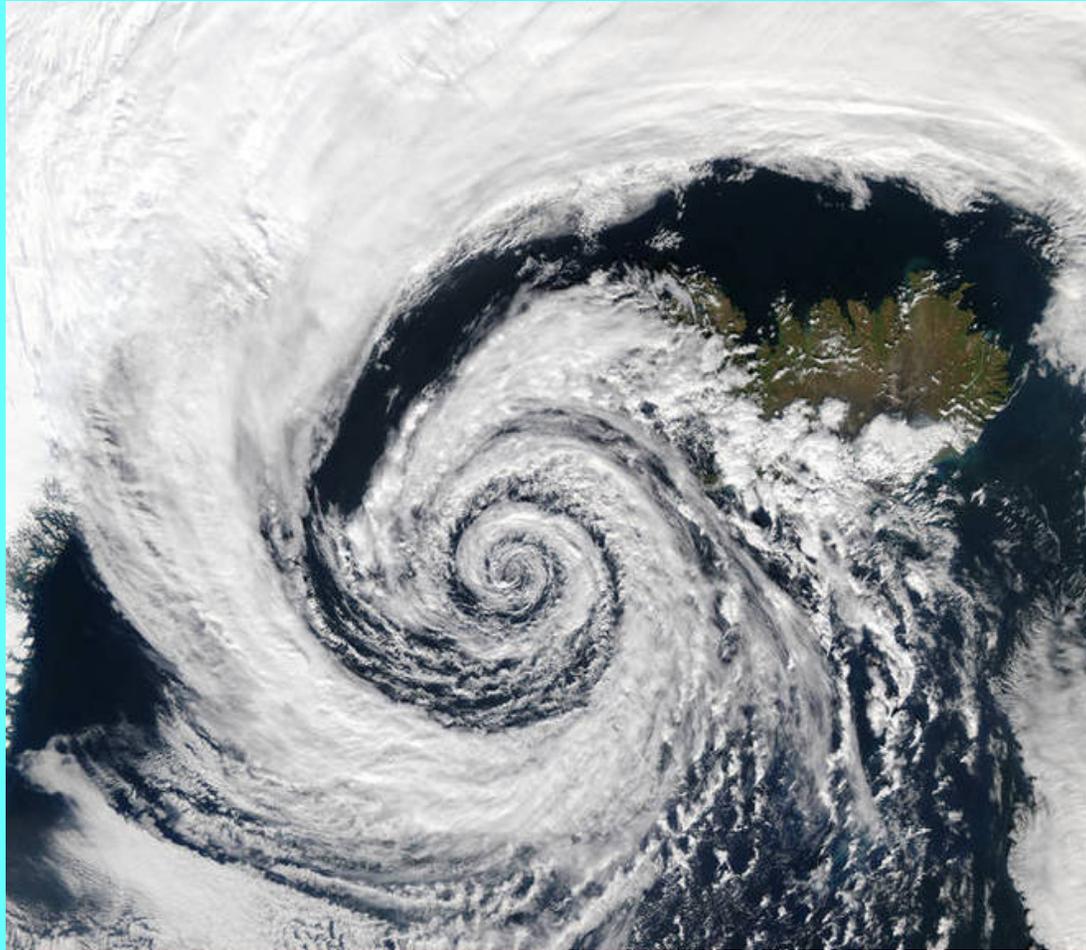
Млечный путь



Cyclone Catarina



Low pressure system over Iceland



Спираль в небе Норвегии



Sunflower (Спираль Ферма)

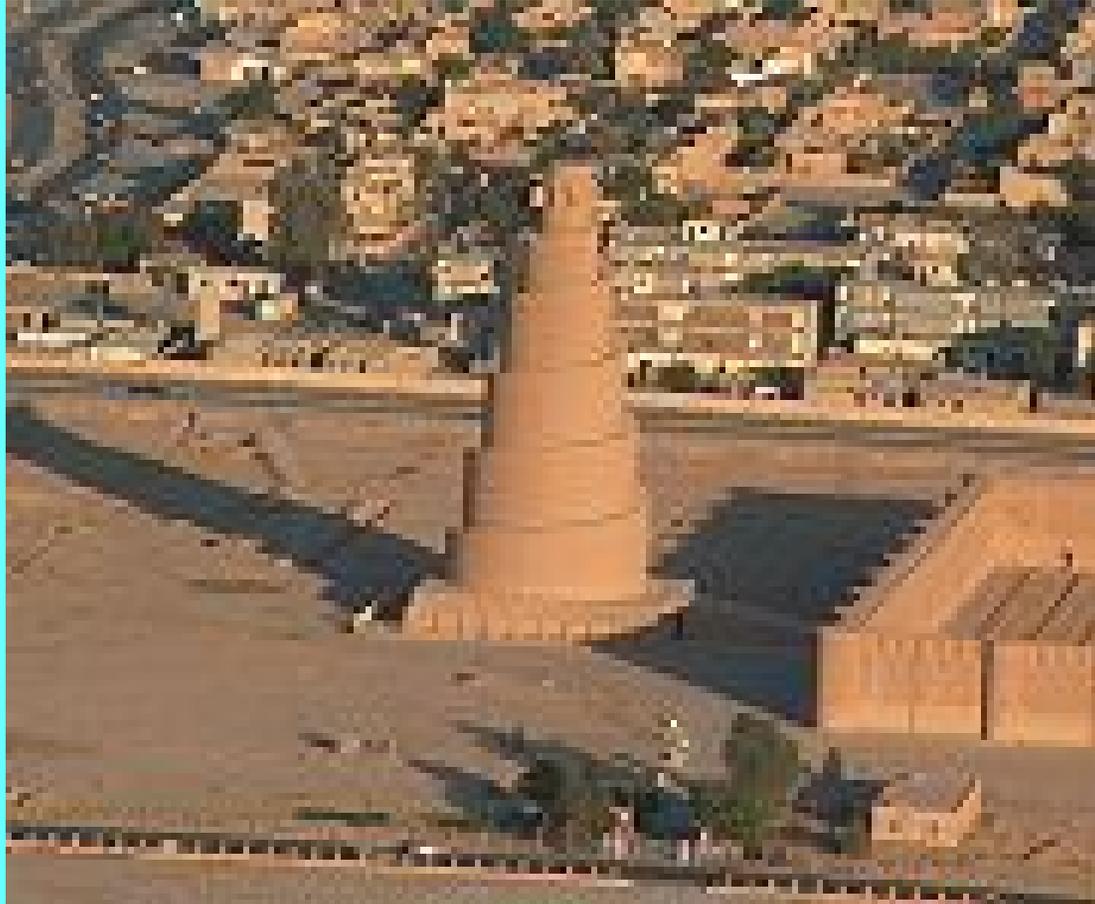
$$r = c\sqrt{n}, \varphi = n135^\circ$$



Spiral Aloe



Spiral minaret



Forest-Spiral-Building-Darmstadt

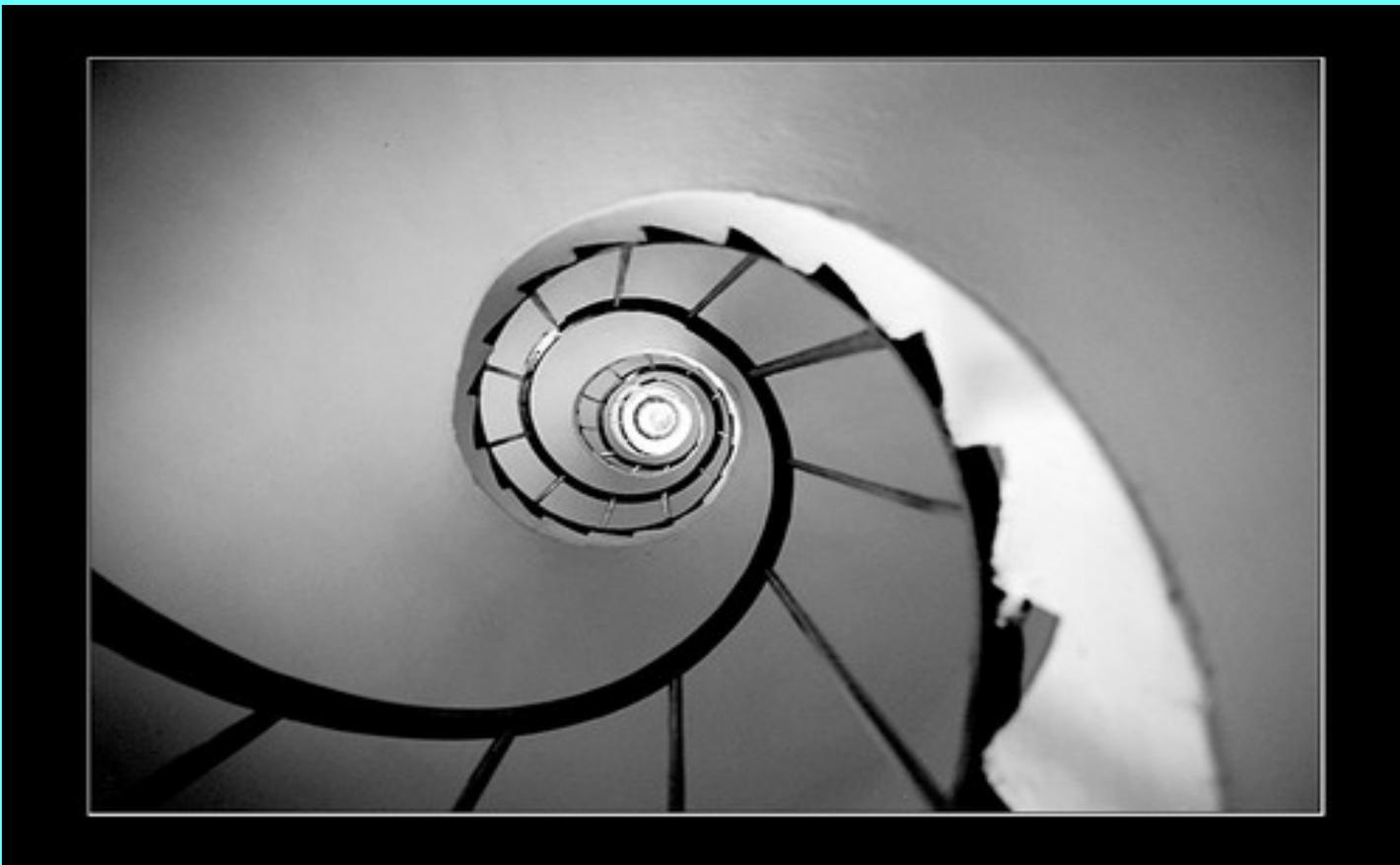


Spiral Tunnel





Лестница



Лестница(С.Петербург)





Обои для рабочего стола



Velvet-sofa



Кресло



Устройство запретных зон

\ 911 \ 926 1 926 , \ 916 \ 371 07 67



- Весьма сложный символ, который использовался со времен палеолита и появляется в додинастическом Египте, на Крите, в Микенах, Месопотамии, Индии, Китае, Японии, доколумбовой Америке, Европе, Скандинавии и Британии; он найден также в Океании. Это также вихрь, великая созидательная сила. Как расходящаяся и сходящаяся, она может означать, рост и распространение, рождение и смерть. Она может символизировать также преемственность. Может являться изображением вращающегося небосвода, движения Солнца, смены времен года, вращения земли. Как вихрь или водоворот, она сравнивается с великими созидательными силами. Как смерч она ассоциируется с китайским опускающимся драконом. Спираль и смерч имеют одну и ту же символику, особенно когда выступают как символы энергии в природе. Спирали, или вихри, ассоциируются с прядением и тканием паутины жизни и завесы Богини-Матери, распорядительницы судеб и ткачихи завесы иллюзий. Спираль имеет, кроме того, ту же символику, что и лабиринт. Как гром, молния и дождевые облака, она является символом плодородия.....

- Мегалитическое искусство
- 4 закон диалектики-Развитие движется по спирали именуемый как "отрицание отрицания") (начиная с Платона и Сократа)

Входная плита в Newgrange (Ирландия, 2500 до н.э.)



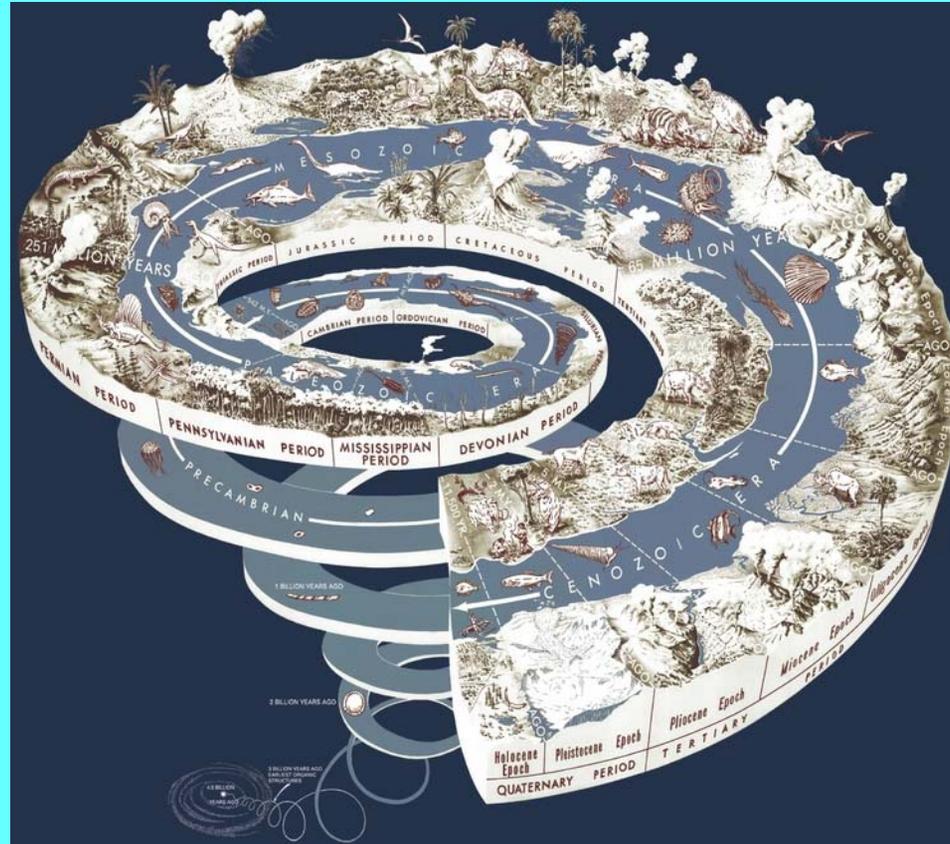
Dolgov



Времена



Geological-Spiral



Бытие



*Если покажется замкнутым кругом
Вечная наша Спираль Бытия,
Друг, не спеши захлебнуться испугом -
Всё возвратится на круги своя.*

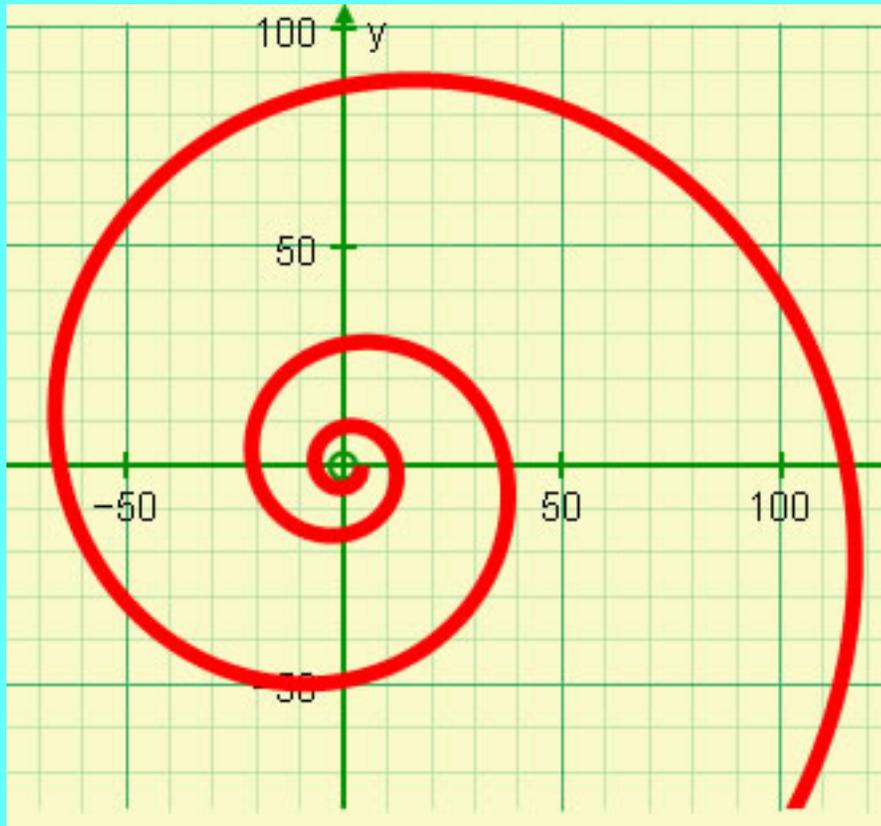
Типы спиральных структур

- Архимед- $r = a\varphi, \quad 0 < \varphi < \infty$

Лог.спираль $r = ae^{Q\varphi}, -\infty < \varphi < \infty$

- Eadem mutata resurgo
- Декарт, И. Бернулли
- Измененная, я воскресаю той же самой.

