# Инвариант Хопфа

$$D = 3, M = M_0 \vec{n}, \vec{n} = (\sin\theta\cos\Phi, \sin\theta\sin\Phi, \cos\theta)$$

$$n \to n_0 = (0,0,1)(|r| \to \infty),$$

$$R^3 \cup \{\infty\} = S^3 \Rightarrow S^2$$

# Хейнц Хопф
# 1894 - 1971

- Все непрерывные отображения разбиваются на классы гомотопных отображений,которые классифицируются целым числом-инвариантом Хопфа. Два отображения гомотопны

$$n_1(r) \equiv n_2(r) \Rightarrow n(r,t) \approx$$

$$n(r,0) = n_1(r), n(r,1) = n_2(r)$$

$$S^3 \Leftrightarrow R^3$$

$$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$R^3 = \{y_1, y_2, y_3\} \qquad y_i = \frac{x_i}{x_4 + 1},$$

$$x_i = \frac{4y_i}{a+4}, x_4 = \frac{4-a}{a+4}, a = y_i^2.$$

# Пример отображения Хопфа

$$z_1 = x_1 + i\,x_2, z_2 = x_3 + i\,x_4,$$

$$z_1 z_1{}^* + z_2 z_2{}^* = 1,$$

$$u + iv = tg\frac{\theta}{2}e^{i\Phi} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$s^3 \Leftarrow SU(2)$$

$$G(x,y,z)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(-\alpha+\gamma)}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(-\alpha+\gamma)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{-i(\alpha+\gamma)}{2}} \end{pmatrix}$$

$$z_1=\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\alpha+\gamma)}{2}},z_2=i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(-\alpha+\gamma)}{2}}$$

$$(r - \frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}})^2 + z^2 = \frac{4}{tg^2\frac{\theta}{2}}$$

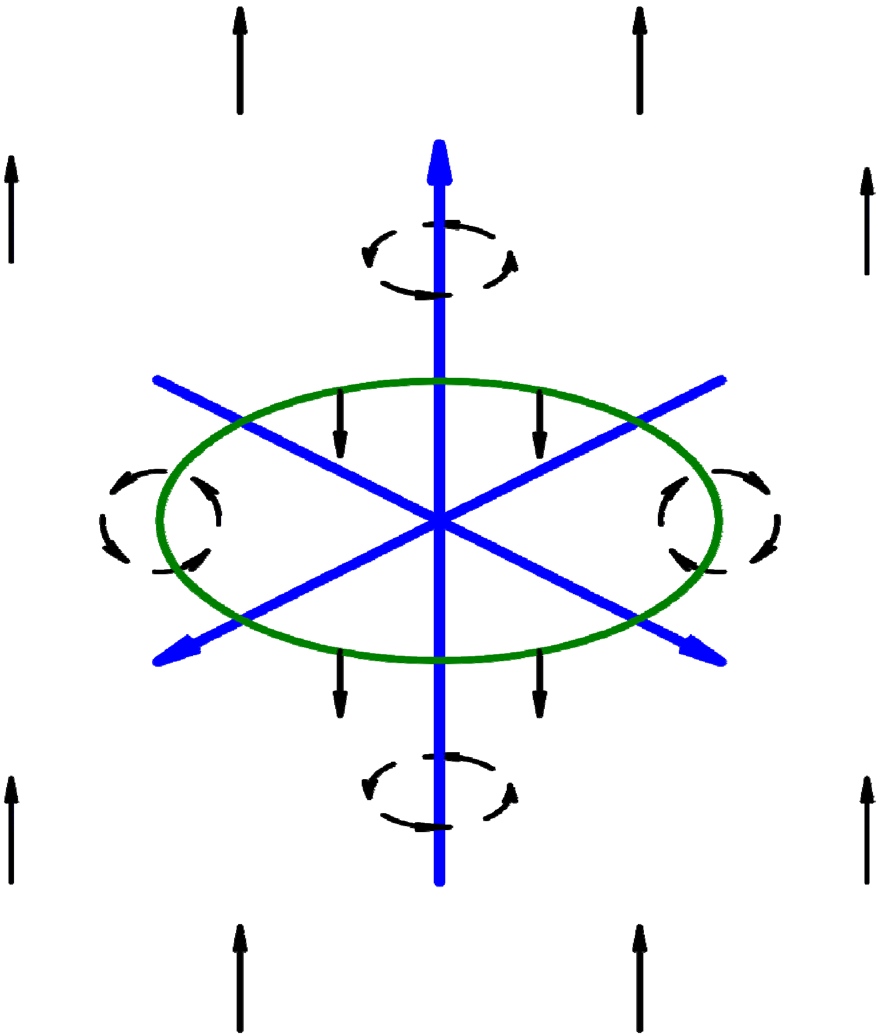
$$\Phi = \alpha = \varphi + Arc\tan[\frac{-4 + r^2 + z^2}{4z}]$$

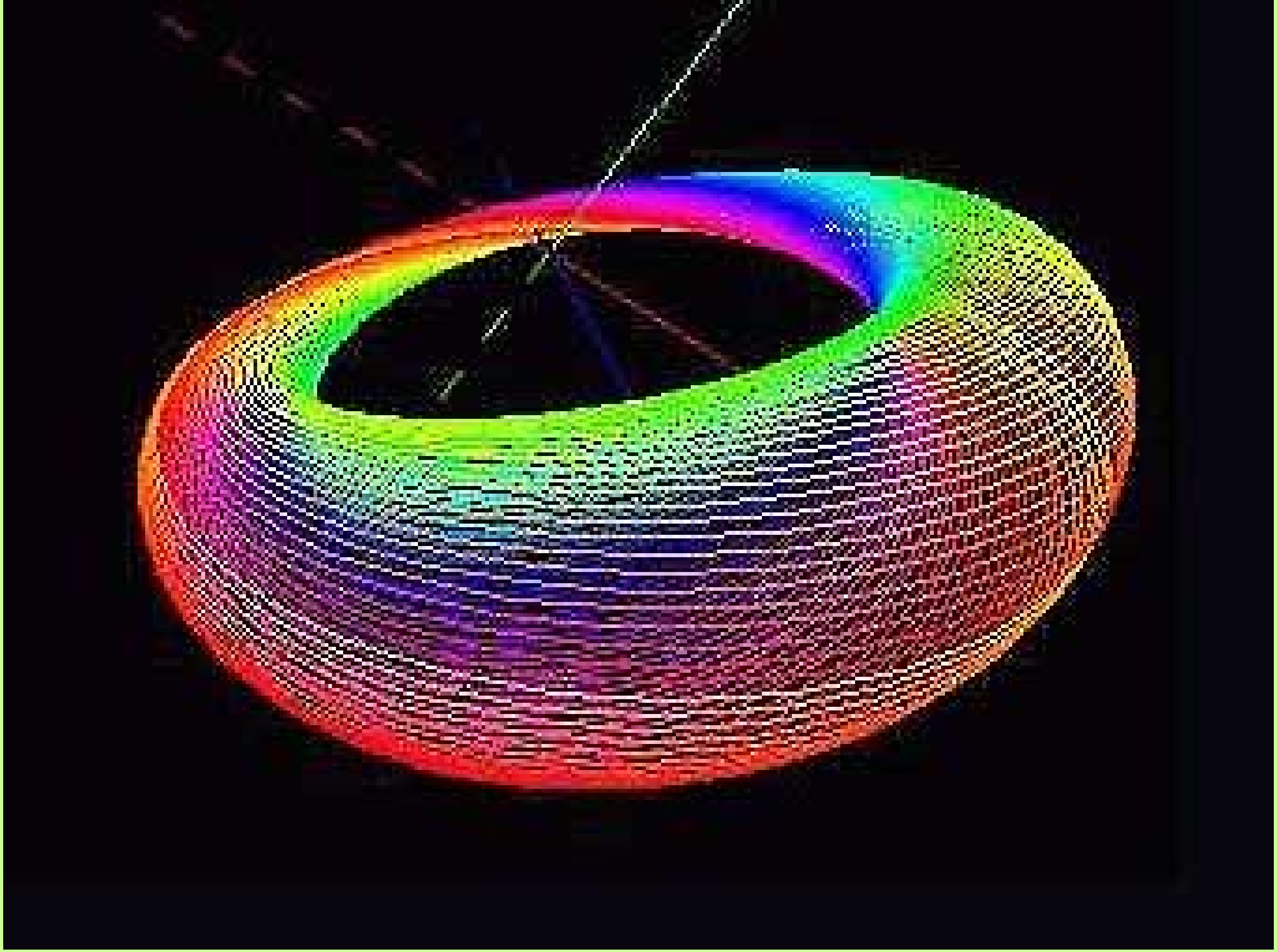
Расслоение пространства (нет зависимости от третьей переменной)

Вихрь

$\gamma$

$$\theta \to 0\ (r, z \to \infty), \theta \to \pi\ (r \to 2, z \to 0)$$





# Формула Уайхеда

$$\Omega(x,y,z)=\sin\theta d\theta\wedge d\Phi=$$

$$\sin\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}-\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)dx_i\wedge dx_j,$$

$$F_i=2\varepsilon_{ijk}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=-2\varepsilon_{ijk}\frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=$$

$$2\varepsilon_{ijk}\vec{n}\cdot(\vec{n}_{,j}\times\vec{n}_{,k})$$

$$div\vec{F}=0,\quad \vec{F}=rot\vec{A}$$

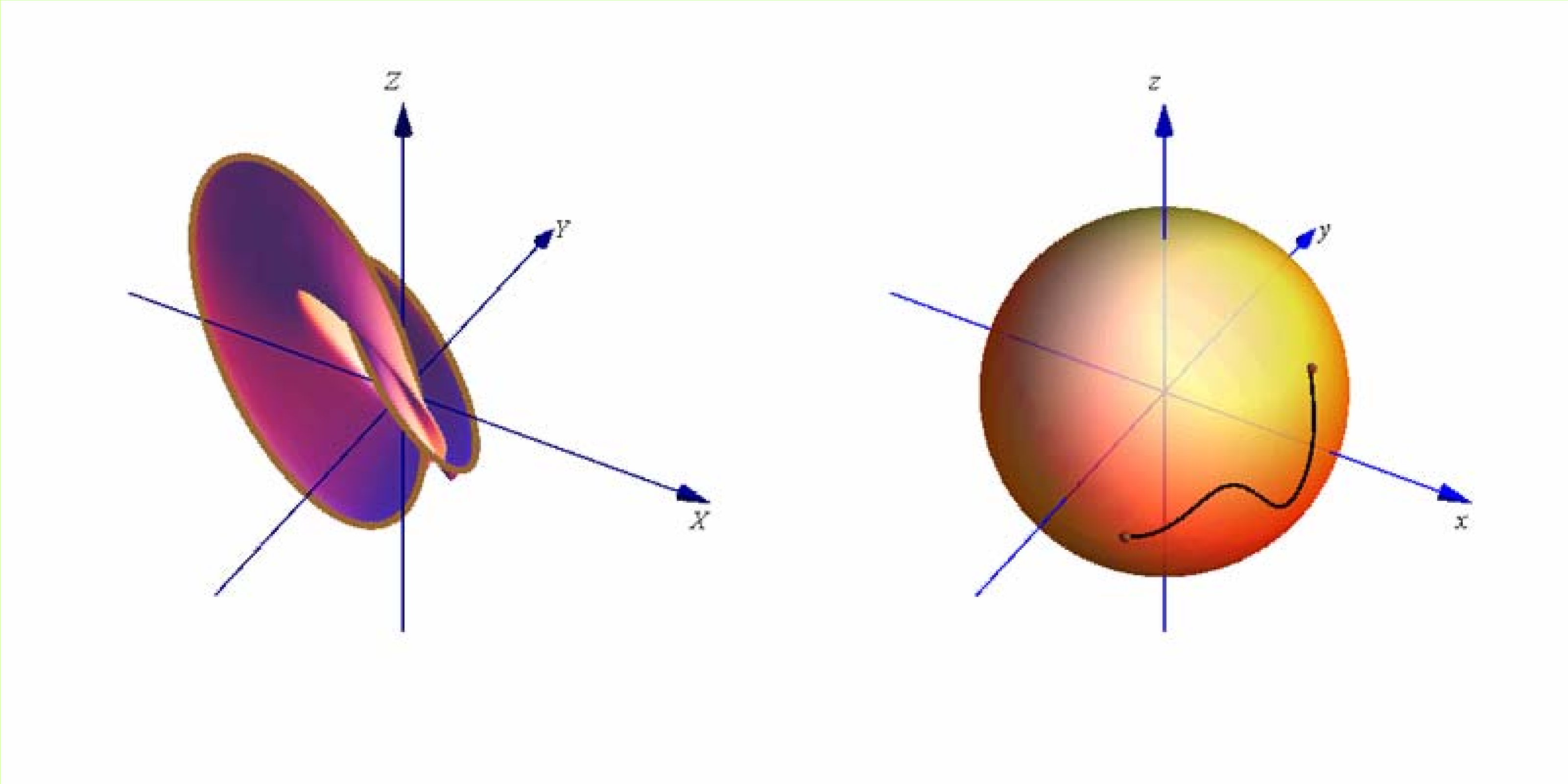
$$\theta(x,y,z)=C_1,\Phi(x,y,z)=C_2,$$

$$x=x(z),\quad y=y(z),$$

*çàì êíóò àÿ  ëèíèÿ  Âèäåî ô .*

$$\iint_{S_1} F_i dS_i = \oint_{\gamma_1} \vec{A} d\vec{l} - \oint_{\gamma_2} \vec{A} d\vec{l}$$

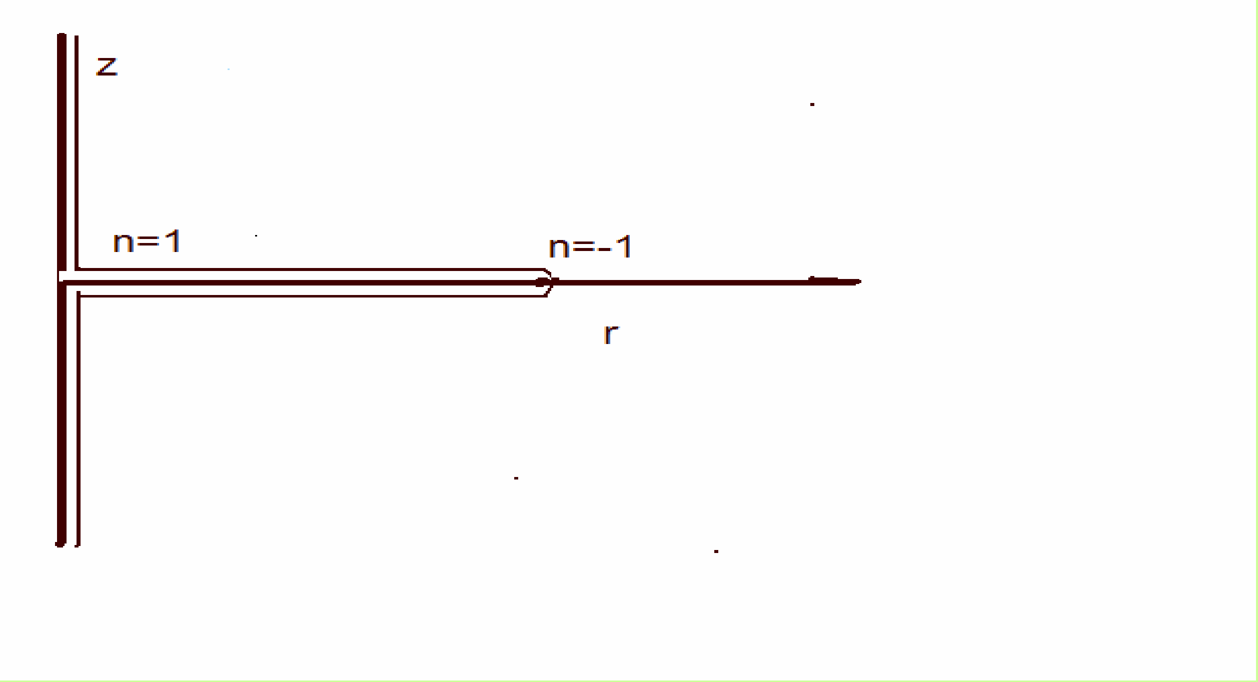
$$\oint_{\gamma} \vec{A} d\vec{l} = H,$$


Z
Y
X
z
y
x

$$W_+ - W_- = 2\pi T$$

$$H = -\frac{Q}{4\pi}\int_0^a dn\ W_+ - \frac{Q}{4\pi}\int_0^a dn\ W_- = -\frac{Q\ T}{2}(n(r=a) - n(r=0))$$

$$H = QT.$$



$$rot\vec{B} = 4\pi\vec{j} \Rightarrow \oint \vec{B}d\vec{S} = 4\pi\sum_i J_i$$

*Геометрическая интерпретация:*

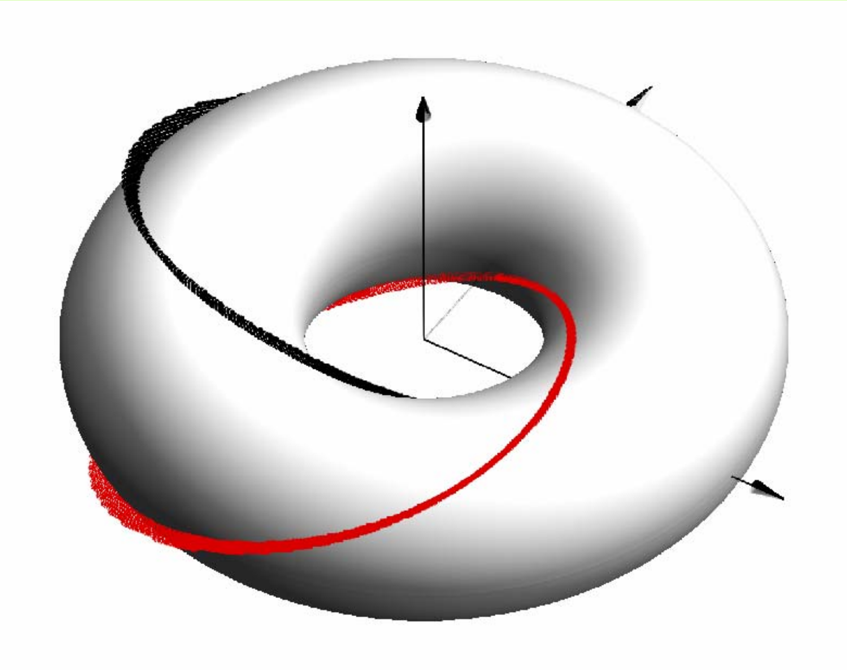
Н-число зацеплений любых двух кривых, которые являются прообразами любых двух точек на сфере.

