# Теория многоподрешеточных антиферромагнетиков

– Совокупность магнитных подрешеток с $\vec{M}_j$

$$U = U(\nabla \vec{M}_i, \vec{M}_j)$$

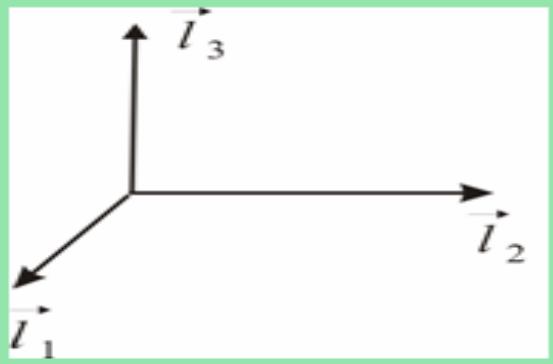
# Теория упругости

Потенциальная энергия голдстоуновких мод

$$U = 1/2\, c_{ik,lm} u_{i,l} u_{k,m}$$

$$u \to u + \alpha$$

# Магнитная структура $UO_2$



- Спонтанное нарушения симметрии обменных взаимодействий — гамильтониан обменных взаимодействий инвариантен относительно любого поворота всех спинов на один и тот же угол, но никакая магнитная структура не является инвариантной относительно всех таких поворотов: существуют макропараметры (макроскопические мультипольные моменты), которые не инвариантны относительно поворота всех спином на один и тот же угол. Зависящие от координат и времени локальные повороты спинов, изменяющие равновесные значения макровеличин, представляют элементарные магнитные возбуждения системы.

$$G(x,y,z)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(b+c)}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(-b+c)}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(-b+c)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{-i(b+c)}{2}} \end{pmatrix}$$

# Теория АВЖМ

$$G_{,k} = i\sigma_p \omega_{p,k} G$$

$$U = 1/2\, c_{ik,lm} \omega_{i,l} \omega_{k,m},$$

$$G(\vec{r}) \rightarrow G(\vec{r}) G(\alpha)$$

$$c_{ik,lm} \infty \delta_{ik,lm}$$

# Уравнения модели (3D-волчок)

$$\Delta b + \cos\theta \Delta c - \sin\theta \nabla c \, \nabla\theta = 0$$

$$\Delta c + \cos\theta \Delta b - \sin\theta \nabla b \, \nabla\theta = 0$$

$$\Delta\theta - \sin\theta \nabla b \, \nabla c = 0$$

# 1 Anzatz-Тригональная система гармоническая система координат

$$\nabla\theta\nabla a=\nabla b\nabla a=\nabla\theta\nabla b$$

$$\Delta\theta=\Delta b=\Delta c$$

# 2 Anzatz

$$\theta(a),\ \theta,\ aa \ = \ \sin\ a$$

$$\nabla c\ \ \nabla a = \nabla b\ \ \nabla a = 0, \nabla c\ \ \nabla b = \nabla a \nabla a$$

$$\Delta a \ = \ \Delta b \ = \ \Delta c$$

$$pend. \Rightarrow \theta = 4 arctg e^{a}, \cos\theta/2 = sn(a/k, k)$$

# 3 Anzatz-3D обобщение в ФКП конформных преобразований

$$G = in_j \sigma_j + n_0 \sigma_0, \Delta n_\mu = 0 (\mu = 0,1,2,3,4)(\sigma - \mathrm{mod}\, el)$$

$$n(\alpha,\beta), \quad n_{,\alpha\alpha} + n_{,\beta\beta} = 0$$

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = 0, \nabla\alpha\nabla\beta = 0, (\nabla\alpha)^2 = (\nabla\beta)^2$$

$$\omega = \alpha + i\ \beta, \quad \Delta\omega = 0, \quad \nabla\omega\nabla\omega = 0$$

# Дифференциально-геометрический метод интегрирования

$$(y_1, y_2, y_2) = (x, y, z), \theta = x_1 (a = x_1), (b, c) = (x_2, x_3)$$

*Godograph* $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}(\theta, b, c), (ds)^2 = dy_i dy_i = g_{ik} dx_i dx_k$$

$$g_{11} = ((\partial x/\partial\theta)^2 + (\partial y/\partial\theta)^2 + (\partial z/\partial\theta)^2)(\theta, b, c)..$$

$$\vec{e}_i = \vec{r}_{,i}, \quad \vec{e}_{i,j} = \Gamma^k_{ij} \vec{e}_k,$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = 1/2 g^{kn}(g_{in,j} + g_{jn,i} - g_{ij,n})$$

$$R_{prsi} = \frac{\partial \Gamma_{p,ri}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma_{p,rs}}{\partial x_i} + \Gamma_{rs}^{m}\Gamma_{m,pi} - \Gamma_{ri}^{m}\Gamma_{m,ps}$$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} H_1^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & H_2^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & H_3^{\,2} \end{bmatrix}, g^{-1} = \begin{bmatrix} h_1^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{\,2} & h_1^{\,2} \\ 0 & h_1^{\,2} & h_3^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)(\theta, b, c),$$

$$(\theta, b, c) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial z}\right)(a, b, c),$$

$$(a, b, c) = (x_1, x_2, x_3)$$

# Структуры= новые задачи дифф.геометрии)

$$R_{iklm} = 0(master\,Eq. \leftrightarrow (x, y, z) - C..cc.)$$

$$g^{jk}\Gamma_{i,jk} = 0(reductions == Laplace \quad Eq.) \Rightarrow$$

$$g^{jk}(\theta,b,c)\ or\ g^{jk}(a,b,c)$$

$$y_{n,i,j} = \Gamma_{ij}^{k} y_{n,k} \Rightarrow$$

$$(x,y,z) = F[\theta,b,c)\ or\ (x,y,z) = G(a(\theta),b,c))$$

# 1 Anzatz -Тригональная гармоническая система

$$\nabla\theta\ \nabla a = \nabla b\ \nabla a = \nabla\theta\ \nabla b,$$

$$\Delta\theta = \Delta b = \Delta c$$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} H_1^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & H_2^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & H_3^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$reductions \Rightarrow \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i}$$

*does not depend on* $x_i$.

*Factorization*

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{F_2(x_1, x_3) F_3(x_1, x_2)}}, \ldots$$

*Solution Lame Eq.* $\Rightarrow$ *7 textures*

$$1) th(\theta / f) = \frac{\sqrt{r^2 + (z+\alpha)^2} - \sqrt{r^2 + (z-\alpha)^2}}{2\alpha}$$

$$ch(b\ g) = \frac{\sqrt{r^2 + (z+\alpha)^2} + \sqrt{r^2 + (z-\alpha)^2}}{2\alpha}$$

$$c = Q\ \varphi$$

**Связана с координатами эллипсоида вращений**

- 2,3 -поле $c$ имеет вихревой характер(дисклинация), поля $b$ , $\theta$ определяют нелокализованные структуры. Связаны заменами с параболическими координатами вращения локальными заменами.

$$4)\theta = \pi/2 + \arcsin\frac{1}{8r^2}(-1-8z^2) + \sqrt{(1-8r^2)^2 + 16z^2(1+8r^2+4z^2)}$$