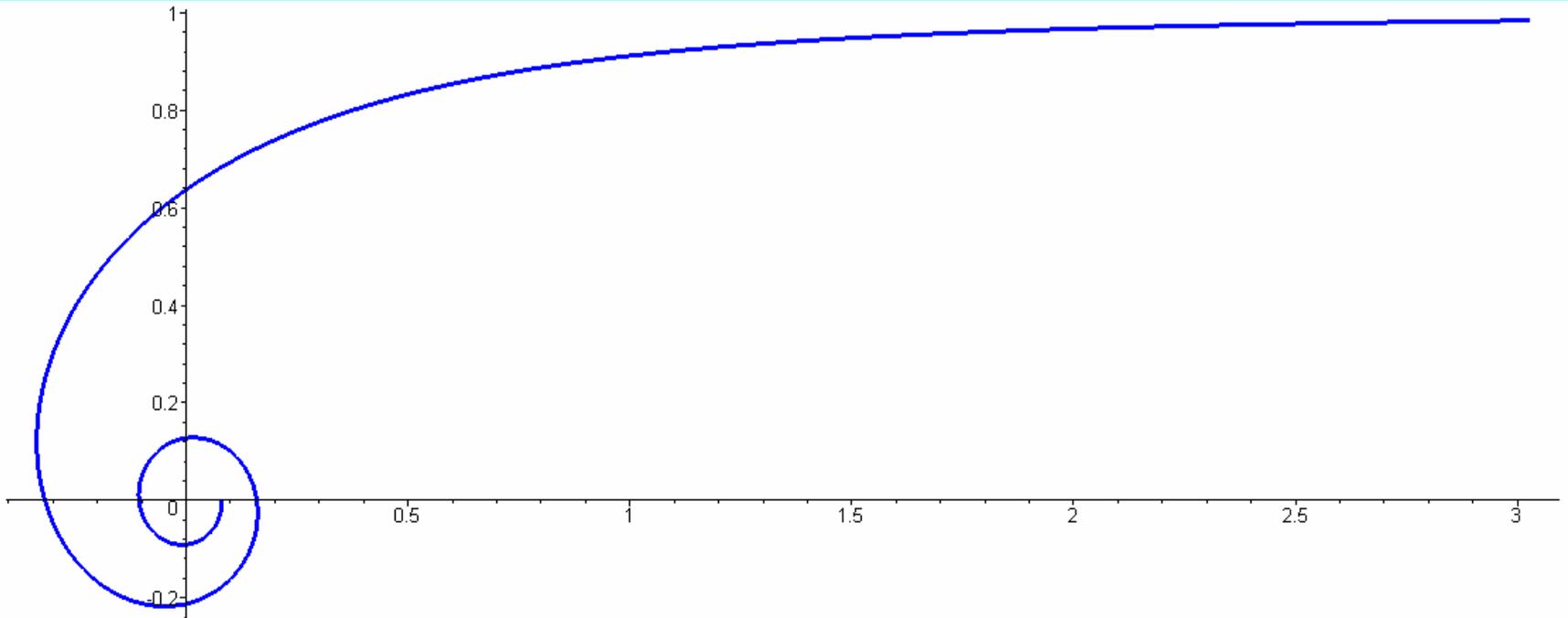
$$r = ae^{Q\varphi}, -\infty < \varphi < \infty$$



Декарт, И. Бернулли, *Eadem mutata resurgo*
Измененная, я воскресаю той же самой

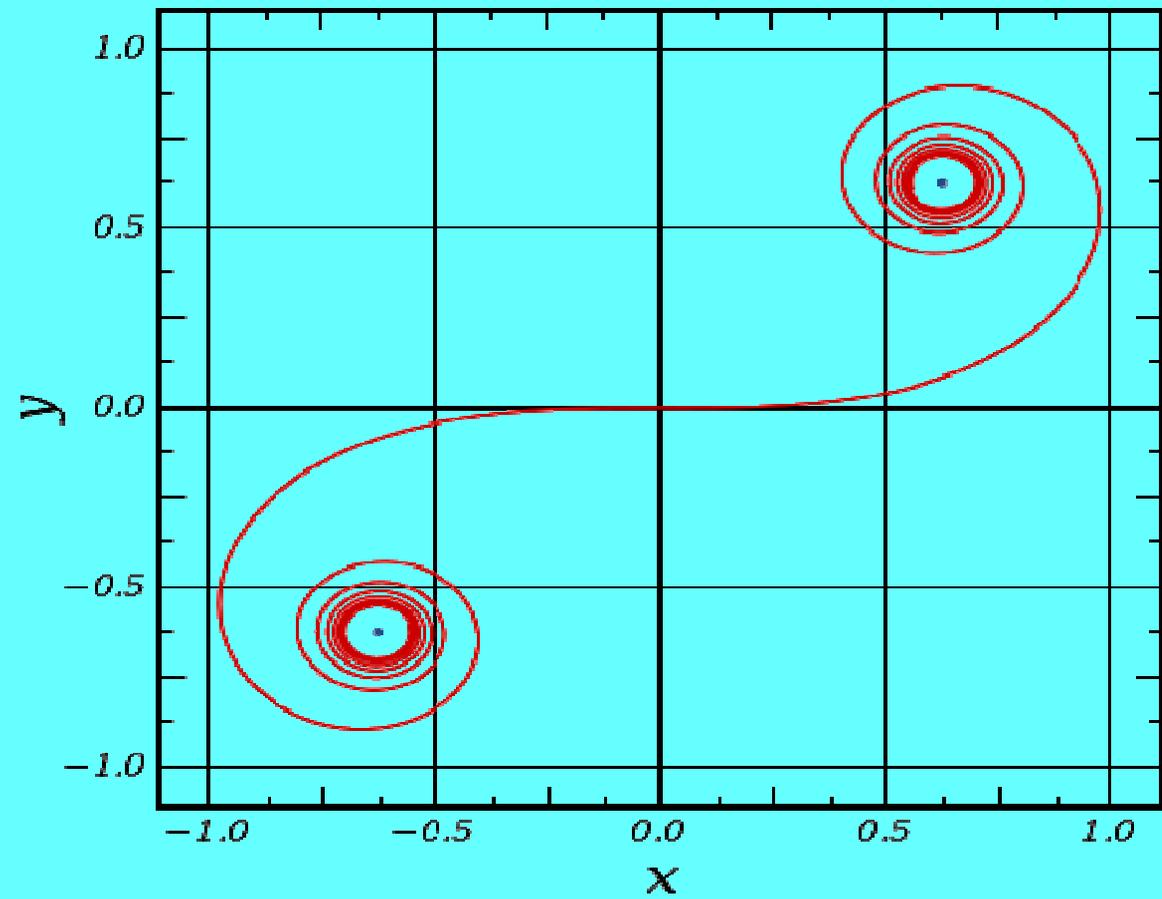
Гиперболическая спираль

$$r = \frac{a}{\varphi}$$



Гиперболическая спираль: $a = 1$

CornuSpiral



- Нелинейная динамика - общий подход для описания пространственных структур.
- Цель – поиск универсальных закономерностей, которые проявляются в общности математического описания множества разных объектов в естественных и общественных науках.
- Попытка увидеть новый уровень единства природы за огромным количеством различных уравнений и моделей.
- Многие общие закономерности можно найти и изучать на простых моделях.

- **В отсутствии притока энергии элементы физической системы являются пассивными, для каждого из них как и для системы в целом существует равновесное состояние с минимумом энергии.**
- **Поэтому сложные стационарные структуры в пассивных средах являются одновременно дефектами равновесного состояния**
- **Задачи**
- **Структура двумерных и трехмерных дефектов в конденсированных средах**
- **Физические свойства, топологические фазовые переходы, использование в современных технологиях (применение в устройствах памяти нового поколения ЭВМ в более сложных системах счисления)**

Уравнение Гросса-Питаевского, и
комплексное уравнение Ландау-Гинзбурга.

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + \lambda \Psi \pm \Psi |\Psi|^2$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + (1 + ib) \Psi \pm (1 + ic) \Psi |\Psi|^2$$

Вихрь, Спир. волны

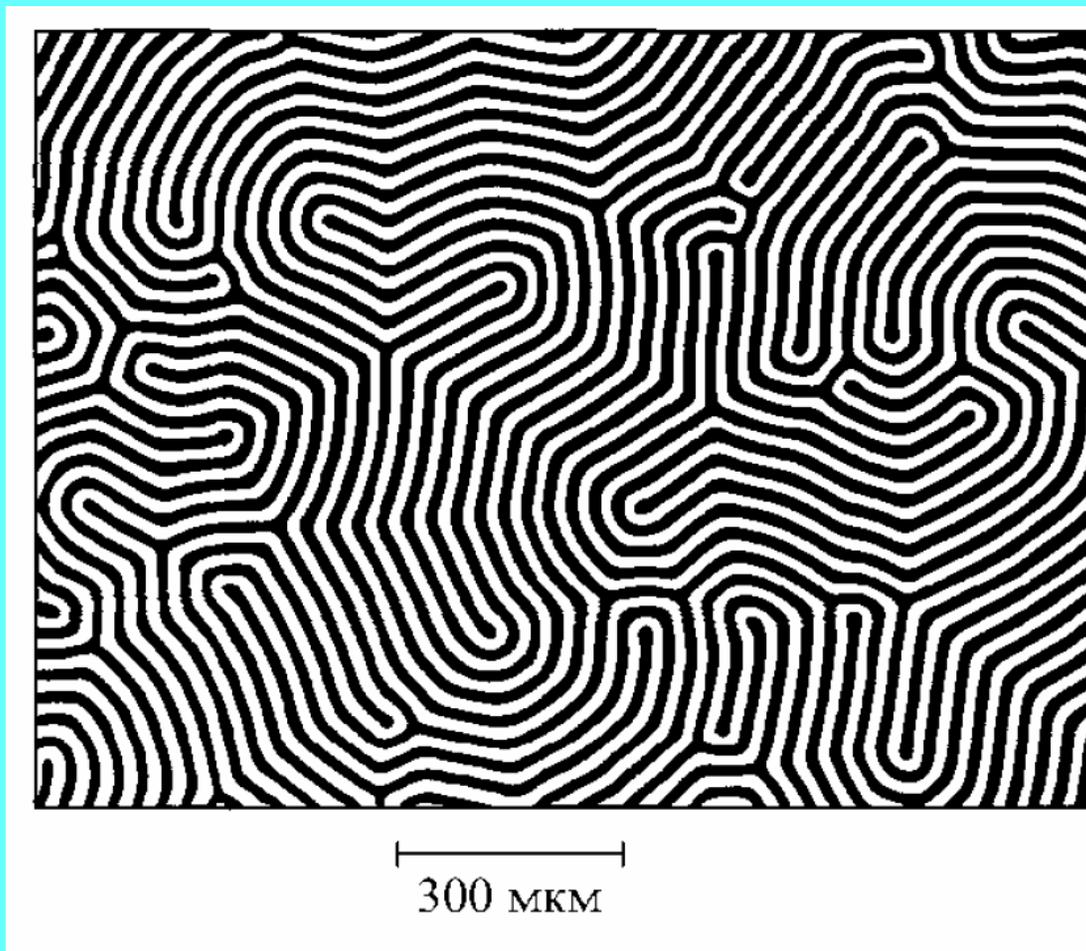
$$\Psi = f(r)e^{i\Phi}, f(0) = 0, f(\infty) = 1, \Phi = Q\varphi$$

$$\oint \vec{\nabla}\Phi d\vec{r} = Q,$$

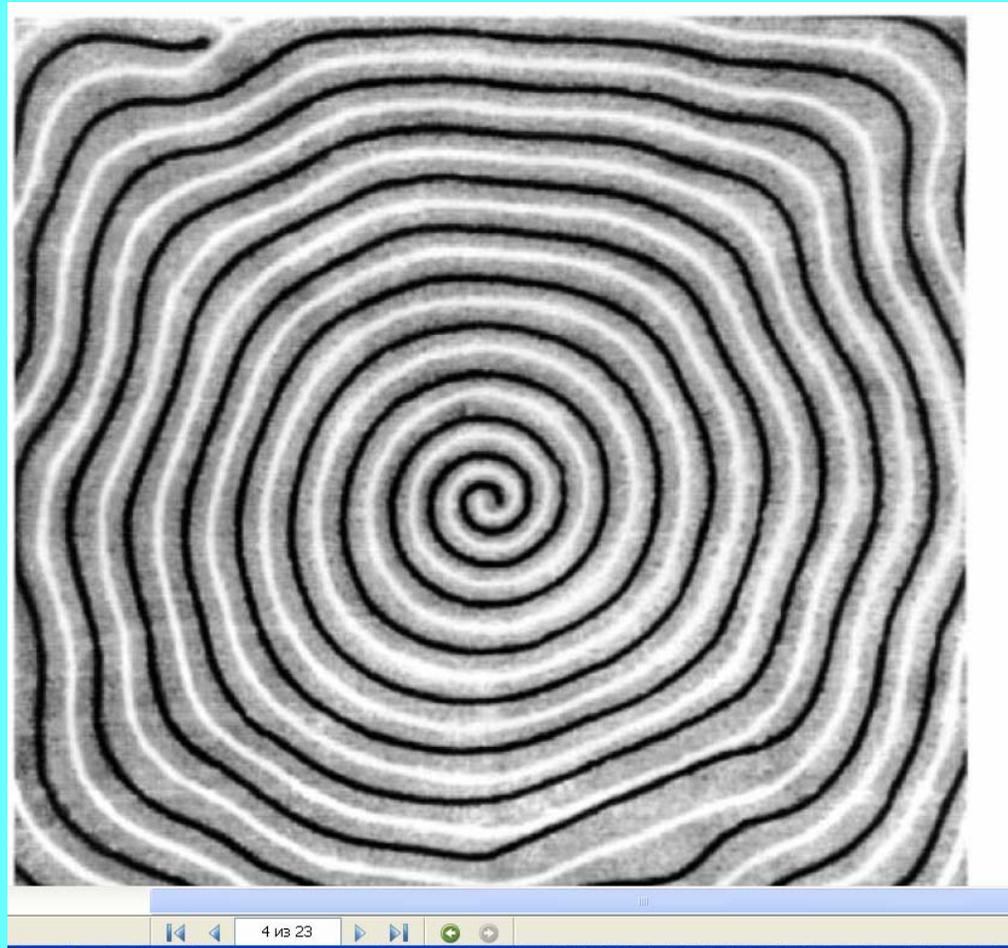
$$\Psi = f(r)e^{i\Phi}, \Phi = Q\varphi + \omega t + \rho(r), f(0) = 0, \\ f(\infty) = \text{const}, \rho(r) \rightarrow kr(r \rightarrow \infty)$$

- **Магнитные системы были и остаются наиболее удобными объектами для исследования нелинейных эффектов и образования пространственных структур.**
 - *Большое разнообразие магнетиков с различными макроскопическими параметрами.*
 - *Возможность изменения характера нелинейности среды внешними условиями.*
 - *Существенная нелинейность феноменологических и микроскопических уравнений.*
 - *Возможность полного теоретического описания ряда магнитных соединений*
 - *Макроскопические универсальные уравнения. Нет ТВ.*