# Инвариант
# Хопфа

В каждой точке трехмерного пространства определен вектор намагниченности, фиксированной длины – такой вектор можно задать точкой на сфере ($S^2$). В бесконечности, во всех направлениях, вектор ориентирован всюду одинаково и имеет ориентацию как и в основном состоянии с глобальным минимумом энергии: **n**=(0,0,1). Это необходимое условие, иначе энергия не может быть конечной. Таким образом бесконечно удаленные точки можно считать тождественными и 3d пространство эквивалентно сфере $S^3$. Значит, имеет место отображение $S^3 \rightarrow S^2$. Известно, что такому отображению отвечает целочисленный инвариант Хопфа. Целое число H равно количеству зацеплений прообразов двух разных точек, выбранных на сфере $S^2$.

$$H = QT,$$

$$T = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \mathbf{n}^* \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{n}^*}{\partial z} \right] dr dz.$$

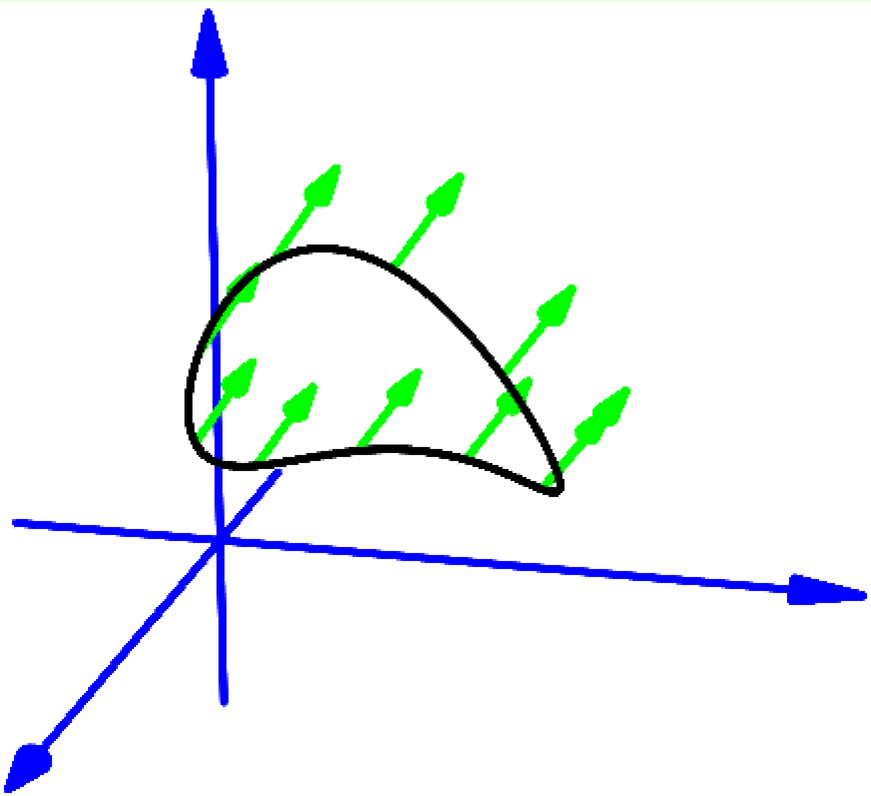


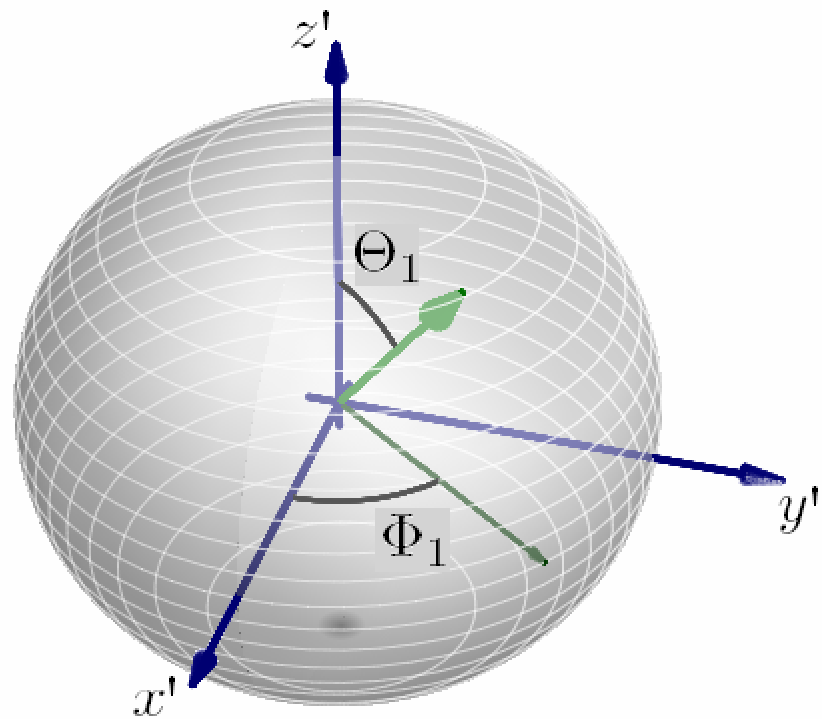
Поверхность θ=const и два прообраза векторов с различными углами Φ в отображении Хопфа;
H=1 (Q=1, T=1).

We can choose any vector value:

$$\vec{n}_1 = (sin\Theta_1 cos\Phi_1, sin\Theta_1 sin\Phi_1, cos\Theta_1)$$

curve in **R**$^3$ equal to one point on sphere **S**$^2$



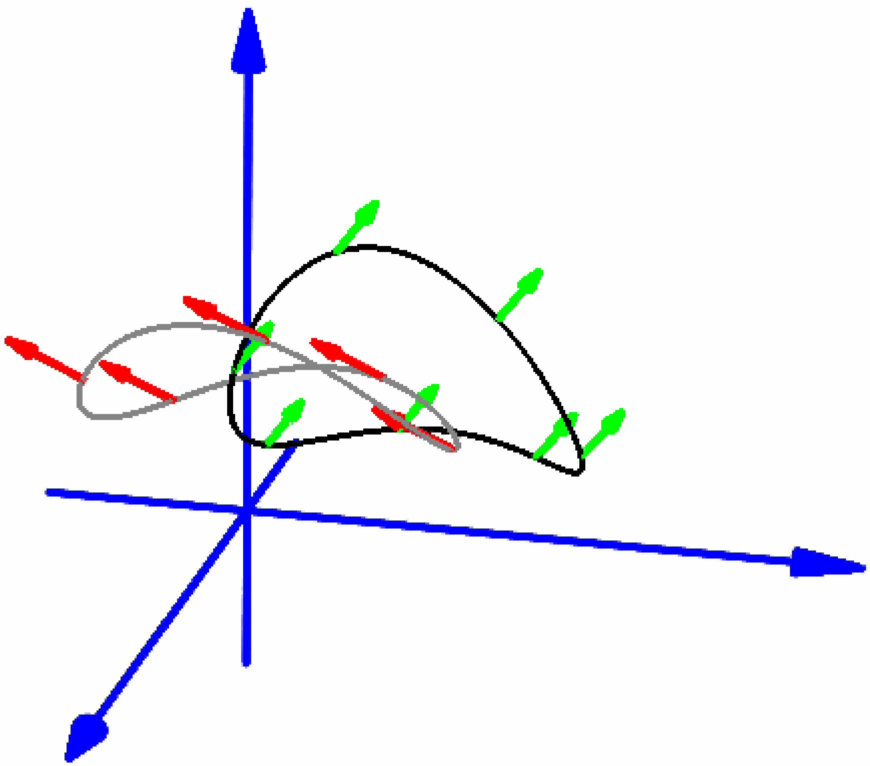


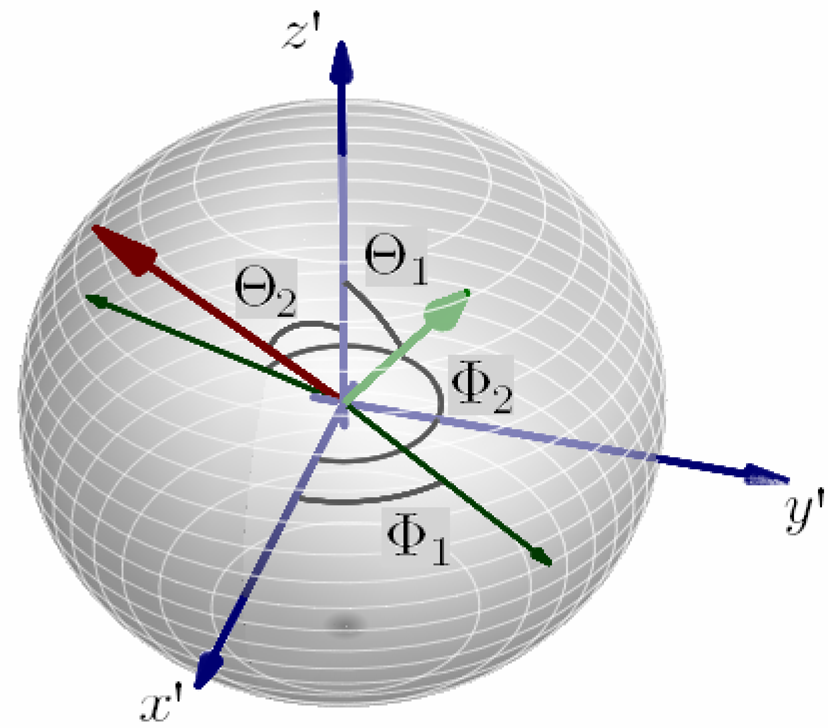
We can choose any 2 vectors:

$$\vec{n}_1 = (sin\Theta_1 cos\Phi_1, sin\Theta_1 sin\Phi_1, cos\Theta_1)$$

$$\vec{n}_2 = (sin\Theta_2 cos\Phi_2, sin\Theta_2 sin\Phi_2, cos\Theta_2)$$

2 curves in **R**$^3$ equal to 2 points on sphere **S**$^2$





Let $\vec{n} \to (0,0,1)$ (to ground state) as $|\vec{r}| \to \infty$

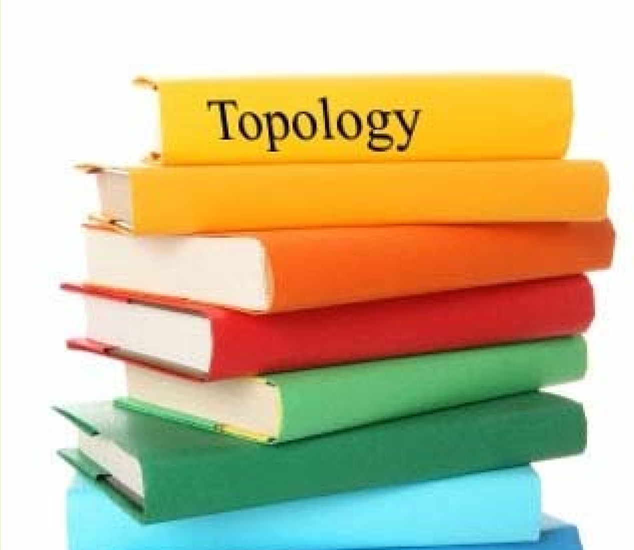
Maps: $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2$ are classified by a homotopy invariant:

Hopf number
$$H = -\frac{1}{(8\pi)^2} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r}$$

where

$$F_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{n} \cdot (\nabla_j \mathbf{n} \times \nabla_k \mathbf{n}), \quad curl \, \mathbf{A} = 2\mathbf{F}$$

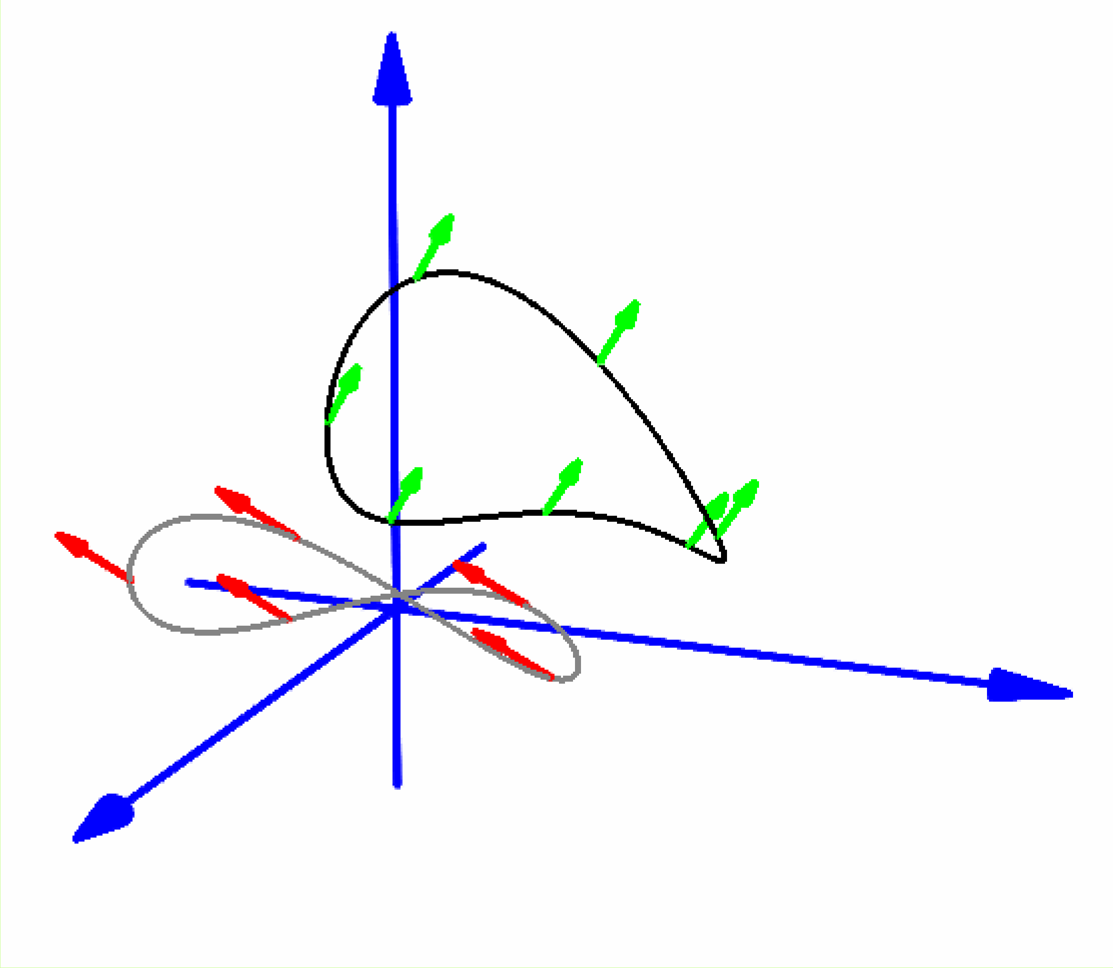
Hopf number takes
only integer values: $H \in \mathbb{Z}$



Hopf number = linking number of  2 preimage (in $\mathbf{R}^3$) of 2 points on $\mathbf{S}^2$