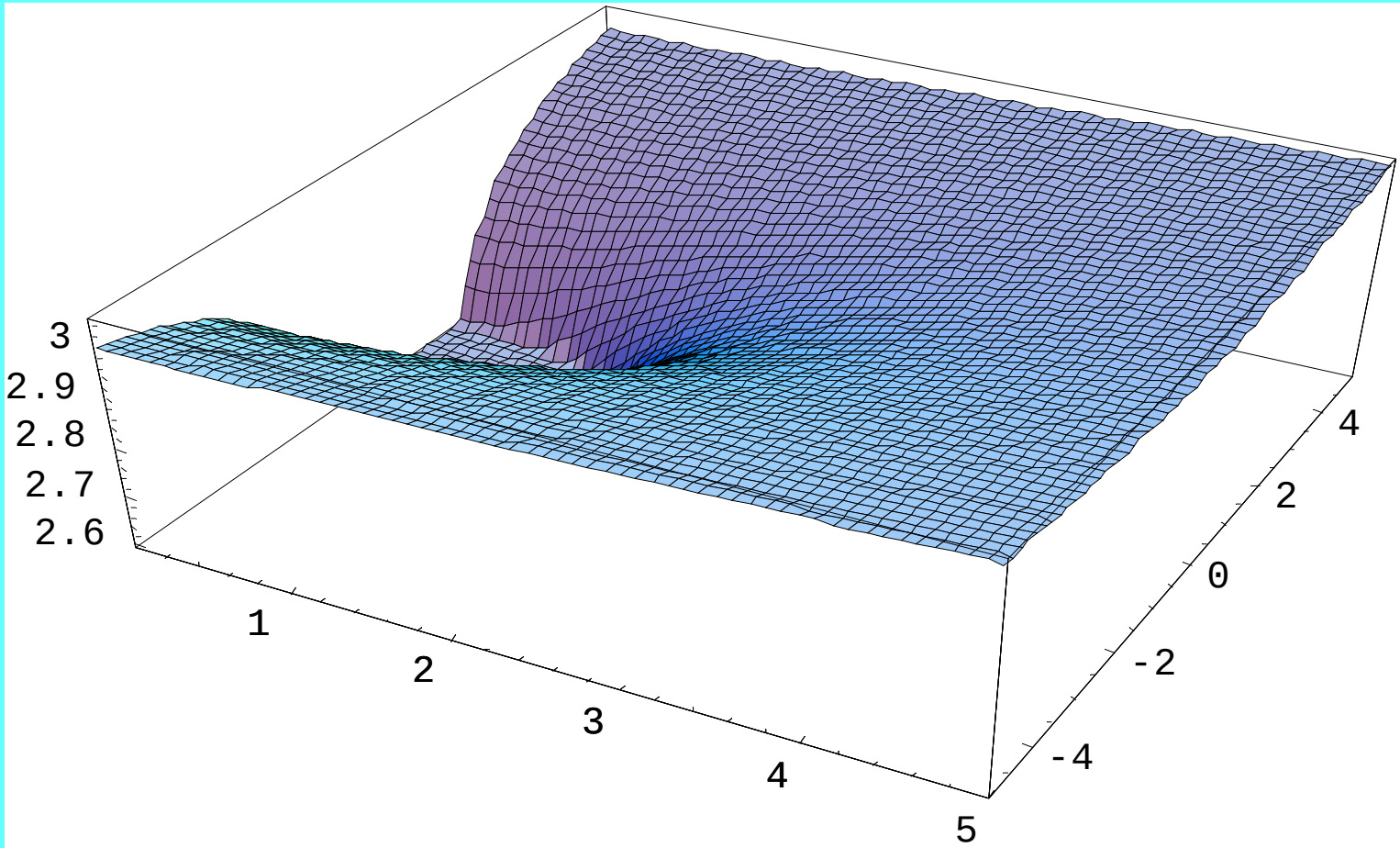
$$ch(b/g) = \frac{1}{8r^2}(1+8z^2) + \sqrt{(1-8r^2)^2 + 16z^2(1+8r^2+4z^2)}$$

$$c = Q\,\varphi$$

$$\theta \to 4\sqrt{2}z \quad (r^2+z^2 \to 0)$$

$$\theta \to \pi - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{r^2+z^2}} \quad (r^2+z^2 \to \infty)$$

# *Localized structures* $\theta(r, z)$



# 5)Квазидвумерная структура

$$\theta = f\ z,\ x + i\,y = F(b + ic\ /\ f)$$

*Special case*

$$b = Q_1\varphi + \frac{Q_2 \ln r}{f}, c = f\,Q_1 \ln r + Q_2\varphi$$

6) *Source and vortex*

$$th(\theta\, k) = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$b = -\frac{g}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$c = Q\,\varphi$$

# 7)Структуры, связанные с общими эллипсоидальными координатами

$$\frac{x^2}{1+t}+\frac{y^2}{1-k^2+t}+\frac{z^2}{t}=1 \quad (G.E.C)$$

$$t_1=\frac{cn(\theta/c_1,k)^2}{sn(\theta/c_1,k)^2}, \quad t_2=-\frac{cn(b/c_2,k_1)^2 k_1^{\,2}}{dn(b/c_2,k_1)^2},$$

$$t_3=-dn(c/c_3,k)^2, \quad k_1=\sqrt{1-k^2},$$

$$c_1=\frac{\pi}{K(k)}, \quad c_2=\frac{\pi}{K(k_1)}, \quad c_3=\frac{\pi}{2K(k)}$$

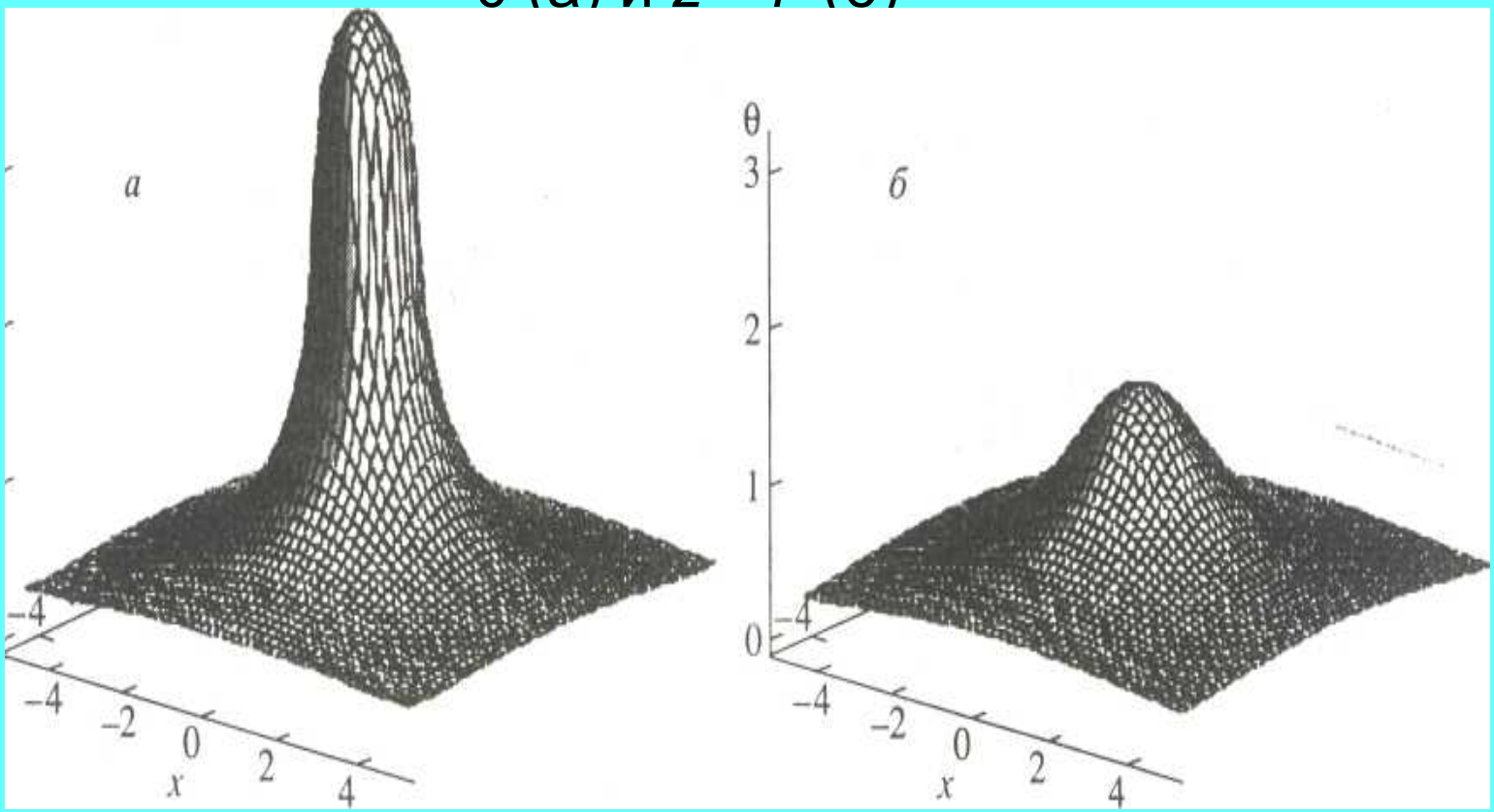
$\theta(x, y, z)$ *is local*, $\theta \approx \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 + y^2 + z^2 \to 0)$