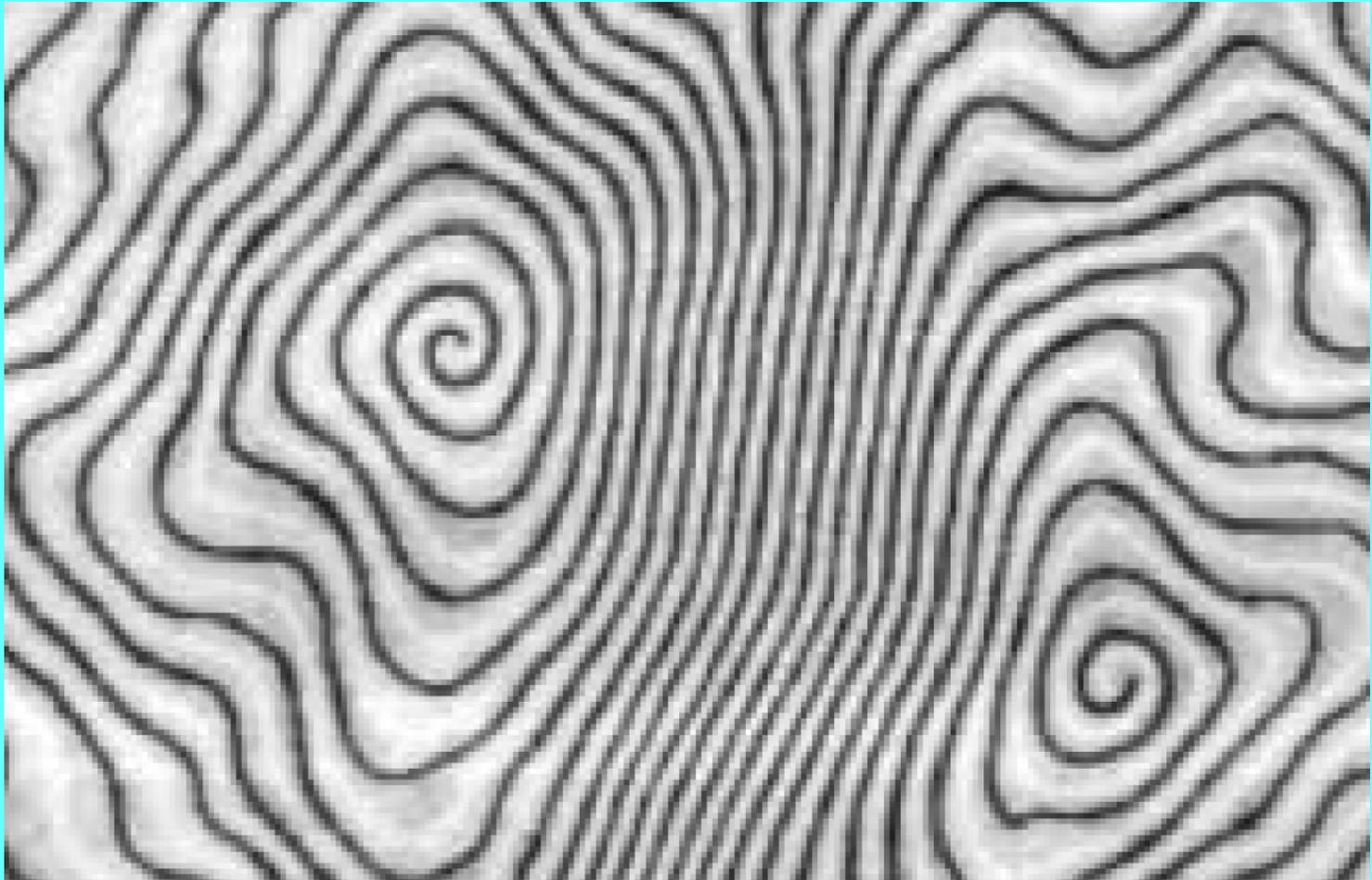
Лабиринтная доменная структура



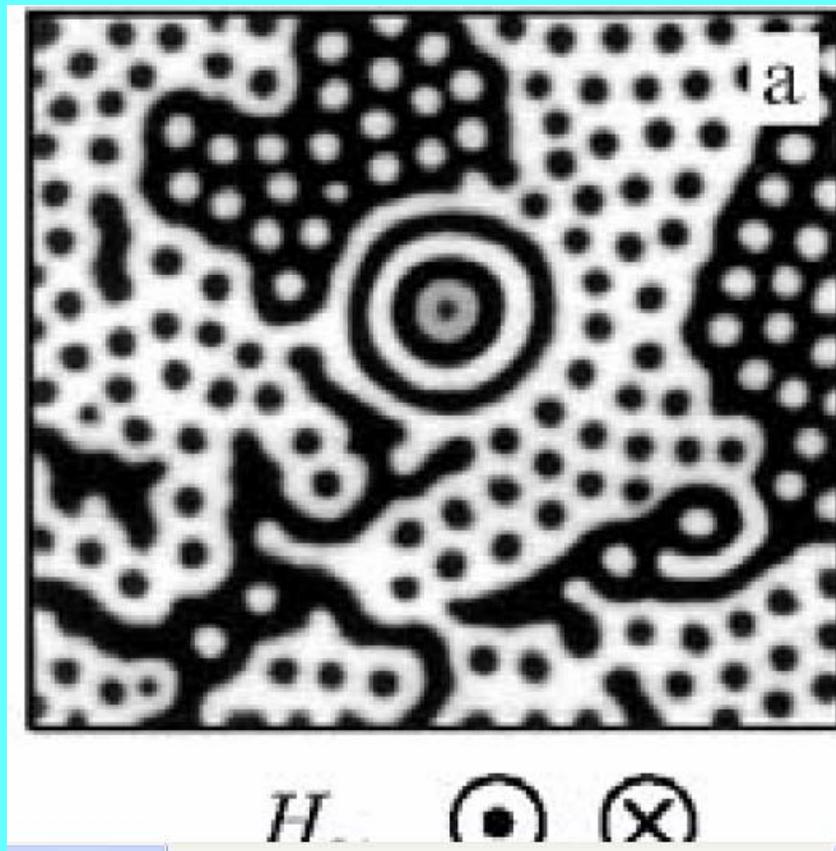
Магнитная спираль



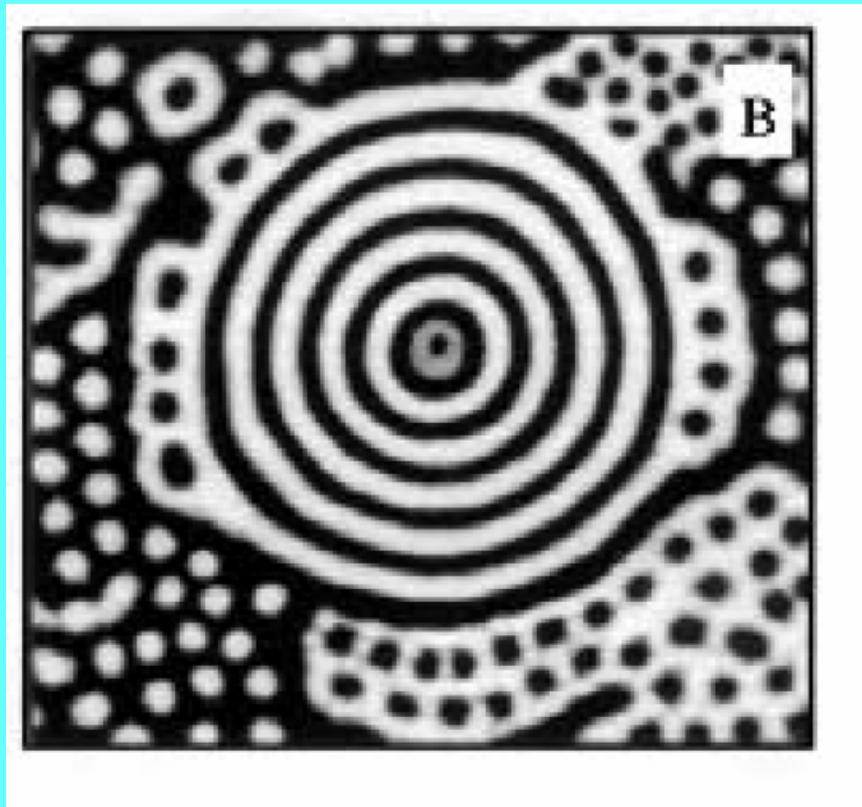
Спиральный диполь



Магнитная мишень (стац. вед. центр

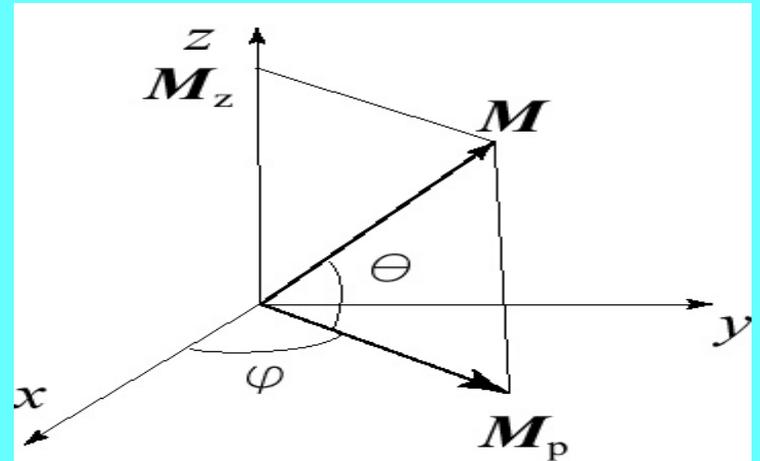
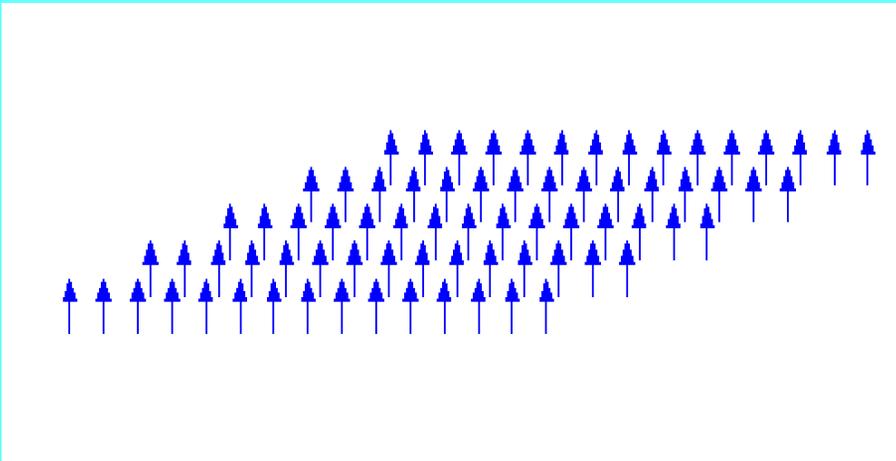


Магнитная мишень(стац.вед.центр)



$$H = - \sum_{p,n} J_{pn} \vec{S}_p \vec{S}_n$$

$$\hat{M} = - \hbar \gamma \hat{S}$$



...все это находится в уравнениях, только у нас нет еще способа вытащить это оттуда.

Р.Фейнман

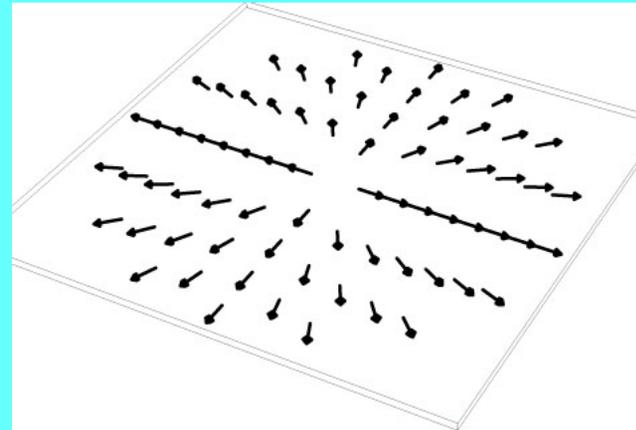
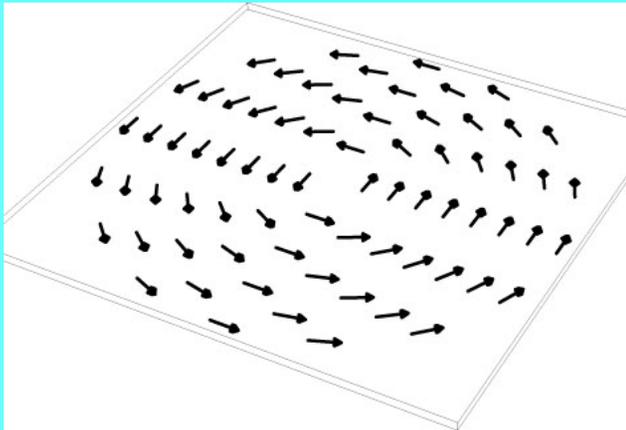
$$[\vec{M}, \Delta \vec{M}] = 0, \vec{M}^2 = M_0^2,$$

$$\Delta \theta = \sin \theta \cos \theta (\vec{\nabla} \Phi)^2,$$

$$\vec{\nabla} (\sin^2 \theta \vec{\nabla} \Phi) = 0$$

Плоские вихри(D=2).Вытекание в третье измерение

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \Phi = Q\varphi$$

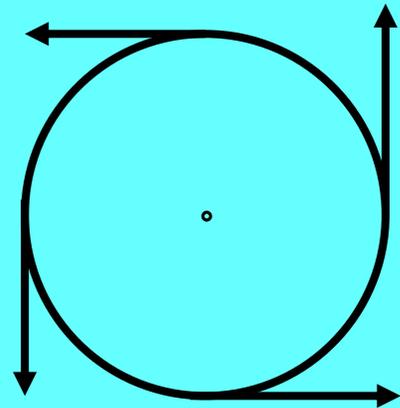
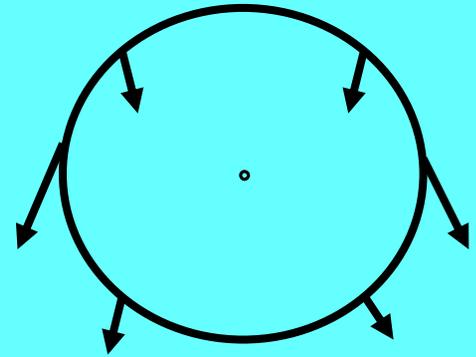


Топология

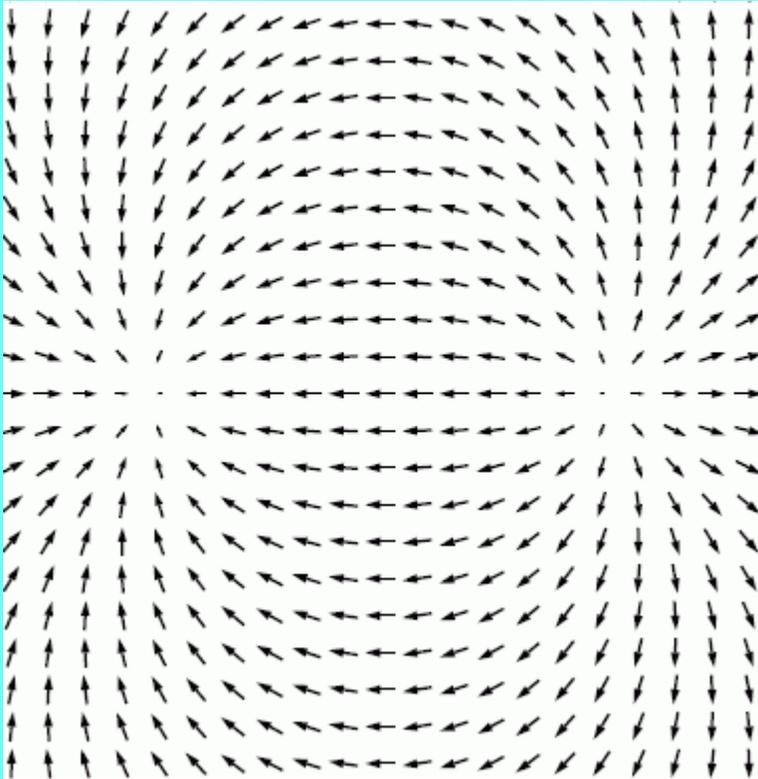
$$\vec{M} = M_0 (\cos \Phi, \sin \Phi)$$

$$\varphi \rightarrow \Phi, S^1 \Rightarrow S^1 \quad \text{top.ch.}$$

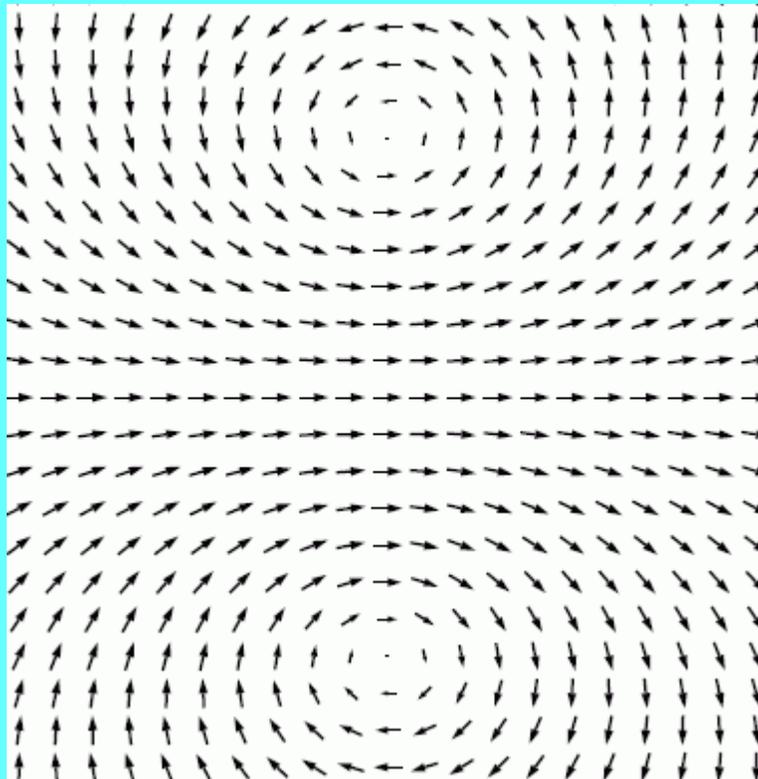
$$\oint \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = 2\pi N$$



Диполь



$$\theta = \frac{\pi}{2}, \Phi = Q_1 \arctan \frac{y}{x} + Q_2 \arctan \frac{y}{x - x_0}$$



объектом, наделенным структурой, попытайтесь определить преобразования, оставляющие без изменения все структурные соотношения. Вы можете рассчитывать на то, что на этом пути вам удастся проникнуть глубоко во внутреннее строение объекта». (Г. Вейль)

$$r' = r e^{\alpha}, \varphi' \rightarrow \varphi + \beta, \theta(r, \varphi) = \text{const},$$

$$\text{Озеев}, r' = r e^{\alpha}, \varphi' \rightarrow \varphi + c\alpha,$$

$$\theta(r, \varphi) = \theta(r e^{\alpha}, \varphi + c\alpha)$$

$$\ln r a + b\varphi$$

$$\Omega = \Phi + i\Psi = F(z),$$

$$\Phi = N \ln r + \Gamma \varphi$$

$$\theta = F_1(a_1 \ln r + a_2 \varphi), \Phi = F_2(a_3 \ln r + a_4 \varphi), \Rightarrow$$

$$\nabla \Phi \nabla \theta = 0, \quad \Phi_{,x} = F(r, \varphi) \theta_{,y}, F(r, \varphi) \Rightarrow F(\theta, \Phi) \Rightarrow F(\theta)$$

$$\nabla \Phi \nabla \theta = 0 \Rightarrow \Delta \Phi = 0, \quad \Phi_{,y} = -F(\theta) \theta_{,x},$$

Ортогональность (D=2)

$$[\vec{M}, \Delta \vec{M}] = 0, \vec{M}^2 = M_0^2,$$

$$\Delta \theta = \sin \theta \cos \theta (\vec{\nabla} \Phi)^2, \vec{\nabla} (\sin^2 \theta \vec{\nabla} \Phi) = 0,$$

$$\nabla \theta \nabla \Phi = 0, \Phi_{,x} = F(\theta) \theta_{,y}, \Phi_{,y} = -F(\theta) \theta_{,x},$$

$$\Delta \Phi = 0, \Delta \theta + \frac{\nabla \theta \nabla \theta \sin 2\theta}{4C + \cos 2\theta} = 0,$$

$$\theta \rightarrow \theta(a(x, y))$$

$$\theta_{,aa} = \frac{\sin 2\theta}{2}, \Delta a = \Delta \Phi = 0,$$

$$\nabla a \nabla a = \nabla \Phi \nabla \Phi, \nabla a \nabla \Phi = 0,$$

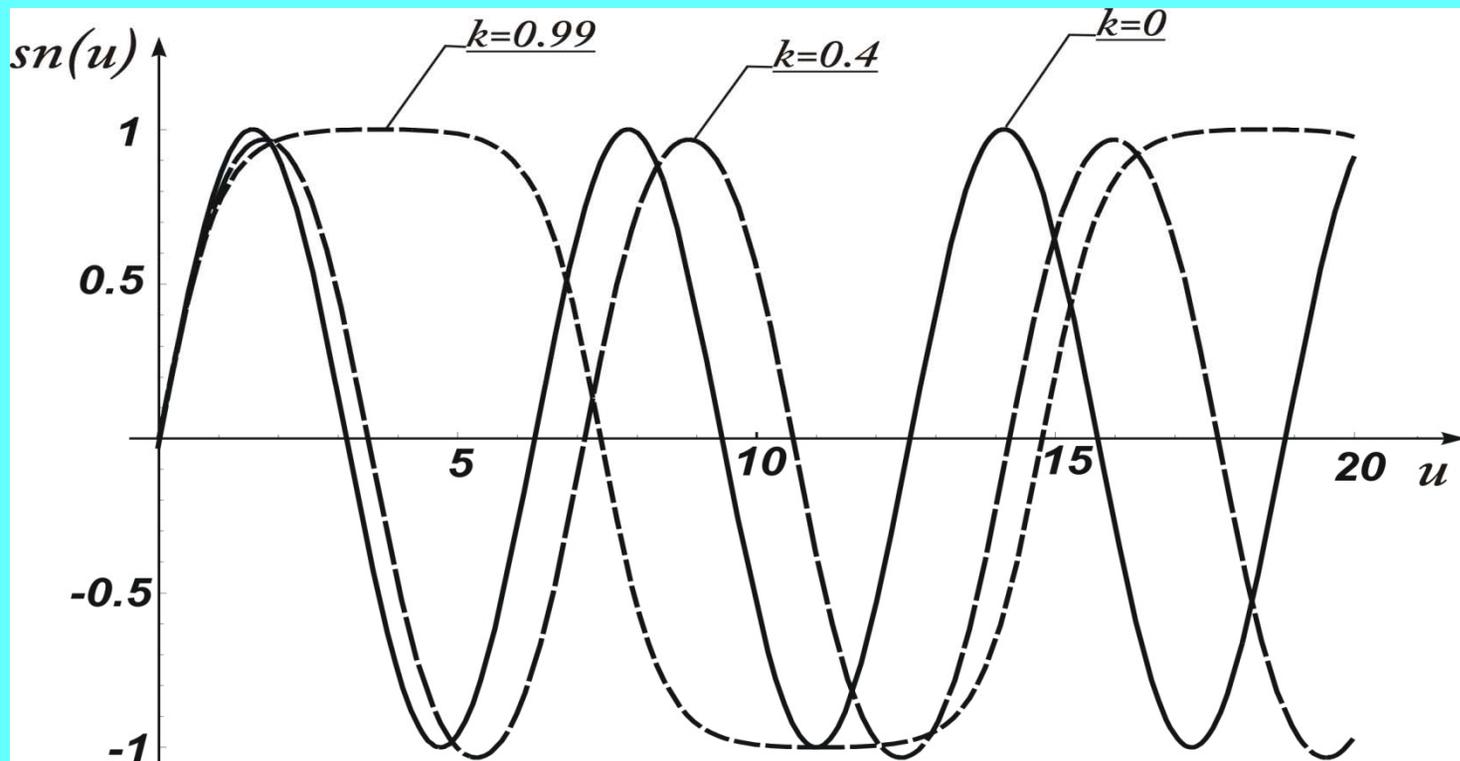
$$\Omega = a + i\Phi,$$

$$\Omega_{,\bar{z}z}$$

$$\Omega_{,z}\Omega_{,\bar{z}} = 0, z = x + iy$$

Гидродинамика!

$$\cos \theta(x, y) = \operatorname{sn} \left[\frac{a(x, y)}{k}, k \right] \quad (0 < k < 1),$$



$$\operatorname{sn}(t, k) = \operatorname{sn}(t + 4K, k)$$

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}$$

- Структуры

$$\cos \theta(x, y) = \operatorname{sn} \left[\frac{a(x, y)}{k}, k \right] \quad (0 < k < 1),$$