Example №1

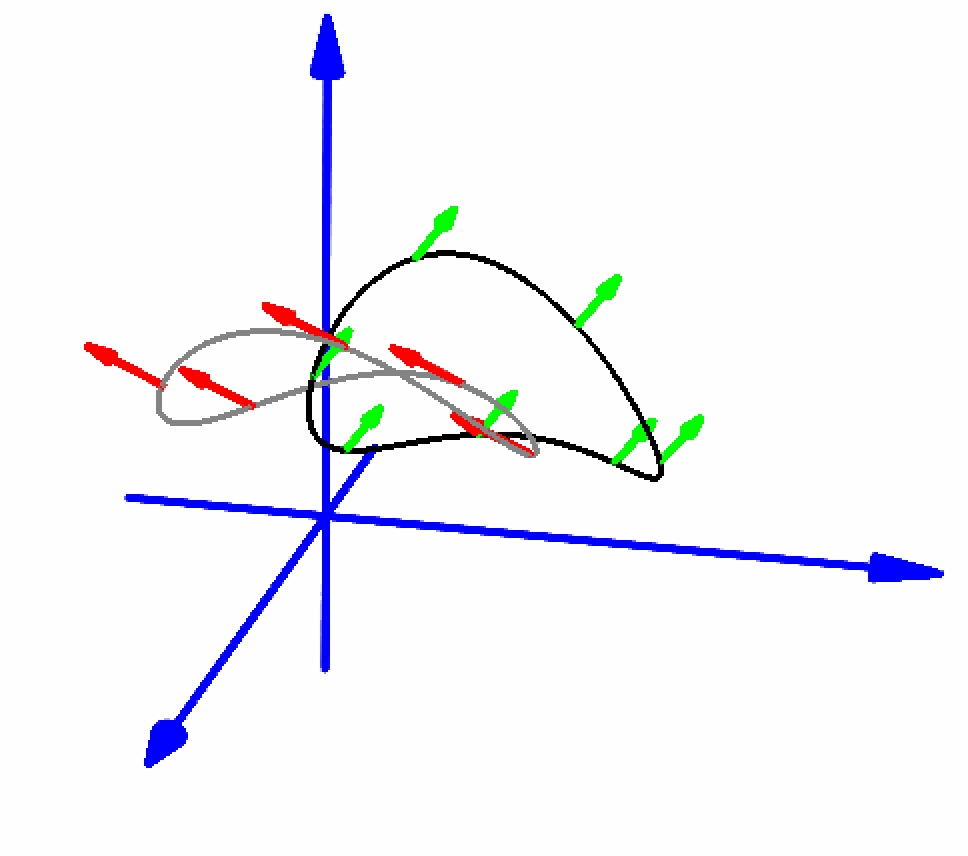
***H=0***



Hopf number = linking number of 2 preimage (in $\mathbf{R}^3$) of 2 points on $\mathbf{S}^2$

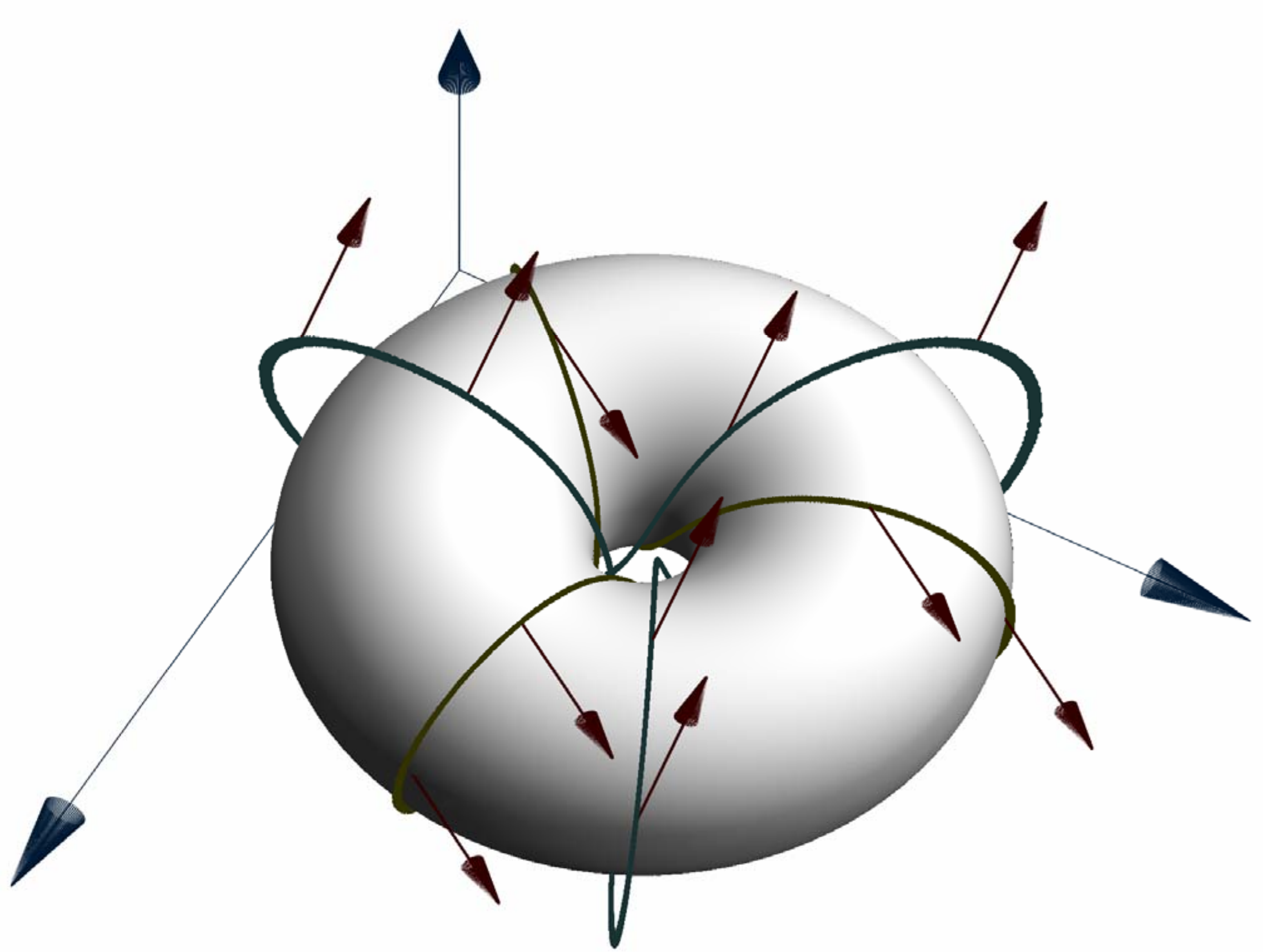
Example №2

***H=1***

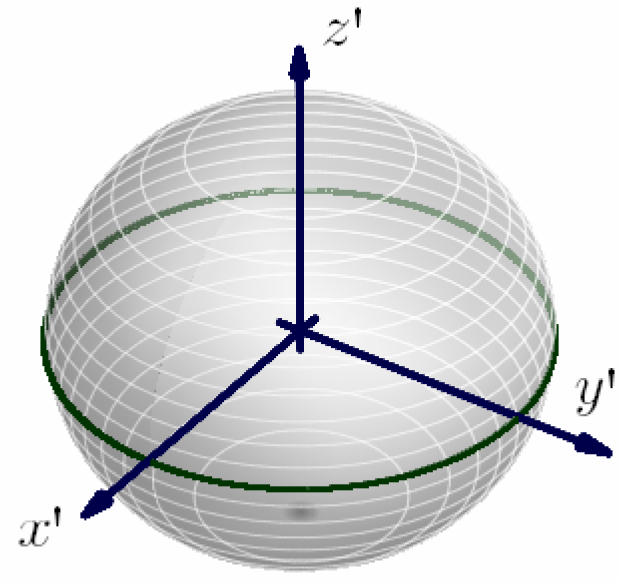


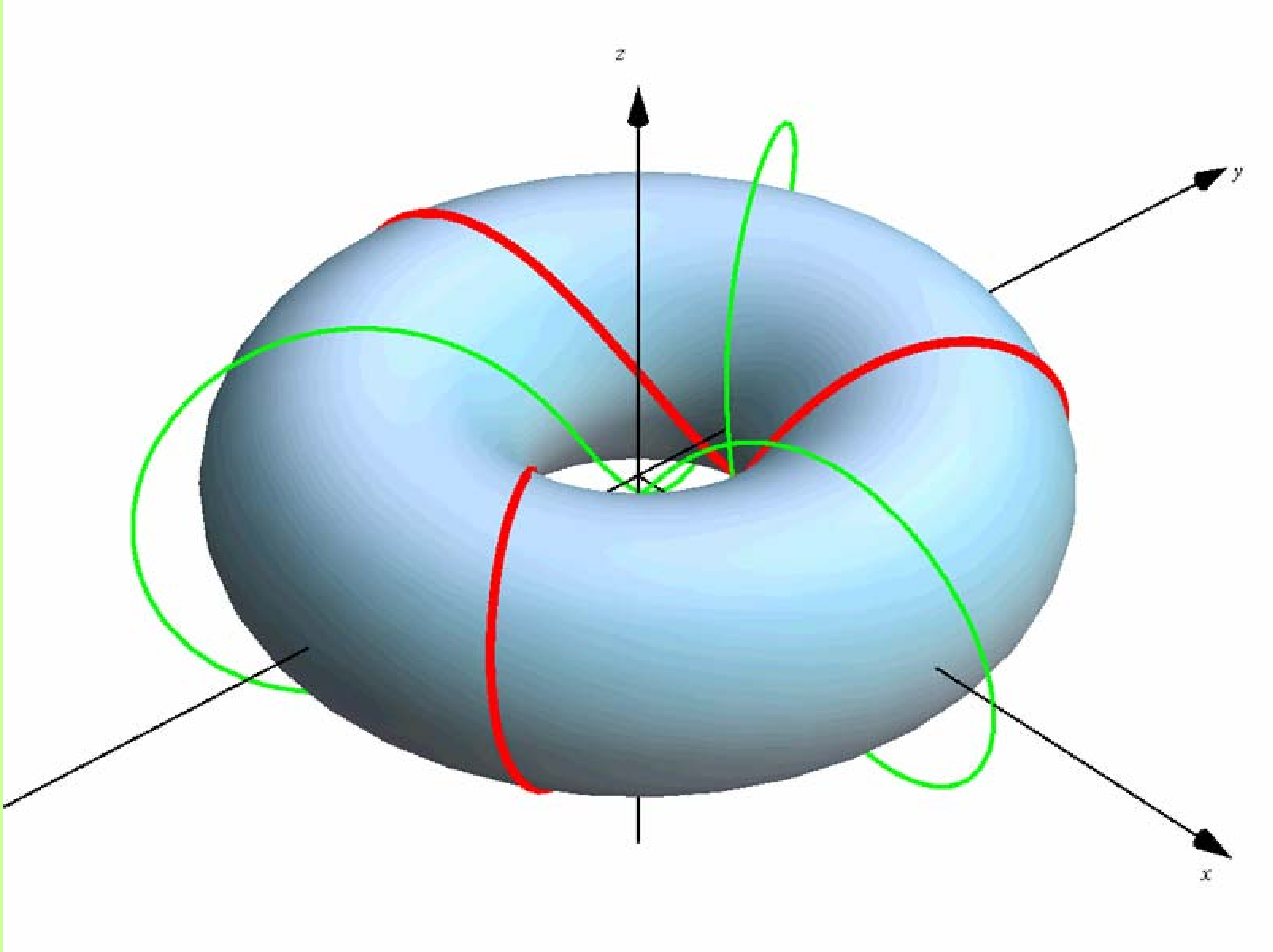
Example №3: field structure of toroidal Hopfion

***H=3***



Torus in **R**$^3$ is the preimage of equator line on **S**$^2$: Видео




z
y
x

# Теорема Деррика

Пусть есть решение конечной энергией

$$\tilde{H}\{\vec{n}(r)\} = e_0 + e_1 + e_2 + e_4, \quad e_0 = e_0(\vec{n}(r)), e_1 = G_{i\alpha}(\vec{n}(r))n_{i,\alpha},$$

$$e_2 = \frac{1}{2} n_{i,\alpha} n_{i,\alpha}, \quad e_4 = \frac{1}{4} n_{i,\alpha} n_{j,\beta} n_{k,\gamma} n_{p,\lambda} M^{ijkp}{}_{\alpha\beta\gamma\lambda}$$

- Рассмотрим специальную вариацию

$$\vec{n}(r) \to \vec{n}(\lambda r), \quad E \to E_\lambda = \int \bar{H}\{\vec{n}(\lambda r)\} d^3 x,$$

$$E_\lambda = \lambda^{-3} E_0 + \lambda^{-2} E_1 + \lambda^{-1} E_2 + \lambda E_4,$$

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda}(\lambda = 1) = 0, \quad \frac{d^2 E_\lambda}{d^2 \lambda}(\lambda = 1) > 0$$

$$-3E_0 - 2E_1 - E_2 + E_4 = 0$$

$$12E_0 + 6E_1 + E_2 > 0$$

$$1.\ E_1 = E_4 = 0$$

$$2.\ E_1 = E_0 = 0$$

$$3.\ E_4 = 0$$

1.Нет локализованных структур
2.Существуют ......
3.Могут существовать


$\vec{n} = \mathbf{n}(x, y, z), \quad |\mathbf{n}| = 1$

# Точные решения

$$\overline{H} = (\nabla \vec{n})^{\frac{3}{2}}, \overline{H} = (\nabla \vec{n})^{\frac{3}{4}} \quad , F_i = 2\varepsilon_{ijk}\vec{n} \cdot (\vec{n}_{,j} \times \vec{n}_{,k})$$

Модель Фаддеева-Ниеми(численное моделирование)

$$\overline{H} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{n})(\nabla \vec{n}) + g\vec{F} \cdot \vec{F}$$

FERROMAGNETIC


Landay-Lifshitz equation

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \left[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\mathbf{eff}}\right], \quad \mathbf{H}_{\mathbf{eff}} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}}$$

where

Magnetization vector

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{n} = M_0 (sin\Theta cos\Phi, sin\Theta sin\Phi, cos\Theta)$$

Energy

$$E = \frac{\alpha}{2} \int (\partial_i \mathbf{M})^2 \, d\mathbf{r} + \frac{\beta}{2} \int \left({M_x}^2 + {M_y}^2\right) d\mathbf{r}$$

What do we know about hopfions in ferromagnets ?

## Stationary precession toroidal hopfions

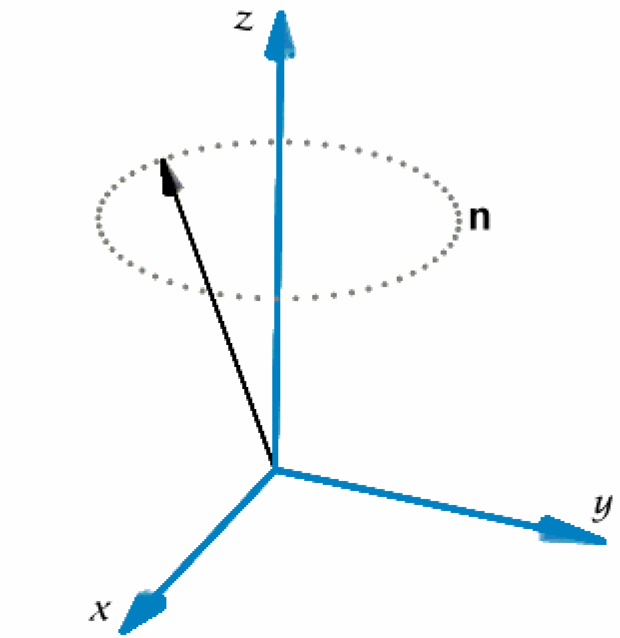
- [I.E. Dzyloshinskii, B.A. Ivanov, JETP Lett. 29, 540 (1979)] – first announcement.

- [A.M. Kosevich, B.A. Ivanov, A.S. Kovalev, Nonlinear waves of magnetisation. Dynamical and topological solitons (book in Russian, 1983) and Phys. Rep. 194, 117 (1990)] – simple analysis and conclusion: only one way to get solution - to use numerical methods.
- [A.B. Borisov, F.N. Rybakov, JETP Lett. 88, 264 (2008)] , • [A.B. Borisov, F.N. Rybakov, JETP Lett (2009)] –stationary and dynamical hopfions are found numerically. Fine structure and main features are studied.

Why "precession" ?

Hobart-Derrick theorem forbids the existence stationary 3D solitons with energy

$$E = \frac{\alpha}{2} \int (\partial_i \mathbf{M})^2 \, d\mathbf{r} + \frac{\beta}{2} \int \left( {M_x}^2 + {M_y}^2 \right) d\mathbf{r}$$



Магнонная капля $\theta = \theta(|r|),\ \Phi = \omega t$

# Структура хопфиона

- **Cooper(1999) ,нет структуры** $Heisender \quad \beta = 0, \quad v, \quad \omega$

**Численное моделирование**

**Найдены прецессионные стационарные солитоны с H=2,3,4**

$$\Phi = \omega t + Q\varphi + \phi(r, z),\ \theta = \theta(r, z)$$

**Эквивалентно минимизации функционала энергии с условием**

$$N = \int (1 - \cos\theta) d\vec{r} = Const$$

Контроль точности численного результата

- Соответствие топологического заряда целому числу (интегральная формула).