$b(x, y, z)$ *is l. for small* $z$, *and is not l. for l* $\arg e$ $z$,

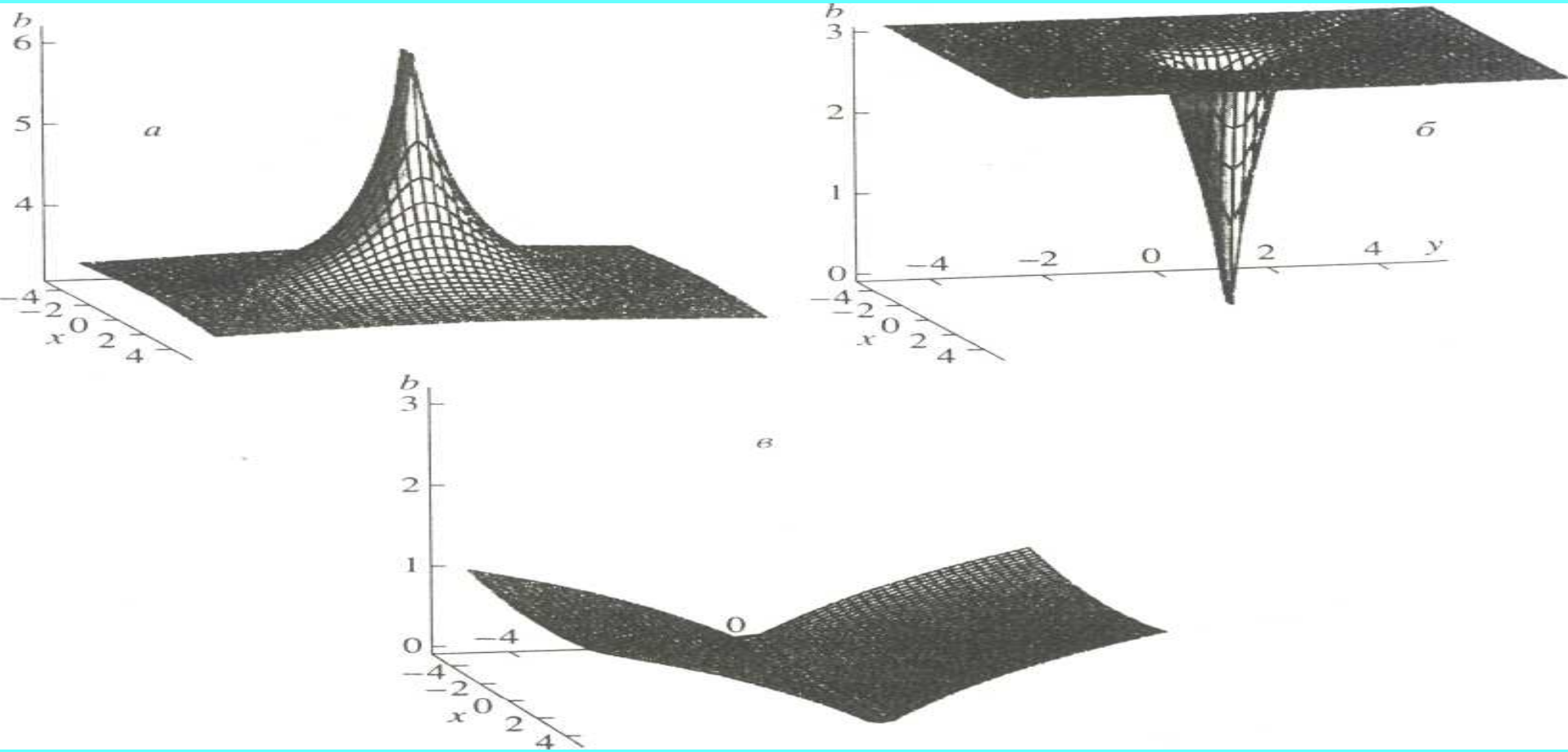
$c(x, y, z)$ *is nontrivial vortex.*

$\deg(SO(3) \Rightarrow R^3) = 1$

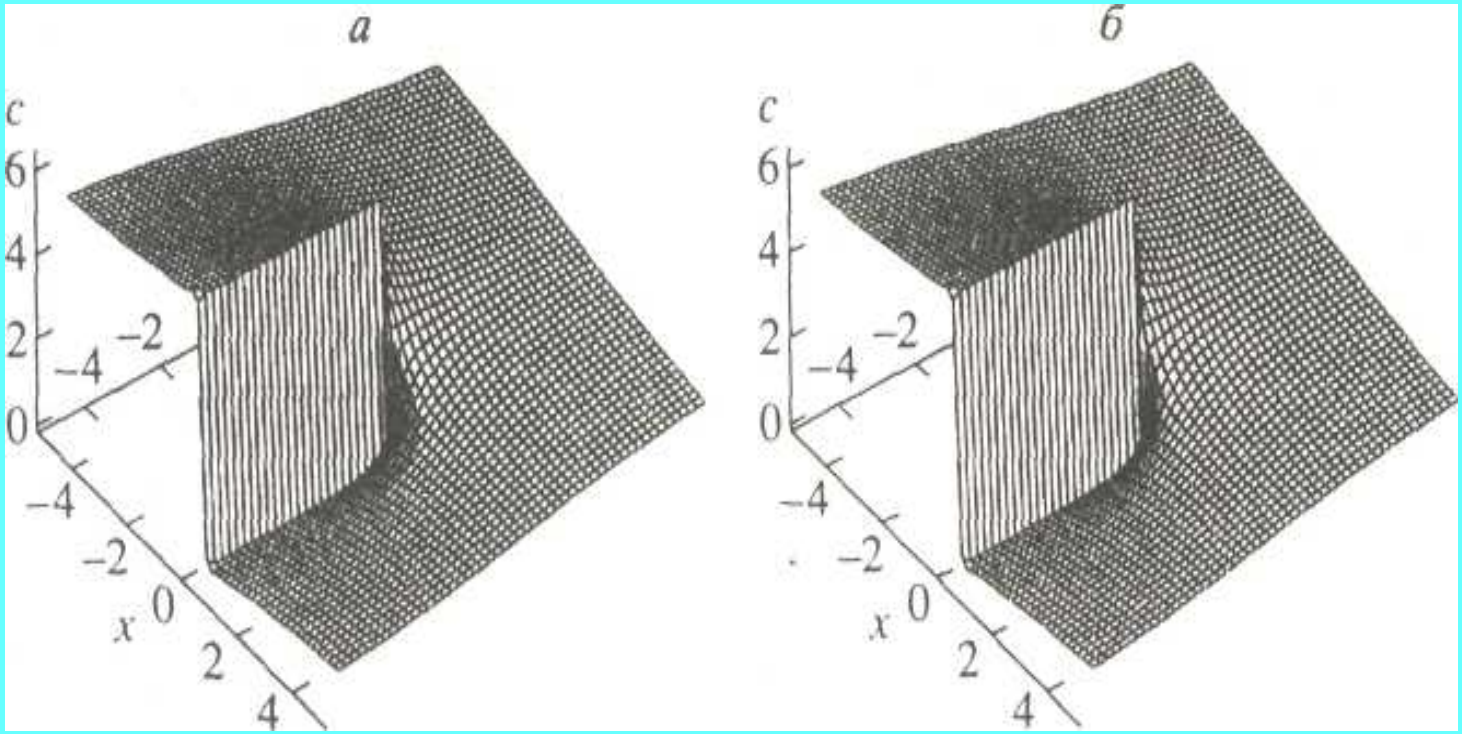
. Локализованная структура поля тэта*(x, y, z)* в текстуре, связанной с триортогональнои гармонической системой координат *(k* = 0.3). Показаны солитоны при *z* = 0 (а) и *z=-1* (б)