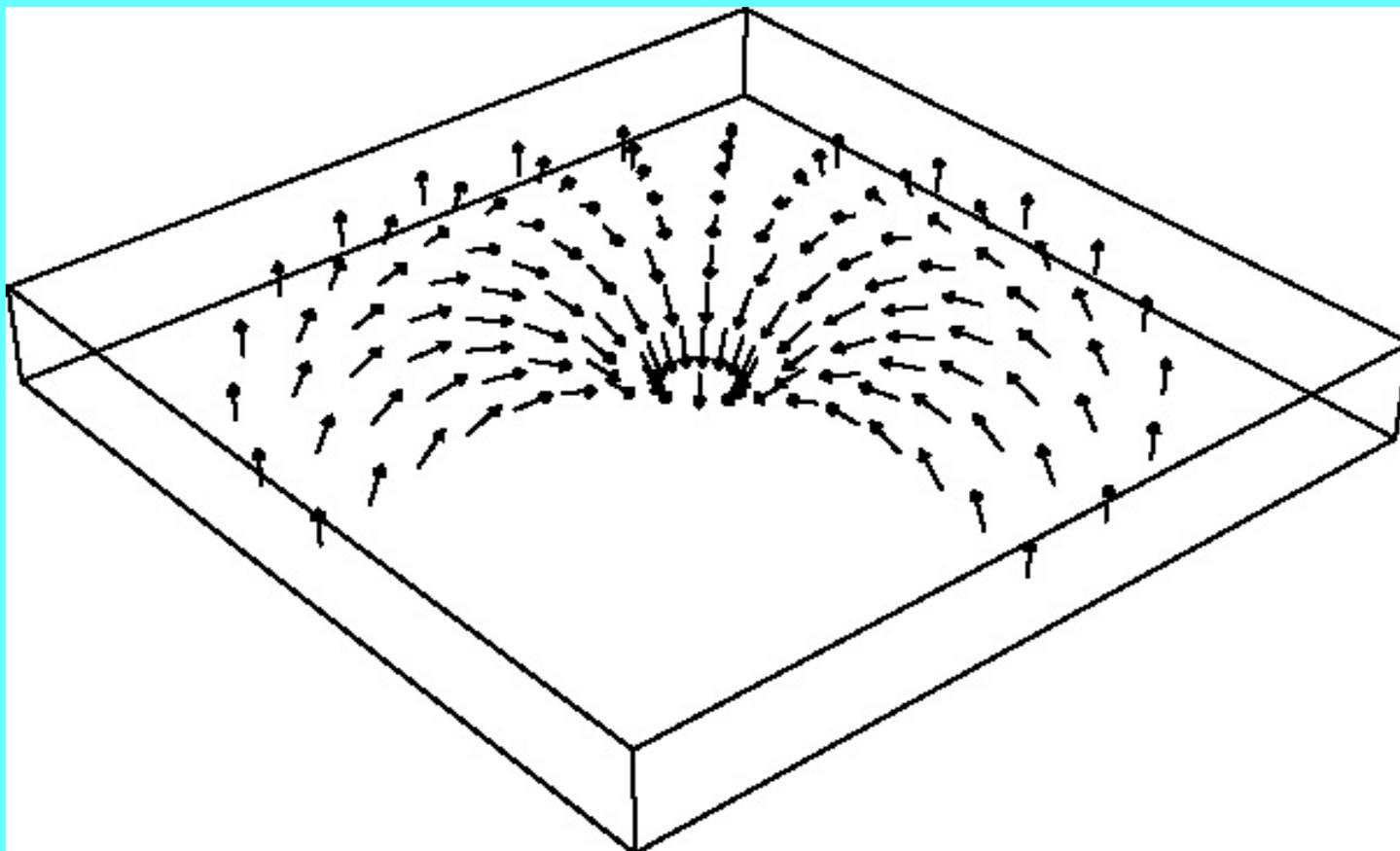
$$a(x, y) + i \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2 i k K}{\pi} N_i + Q_i \right) \ln (x + iy - c_i) \quad (N_i, Q_i \in \mathbb{Z}),$$

1) $N=0, k=1, n=1, \cos \theta = \operatorname{th} a, a = \ln r, \Phi(x, y) = Q\varphi,$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iint \sin \theta(\vec{r}) d\theta(\vec{r}) d\Phi(\vec{r}), \quad m(\vec{r}) \quad \hat{e}\hat{e}\hat{a}\hat{n}\hat{n}\hat{e}\hat{o} \hat{e}\hat{o}\hat{e}\hat{o}\hat{p} \hat{o} \hat{n}\hat{y}\hat{i} \hat{i} \hat{e}\hat{e}\hat{a}\hat{n}\hat{n}\hat{a}\hat{i}$$

$$S^2 \rightarrow S^2, \vec{M} \rightarrow M_0(0, 0, 1), \quad x + iy = \frac{v_1 + iv_2}{1 - v_3}, \quad v^2 = 1$$

Инстантон



Спиральный вихрь

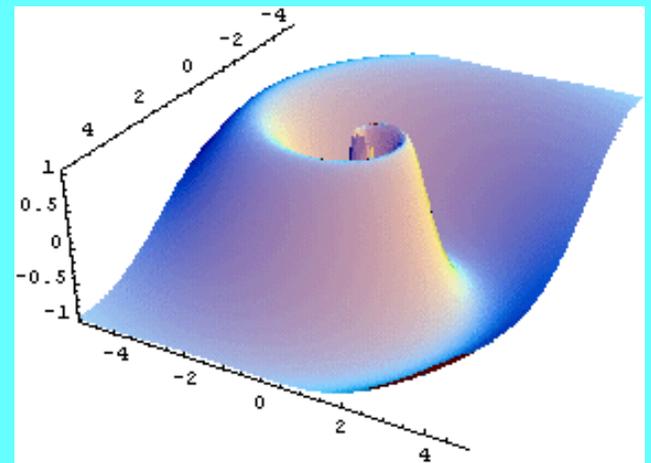
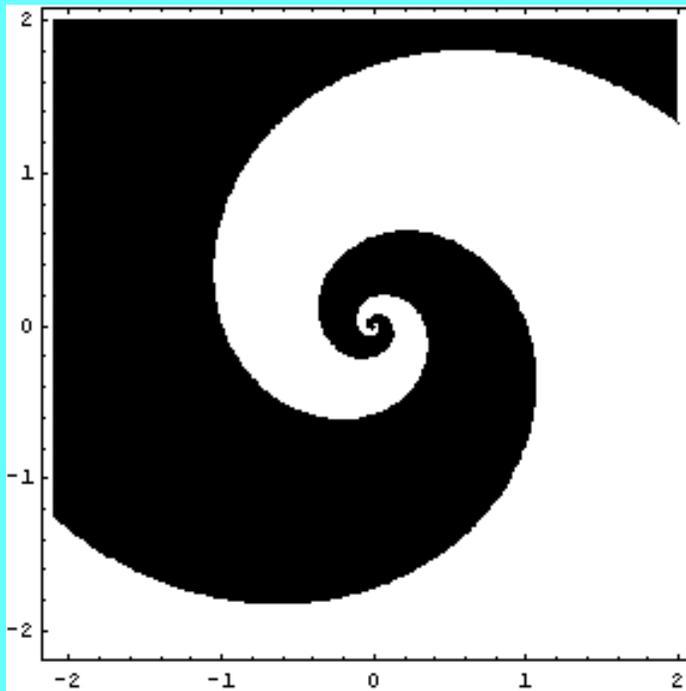
- Компактный вид

$$\cos \theta = \operatorname{sn} \left(\frac{Q \ln(r/r_0)}{k} - \frac{2K}{\pi} (\varphi - \varphi_0) N, k \right)$$

$$\Phi = Q(\varphi - \varphi_0) + \frac{2kK(k)}{\pi} N \ln(r/r_0),$$

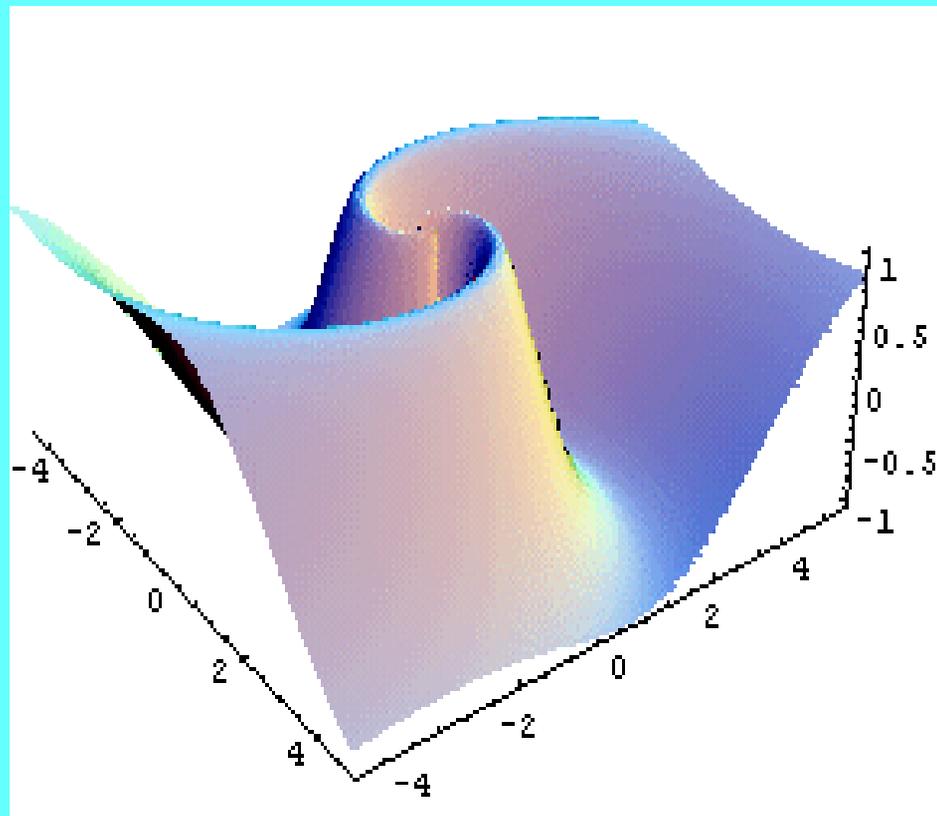
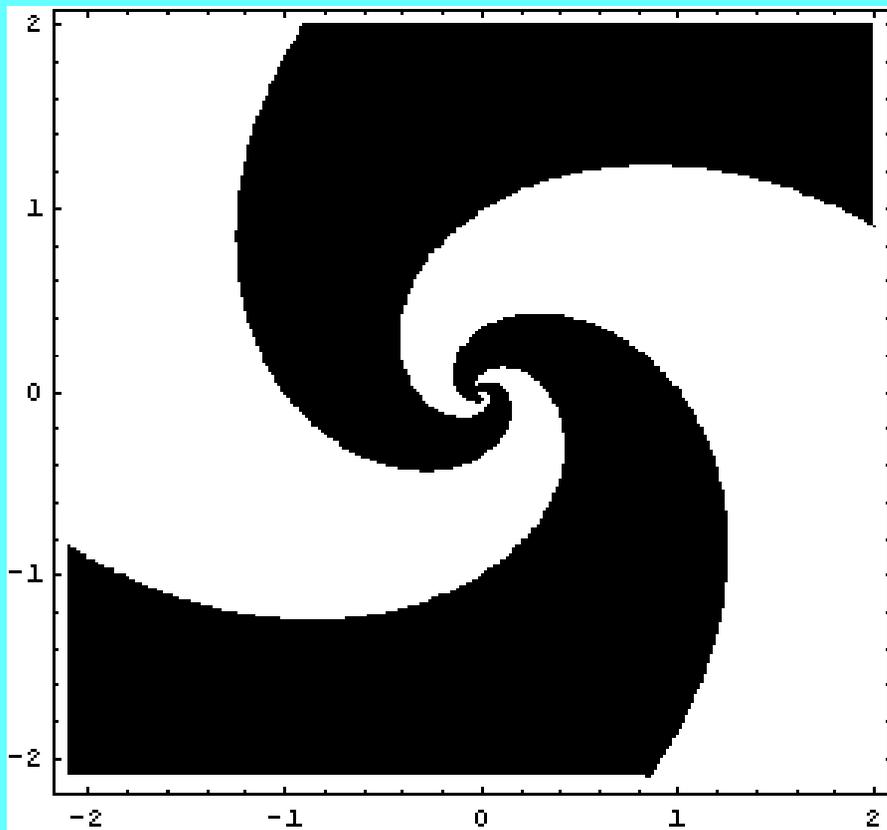
$$r = C \exp \left[\frac{2kK(k)\varphi}{Q\pi} \right],$$

Пространственное распределение $\cos \theta$ в однозаходной спирали ($\kappa = 0.5$, $Q = 1$). На вставке показаны домены с отрицательными (темные области) или положительными (светлые области) значениями $\cos \theta$

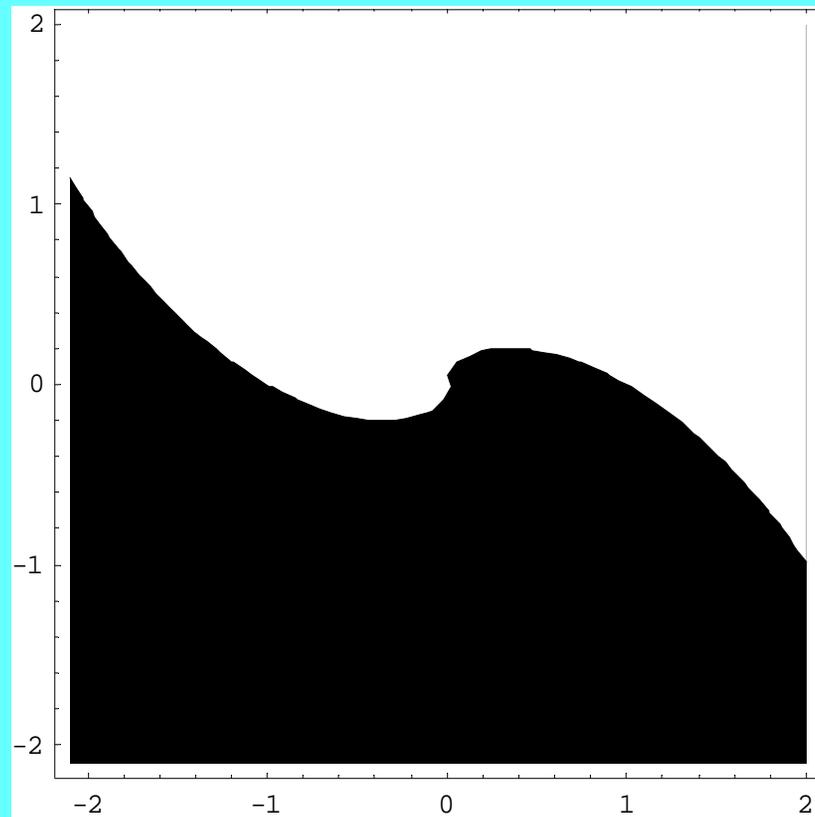


Структура кора в двухзаходной
спирали.

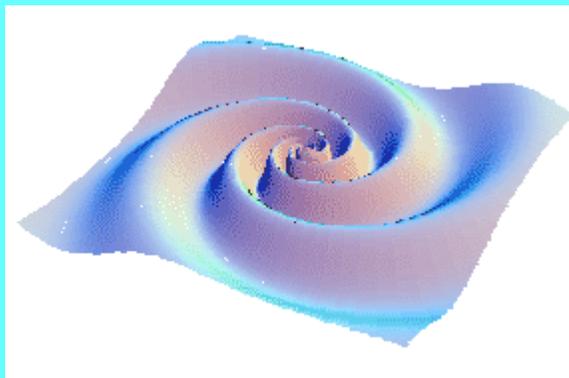
$$k = 0.5, \quad N = 2, \quad Q = 1$$



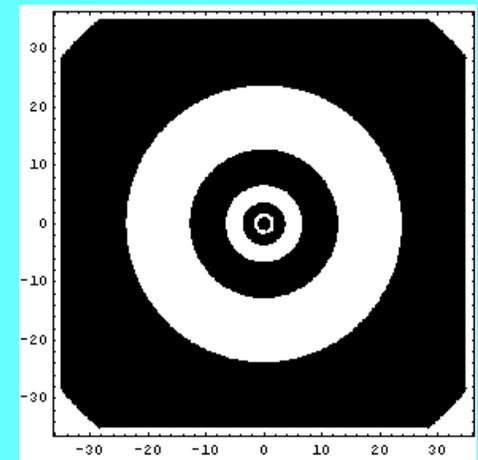
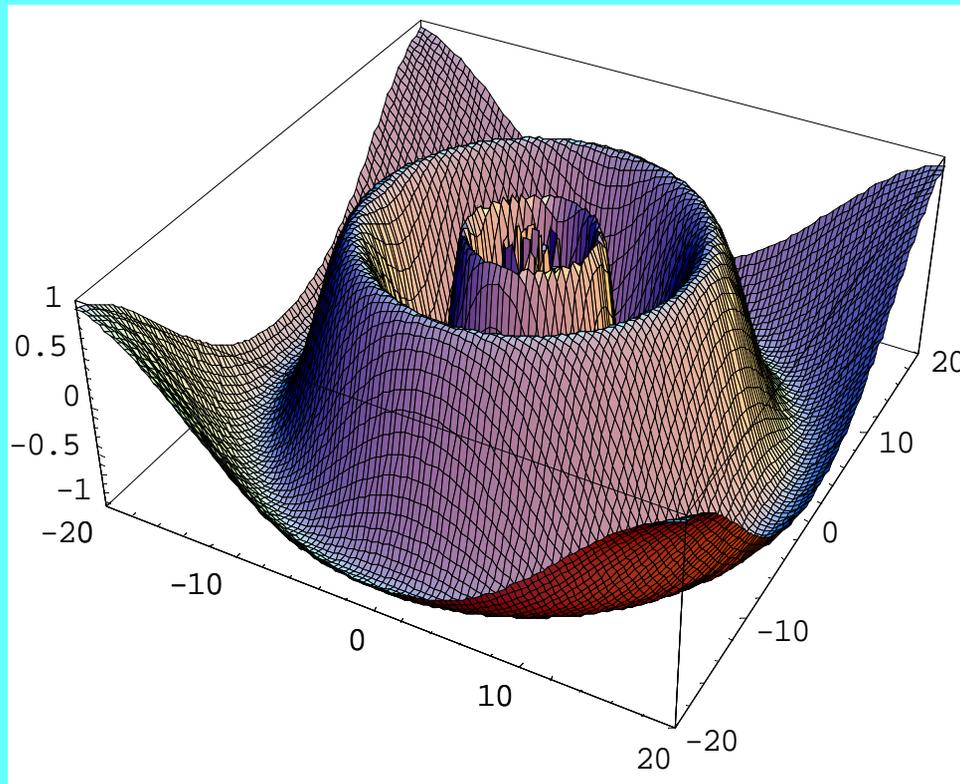
Зависимость формы спирали от k ($k=0.97$)



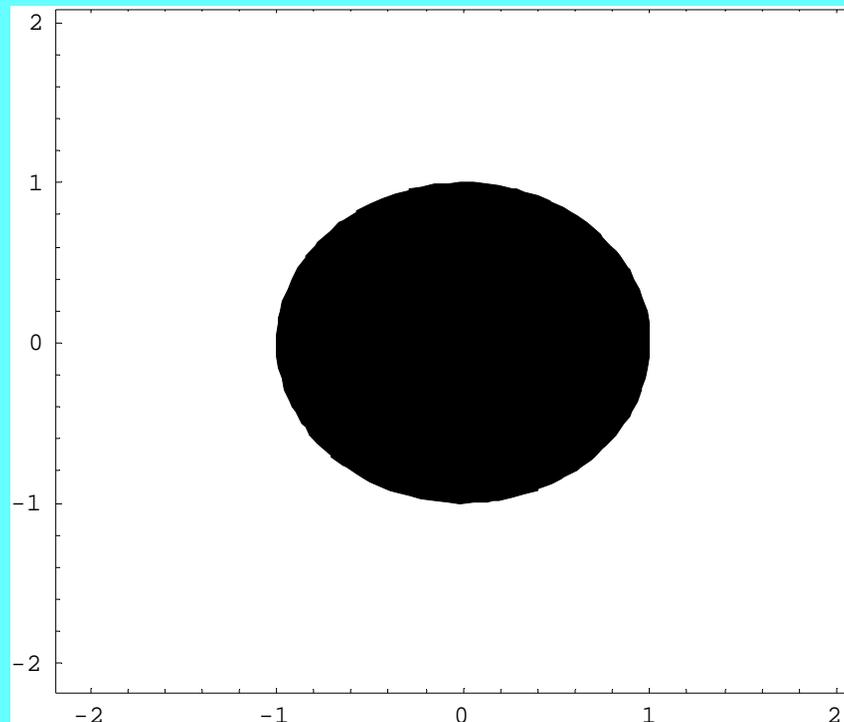
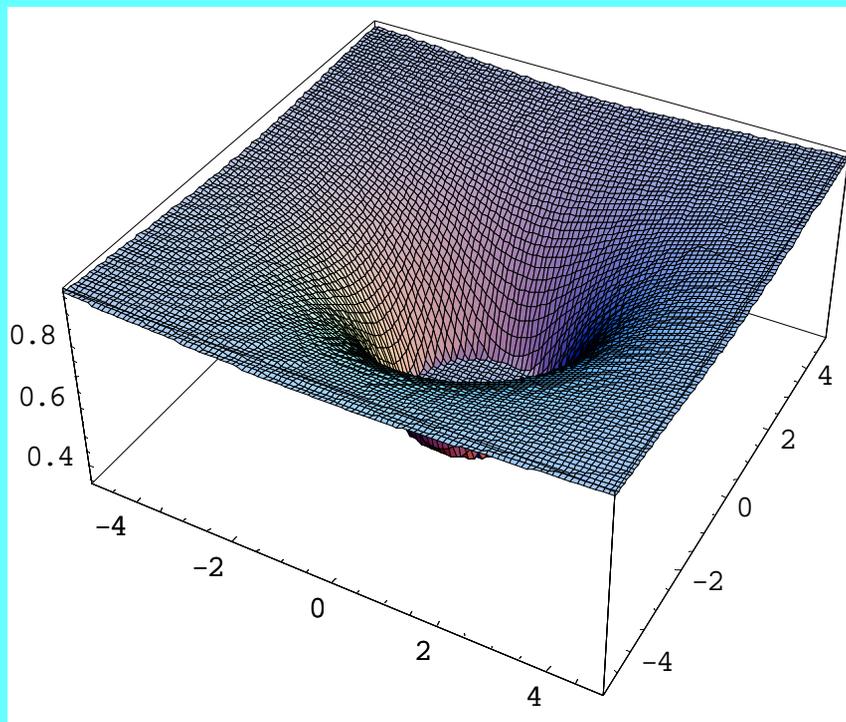
Зависимость $\cos\theta$ от k в трехзаходной спирали