- Вычисление невязки по норме векторов.

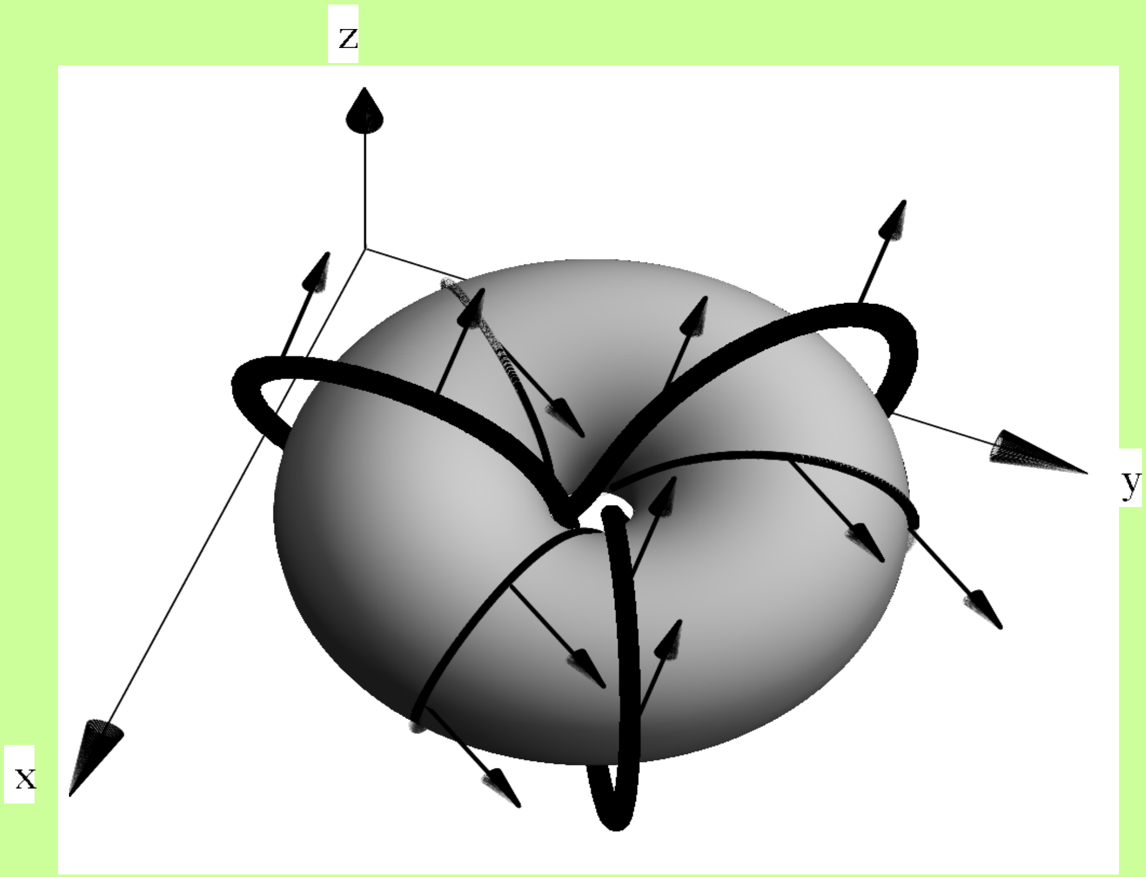
- Асимптотическое приближение энергии к конкретному значению.

- Определение величин ω и V вариационными приемами (интегральные формулы), расчет производных второго порядка на дискретной сетке и вычисление невязки непосредственно уравнения Ландау-Лифшица.

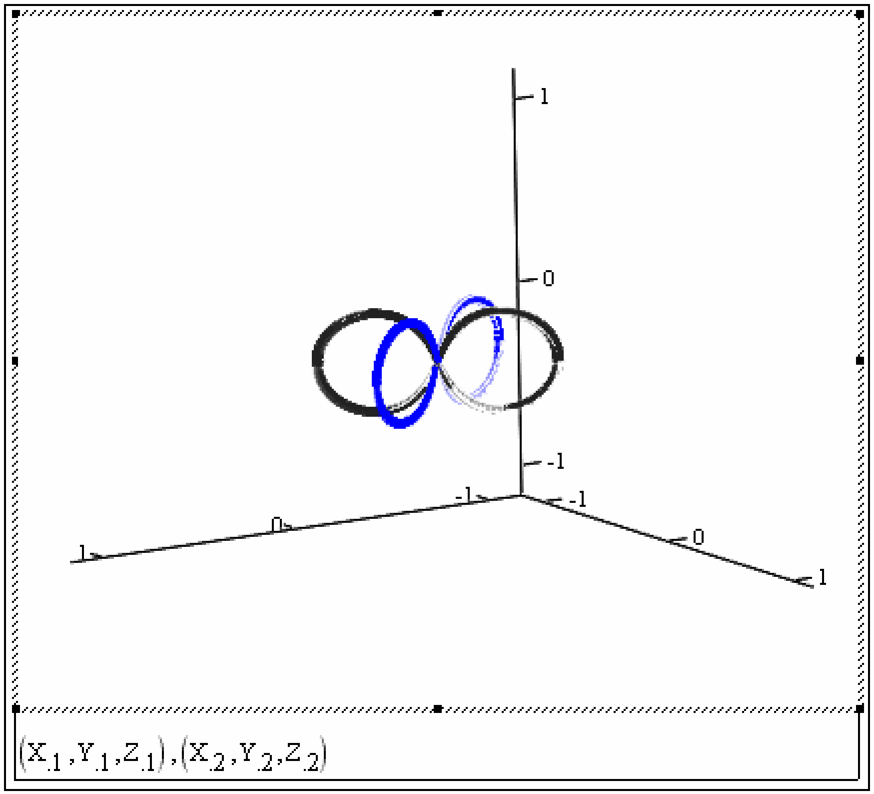
Распределение намагниченности в трехмерном солитоне с H=3,прообразы с

$$(\theta = 0.5\pi, \Phi = 1) - \textit{тонкая линия}, (0.2\pi, \Phi = 3) - \textit{толстая},$$

$$T = 1.\textit{Другие}T.2\textit{видео}.$$



$\begin{pmatrix} \theta_1 & \Phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 & 0.5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \theta_2 & \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 & 2.5 \end{pmatrix}$




Энергия: $E = E_{ex} + E_{anizo}$

$$E_{ex} = \frac{a}{2} \cdot \int \sum_{i,j} \left( d_{x_j} \cdot n_i \right)^2 dx$$

$$E_{anizo} = \frac{g}{2} \cdot \int \left( 1 - {n_3}^2 \right) dx$$

При условии: $\int \left( 1 - n_3 \right) dx = \text{const} = J$

И подстановка типа "Q-вихрь" по $\phi$:

$$n_1(r,\phi,z) = n'_1(r,z) \cdot \cos(Q \cdot \phi) - n'_2(r,z) \cdot \sin(Q \cdot \phi)$$

$$n_2(r,\phi,z) = n'_1(r,z) \cdot \sin(Q \cdot \phi) + n'_2(r,z) \cdot \cos(Q \cdot \phi)$$

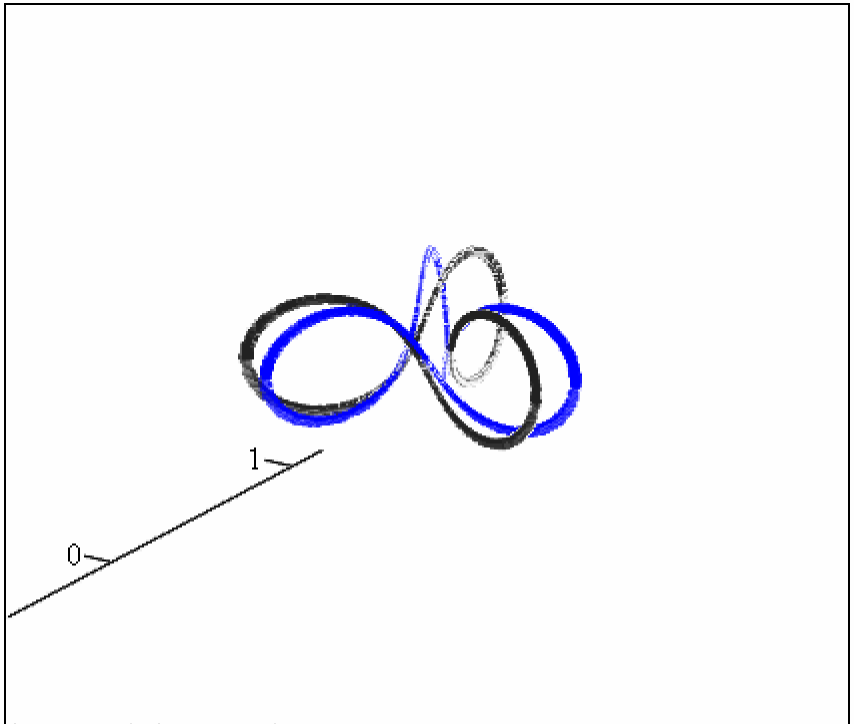
Значения констант:

$Q = 2$ $g = 100$ $a = 1$ $J = 0.895$

Результат вычислений:

$E_{ex} = 78.0$ $E_{anizo} = 28.7$ $\omega = 51.5$

$\begin{pmatrix}\theta_1 & \Phi_1\end{pmatrix} = (1.7 \;\; 0.5)$ $\begin{pmatrix}\theta_2 & \Phi_2\end{pmatrix} = (1.8 \;\; 1.5)$




$(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$

Энергия:

$$E = \frac{a}{2} \cdot \int \sum_{i,j} \left(\frac{dn_i}{dx_j}\right)^2 dx + \frac{g}{2} \cdot \int \left(1 - n_3^{\,2}\right) dx$$

При условии:

$$\int \left(1 - n_3\right) dx = const = J$$

И подстановка типа "вихрь" по $\phi$:

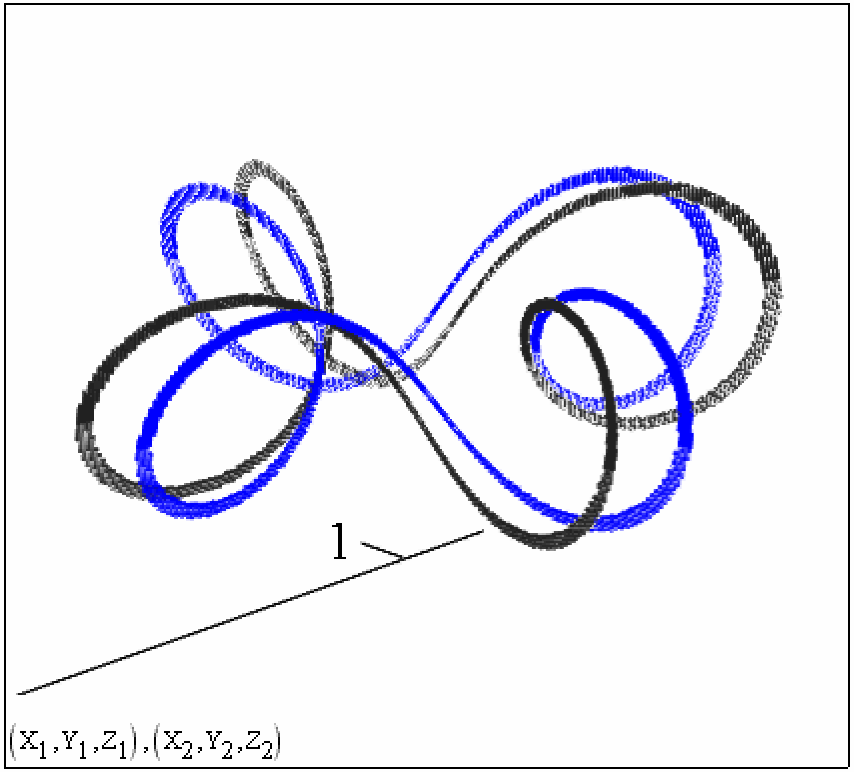
$$n_1(r,\phi,z) = n'_1(r,z) \cdot \cos(Q \cdot \phi) - n'_2(r,z) \cdot \sin(Q \cdot \phi)$$

$$n_2(r,\phi,z) = n'_1(r,z) \cdot \sin(Q \cdot \phi) + n'_2(r,z) \cdot \cos(Q \cdot \phi)$$

Значения констант:

$Q = 3$ $g = 100$ $a = 1$ $J = 0.895$

$\begin{pmatrix}\theta_1 & \Phi_1\end{pmatrix} = (1.7 \;\; 0.5)$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}\theta_2 & \Phi_2\end{pmatrix} = (1.8 \;\; 1.5)$




Энергия:

$$E = \frac{a}{2}\cdot\int \sum_{i,j}\left(\frac{dn_i}{dx_j}\right)^2 dx + \frac{g}{2}\cdot\int \left(1 - n_3{}^2\right) dx$$

При условии:

$$\int (1 - n_3)\, dx = \mathrm{const} = J$$

И подстановка типа "вихрь" по $\phi$:

$$n_1(r,\phi,z) = n'_1(r,z)\cdot\cos(Q\cdot\phi) - n'_2(r,z)\cdot\sin(Q\cdot\phi)$$

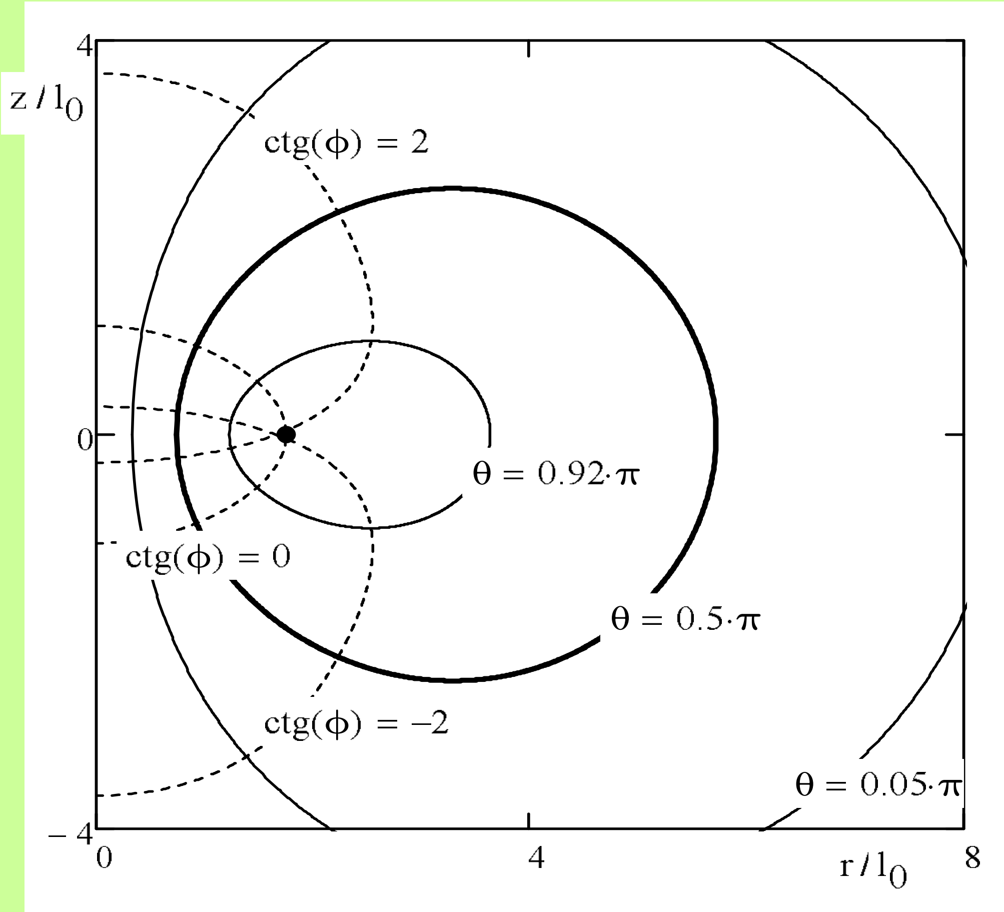
$$n_2(r,\phi,z) = n'_1(r,z)\cdot\sin(Q\cdot\phi) + n'_2(r,z)\cdot\cos(Q\cdot\phi)$$

Значения констант:

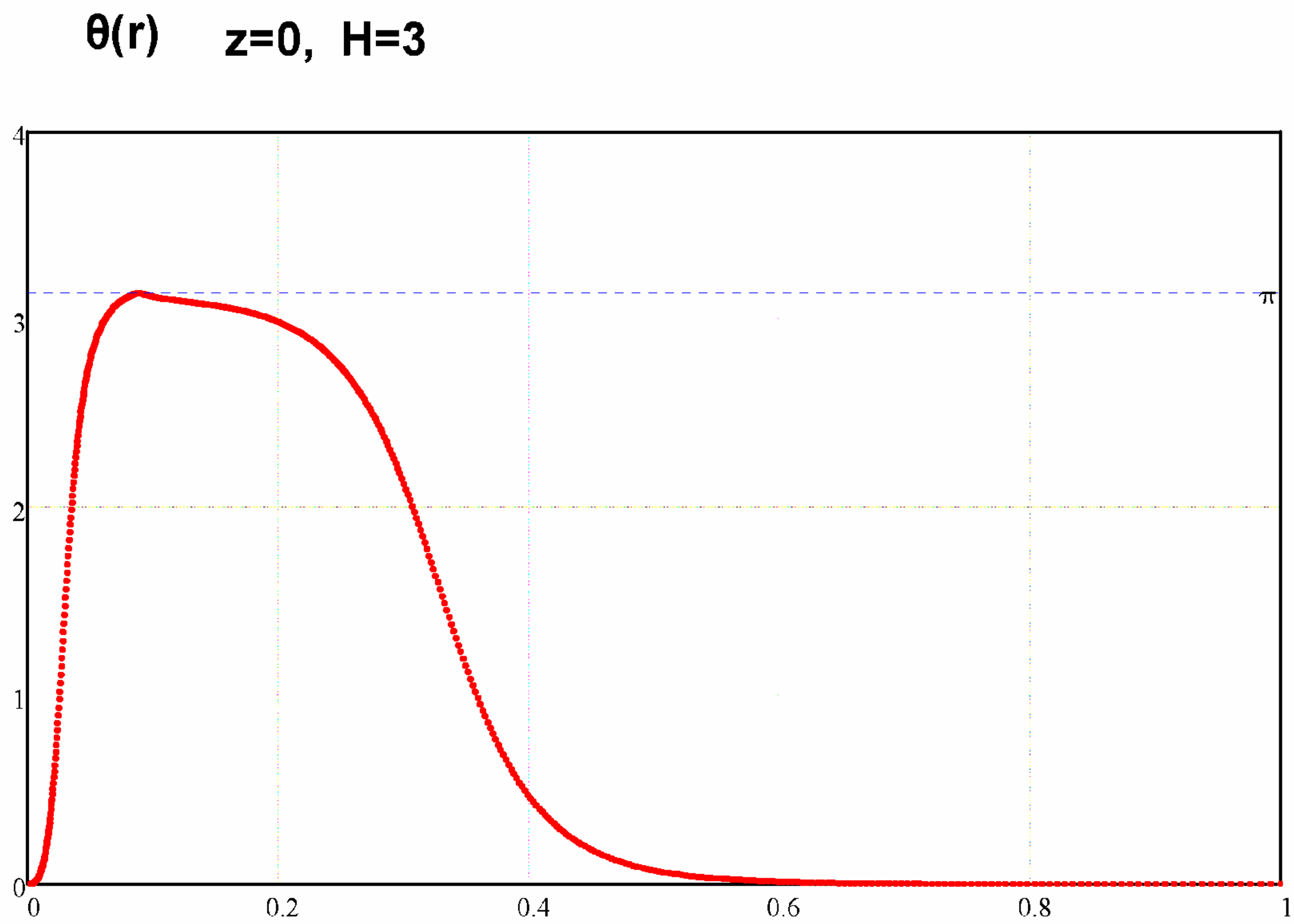
$Q = 4 \qquad g = 100 \qquad a = 1 \qquad J = 0.895$

# Линия постоянных значений углов

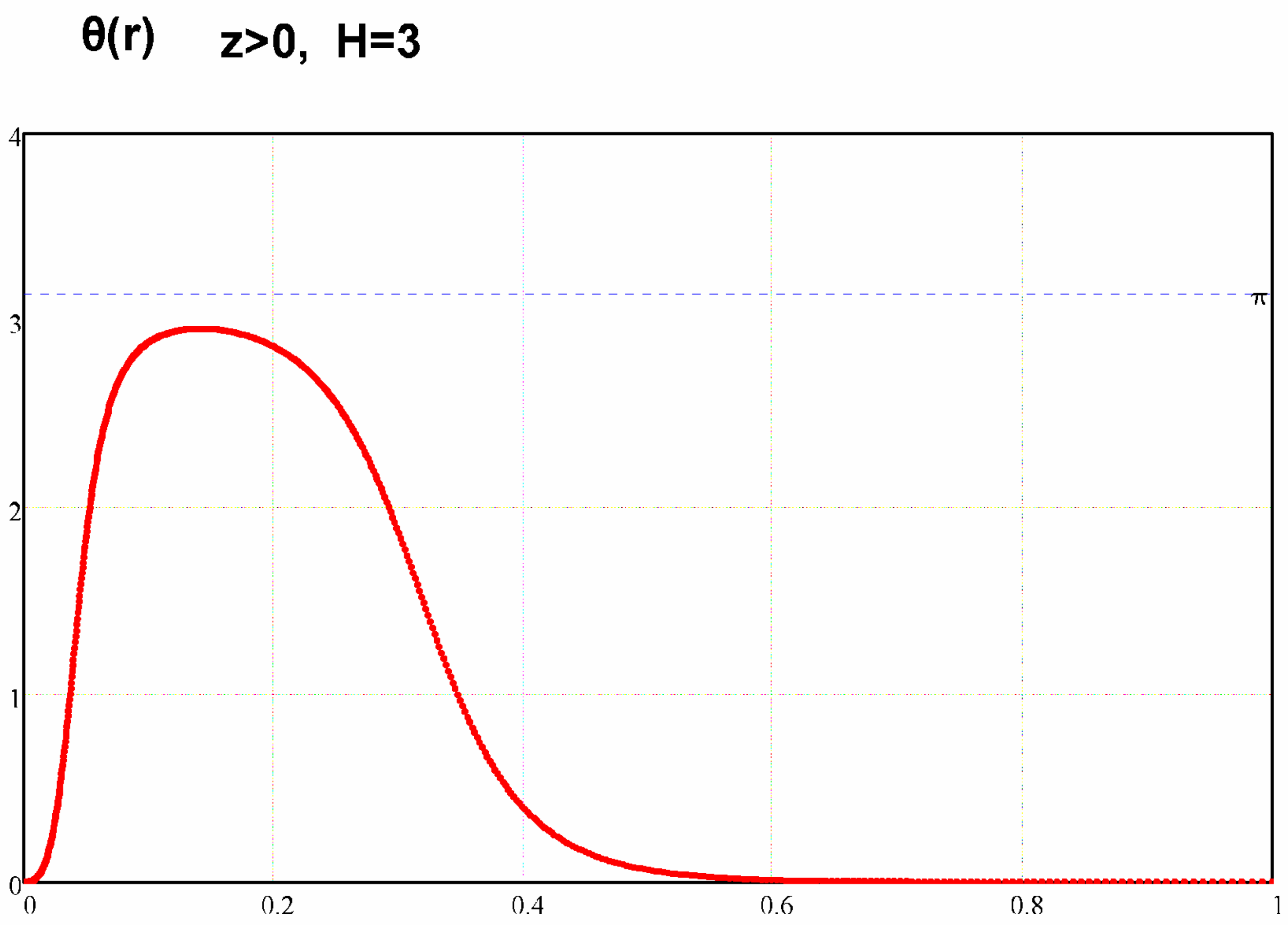
$$\omega = 0.5\,\omega_0(\omega_0 - FMR), H = 3$$



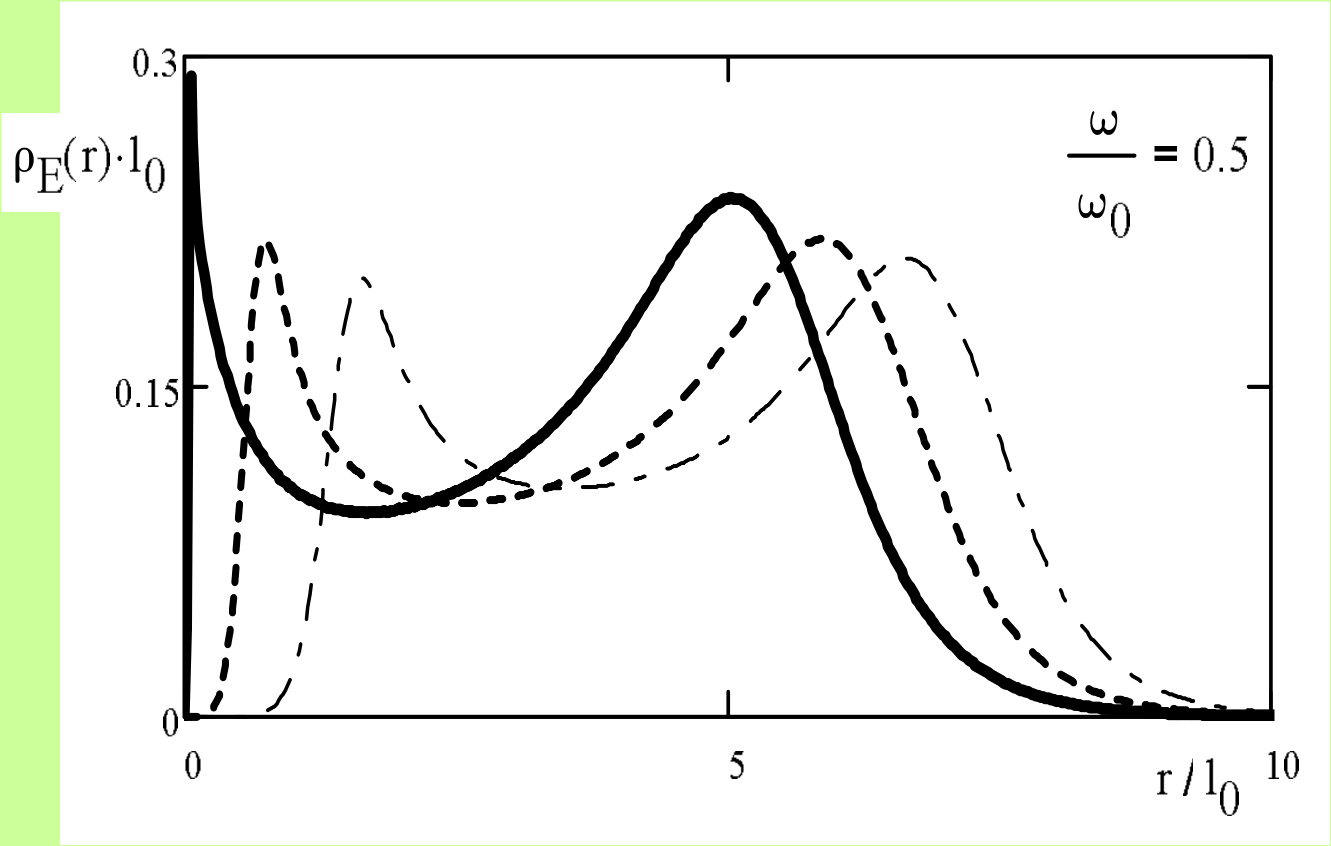
# Профиль солитона, при z=const

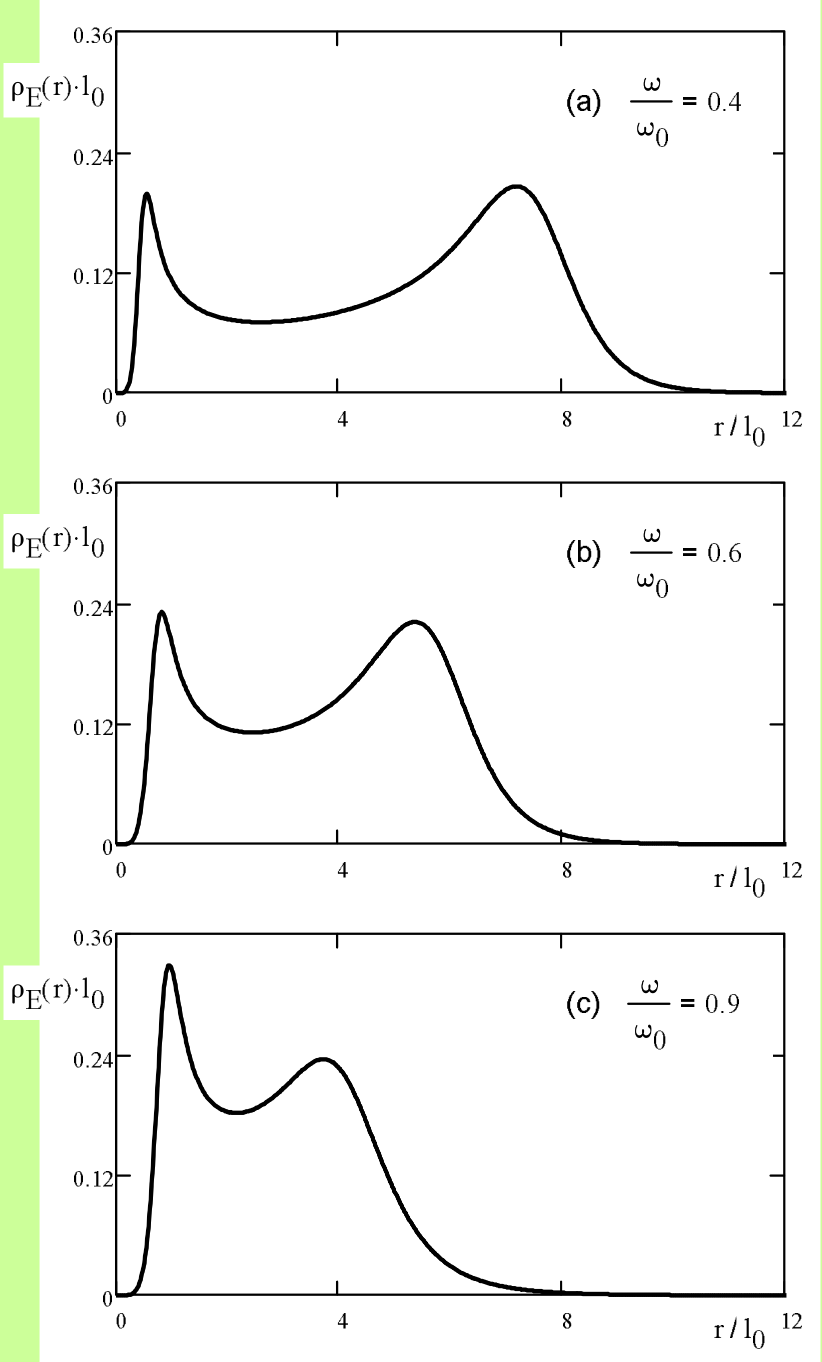


Профиль солитона, при z=const



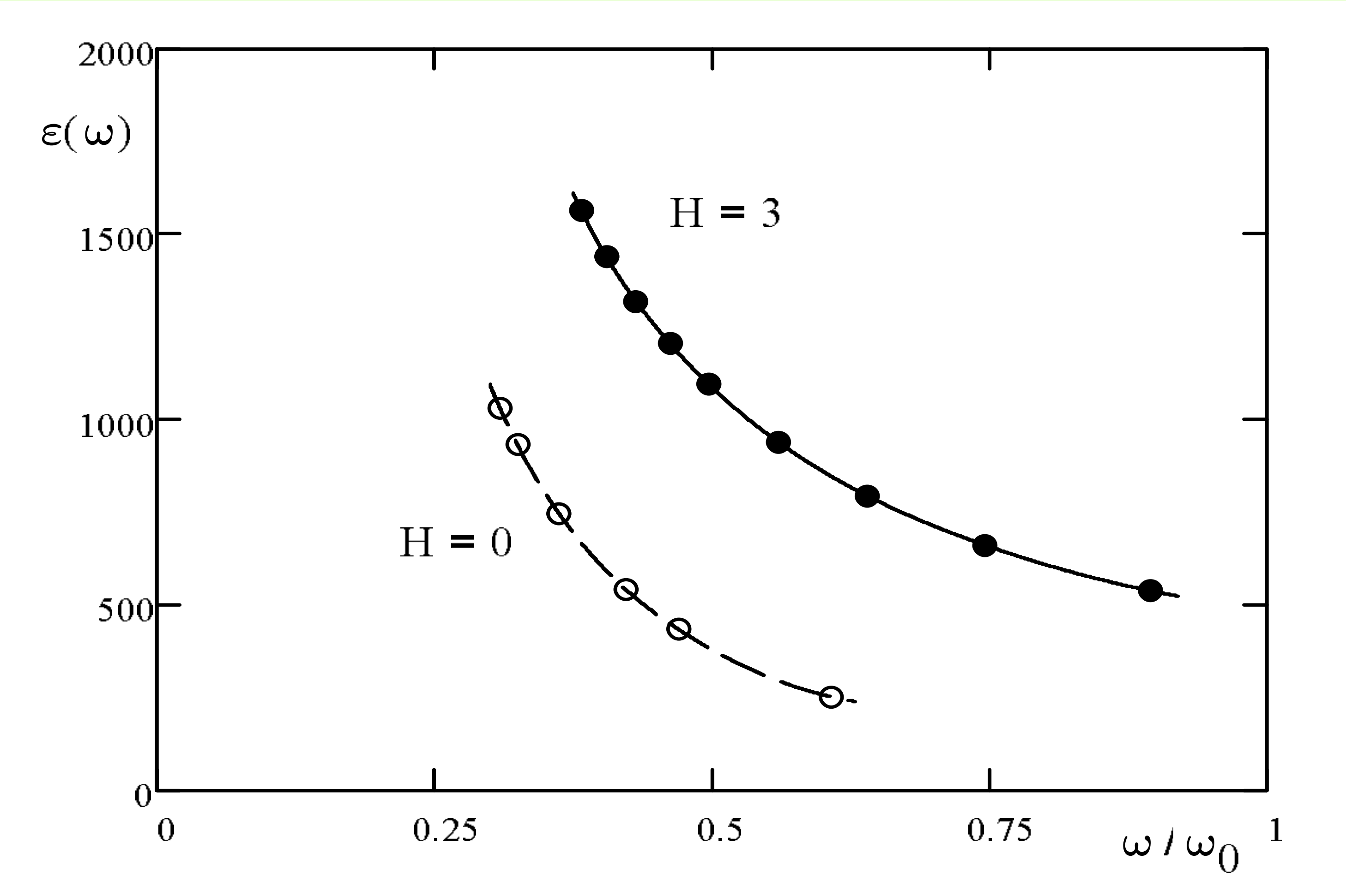
# Зависимость нормированной плотности энергии h[r] от расстояния для H=2,3,4 2-Видео