Структура поля *b{x,y,z)* в текстуре, связанной с триортогональнои гармонической системой координат *(к* = 0.3). Показаны локализация поля при *z* = — 1 (а), z = 0.1 *{б)* и его делокализация при z = 100 (е)



Вихревая структура поля c(x,y, *z)* в текстуре, связанной с триортогональной гармонической системой координат *(к* = 0.3). Показано распределение поля при z = —0.1 (а) и z = 1 *(б)* со скачком $2\pi$ в полуплоскости *x* = 0, *y* <0



# 2 Anzatz

$$\theta(a),\ \theta,\ aa = \sin a$$

$$\nabla c\ \ \nabla a = \nabla b\ \ \nabla a = 0, \nabla c\ \ \nabla b = \nabla a \nabla a$$

$$\Delta a = \Delta b = \Delta c$$

$$pend. \Rightarrow \theta = 4 arctg e^{a}, \cos\theta/2 = sn(a/k, k)$$

# Вид метрического тензора

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & h_1^2 \\ 0 & h_1^2 & h_3^2 \end{bmatrix}$$

*reductions* $\Rightarrow$

$$h_1{}^2 = \frac{1}{-U_{x_2,x_3}{}^2 + U_{x_2,x_2} U_{x_3,x_3}},$$

$$h_2{}^2 = \frac{U_{x_3,x_3}}{U_{x_2,x_3}(U_{x_2,x_3}{}^2 - U_{x_2,x_2} U_{x_3,x_3})},$$

$$h_2{}^2 = \frac{U_{x_2,x_2}}{U_{x_2,x_3}(U_{x_2,x_3}{}^2 - U_{x_2,x_2} U_{x_3,x_3})},$$

$$U(x_1,x_2,x_3) = U_1(x_2,x_3) + U_2(x_1,x_3) + U_3(x_1,x_2)$$

# 8)Квазидвумерная структура

$$solution\ pendulum \Rightarrow \theta = 4 arctg e^{a} (k=1)$$

$$\cos\theta/2 = sn(a/k,k)$$

$$a = -\ln r^{\sqrt{Q_1 Q_2}}, \theta = 4 arctg(r^{-\sqrt{Q_1 Q_2}}), (0, 2\pi),$$

$$b = g\, z + Q_1 \varphi, \quad c = Q_2 \varphi$$

# 9.Spiral structures

$$c = \frac{b}{Q^2} + G\ z, \qquad x + i\ y = T\,[a - \frac{i\,b}{Q}];$$

$$a - \frac{i\,b}{Q} = \sum_1^n (f_s + i\ g_s)\ln(x + i\ y - c_s))$$

$$\cos\ \theta = 2\ sn\,(a\,/\,k, k)^2 - 1,\ \ f_s = \frac{Q_s}{Q},$$

$$g_s = \frac{k\ K(k)\,N_s}{\pi}, (N_s, Q_s, \frac{Q_s}{Q} \in Z)$$

# spiral

$$\cos\theta = 2\,sn\left(\frac{K(k)\,\varphi\,N}{\pi} + \frac{Q_1 \ln r}{k\,Q}, k\right)^2 - 1$$

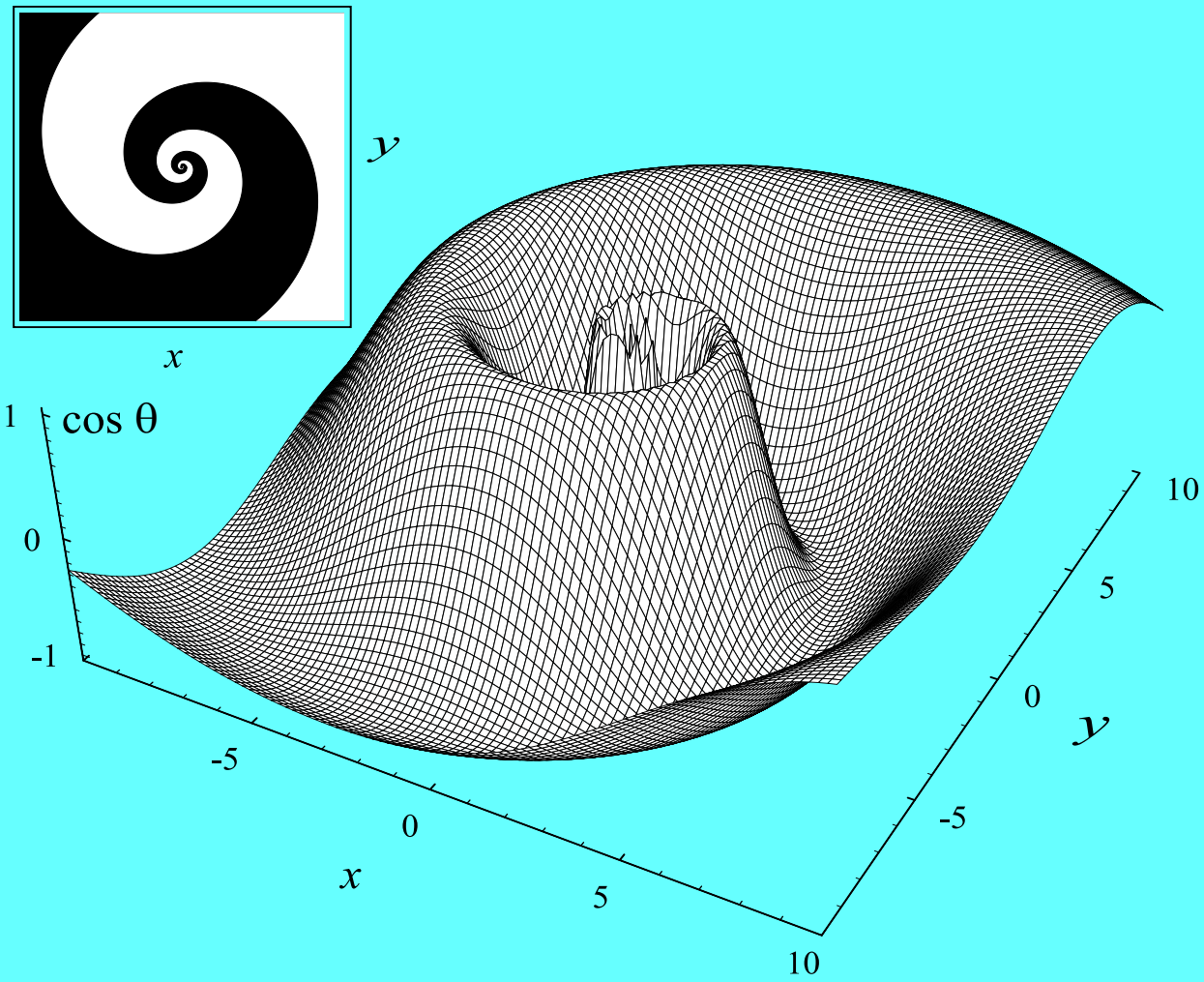
$$b = \frac{k\,K(k)\,Q\,N \ln r}{\pi} - Q_1\,\varphi,$$