Мишень ($N=0, k < 1$)

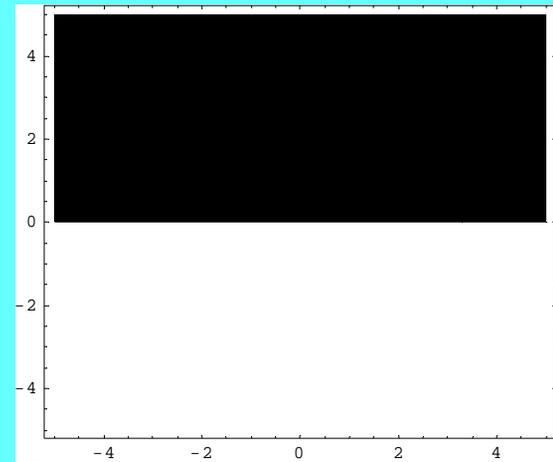
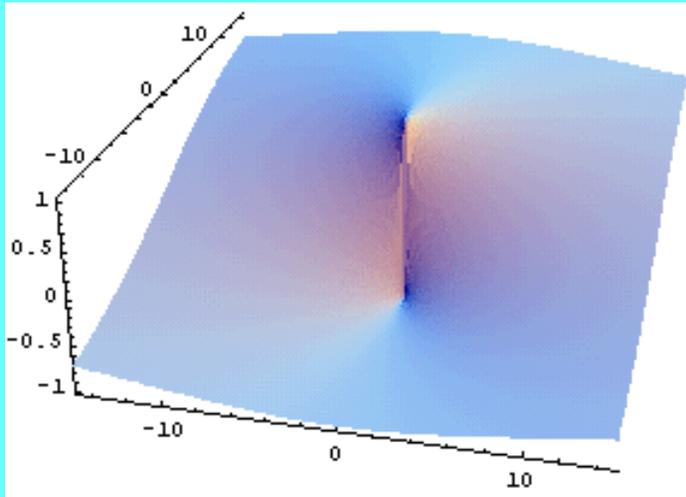


Инстантон ($N=0, k=1$)



$Q=0, P_{\text{ХИВ}}()=$

$v \text{ и } x p \text{ в }^{-1}$



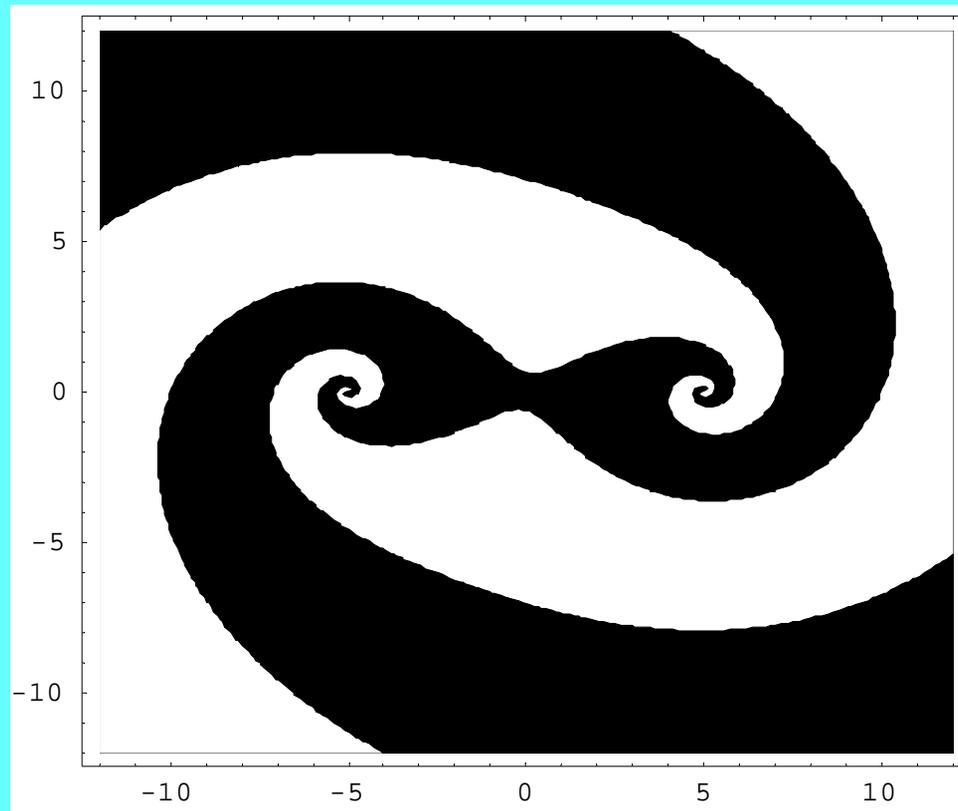
Диполи(простейшие конфигурации)

$$a(x, y) + i \Phi(x, y) = \left(\frac{2 i k K}{\pi} N_1 + Q_1 \right) \ln (x + iy - d) + \left(\frac{2 i k K}{\pi} N_2 + Q_2 \right) \ln (x + iy + d)$$

$$\cos \theta(x, y) = \operatorname{sn} \left[\frac{a(x, y)}{k}, k \right] \quad (0 < k < 1),$$

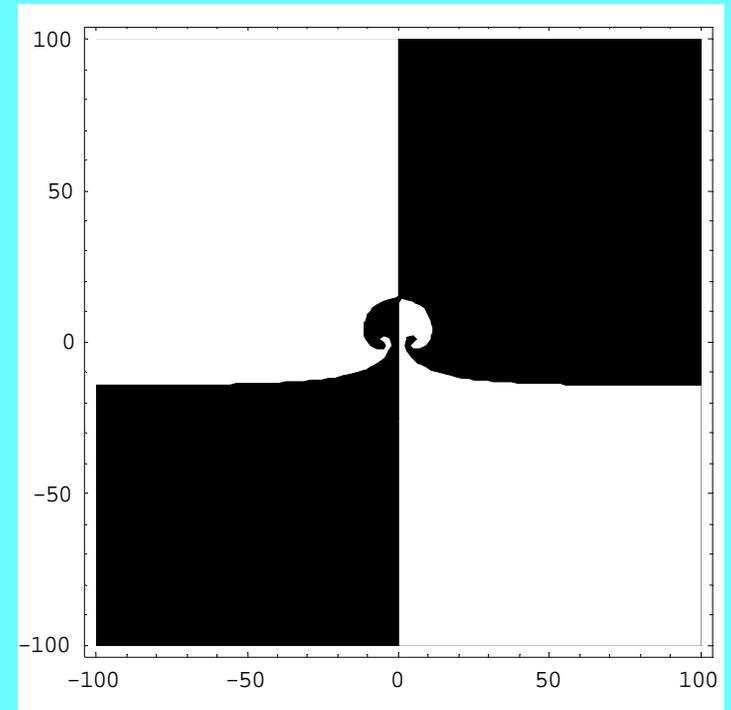
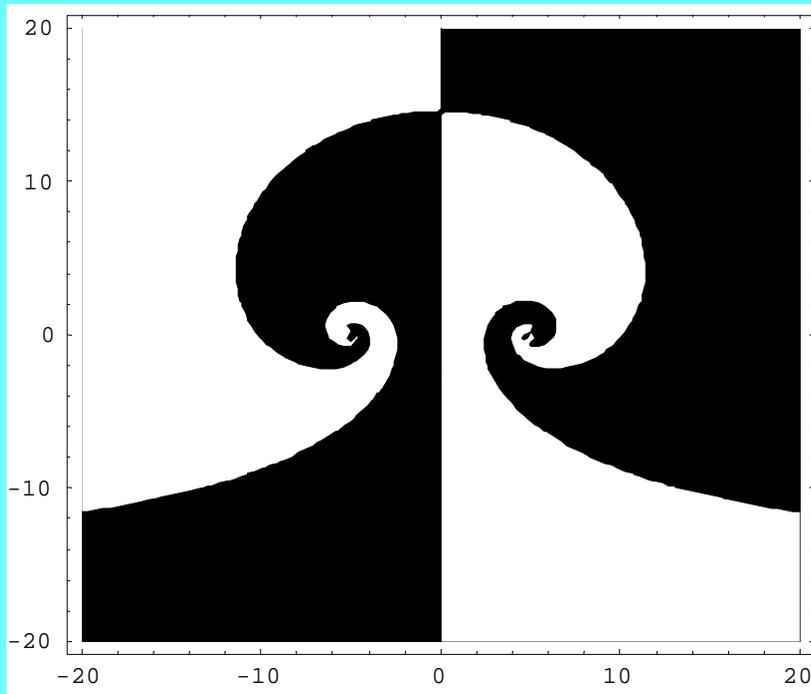
Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей и образующий на больших расстояниях двухзаходную спираль («**Страстный поцелуй**»)

$$k = 1/3, \quad N_1 = N_2 = 1, \quad Q_1 = Q_2 = 1, d = 5$$



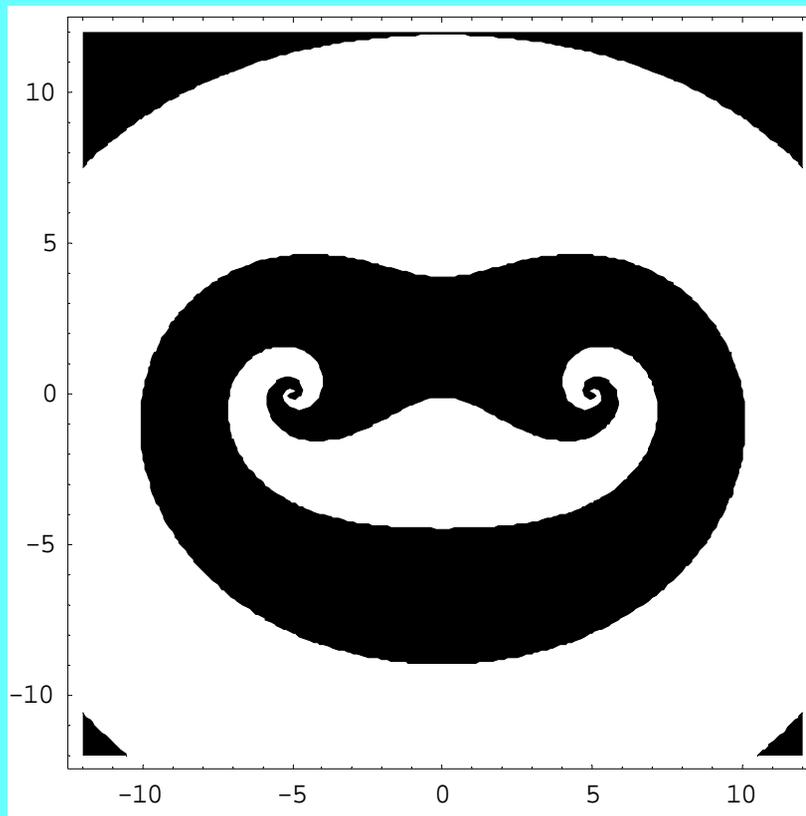
Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей(картина абстракциониста)

$$k = 1/3, N_1 = N_2 = 1, Q_1 = -Q_2 = -1, d = 5$$



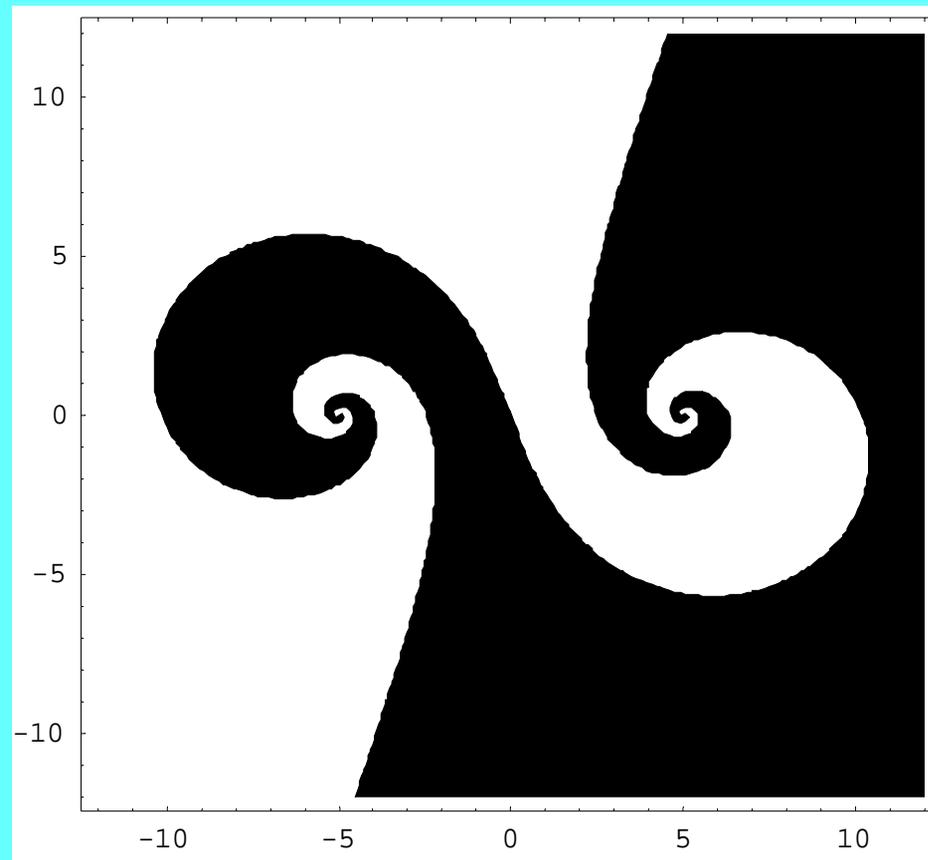
Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей и образующий на больших расстояниях мишень («Усы Пуаро»)

$$k=1/3, N_1=-N_2=-1, Q_1=Q_2=1, d=5$$



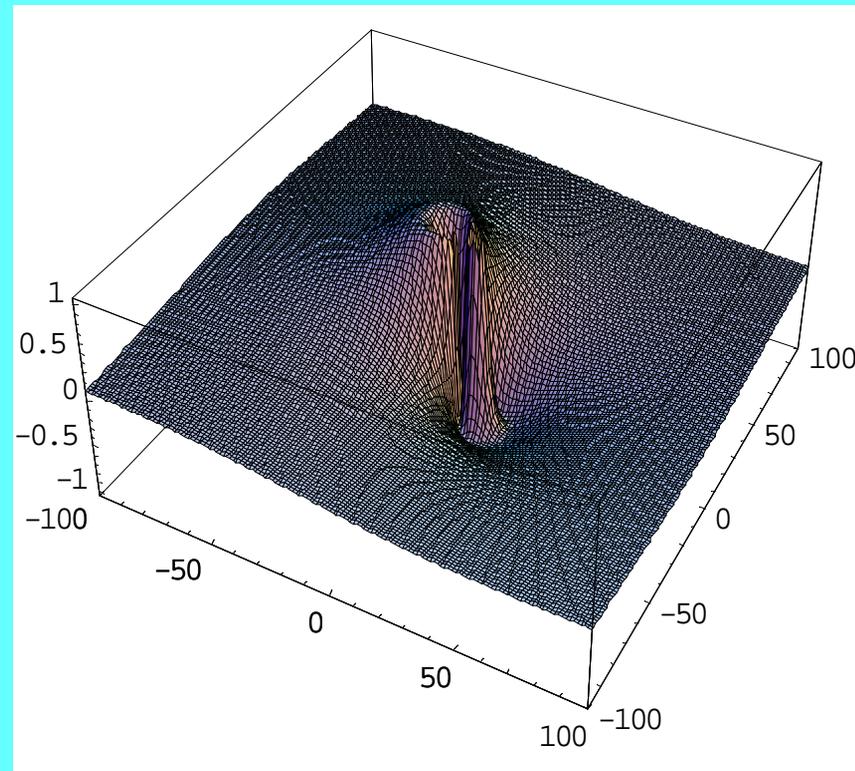
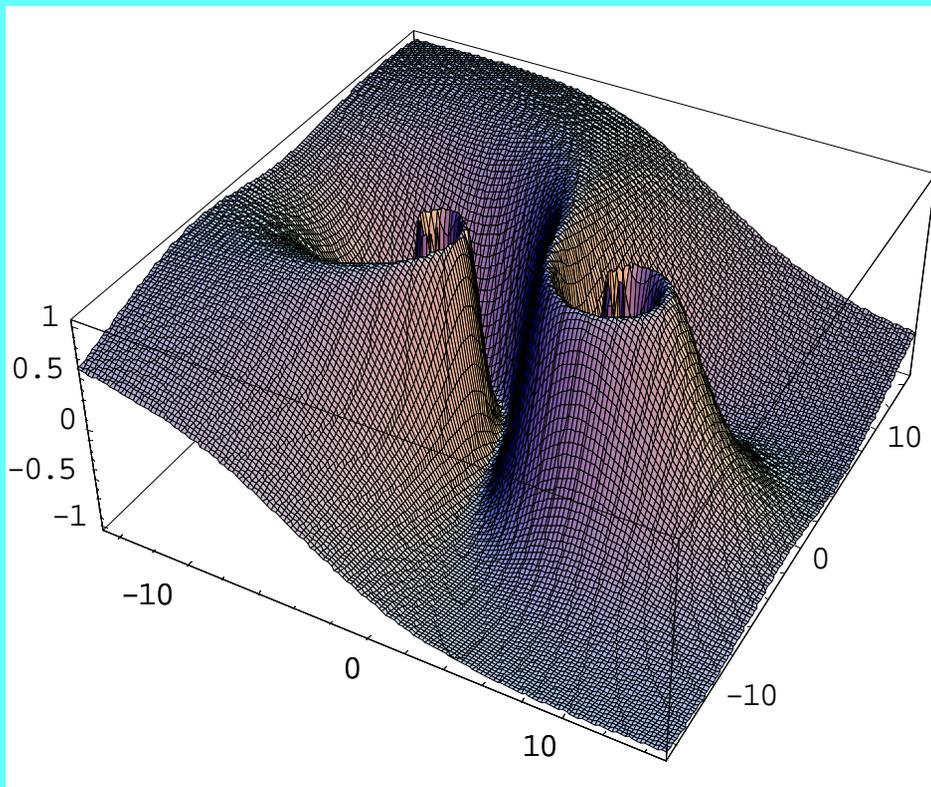
Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей и образующий на больших расстояниях однородное состояние