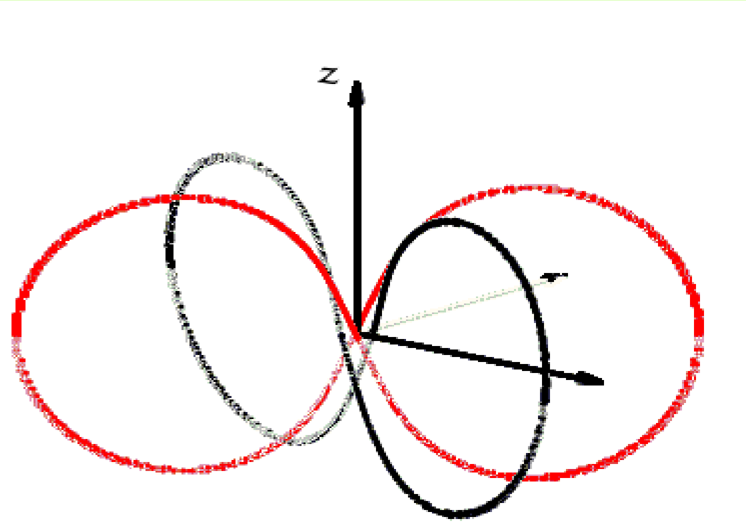

Зависимость **h[r] от частоты при H=3.**

# Уменьшение энергии солитона с увеличением частоты.



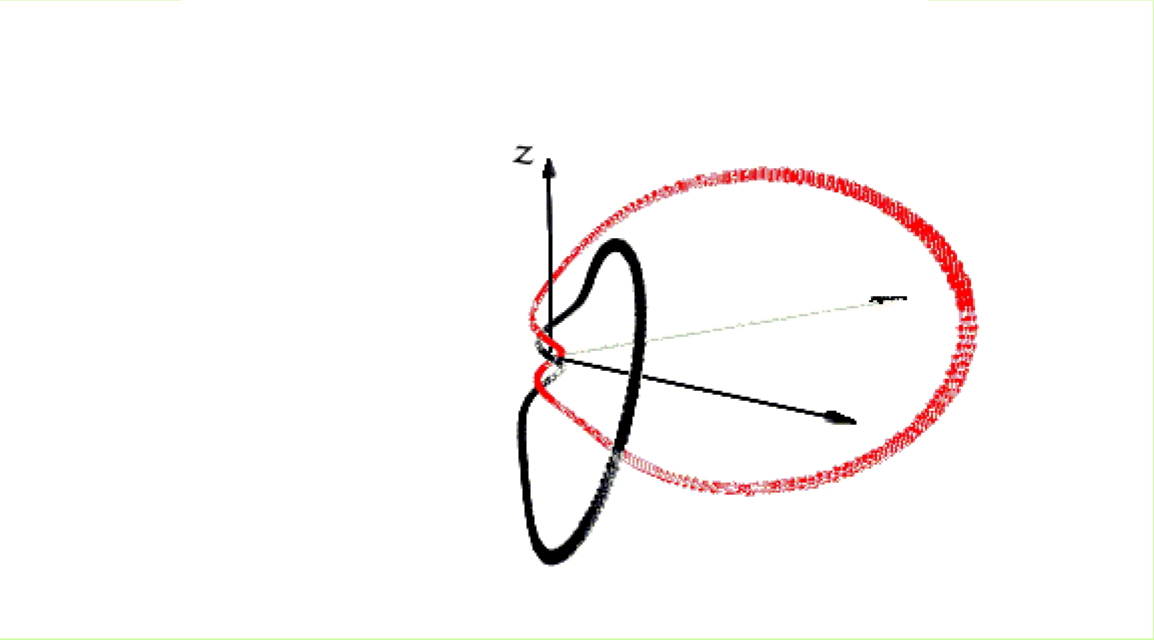
Некоторые топологические особенности солитонов с H≥2 были рассмотрены при изучении структуры стационарных солитонов.

Q=2,
T=1

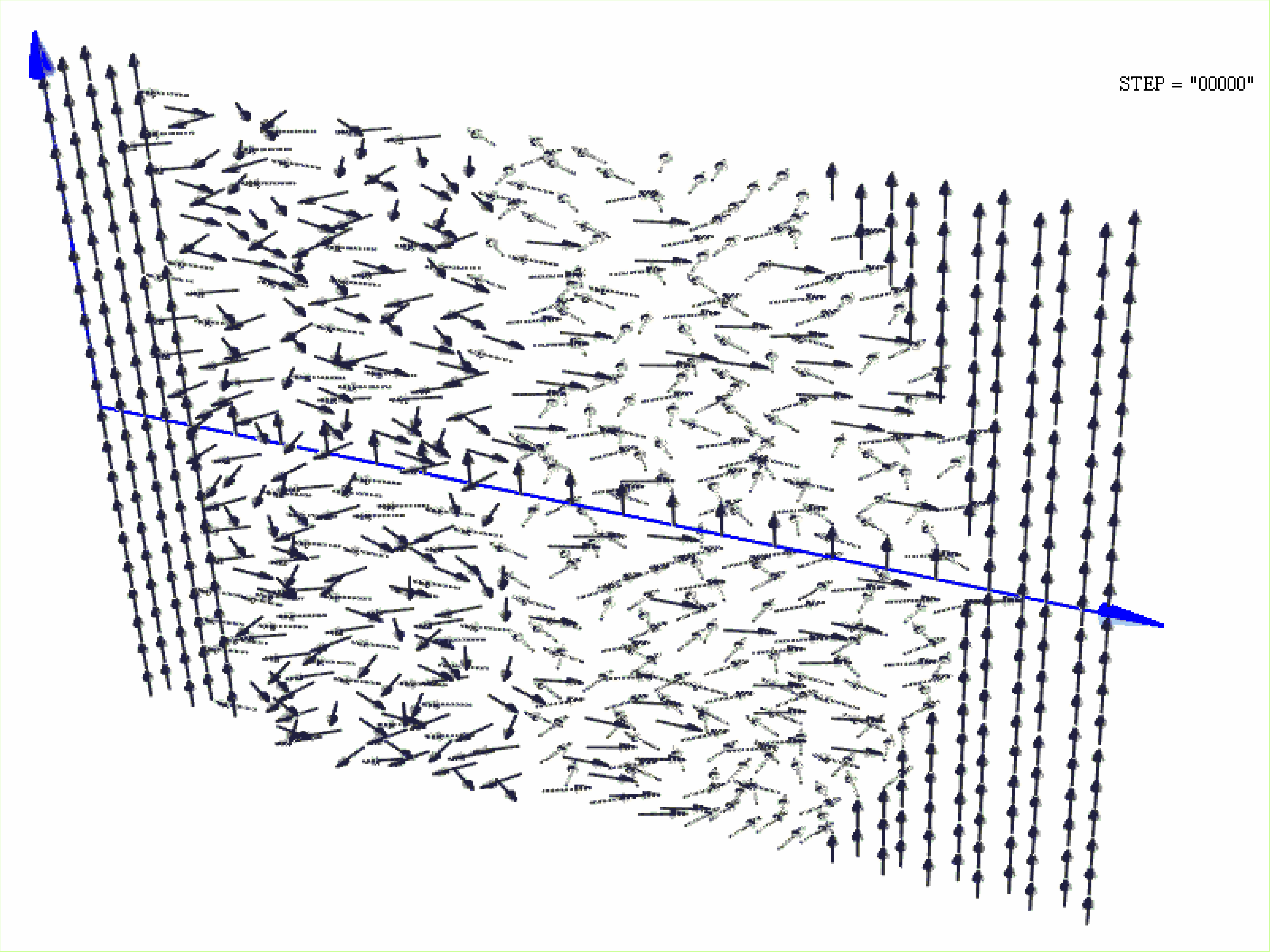


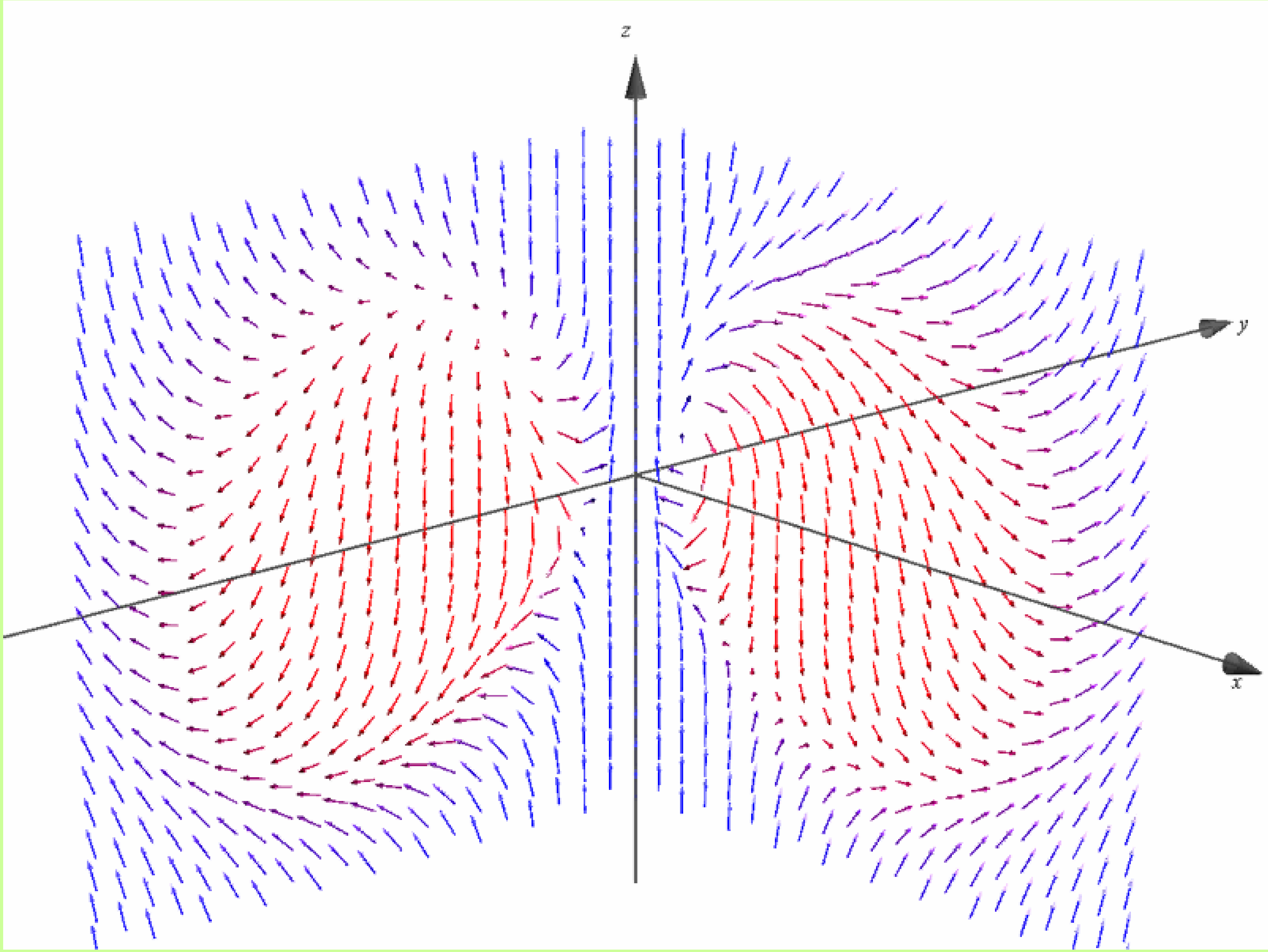

H=2.
Прообразы дважды зацеплены, обвивая тор дважды снаружи.

Q=1,
T=2




H=2.
Прообразы дважды зацеплены, обвивая тор дважды изнутри.


STEP = "00000"


z
y
x

# Соотношение между численным и аналитическим решением

- Аналитическое решение-вид кривой пробразов (неплоская), ортогональность(2 %), подстановки ???

Moving precession toroidal hopfions

- [N.R. Cooper, Phys. Rev. Lett. 82, 1554 (1999)] – announcement.

- [P. Sutcliffe, Phys. Rev. B. 76, 184439 (2007)] – attempt to solve problem by numerical methods, unsuccessful.

We seek solution, describing precession uniformly moving along anisotropy axis toroidal hopfions of the form:

$$\Phi = \omega t + Q\varphi + \phi(r, z - Vt), \quad \Theta = \theta(r, z - Vt)$$

in cylindrical coordinate system $(r, \varphi, z)$

$$Q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ T = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} sin\theta \left(\partial_r \theta \partial_z \phi - \partial_z \theta \partial_r \phi\right) drdz, \ T = 1$$

For such solitons Hopf index $H = QT = Q$

Analytical approach. Two dimensional elliptic problem:

$$\frac{1}{\alpha\gamma M_0}(\omega - V\partial_z\phi) - sin\theta cos\theta\left(\frac{Q^2}{r^2} + \frac{\beta}{\alpha} + (\partial_r\phi)^2 + (\partial_z\phi)^2\right) + \frac{1}{r}\partial_r\theta + \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha\gamma M_0}V\partial_z\theta + 2cos\theta\left(\partial_r\theta\partial_r\phi + \partial_z\theta\partial_z\phi\right) + sin\theta\left(\frac{1}{r}\partial_r\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

---

Numerical approach. Energy minimization:

$$E = \alpha {M_0}^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[(\partial_r\mathbf{n})^2 + (\partial_z\mathbf{n})^2 + \left(\frac{Q^2}{r^2} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left({n_x}^2 + {n_y}^2\right)\right]\pi r dr dz \rightarrow min$$

with constraints:

$${n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2 = 1$$

$$N = \frac{M_0}{\gamma\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(1 - n_z)2\pi r dr dz = const_1$$

$$P = -\frac{M_0}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathbf{n}\cdot\left[\partial_r\mathbf{n}\times\partial_z\mathbf{n}\right]\pi r^2 dr dz = const_2$$

Основные результаты

• В одноосном ферромагнетике могут существовать как стационарные, так и движущиеся с постоянной скоростью тороидальные топологические прецессионные солитоны.

• Структура движущегося солитона имеет принципиальные отличия:

1) Переориентация векторов намагниченности по азимутальному углу цилиндрической системы координат

2) Увеличение скорости приводит к тому, что тороидальный солитон переходит от формы “шара с отверстием вдоль оси” в сторону тонкого кольца.

We used specially made algorithm based on conjugate gradient minimization method.

Each of the calculation process takes about 4 hours of CPUs time on a standard server computer equipped with 2 Quad-core Intel Xeon/2.33GHz processors; parallel algorithm with 8 threads, 600x400 grid.