$$c = G\,z + \frac{k\,K(k)\,Q\,N \ln r}{\pi\,Q} - \frac{Q_1}{Q^2}\varphi$$

k - degree of torsion

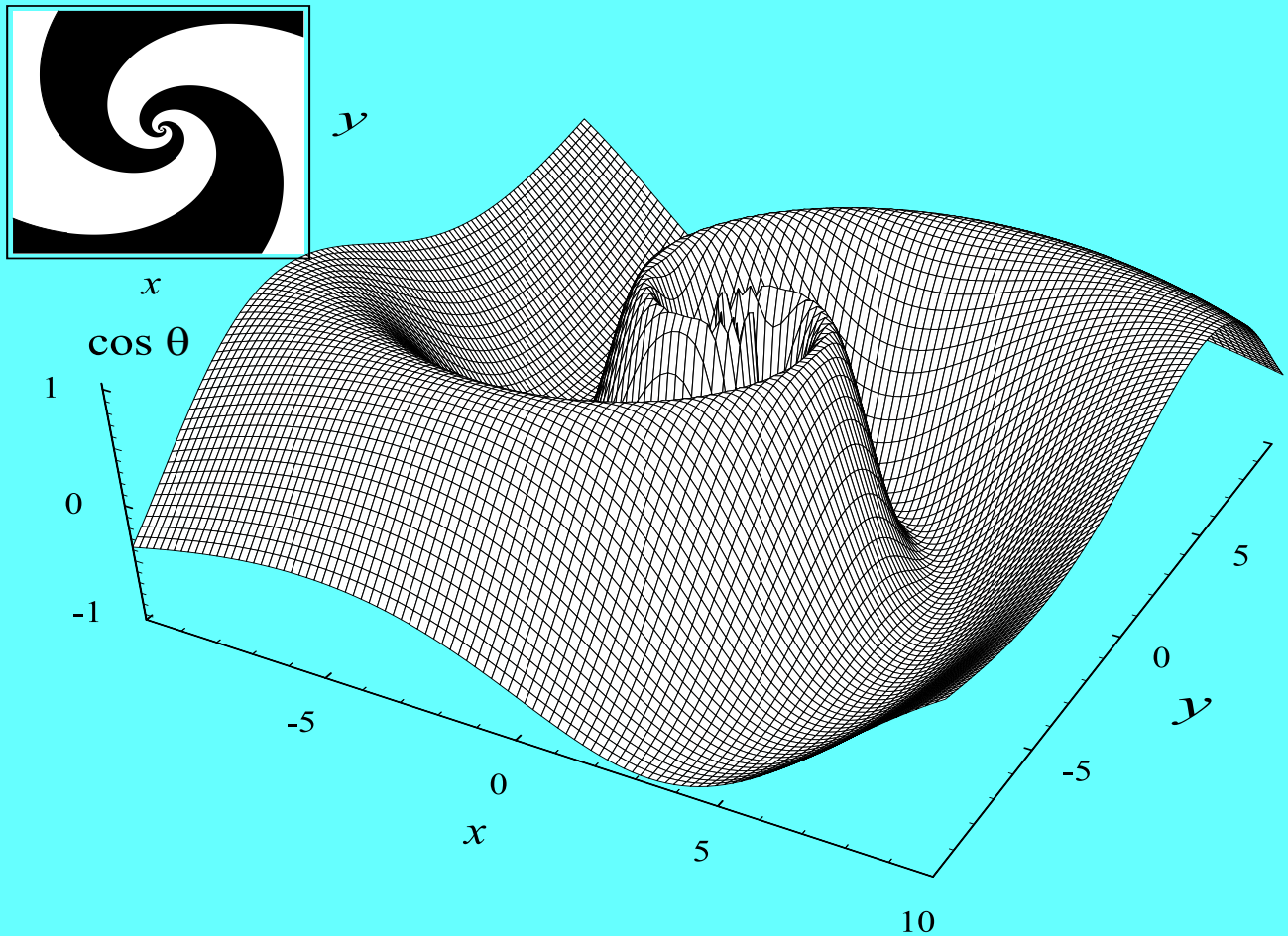
$$\theta = \text{Const} \Rightarrow \text{r} = \text{C}\ \text{Exp}\left(\frac{\text{h}\,\varphi}{2\,\pi}\right)$$

Пространственное распределение cos θ в однозаходной спирали (*к* = 0.5, *Q* = 1). На вставке показаны домены с отрицательными (темные области) или положительными (светлые области)значениями cos θ