$$k = 1/3, \quad N_1 = -N_2 = -1, \quad Q_1 = -Q_2 = 1, \quad d = 5$$



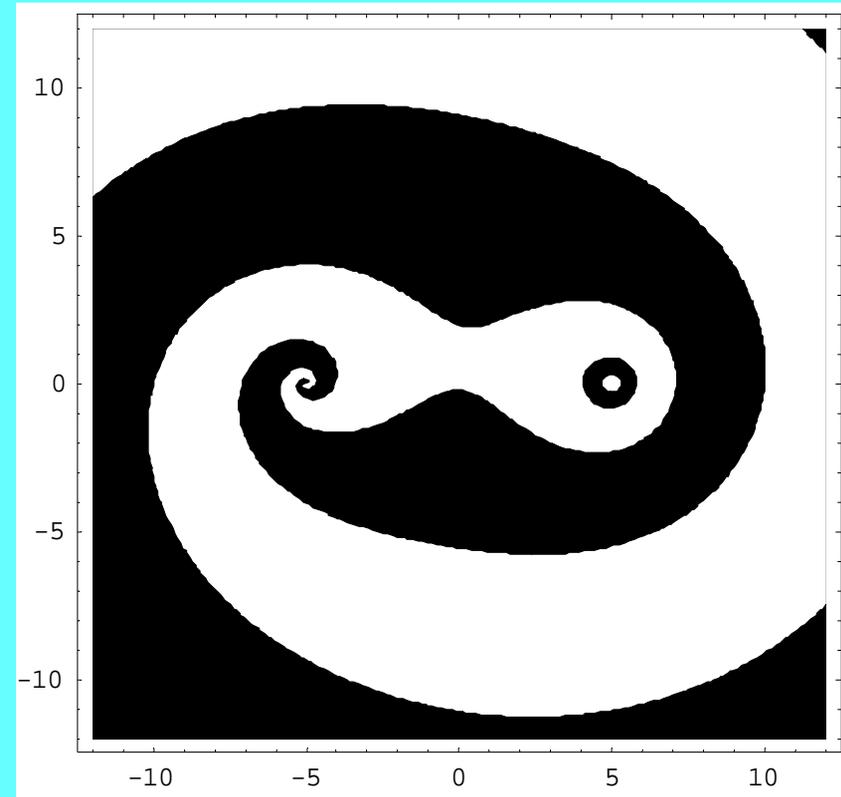
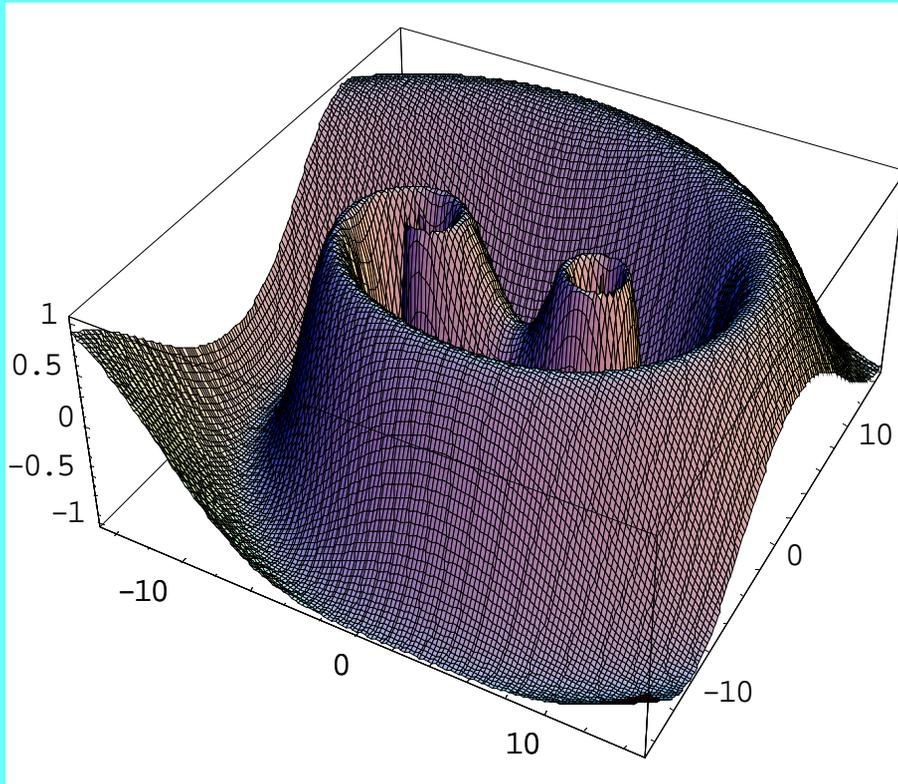
Энергия

$$E \approx \ln \frac{L}{d}, W(r, \varphi) \approx \frac{f(\varphi)}{r^4}$$



Диполь, состоящий из спирали и инстантона

$$k=1/3, N_1=1, N_2=0, Q=Q_2=1, d=5$$



конформная инвариантность

$$[\vec{M}, \vec{M}_{,\bar{z}z}] = 0, \vec{M}^2 = M_0^2, z = x + iy, z \rightarrow f(z),$$

$$\{\theta(x, y), \Phi(x, y)\} \rightarrow \{\theta(u_1, u_2), \Phi(u_1, u_2)\},$$

$$u_1 + iu_2 = F(x + iy).$$

$$\{\theta(u_1), \Phi(u_2)\} \Rightarrow \Phi_{,i} = F(\theta) \varepsilon_{ik} \theta_{,k} \quad (i, k = 1, 2)$$

Второй класс решений

$$\{\theta(u_1), \Phi(u_1)\} \Rightarrow \Phi_{,i} = F_1(\theta) \theta_{,i} \quad (i, k = 1, 2) \Rightarrow$$

$$\Phi = f(\theta)$$

Третий класс решений

$$\Phi_{,i} = F_1(\theta) \varepsilon_{ik} \theta_{,k} + F_2(\theta) \theta_{,i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos a, \\ \Phi = \arctan(c \tan a) + \Phi_0, \end{array} \right.$$

$$\Delta a = 0.$$

$$a = \sum_i \alpha_i \ln \left(\frac{\sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}}{R_i} \right) +$$

$$\sum_i q_i \arctan \left(\frac{y - \tilde{y}_{0i}}{x - \tilde{x}_{0i}} \right), q_i \in \mathbb{Z}.$$

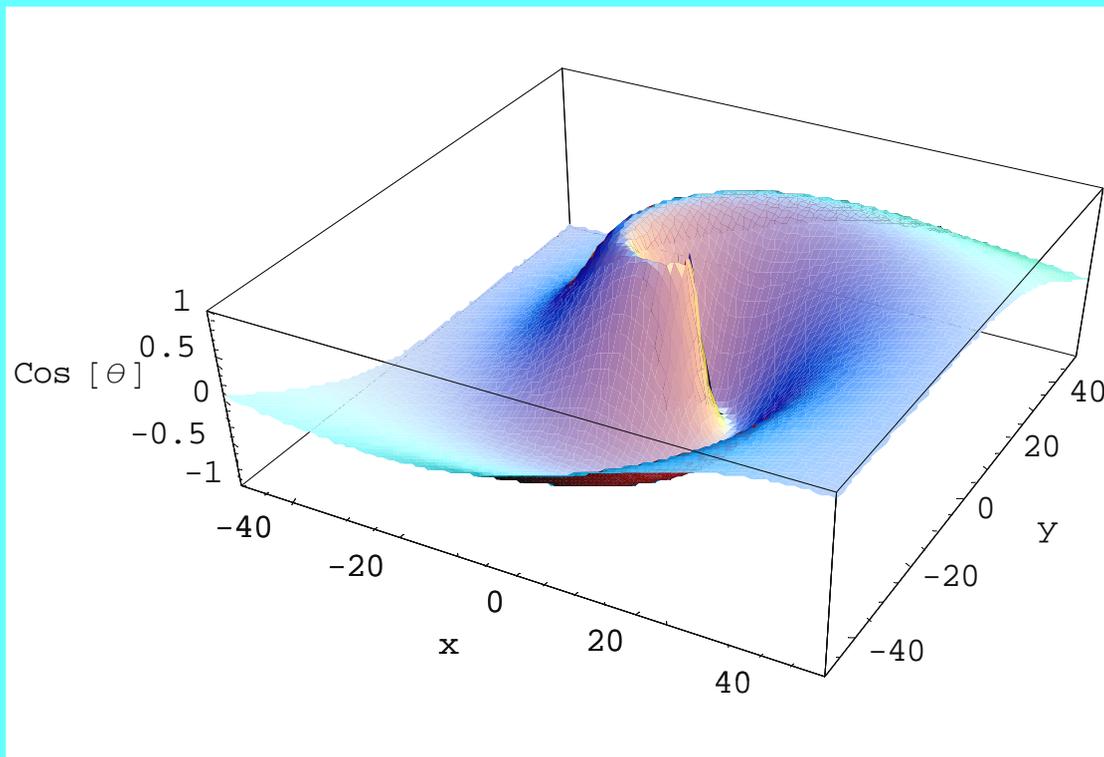
- Семейство решений определяется параметрами

$$\alpha_i, q_i, R_i, c$$

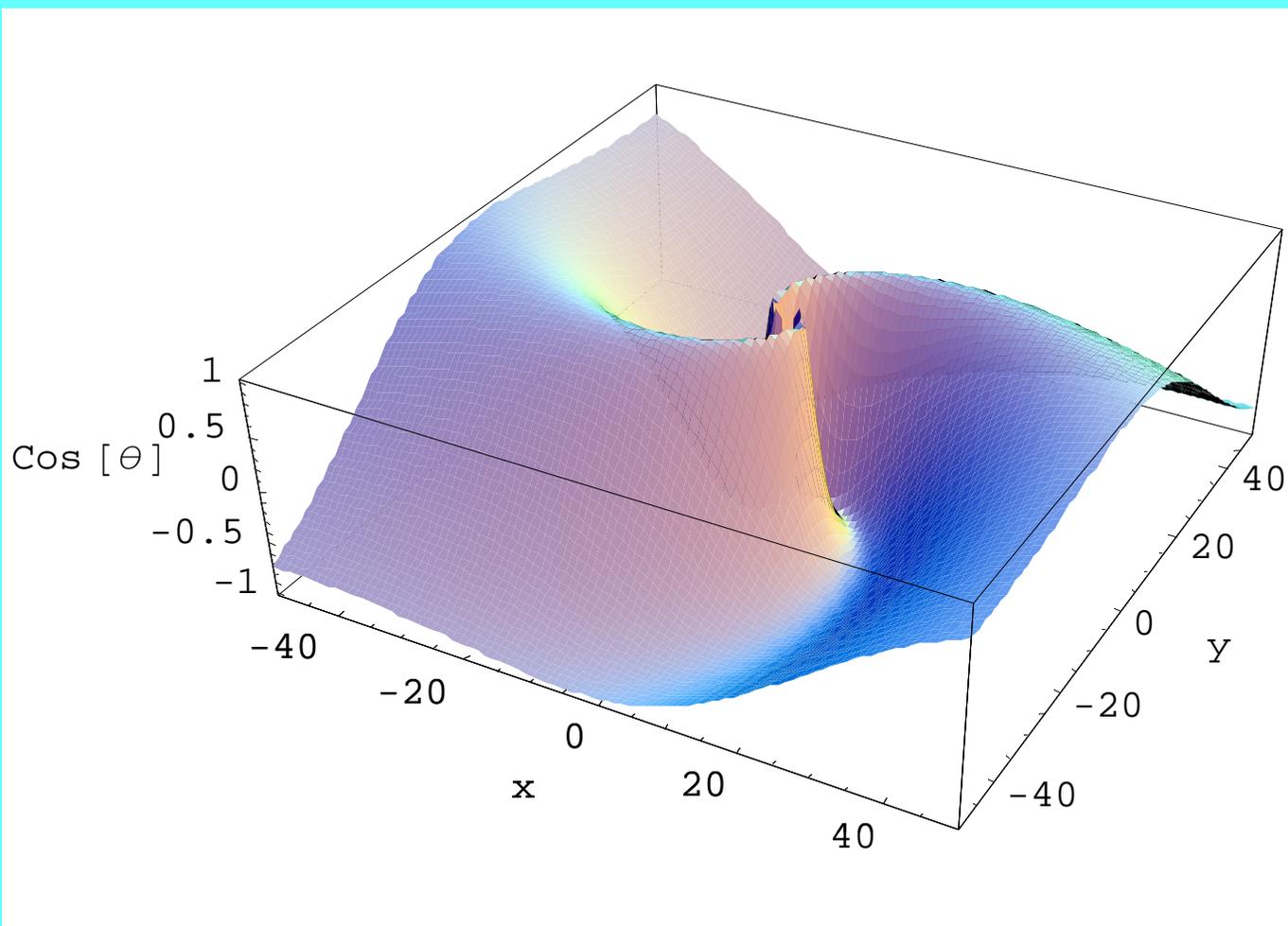
$$\Phi = \arctan \left(c \tan \left(\alpha \ln \frac{r}{R} + q \varphi \right) \right) + \Phi_0$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \cos \left(\alpha \ln \frac{r}{R} + q \varphi \right),$$

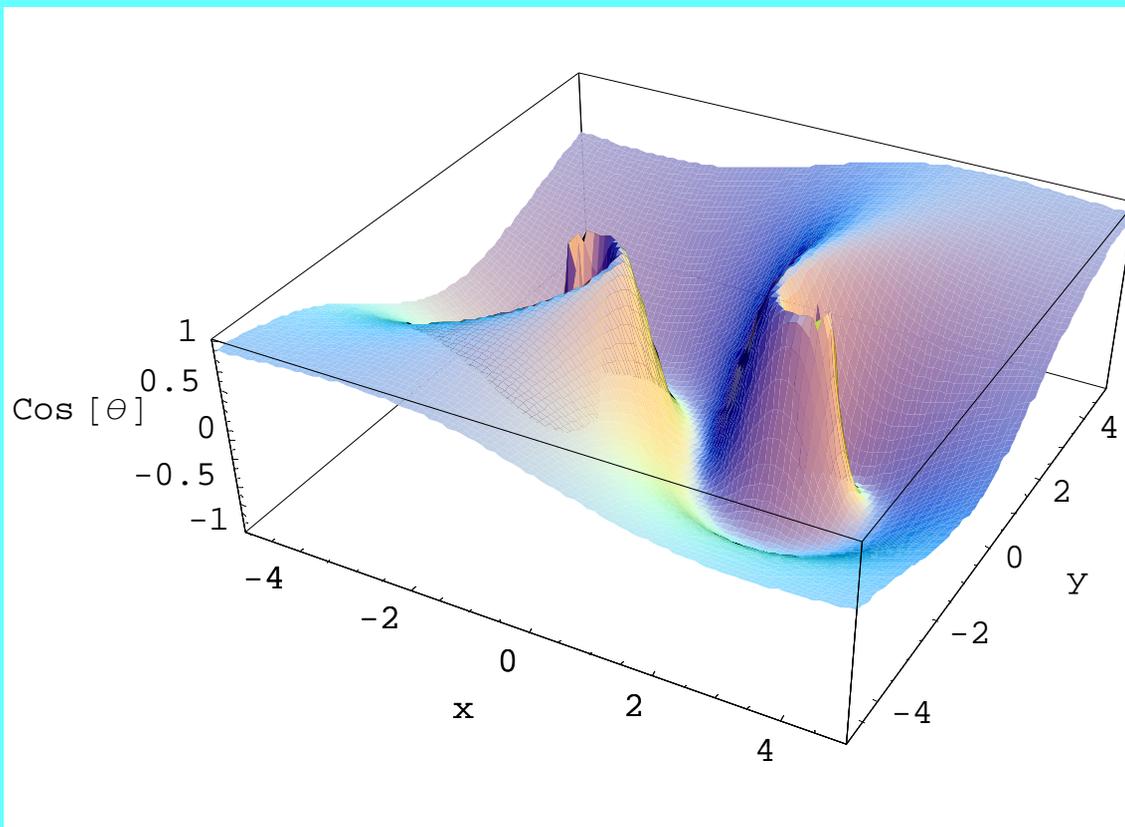
$$q=1, \alpha=2$$



$$q = 2, \alpha = 2$$



Dipole



Физические причины возникновения спиральных спиновых конфигураций.

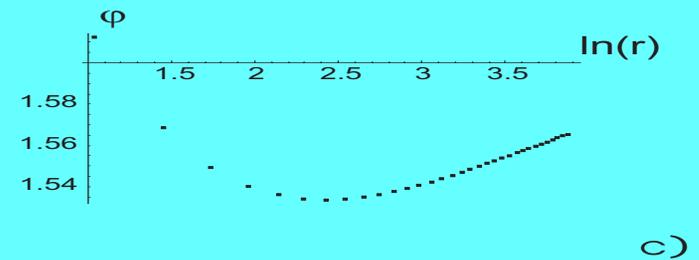
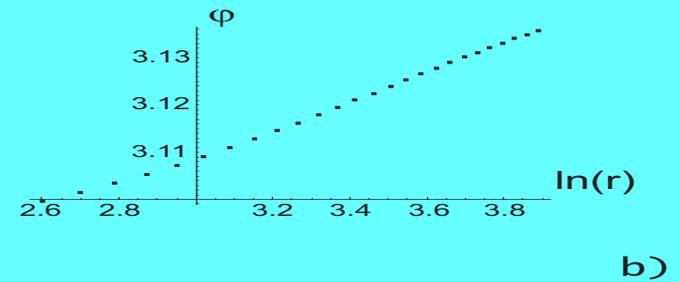
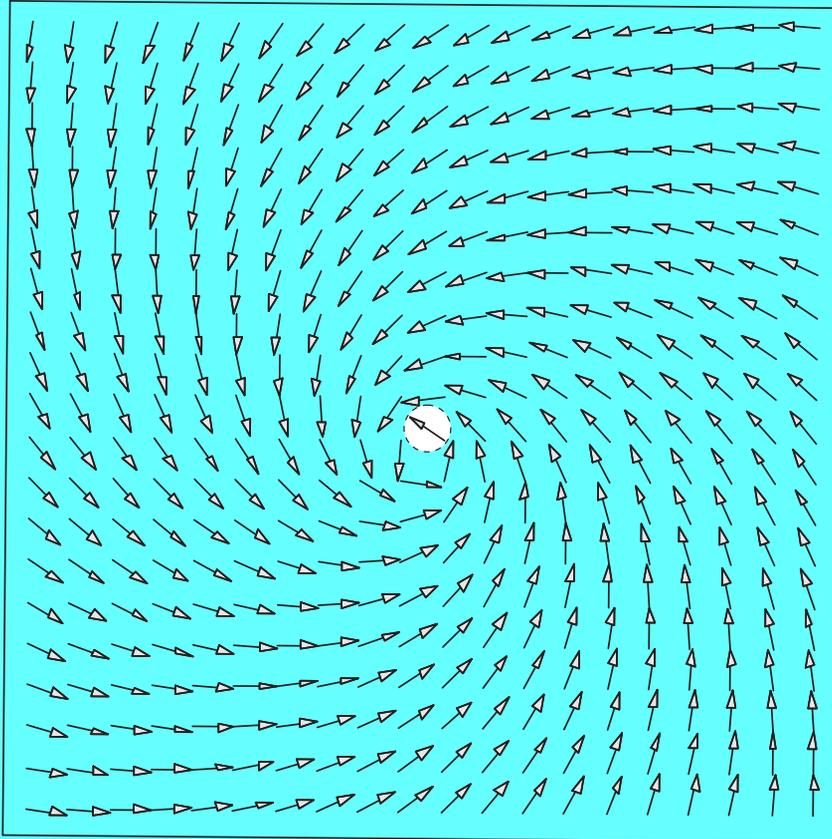
- Численное моделирование спиральных спиновых конфигураций, предсказанных континуальной теорией. Закрепленный в центре спин (физический смысл параметра альфа) является причиной появления малоамплитудных спиральных структур как для XY, так и для гейзенберговской моделей. Причиной пиннинга спина может служить либо локальное магнитное поле, либо локальная анизотропия.