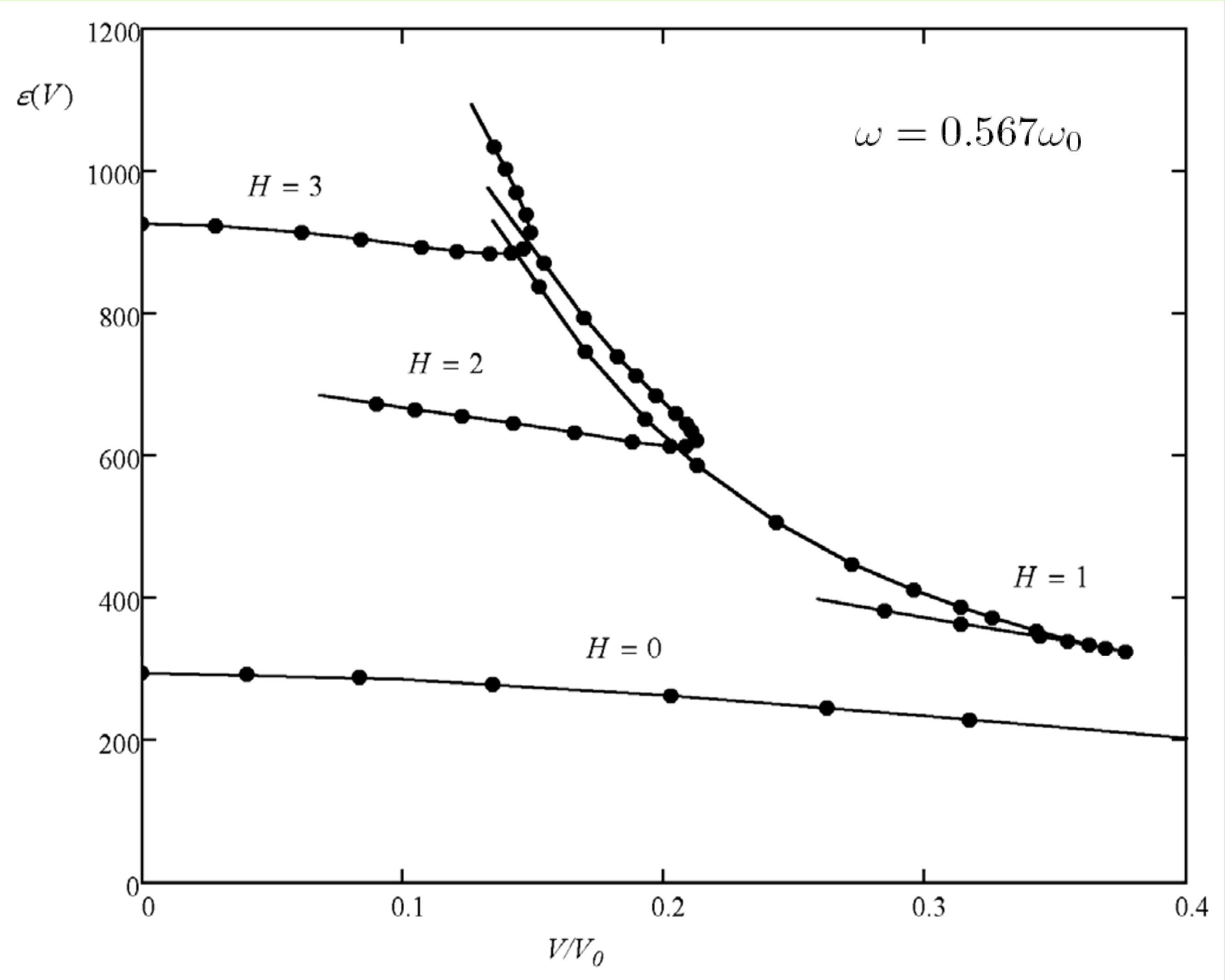
Energy versus the speed for solitons with same precession frequency.

$$\omega_0 = \gamma M_0 \beta$$

$$\varepsilon = E/(\alpha {M_0}^2 l_0)$$

$$V_0 = \gamma M_0 \sqrt{\alpha\beta}$$

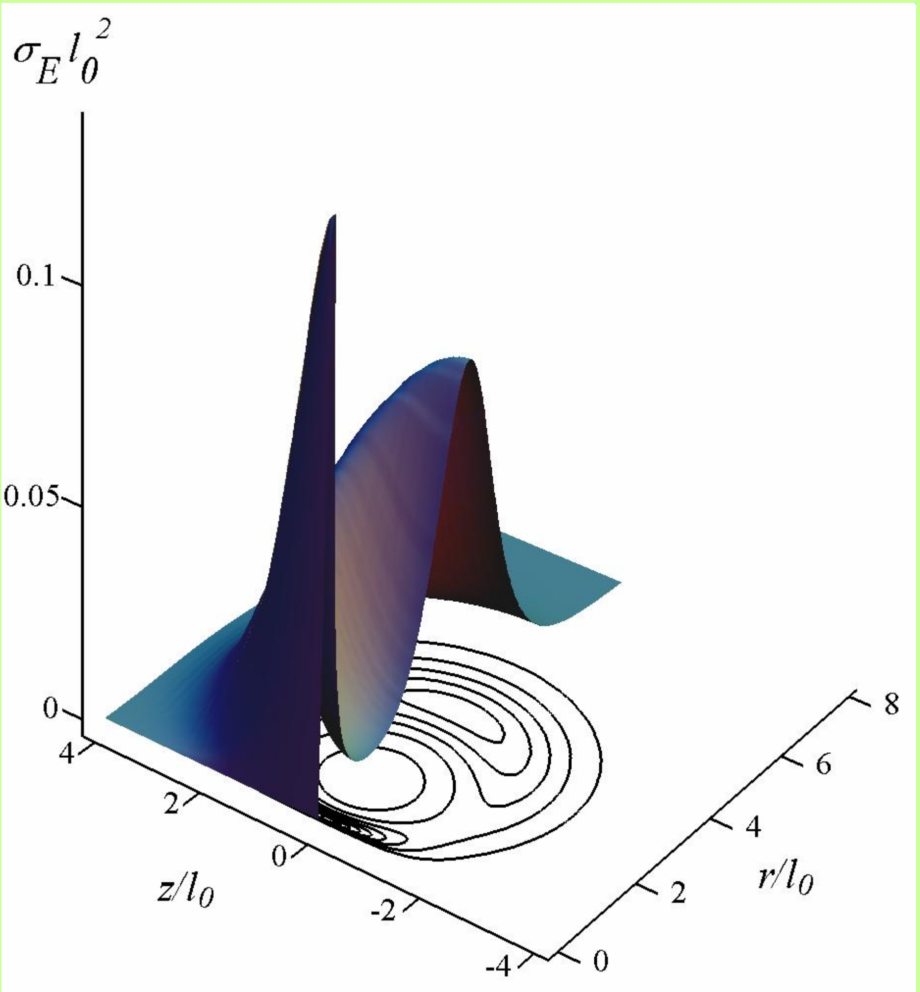
$$l_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$$



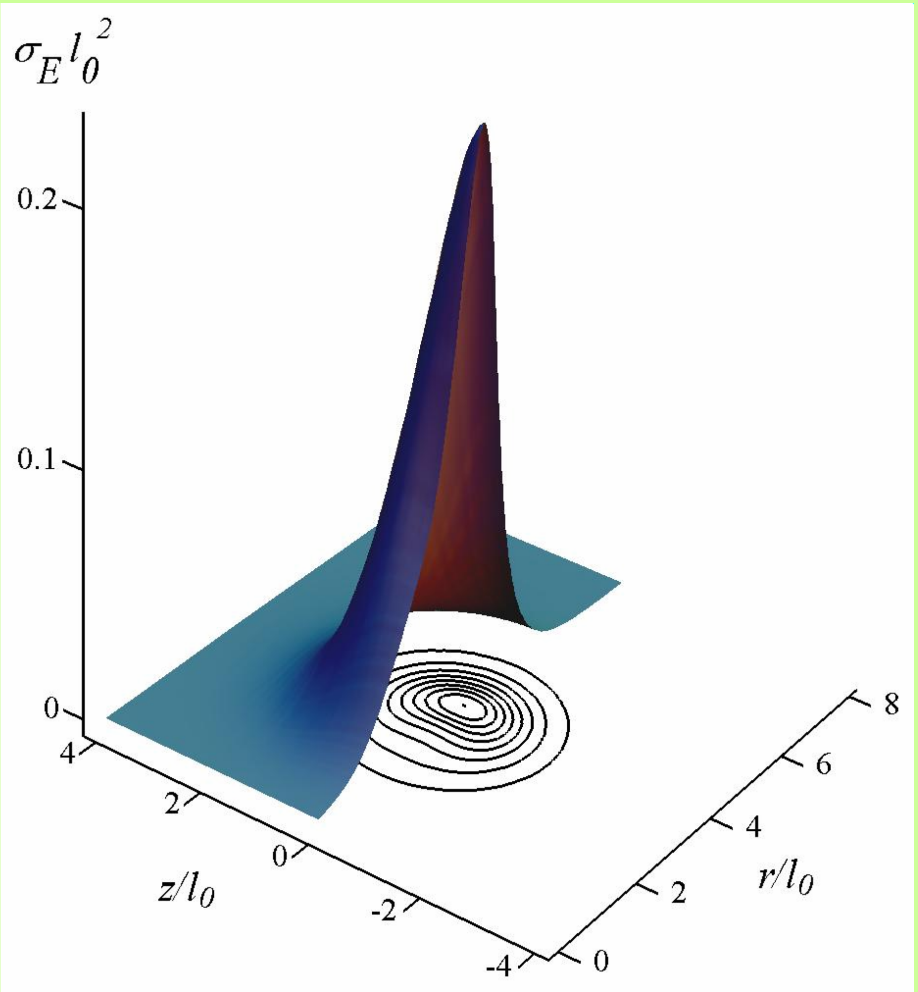
# Energy distribution in hopfions for two energy branches

$\sigma_E$ - normalized energy density in $(r,z)$ plane

Lower energy branch




Higher energy branch



Взаимодействие DM(спираль).

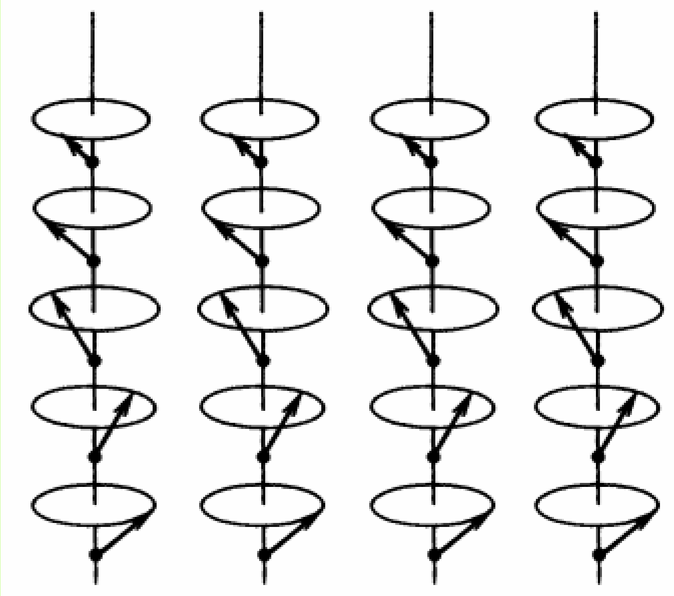
Model with additional Dzyaloshinsky-Moriya interaction energy and Zeeman energy.

$$E = \frac{\alpha}{2}\int (\partial_i \mathbf{M})^2 \, d\mathbf{r} + \frac{\beta}{2}\int ({M_x}^2 + {M_y}^2) \, d\mathbf{r} + $$
$$+ D\int \mathbf{M}\cdot(\nabla\times\mathbf{M}) \, d\mathbf{r} + H_0 \int (M_0 - M_z) \, d\mathbf{r}$$

( Cubic ferromagnet without an inversion center and with induced uniaxial anisotropy in external magnetic field $H_0$ )

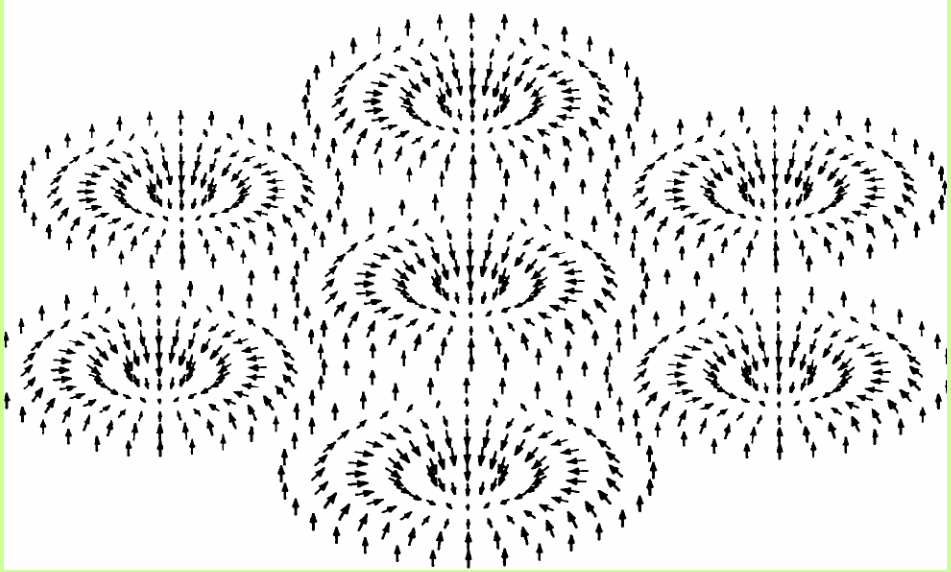
This is a incommensurate magnet – magnet where long-periodic structure can exist.

FS-spiral (3D)



Yu. A. Izyumov, Sov. Phys. Usp. 27, 845 (1984)

2D skyrmion lattice



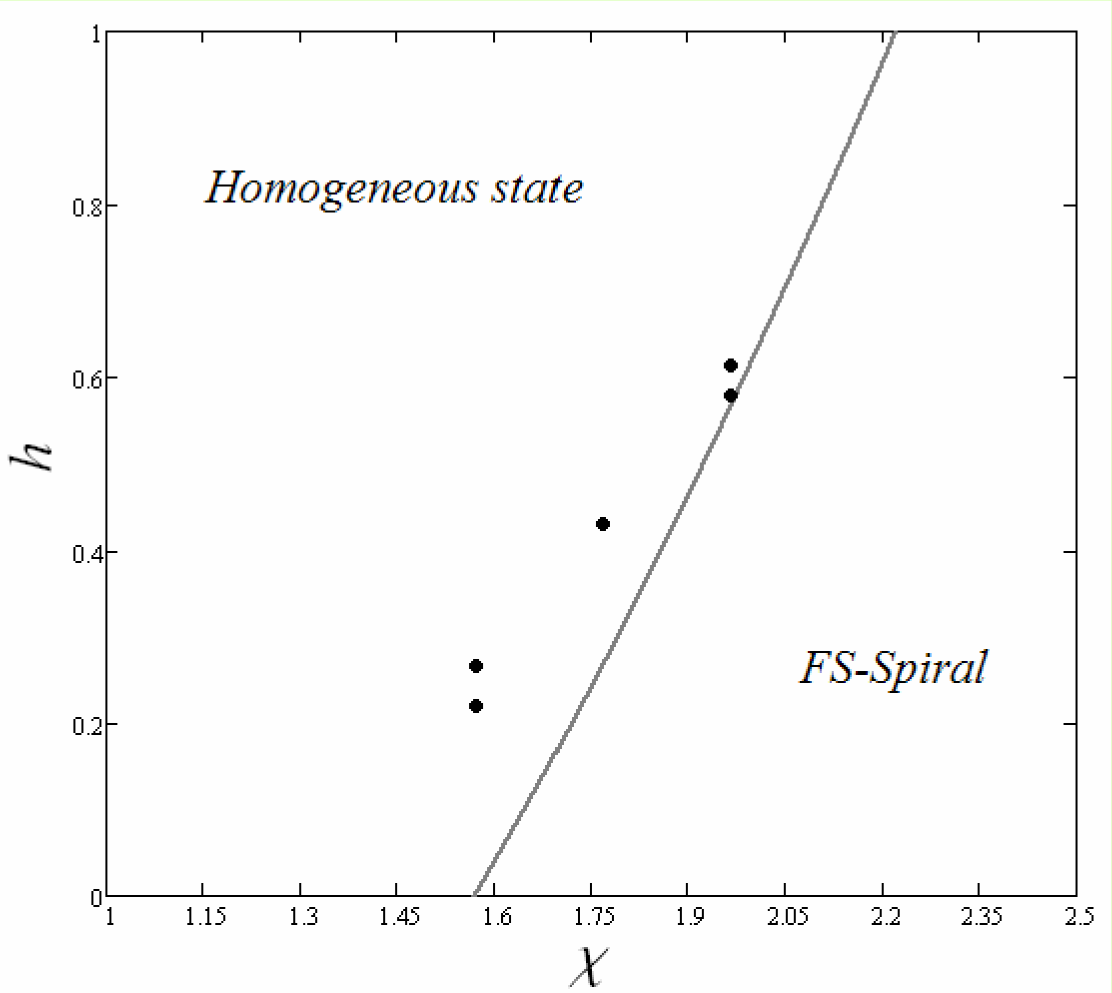
A.Bogdanov, A.Hubert, JMMM 138, 255 (1994)

- [A.Bogdanov, JETP Lett. 62, 247 (1995)] – first announcement concerning 3D solitons.

Simplified state diagram

$$\chi = \frac{\pi D}{2\sqrt{\alpha\beta}}, \quad h = \frac{H_0}{\beta M_0}$$

The points show numerical results where hopfion $|H|=1$ was found.




We have found solution, using specially made algorithm based on conjugate gradient minimization method.