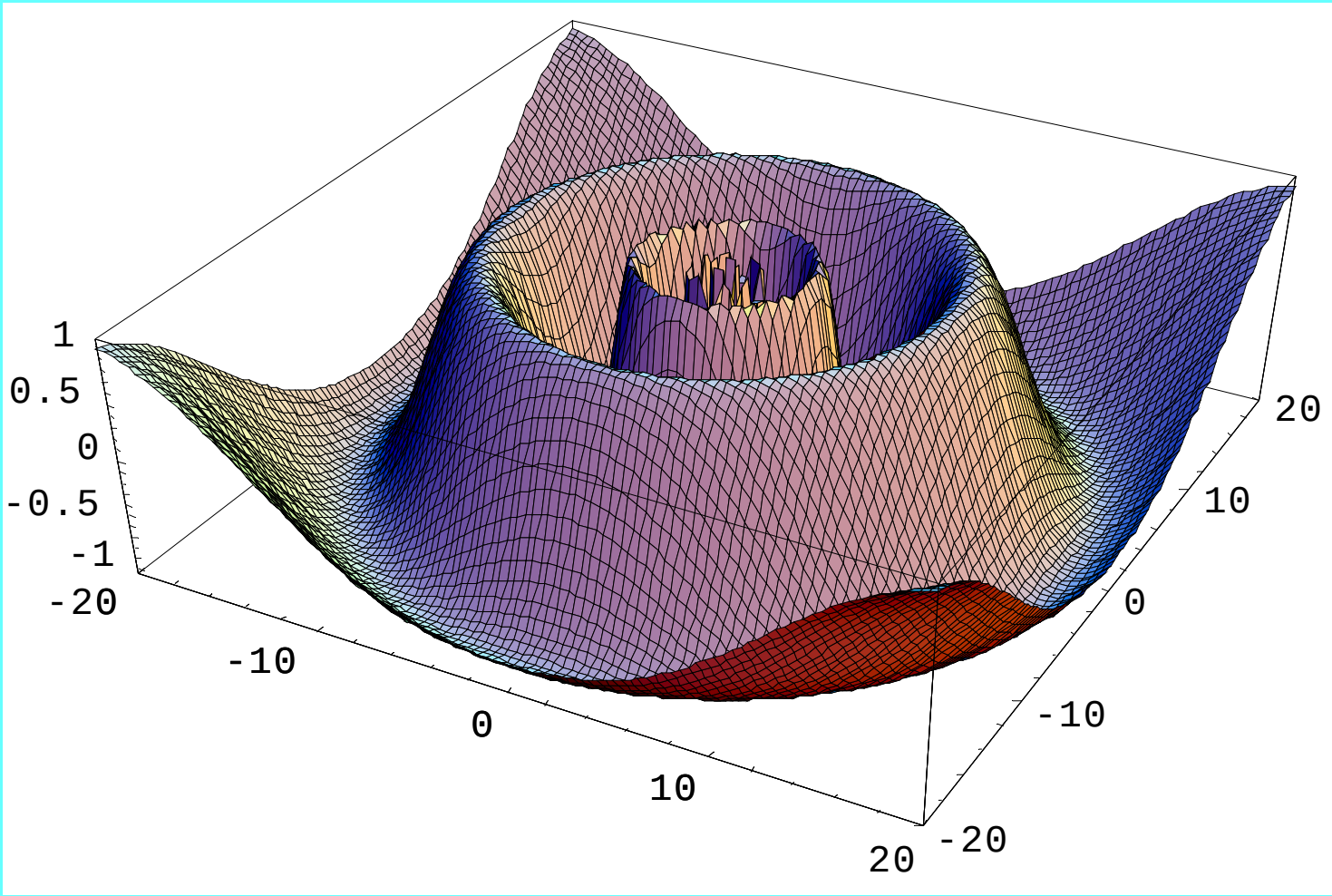
# Структура кора в двухзаходной спирали

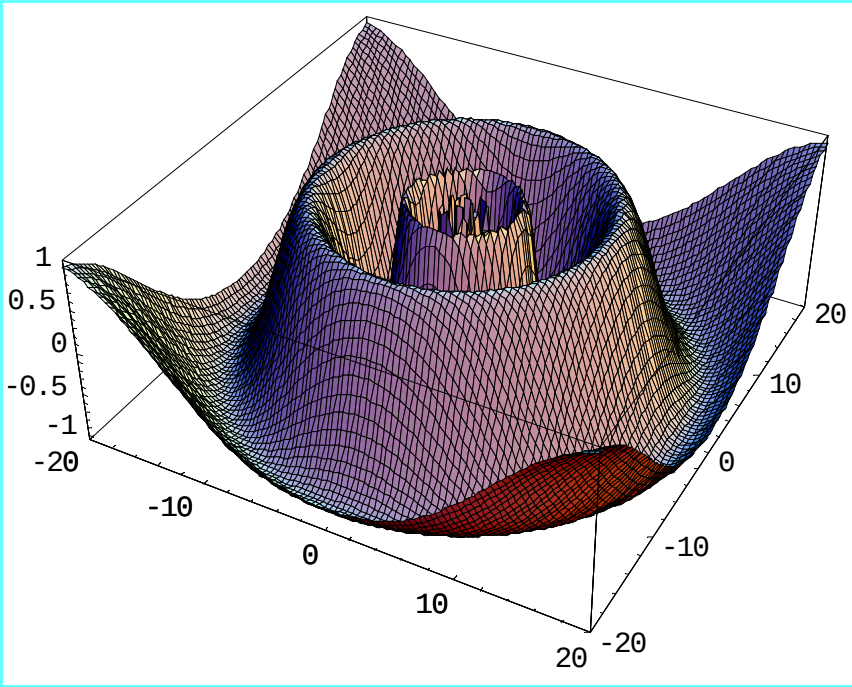
$$k = 0.5,\ N_1 = 2,\ Q_1 = 1,\ Q = 1$$

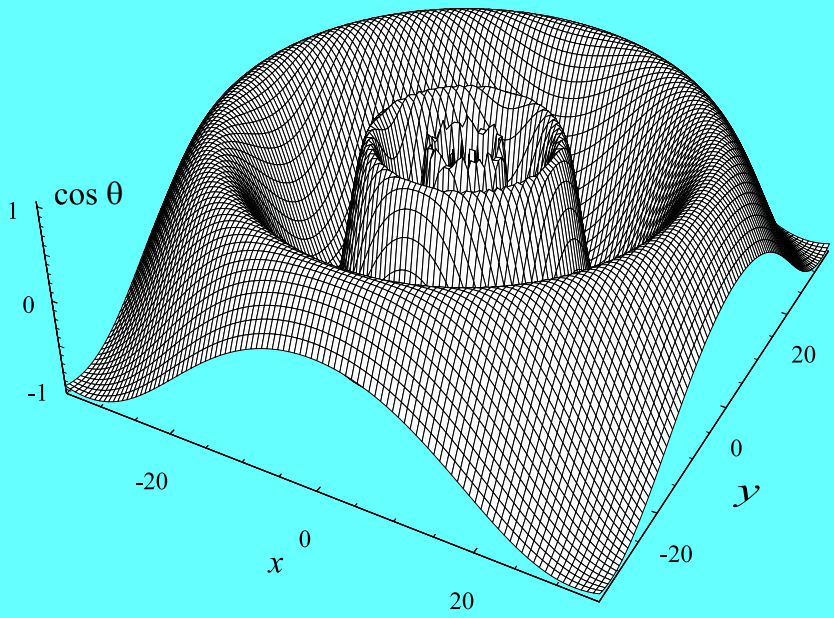


*Распределение* $\cos\theta$

*мишени*$(k = 0.3,\ \ N_1 = 0,\ \ Q_1 = 1,\ \ Q =$

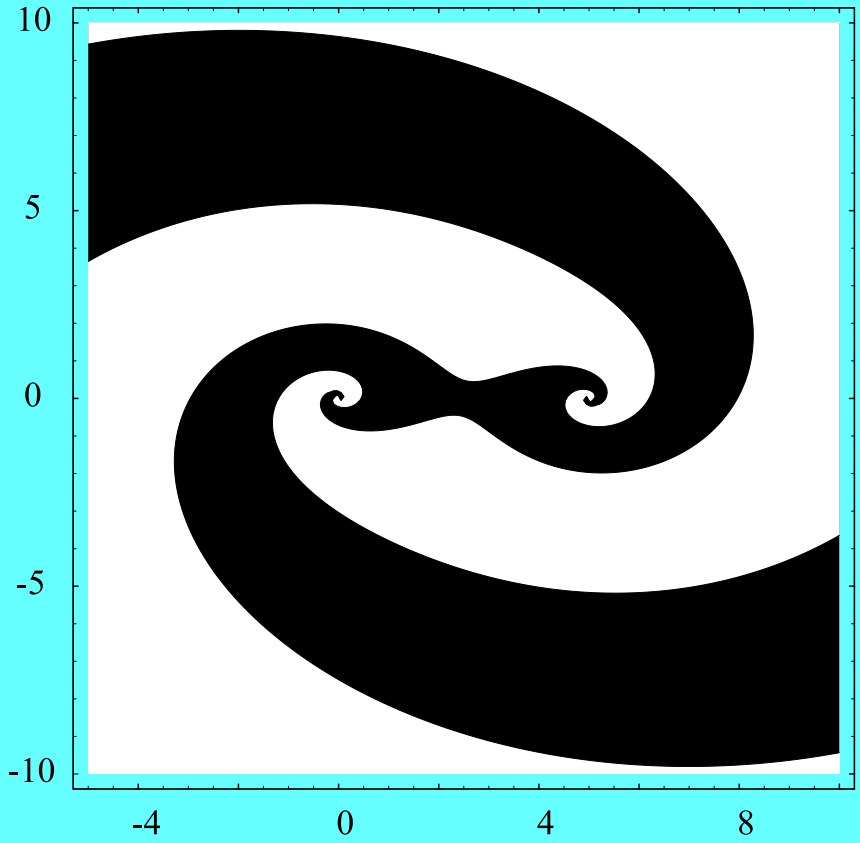



1
0.5
0
-0.5
-1
-20
-10
0
10
20
20