$$\alpha = ? \quad c = 1,$$

$$\Phi(x, y) = q \arctan \frac{y - \tilde{y}_o}{x - \tilde{x}_o} + \alpha \ln \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{R}.$$

$$H = - \sum_{p, n} J_{pn} \text{Cos}(\Phi_p - \Phi_n)$$

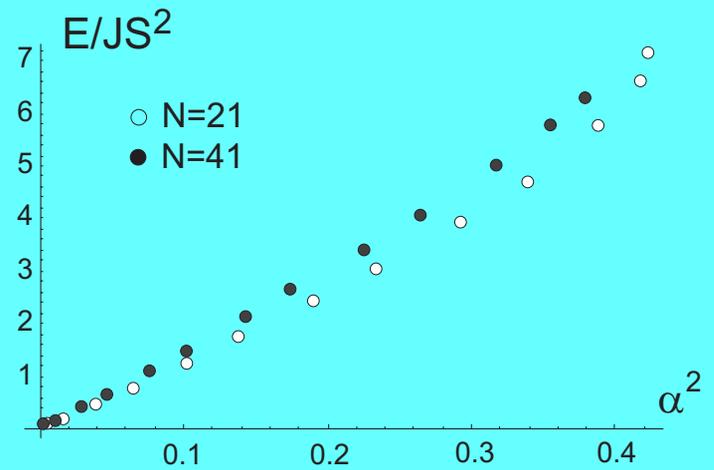
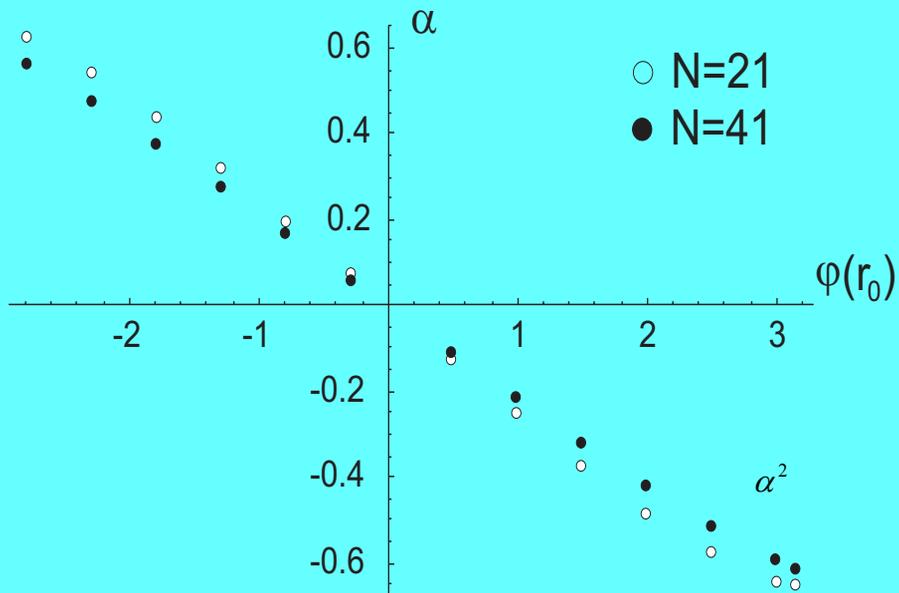
Релаксационная конфигурация типа спирального вихря.
Зависимости планарных углов вдоль (b) и (c) направлений с
логарифмическим и нелогарифмическим поведением,
соответственно.



Значения α

как функция

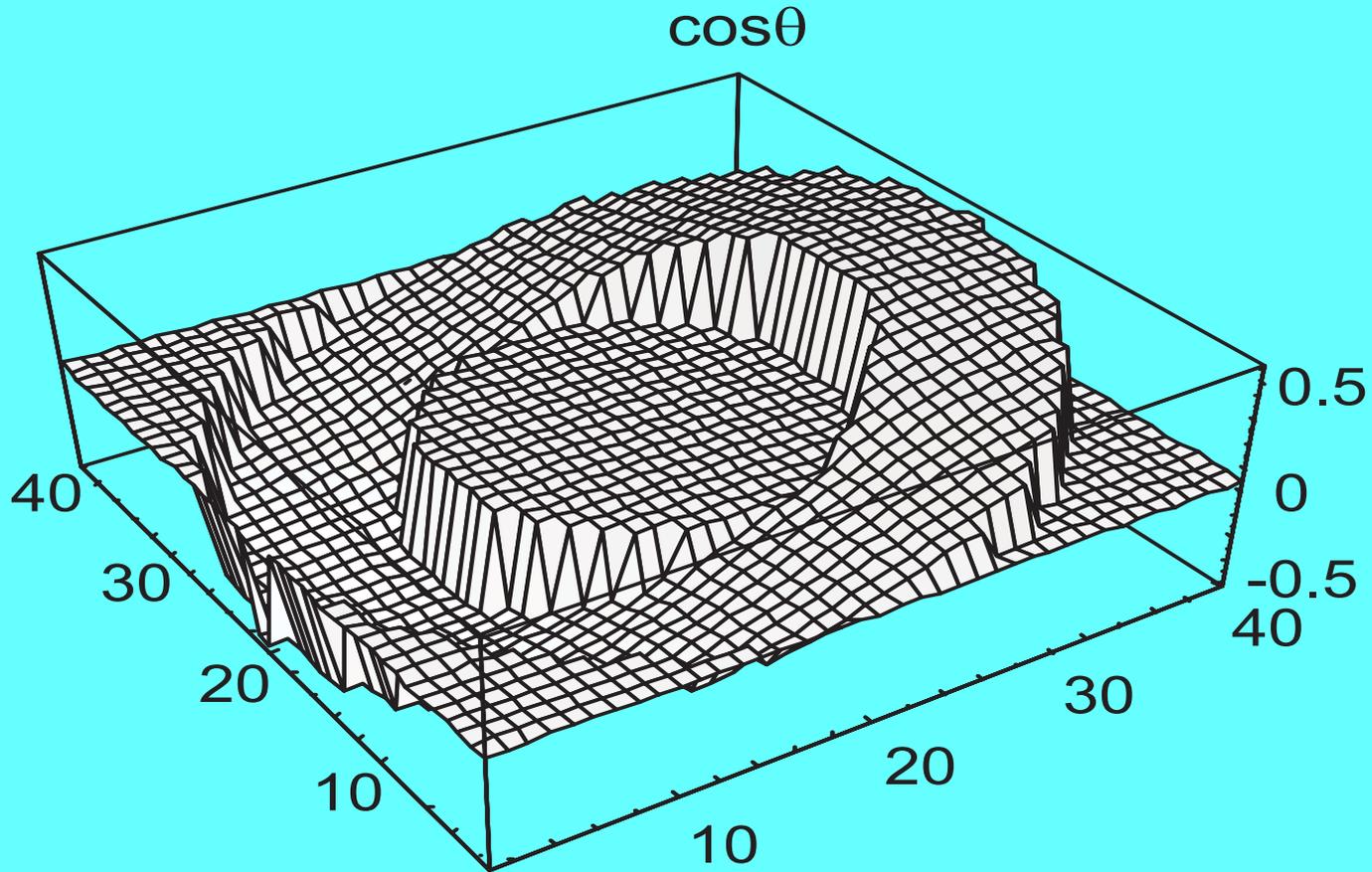
$\Phi(r_0)$ и $E(\alpha^2)$



Переход БКТ

В системе с удаленной сердцевиной конечного радиуса пространственный вихрь будет иметь наимизшую энергию среди решений с ненулевым

угловым моментом(включая скирмион).



D=3

$$\theta_{,aa} = \frac{\sin 2\theta}{2}, \cos \theta(x, y) = \operatorname{sn} \left[\frac{a(x, y)}{k}, k \right] \quad (0 < k < 1),$$

$$\Delta a = \Delta \Phi = 0, \nabla a \nabla a = \nabla \Phi \nabla \Phi, \nabla a \nabla \Phi = 0, \quad \Omega = a + i\Phi,$$

$$X = x + iy, Y = x - iy$$

$$4\Omega_{,XY} + \Omega_{,zz} = 0, \quad 4\Omega_{,X}\Omega_{,Y} + \Omega_{,z}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_{,XX}\Omega_{,Y}^2 + \Omega_{,YY}\Omega_{,X}^2 - 2\Omega_{,XY}\Omega_{,Y}\Omega_{,X} = 0.$$

Platou problem: $z = f[x, y]$,

Обобщение конформных

преобразований на

трехмерный случай

$$\Omega_{,xx}\Omega_{,y}^2 + \Omega_{,yy}\Omega_{,x}^2 - 2\Omega_{,xy}\Omega_{,y}\Omega_{,x} = 0.$$

Platou problem: $z = f[x, y],$

$$(1 + f_{,xx})f_{,y}^2 + (1 + f_{,yy})f_{,x}^2 - f_{,xy}f_{,y}f_{,x} = 0.$$

$$\Omega \rightarrow f(\Omega),$$

$$\Omega_{,Y} = \Gamma \Omega_{,X}, \quad \Omega_{,z} = 2i \sqrt{\Gamma} \Omega_{,X}$$

$$\Gamma_{,Y} = \Gamma \Gamma_{,X}, \quad \Gamma_{,z} = 2i \sqrt{\Gamma} \Gamma_{,X}$$

$$\Omega = F(\Gamma),$$

$$u_{,t} + u u_{,x} = 0,$$

$$u = g(x - u t)$$

Однозначные решения

$$G(\Gamma, X + Y \Gamma + 2i \sqrt{\Gamma} z) = 0,$$

$$u = g(x - u t) \Rightarrow u = \frac{x}{t},$$

$$X + Y \Gamma + 2i \sqrt{\Gamma} z = 0$$

$$\Omega = a + i\Phi = F(\omega), \quad \omega = \tan(\mathcal{G}/2) \exp(i\varphi),$$

$$\cos \theta(x, y) = \operatorname{sn} \left[\frac{a(x, y)}{k}, k \right] \quad (0 < k < 1),$$

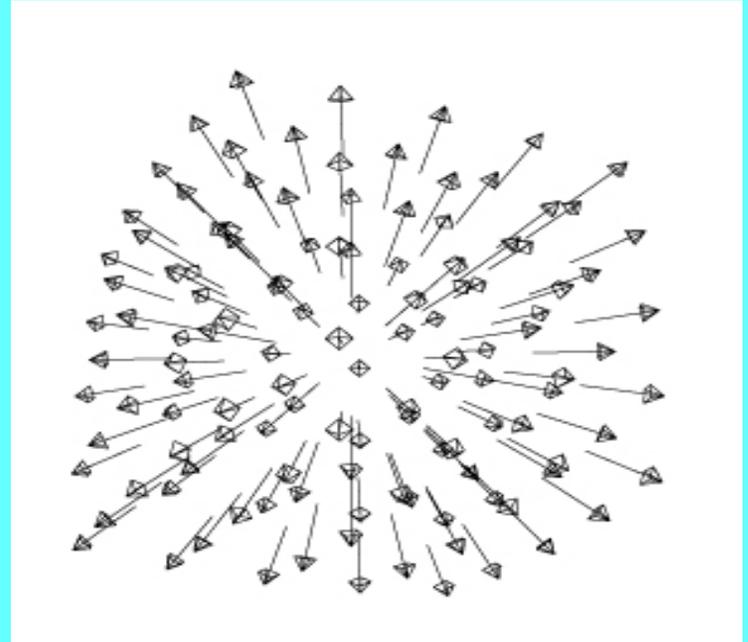
$$\Omega = (\alpha + i\beta) \ln \omega \quad (\alpha, \beta \in R)$$

$$\cos \theta = \operatorname{sn} \left(\frac{Q \ln \tan(\mathcal{G}/2)}{k} - \frac{2NK\varphi}{\pi} \right),$$

$$\Phi = Q\varphi + \frac{kK \ln \tan(\mathcal{G}/2)N}{\pi}.$$

$$\vec{m} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{r} = \{x, y, z\},$$

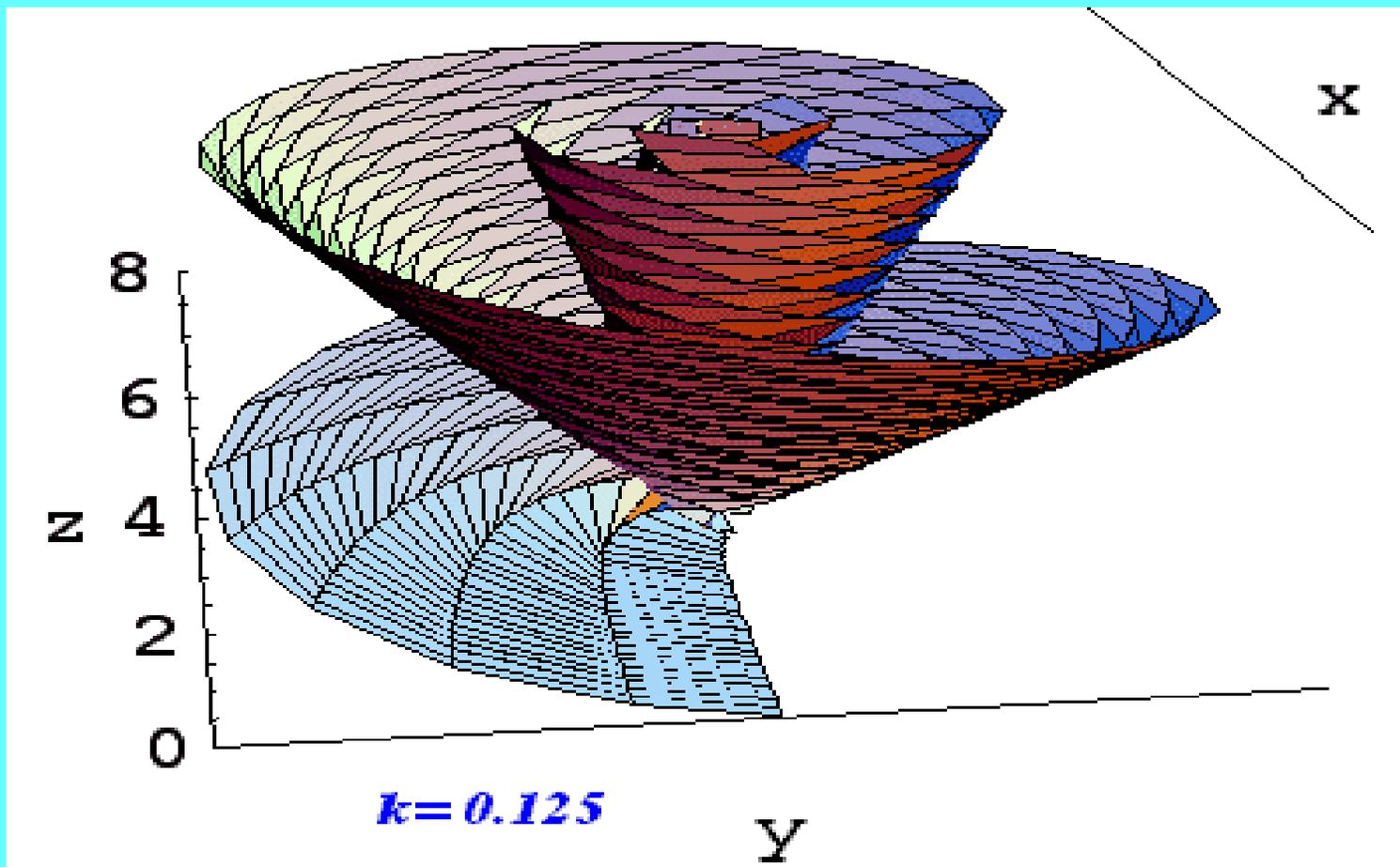
- "Еж" ($N=0, Q=1, k=1$)
- Степень отображения Q замкнутой поверхности, окружающей центр "Ежа" на сферу равна единице.



$$N = \frac{1}{4\pi} \iint (\vec{m}[\vec{m}_\theta, \vec{m}_\varphi]) d\Theta d\varphi$$

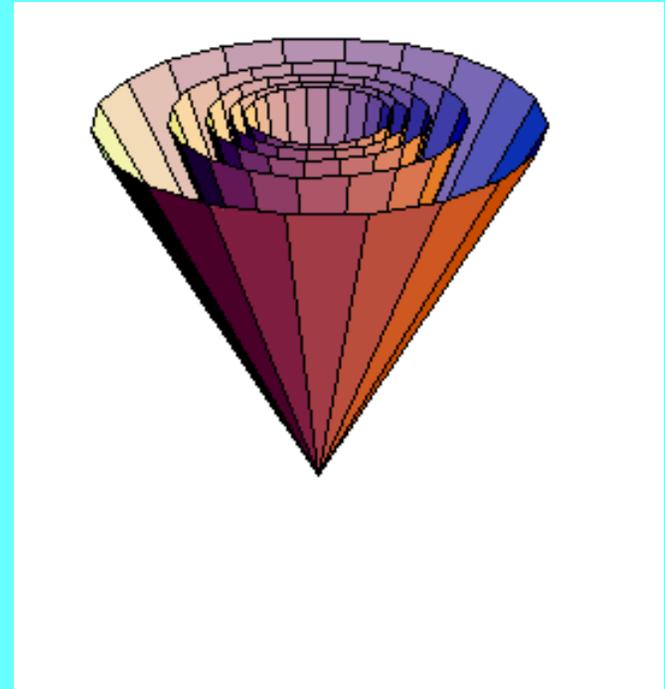
Спиральные трехмерные структуры (N, Q, k)

- Кноидальные «Ежи» $N = 0, Q=1, 0 < k < 1$
- Спиральные «Ежи» $N = 1, Q=1, 0 < k < 1$