При условии

$$|1 + h - (4\chi^2 / \pi^2) < 0$$

В системе реализуется FM(БС).

$$\cos\Theta = \frac{h}{(4\chi^2 / \pi^2) - 1}, \quad \Phi = kz,$$

$$k = 2\chi / (\pi l_0) = D / \alpha.$$

- Найдено и проверено асимптотическое поведение

$$\theta(r,z) \sim \frac{(1 + \gamma\sqrt{r^2 + z^2})\, r}{e^{\gamma\sqrt{r^2+z^2}}(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (|\mathbf{r}| \to \infty).$$

$$\gamma = \sqrt{1 + h - (4\chi^2/\pi^2)}/l_0$$

## **Main results**:

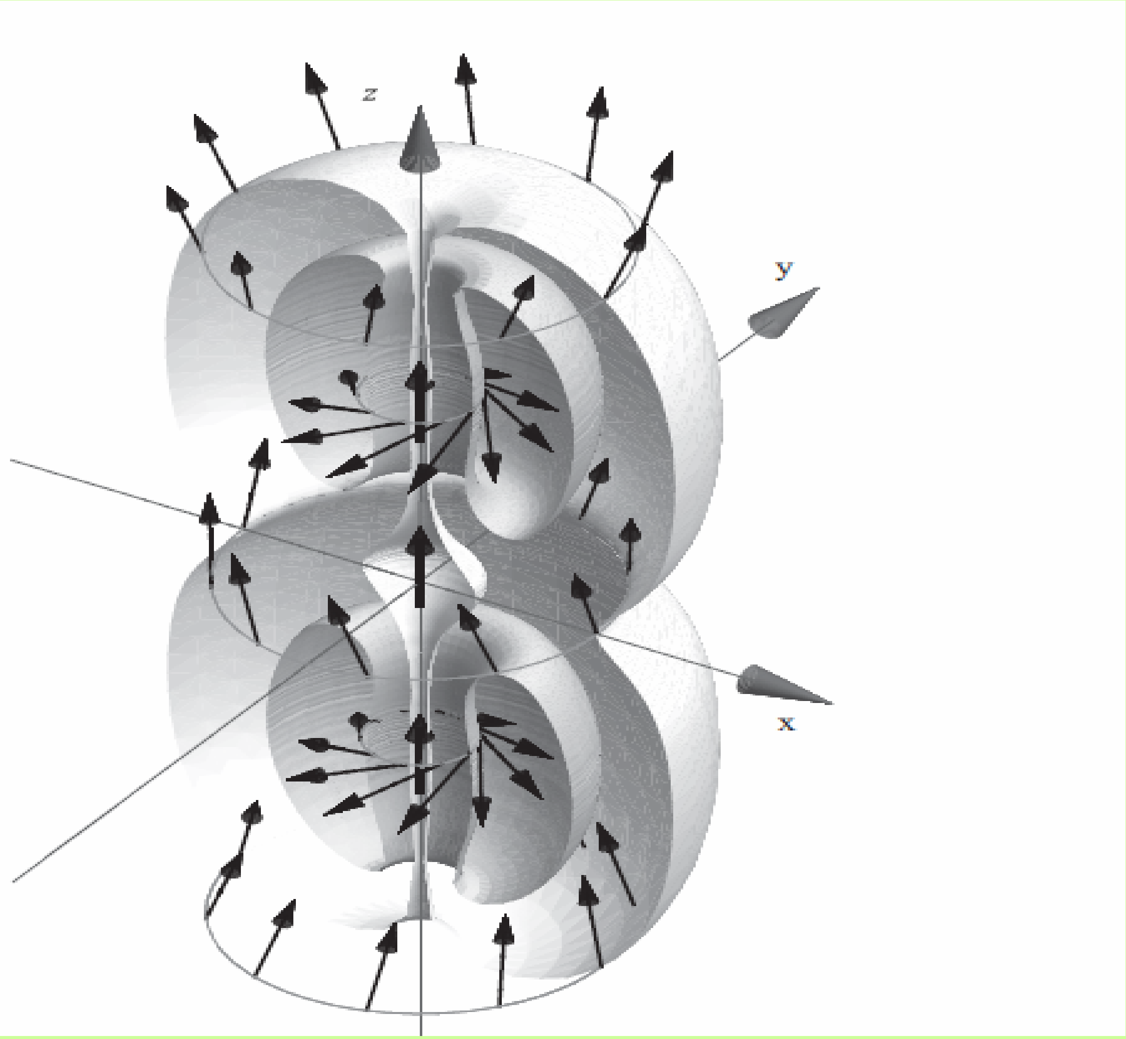
- Solutions corresponding to stationary solitons with $H=0,\pm 1$ are numerically found in model with Dzyaloshinsky-Moriya interaction.

- In case $H=0$ soliton consists of a complex of hopfion-antihopfion pairs.

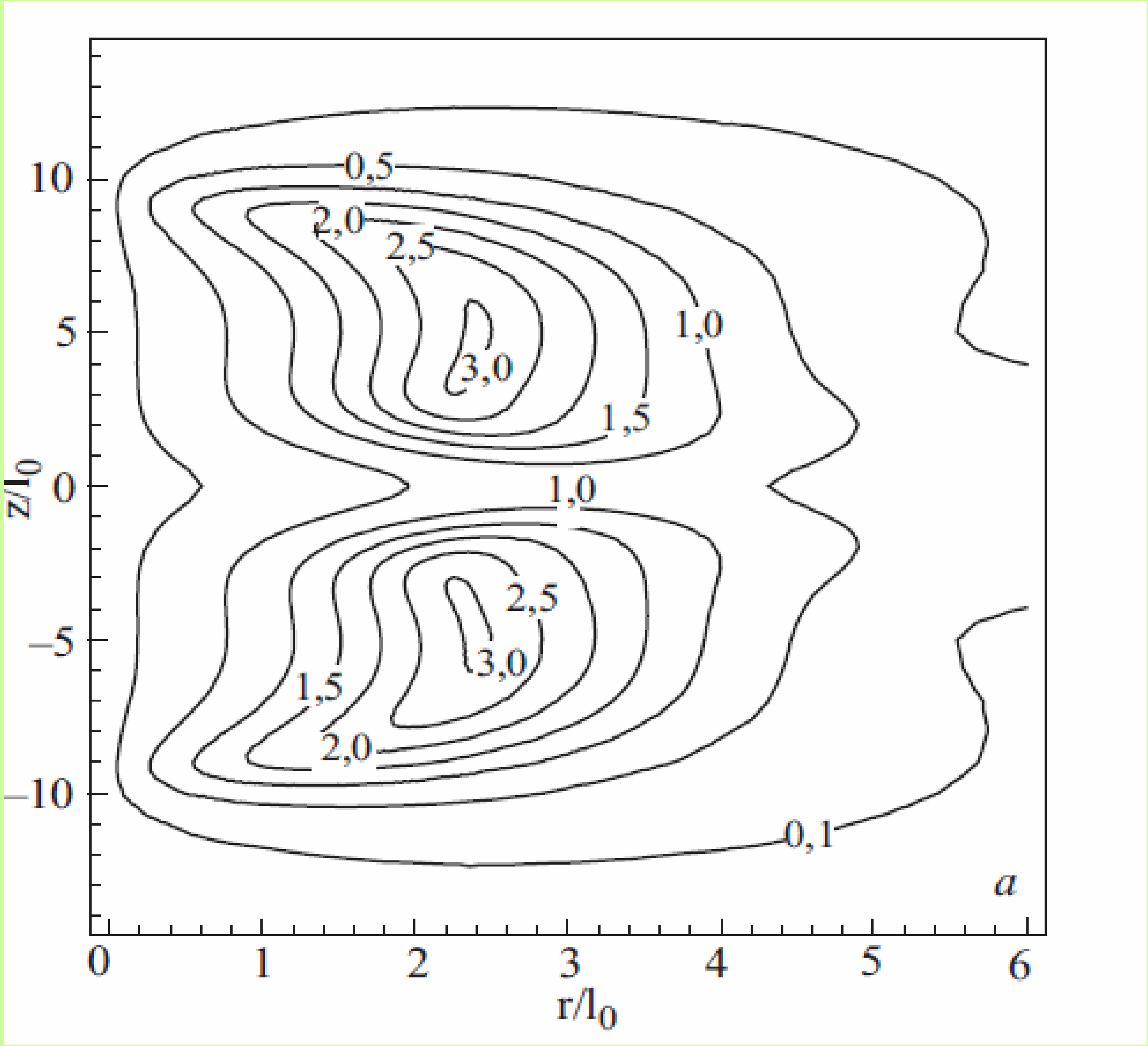
- Typical size $L \approx 30 l_0$

$H = 0, h = 0.11, \chi = 1.37, \theta = 0.3(\textit{внешний})$

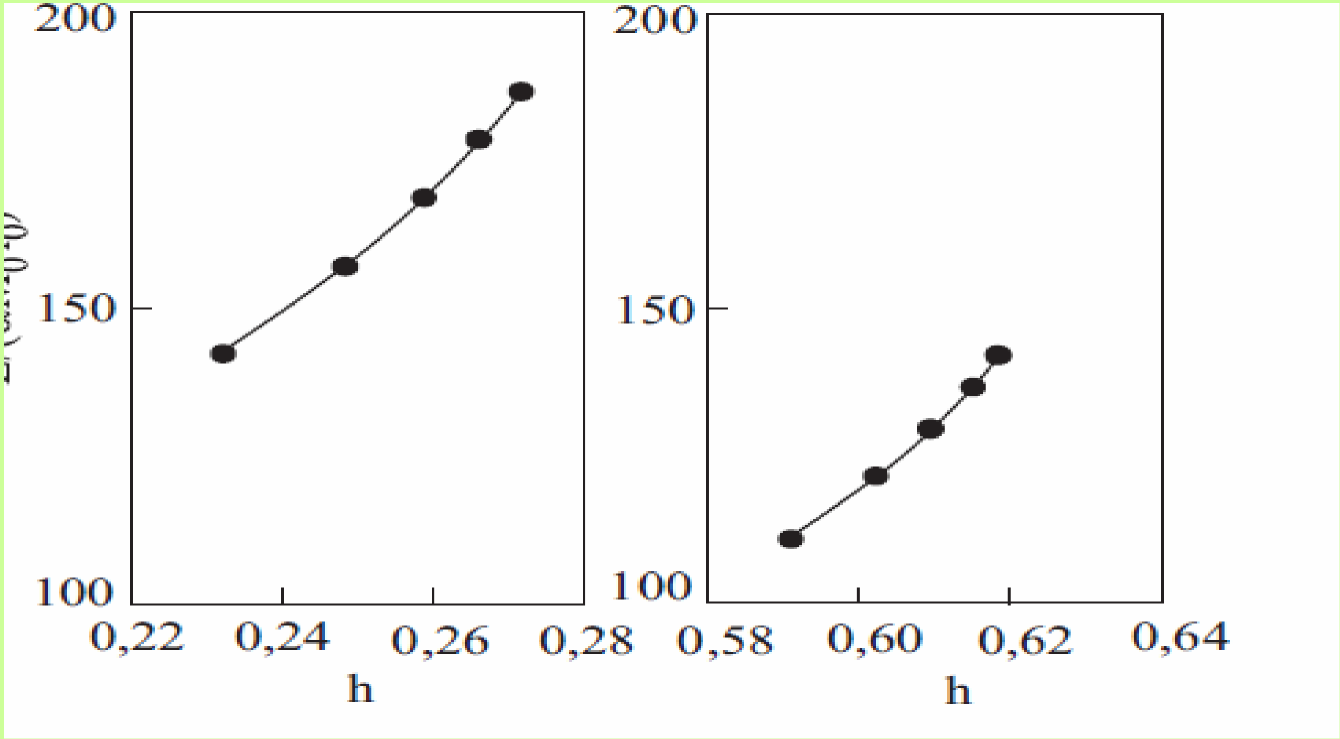
$\theta = 2(\textit{внутренний})$

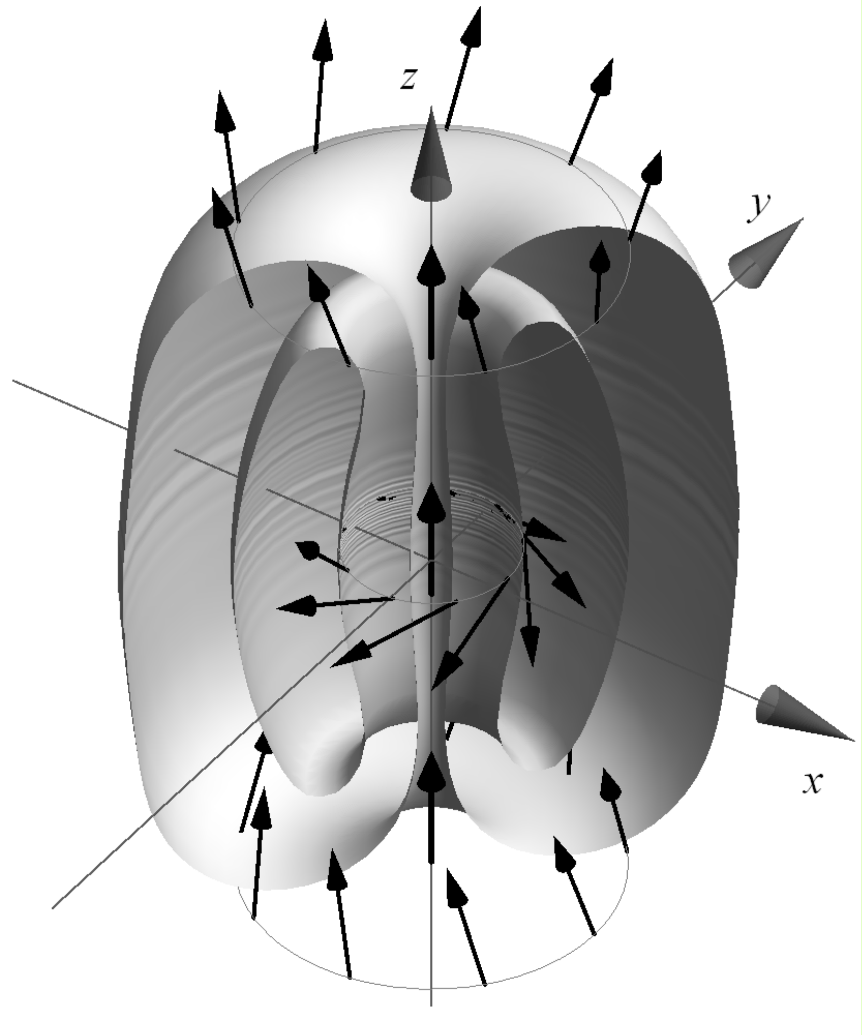


$$H = 0, \chi = 1.96, h = 0.6$$



$$E(h), \chi = 1.571 \, u \, 1.963$$






**Distribution of magnetization in computed toroidal hopfion with *H=-1***

## Why this theoretical works are important ?

Feature for information recording and storage in essentially new type devices, where information bits are distributed not on planar structures, but in full 3D volume.

3D hopfion lattice = New magnetic phase

Hopfions can propagate along anisotropy axis – this feature can be used to realize information reading and writing process.

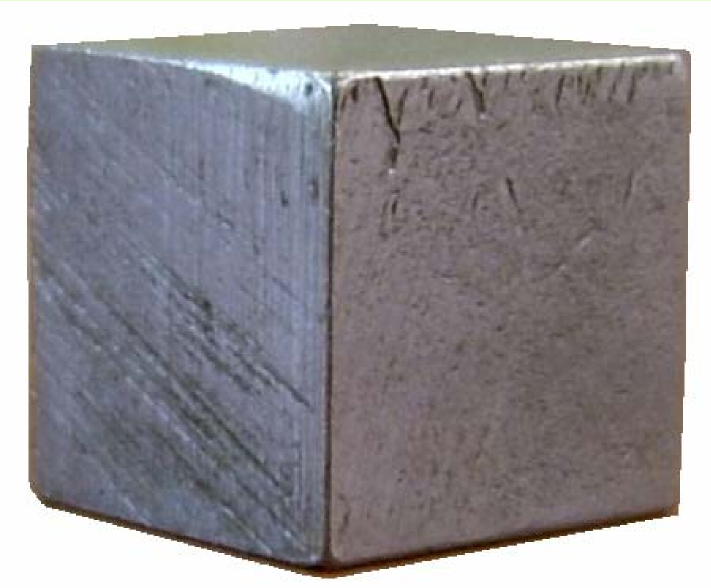
Localization area for hopfion ≈ 20 $l_0$ in each dimension. For cobalt ($^{27}$Co), for example, $l_0$=5nm . Metal cube: **10cm x 10cm x 10cm** can contain 9.9 $10^{17}$ hopfions.

If 1 hopfion equal to 1 bit of information, we have more than $10^5$ Terabytes.

In addition, each hopfion can get own topological charge *H* from list with *N* different values. And we can get

$$\boldsymbol{(N\text{-}1) \cdot 10^5}\ \textbf{Terabytes}$$

or use this feature for redundant coding.



VS

- Спасибо за внимание и терпение.