10
0
-10
-20


cos θ
1
0
-1
-20
0
20
x
20
0
-20
y

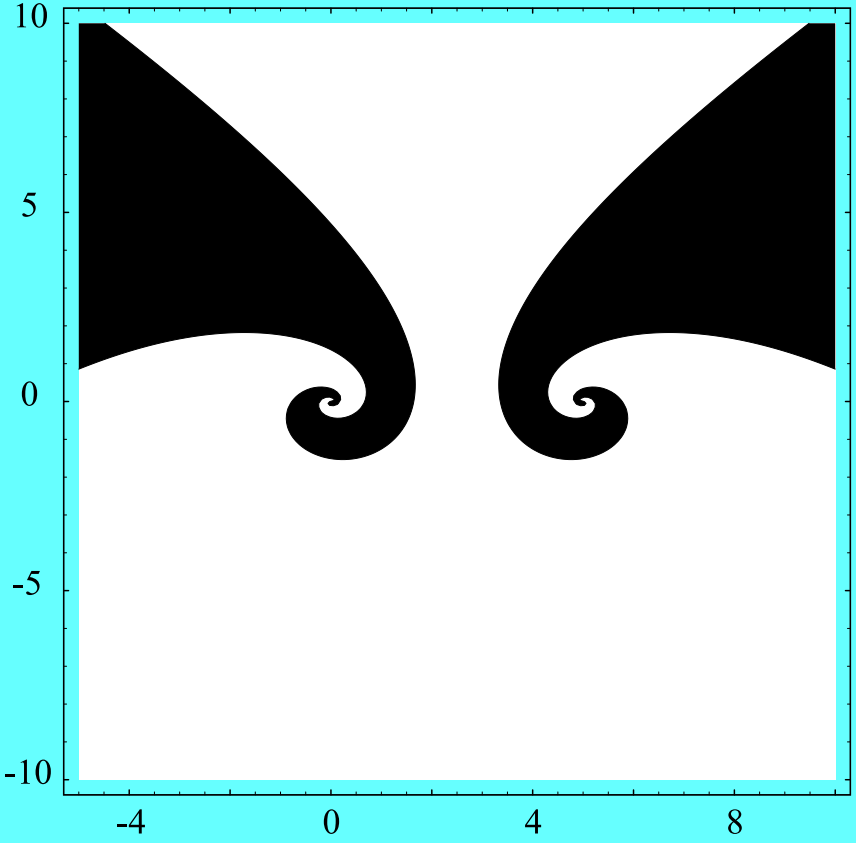
Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей и образующий на больших расстояниях двухзаходную спираль

$$k = 0.7,\ N_1 = N_2 = -1,\ Q_1 = Q_2 = 1,\ Q = 1, d = 5$$



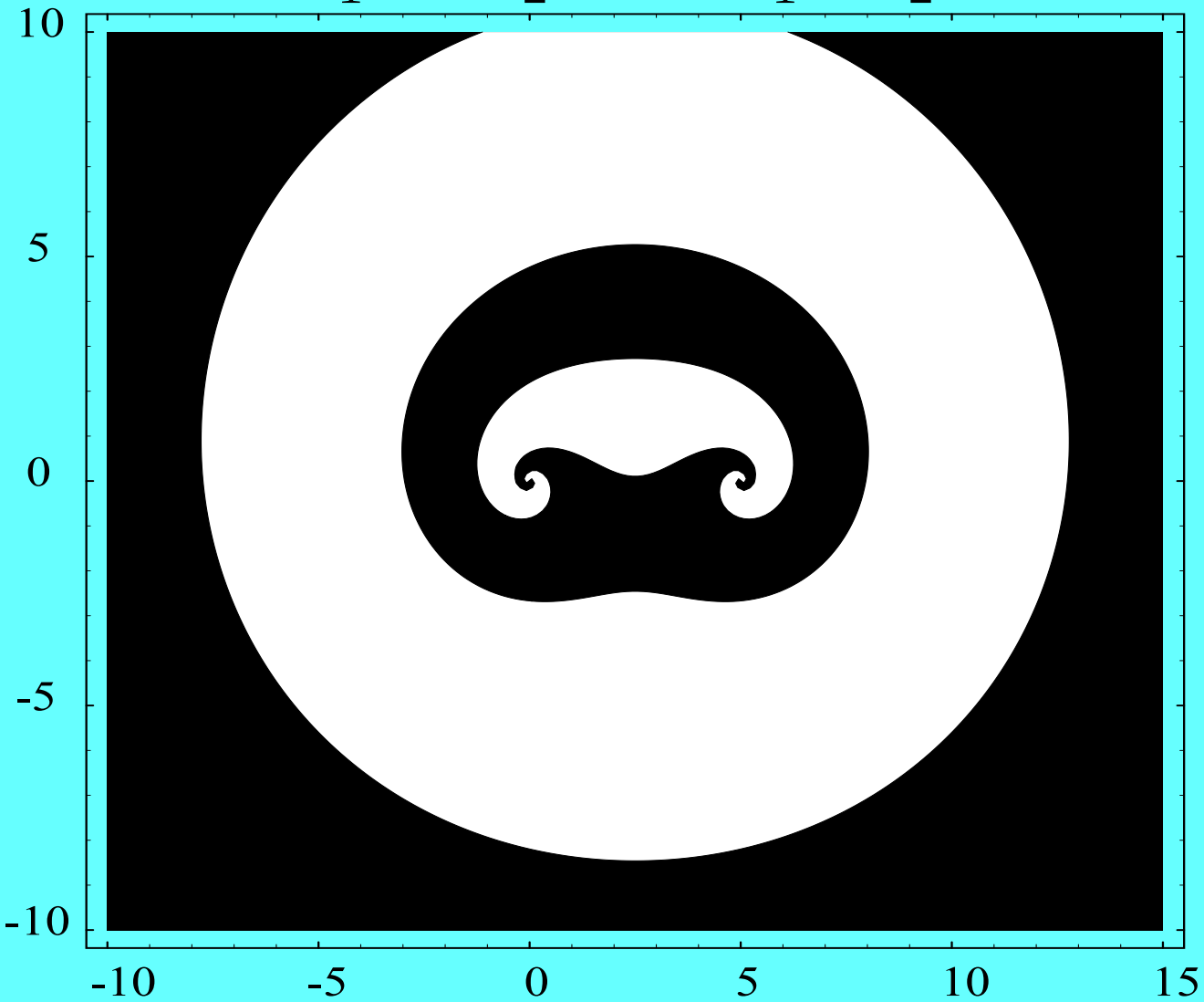
# Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей