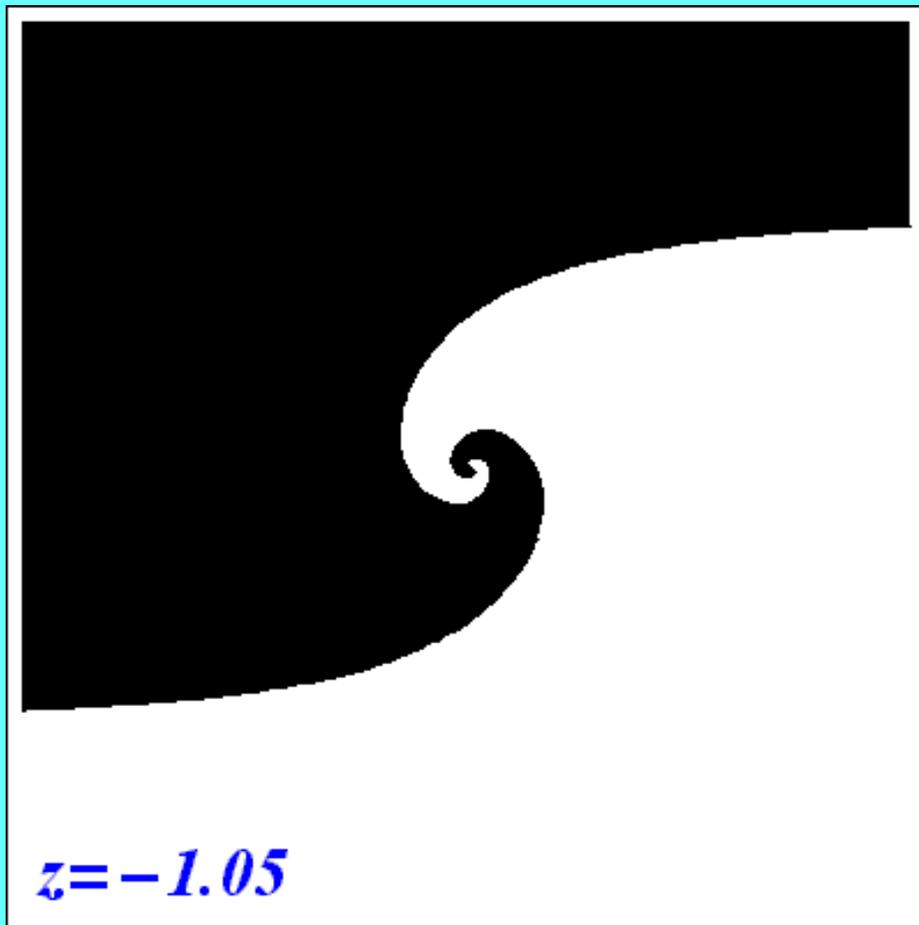
Кноидальные "Ежи"

$$N = 0, Q = 1, 0 < k < 1.$$



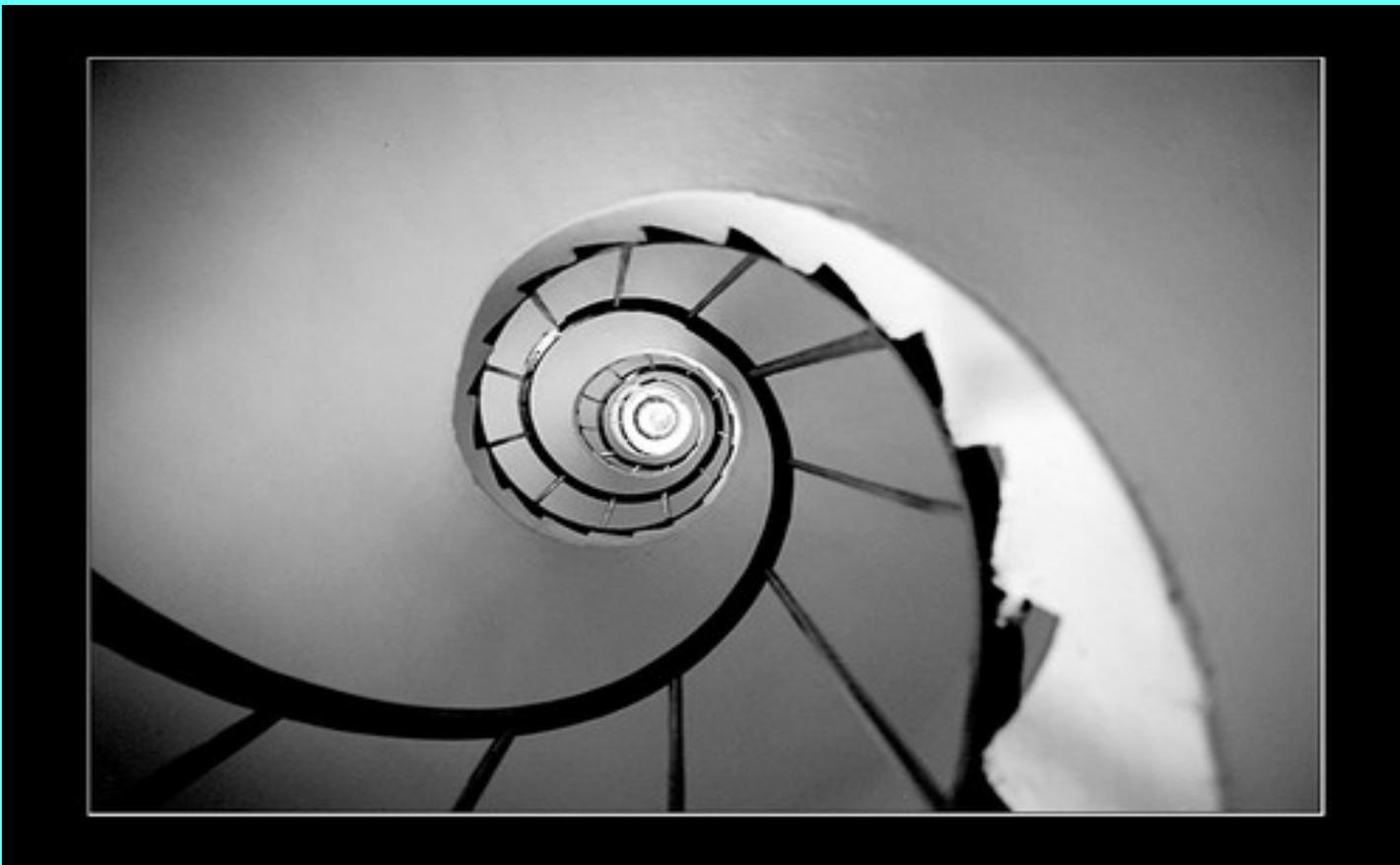
Структура спирального «Ежа»

$$N = 1, Q=1, 0 < k < 1.$$



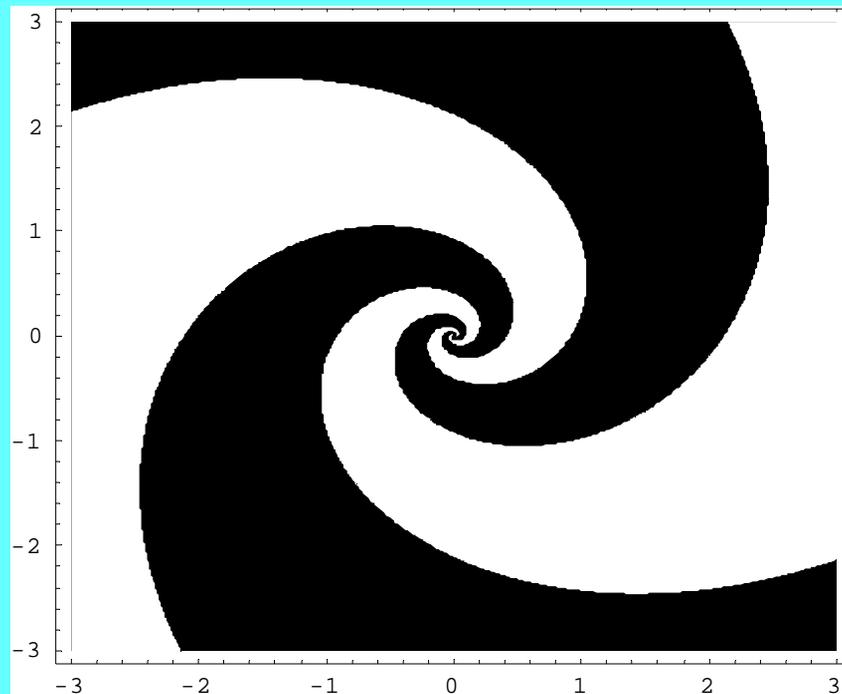
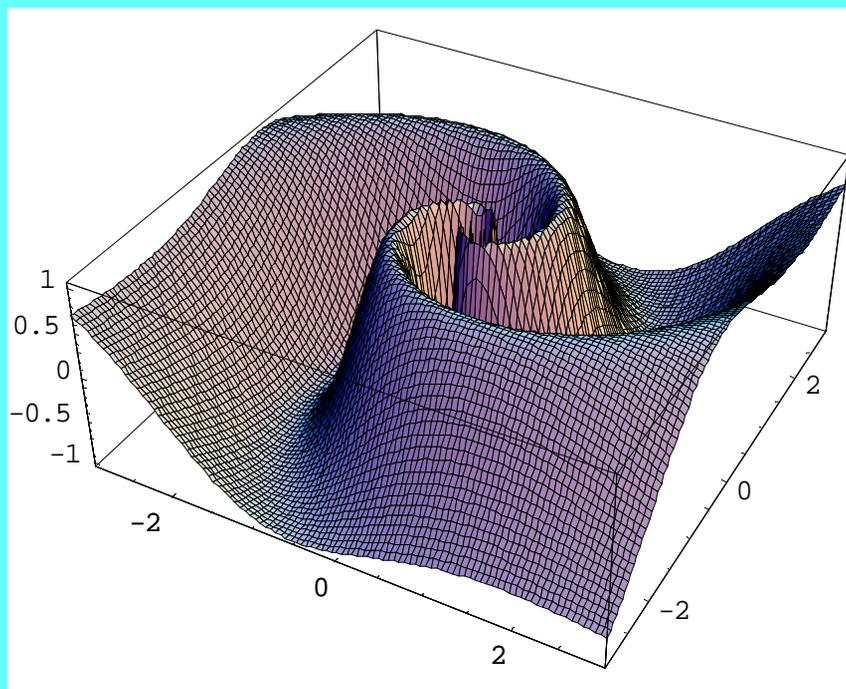
$$z = \pm R \operatorname{sh} \left[\frac{2\varphi K k S}{\pi Q} + \frac{Ck}{Q} \right]$$

Лестница



Структура спирального «Ежа»

$$N = 2, Q=1, k=1/4, z=5$$

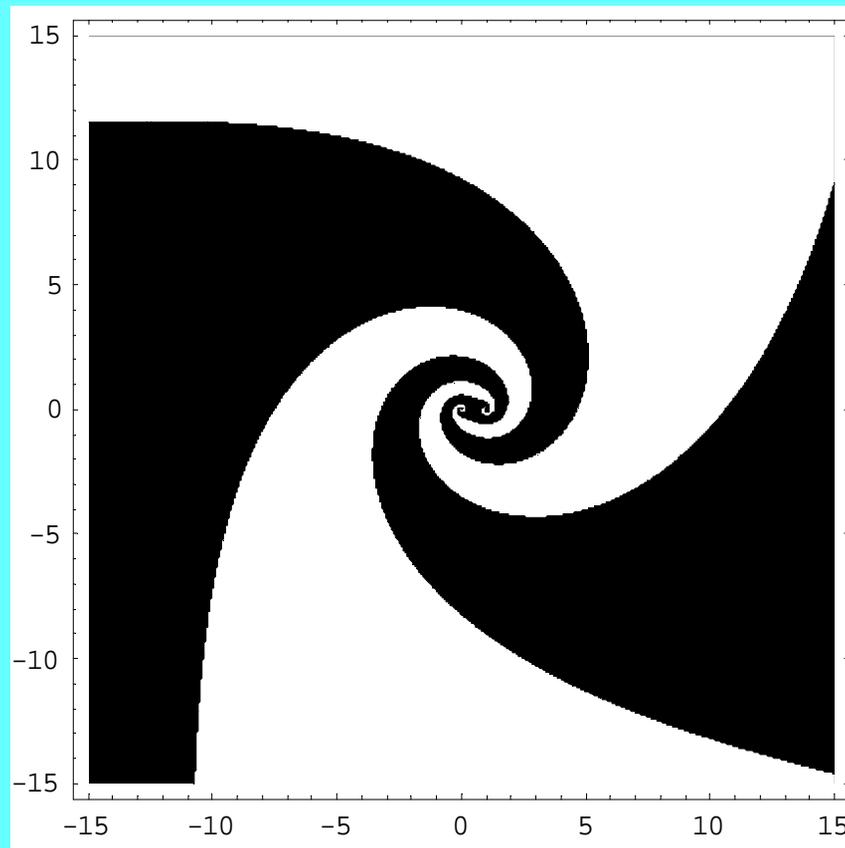


$$\Omega = \sum_{j=1}^n A_j \ln(\tan \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) - c_j), c_j = \tan \frac{\theta_j}{2} \exp(i\varphi_j)$$

$$\Omega = a + i\Phi = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2ikK}{\pi} S_j + Q_j \right) \ln(\tan \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) - \tan \frac{\theta_j}{2} \exp(i\varphi_j)) + w(\omega)$$

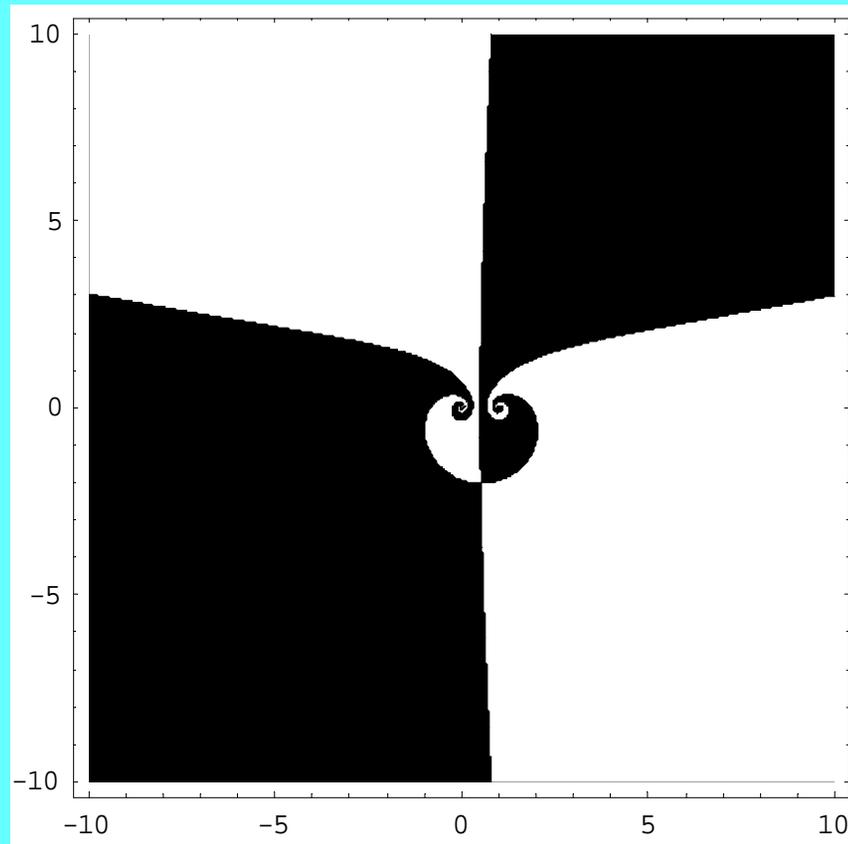
Диполь из спиральных ежей

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{16}, \varphi_2 = 0, N_1 = 1, Q_1 = 1, N_2 = 1, Q_2 = 1, z = 5, k = \frac{1}{4}$$



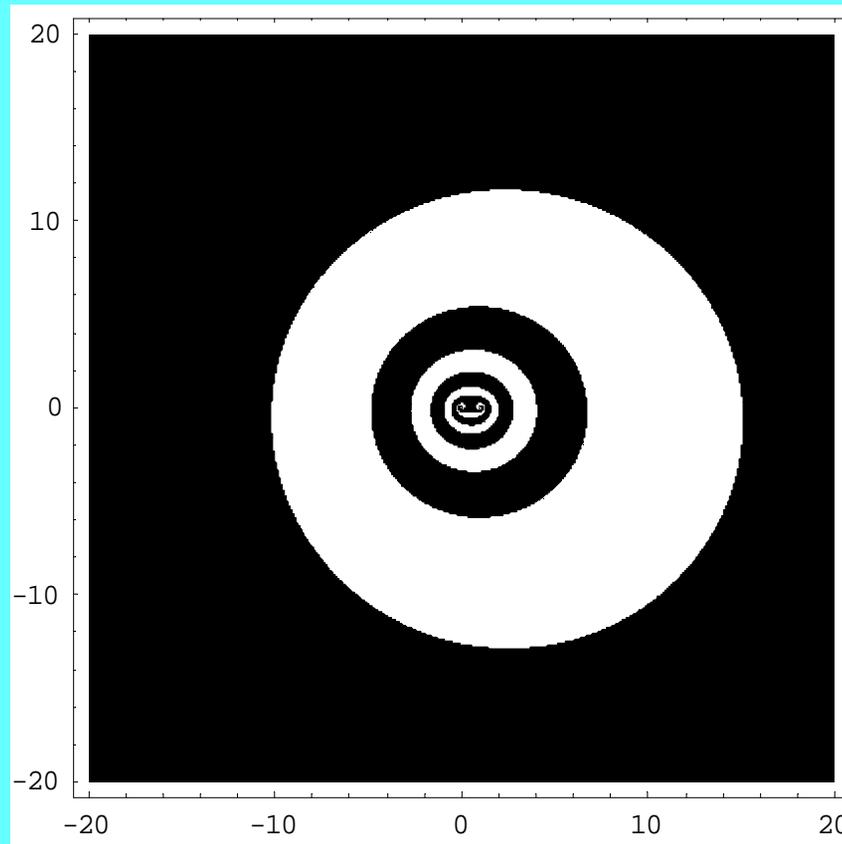
Диполь из спиральных ежей

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{16}, \varphi_2 = 0, N_1 = 1, Q_1 = 1, N_2 = 1, Q_2 = -1, z = 5, k = \frac{1}{4}$$



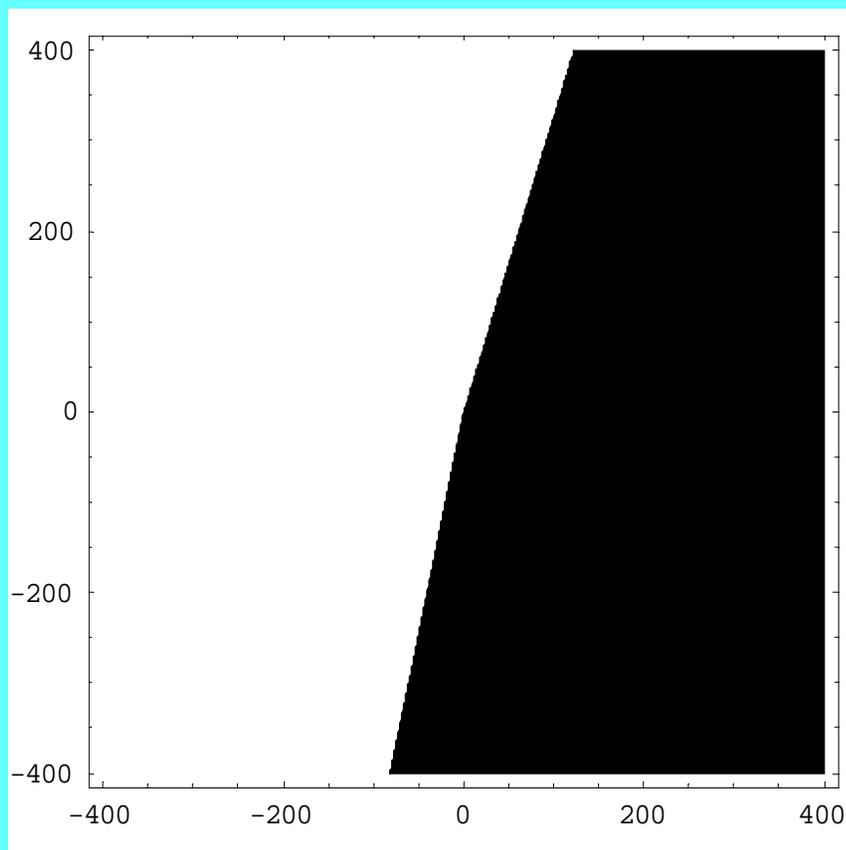
Диполь из спиральных ежей

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{16}, \varphi_2 = 0, N_1 = 1, Q_1 = 1, N_2 = -1, Q_2 = 1, z = 5, k = \frac{1}{4}$$



Диполь из спиральных ежей

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{16}, \varphi_2 = 0, N_1 = 1, Q_1 = 1, N_2 = -1, Q_2 = -1, z = 5, k = \frac{1}{4}$$



- Спасибо за **внимание** и терпение.