$$k=0.7,\ N_1=N_2=-1,\ Q_1=-Q_2=1,\ Q=1, d=5$$



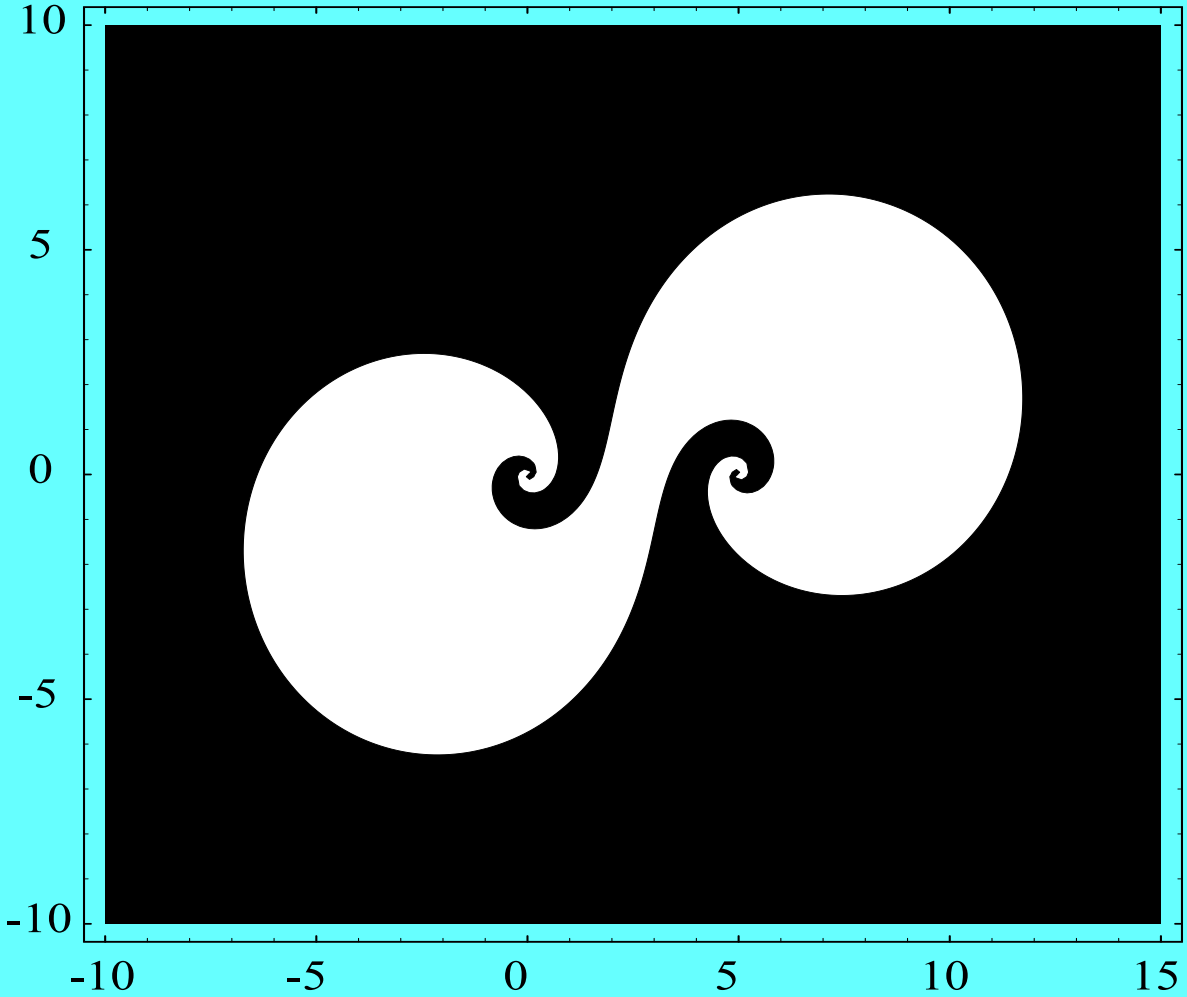
Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей и образующий на больших расстояниях мишень

$$k=0.7,\ N_1=-N_2=-1,\ Q_1=Q_2=1,\ Q=1, d=5$$



Спиральный диполь, состоящий из двух однозаходных спиралей и образующий на больших расстояниях однородное состояние

$$k = 0.7,\ N_1 = -N_2 = -1,\ Q_1 = -Q_2 = 1,\ Q = 1, d = 5$$



$$10) h_1 = Exp[P/2](-x_2 + G^2 x_3)/G, \quad P = P(x_1, x_2)$$

$$h_2 = (-x_2 + G^2 x_3)^2 / G^2 \sqrt{G^2 + Exp[P] G^4 / (x_2 - G^2 x_3)^2}$$

$$h_3 = Exp[P/2](-x_2 + G^2 x_3)/G^2$$

$$Ур. Лиувилля \quad 2G^2\, Exp[P] + P_{x_3,x_3} + G^2 P_{x_1,x_1} = 0,$$

$$P = -2\ln(C\, Sech(C\, x_1)), th(aC) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (\theta \in [0, 2\pi])$$

$$c = \frac{\varphi}{GC}, b = \frac{g}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\varphi G}{C} \quad (\frac{1}{GC} \in Z, \frac{G}{C} \in Z)$$

# 3 Anzatz

$$G = in_j \sigma_j + n_0 \sigma_0, \Delta n_\mu = 0 (\mu = 0,1,2,3,4)(\sigma - \mathrm{model})$$

$$n(\alpha,\beta), \quad n_{,\alpha\alpha} + n_{,\beta\beta} = 0$$

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = 0, \nabla\alpha\nabla\beta = 0, (\nabla\alpha)^2 = (\nabla\beta)^2$$

$$\omega = \alpha + i\,\beta, \quad \Delta\omega = 0, \quad \nabla\omega\nabla\omega = 0$$

$$A(\omega) + y\,B(\omega) + z\sqrt{-1 - B(\omega)^2} = x$$

$$b = \frac{-Q_1}{Q}\beta, \; c = \frac{-Q_2}{Q}\beta, \cos\frac{\theta}{2} = sn\left(\frac{\alpha\sqrt{Q_1 Q_2}}{kQ}, k\right)$$

# 3D spiral structures

$$A(\omega)=0,\ B(\omega)=\frac{i(-1+F(\omega))}{(1+F(\omega))},\ \omega=F(\Omega),\ \ \Omega=tg(\frac{\Theta}{2})\,Exp(i\,\varphi),$$

$$(x,y,z)\Rightarrow(R,\Theta,\varphi),\ \omega=\alpha+i\,\beta=(Q+i\ f)\ln\Omega$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=sn(-\frac{K\,S\,\varphi}{\pi}+\frac{\sqrt{Q_1Q_2}}{k}\ln(tg(\frac{\Theta}{2}),k)$$

$$b=-Q_1\,\varphi+\frac{K\,k\,S}{\pi}\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}}\ln(tg(\frac{\Theta}{2})$$

$$c=Q_2\,\varphi-\frac{K\,k\,S}{\pi}\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\ln(tg(\frac{\Theta}{2})$$

$$b = \frac{-Q_1}{Q}\beta,\ c = \frac{-Q_2}{Q}\beta, \cos\frac{\theta}{2} = sn(\frac{\alpha\sqrt{Q_1 Q_2}}{kQ}, k)$$

$$\alpha + i\beta = (\frac{2KiSk}{\pi}S_j + Q_j)$$

$$\ln\left[ tg(\frac{\Theta}{2})Exp(i\varphi - tg(\frac{\Theta_j}{2})Exp(i\varphi_j)\right]$$

*Singular filaments under* $\Theta_j, \varphi_j$

*For* $r << z \Rightarrow S_j - armed$ *spirals*

# Экспериментальное реализация

- ]. В антиферромагнитных наноматериалах вихревые и спиральные структуры могут быть обнаружены методами спин-поляризованной сканирующей туннельной микроскопии (SPSTM), особенно в перспективе ожидаемого создания SPSTM с атомной разрешающей способностью. Принцип действия SPSTM основан на сканировании тонким намагниченным острием (поле рассеяния порядка 0.1 Тл) поверхности пленки и записи магнитного сигнала. В многоподрешеточных антиферро-
- магнетиках локальная намагниченность пропорциональна вторым производным от полей и сильно возрастает вблизи вихревых нитей и центров сингулярных структур .